

- Mocniny a odmocniny  
Reálná čísla  
na ZŠ

Irena Budínová

# Zavedení pojmu druhá mocnina

- Pomocí izolovaných modelů:

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$

$$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$$

$$6^2 = 6 \cdot 6 = 36$$

$$4^2 =$$

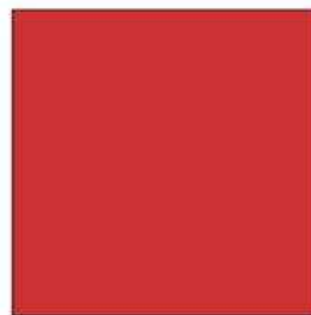
$$1^2 =$$

- Z pozorování: mocnina je jiný (zkrácený) způsob násobení.



# Zavedení pojmu druhá mocnina

- Souběžně s aritmetickým vnímáním je vhodné zavést i geometrickou představu: mocnina je chápána jako obsah čtverce



## Zobecnění pojmu

- Postupně se žáci setkávají s dalšími izolovanými modely a rovněž s vyšší mocninou:

$$(-2)^2, (-5)^2, (-7)^2, 0^2$$

$$2,3^2, 0,5^2$$

$$6^3, (-3)^3, 2^5$$

- Na některé jevy je třeba klást zvýšenou pozornost, zejména pravidla pro umocňování záporných čísel

$$(-2)^2, -2^2$$

# Mocnina – co se naučit z paměti

- Druhé mocniny přirozených čísel od 1 do 20
- Třetí mocniny přirozených čísel od 1 do 10
- Mocniny čísel 10, 100, 1000, ...
- Mocniny čísel 0,1, 0,01, 0,001, ...



# Pravidla pro počítání s mocninami

- Umocněte s využitím nějakého pravidla:

$$85^2$$

$$12\,000^2$$

$$0,016^2$$

$$119^2$$

$$(8 + 20)^2$$


$$\left(\frac{5}{7}\right)^2$$

$$(13 \cdot 6)^2$$



# Číselné výrazy

- Žáci upravují číselné výrazy, obsahující mocniny. Učí se, co sečíst (či odečíst) lze a co nelze. To pro ně bude podstatné v pozdějším učivu o algebraických výrazech.
- Vhodné je vytvářet propojení aritmetiky s geometrickým významem čísla a mocniny.
- Upravte výraz

$$3^2 + 2 + 2 \cdot 3 + 3^2$$


# Určování druhé mocniny

- **Jak zjistíme mocninu:**

- vypočítáme
- pomocí kalkulačky
- pomocí tabulek
- pomocí některého z algoritmů (vzorcem  $(a + b)^2$ , geometricky)





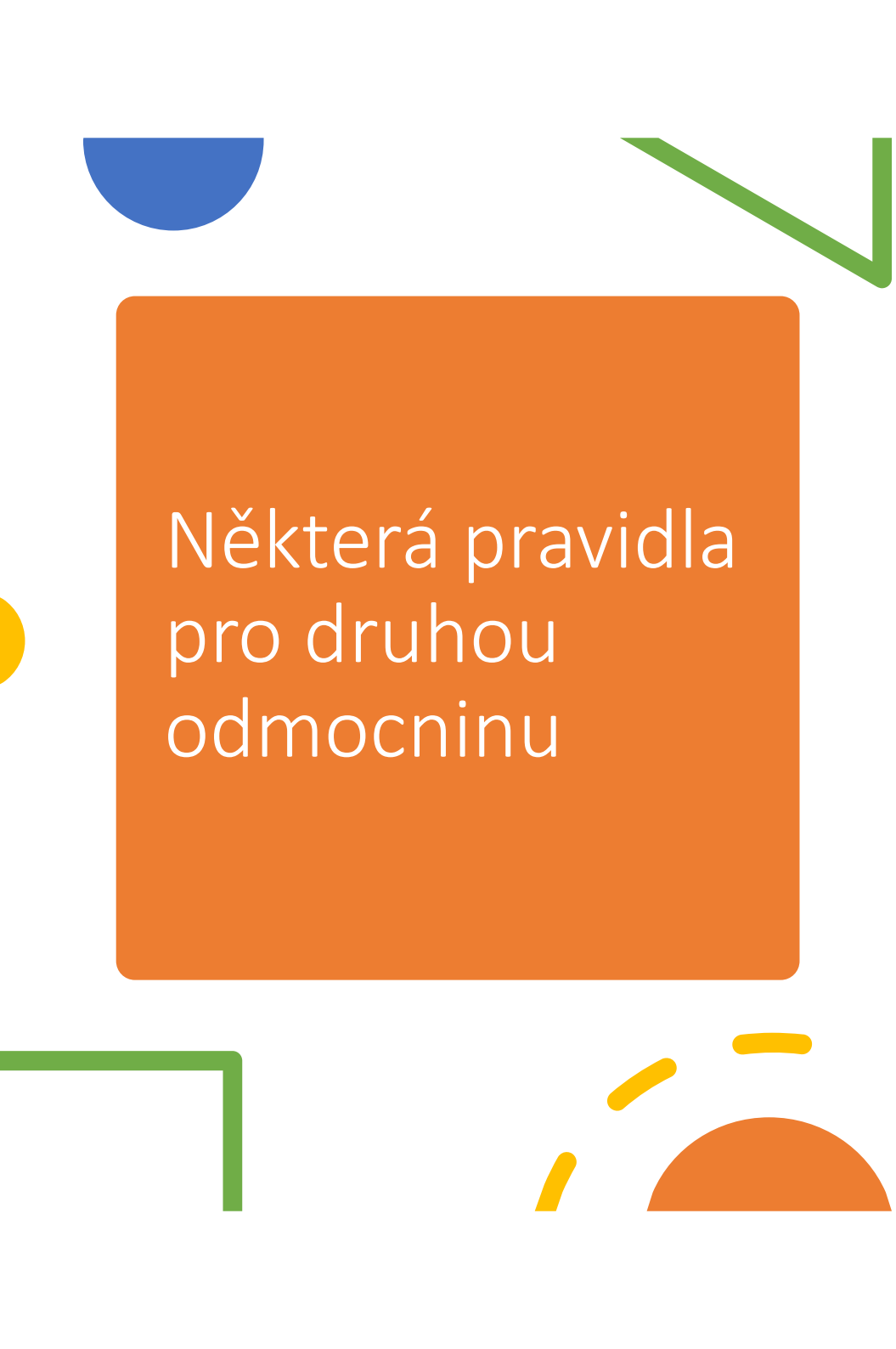
# Mocnina - definice

- Druhá mocnina reálného čísla  $a$  je nezáporné reálné číslo  $b$ , pro které platí  $b = a \cdot a$ .
- $n$ -tá mocnina reálného čísla  $a$ , kde  $n$  je přirozené číslo, je takové reálné číslo  $b$ , pro které platí  $b = a \cdot \dots \cdot a$  (počet činitelů  $a$  je roven  $n$ ). Číslo  $b$  je nezáporné pro sudá  $n$ .
- **Pojmy:** mocnina, základ, exponent (mocnitel)



# Druhá odmocnina

- Jaké jsou příčiny velké abstraktnosti pojmu odmocnina?
- **Definice:** Druhá odmocnina z nezáporného čísla  $a$  je nezáporné číslo  $b$ , pro které platí  $b^2 = a$ .
- Je důležité uvědomit si dvě věci:
  1. Druhou odmocninu vždy určujeme z **nezáporného čísla**.
  2. Druhá odmocnina je vždy **nezáporné číslo**.
- **Pojmy:** odmocnina, základ odmocniny, odmocnítko



## Některá pravidla pro druhou odmocninu

- $\sqrt{0} = 0$
- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ; neplatí  $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- $\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$ , resp.  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ,  $b \neq 0$ ;  
neplatí  $\sqrt{a - b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$
- Uvedené vlastnosti na ZŠ  
nedokazujeme, ale zavádíme pomocí  
množství konkrétních příkladů.
- Uvedených vlastností používáme  
k určování některých odmocnin, např.  
 $\sqrt{1600}$  nebo  $\sqrt{0,25}$ .



# Počítání s odmocninami

- Odmocněte bez použití kalkulačky nebo tabulek:

$$\sqrt{441}$$

$$\sqrt{1024}$$

$$\sqrt{225\,000\,000}$$

$$\sqrt{0,0121}$$

$$\sqrt{0,064}$$

$$\sqrt{42,25}$$



## Určování druhé odmocniny

- z paměti
  - pomocí kalkulačky
  - pomocí tabulek
  - pomocí některého z pravidel (viz výše)
  - Pomocí geometrického modelu
- 
- Kde se ve výuce setkáme s druhou a třetí odmocninou?



# Reálná čísla

- **Objev nesouměřitelnosti úseček** a tedy iracionality čísla  $\sqrt{2}$ : Pythagorejská škola, 6.–5. st. př. n. l.
- **Příklad:** Dokažte, že číslo  $\sqrt{2}$  není racionální.
- **Číslo  $\pi$ :** 3. st. př. n. l. Archimedes ze Syrakus, 1761 Lambert dokázal, že  $\pi$  je iracionální, 1882 Lindemann ukázal, že je navíc transcendentní číslo.
- **Eulerovo číslo  $e$ :** Objevilo se v 17. století v souvislosti s logaritmem a také v souvislosti s problematikou složeného úrokování.




# Reálná čísla na ZŠ

- Na ZŠ se žáci setkají pouze s několika iracionálními čísly -  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\pi$ . Tato čísla jsou ale často zaokrouhlována, tj.  $\sqrt{2}$  bývá nahrazována číslem 1,41 a číslo pí číslem 3,14.
- Absence poznatků o iracionálních číslech se projeví v učivu na SŠ a VŠ.
- **S čím se žáci mohou setkat na ZŠ:**
  - odvození hodnoty pí
  - interpolace hodnoty  $\sqrt{2}$
  - zakreslování některých iracionálních čísel na číselnou osu



# Nekonečno

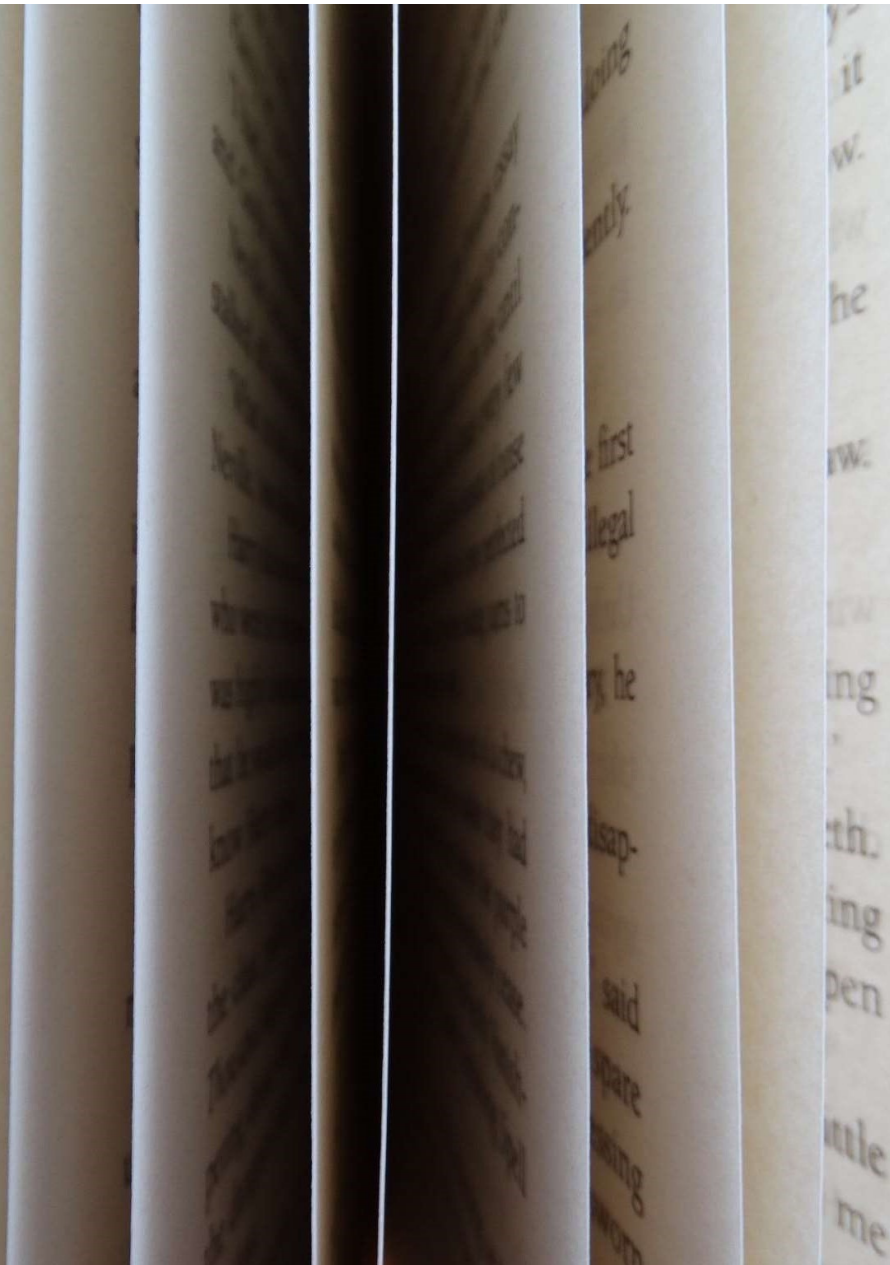
- 
- 2. pol. 19. st. – Georg Cantor: problematika množin se stejnou mohutností
  - **Nekonečná spočetná množina:** množina všech přirozených čísel, lichých čísel, sudých čísel. Jak je to s množinami  $\mathbb{Z}$  a  $\mathbb{Q}$ ?
  - Množina reálných čísel – **kontinuum**.





# Nekonečno

- **Kde se setkáme s nekonečnem ve školské matematice?**
  - Přirozených čísel je nekonečně mnoho (ve smyslu vždy můžu 1 přičíst).
  - Polopřímka je nekonečně dlouhá (ve smyslu polopřímku můžu dál a dál prodlužovat, potenciální nekonečno).
  - Na SŠ paradox s Achilleem a želvou (nekonečná číselná řada, aktuální nekonečno).
  - Na SŠ v souvislosti s funkčním myšlením.



# Literatura

- Barrow, J. D.: Kniha o nekonečnu. Praha: Paseka, 2007
- Bečvář, J., Bečvářová, M.: Vývoj matematiky jako popularizační stimul. Praha: P3K, 2012
- Crilly, T.: Matematika – 50 myšlenek, které musíte znát. Praha: Slovart, 2010
- Rendl, M., Vondrová, N.: Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů. Praha: UK, 2013