LOGICKÉ SPOJKY, VÝROKY, DŮKAZ VÝČTEM

- výrok je tvrzení, kterému lze přiřadit pravdivostní hodnotu

A) Zákony logiky a filosofie

1. Nemůže platit zároveň výrok i jeho negace

   ⇒ jinak nastává kontradikce (některý z výroků má špatnou pravdivostní hodnotu)

2. Buď platí výrok nebo jeho negace, ale je vyloučena třetí možnost

3. Zákon negace negace: Negací negace dostáváme původní výrok

   $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

B) Logické spojky

$\neg A$: negace ... není pravda, že A

$A \wedge B$: konjunkce ... a současně (když) ačkoliv, a přitom

$A \vee B$: disjunkce ... nebo (aspoň 1 z výroků musí být pravdivý)

$A \veebar B$: ostrá disjunkce ... buď A, nebo B (pouze 1 z výroků musí být pravdivý)

$A \Rightarrow B$: implikace ... jestliže A, tak B (z toho plyne)
pak také

$A \Leftrightarrow B$: ekvivalence ... A platí právě tehdy když platí B
tehdy a jen tehdy

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$A \veebar B$
1	1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1	0

A	B	C	?	A	B	C
0	0	1		1	1	1
1	0	1		0	1	1
0	1	1		1	0	1
1	1	1		0	0	1
0	0	0		1	1	0
1	0	0		0	1	0
0	1	0		1	0	0
1	1	0		0	0	0

$\underbrace{A}_{\text{předpoklad}} \Rightarrow \underbrace{B}_{\text{důsledek}}$

A	B	$A \Rightarrow B$
1	0	0

→ z pravdivého předpokladu máme nesmysl = lež

① Ve třídě je 60 studentů

¬: • Není pravda, že třída má 60 -||-.
• Ve třídě je nejvíce 59 -||- nebo alespoň 61 -||-.

• Ve třídě je jiný počet studentů než 60.

Zítra vstanu a uvařím čaj

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ ¬: Zítra nevstanu nebo neuvařím čaj

Budu doma nebo ~~budu v obchodě~~ ti zavolám

$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ ¬: Nebudu doma a ~~nebudu v obchodě~~ nezavolám.

Budu doma nebo nebudu v obchodě

$\neg(A \veebar B) \Leftrightarrow A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \Leftrightarrow \neg B$

¬: Budu doma právě tehdy když budu v obchodě

Jestliže bude pršet, pak si vezmu deštník

$A \Rightarrow B$

$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$

VĚTA: $A \Rightarrow B$
je logicky ekvivalentní s výrokem $\neg A \wedge B$

Dva výroky jsou ekvivalentní pokud mají ve všech případech stejnou hodnotu

ZÁKLADNÍ KATEGORIE PŘI TVOŘENÍ MATEMATIKY

- **matematická definice** je přesné vymezení pojmu, z něhož je patrno, které objekty toto vymezení splňují a které ne
- **axiom** je tvrzení o vlastnostech pojmů či o vztazích mezi nimi, které se nedokazuje, je všeobecně pravdivé
- **matematická věta** je tvrzení o pojmech, které dokazujeme pomocí axiomů, definic a vět dokázaných dříve

$V(x)$ ... výroková funkce s proměnnou x (forma) — je to výraz, který sám sebou není výrokem, neznáme hodnotu x, nemůžeme nastavit pravdivost

$\forall$ ... pro každé

$\exists$ ... existuje; $\exists!$ ... existuje právě jedno; $\nexists$ neexistuje

: (dvojtečka) ... tak, platí!

$\in$ ... patří do, je prvkem

$\cap$ ... průnik

$\cup$ ... sjednocení

nejvýše n ... je .. $(n>1)$

alespoň $(n+1)$ ... je ...

univerzální výrok

$\forall x \in N : \underbrace{x > 0}_{\text{samotné není výrok}}$

vesmír - N

CVIČENÍ:

① Zůstanu doma když nebude sněžit. $D \wedge \neg S$ ⇒ platí současně

Z.. bude zima
S.. bude sněžit
D.. zůstanu doma

$(Z \wedge S) \Rightarrow D$ Když bude sněžit a zima zůstanu doma

② Š.. Petr hraje šachy
Č.. -||- má černé figurky
V.. Petr vyhraje

$(Š \wedge \neg Č) \Rightarrow V$ Jestliže Petr hraje šachy a nemá černé figurky pak vyhraje

Z	S	D	$Z \wedge S$	$(Z \wedge S) \Rightarrow D$
0	1	1	0	1
1	1	1	1	1
0	0	1	0	1
1	0	1	0	1
0	1	0	0	1
1	1	0	1	0
0	0	0	0	1
1	0	0	0	1

$Z \wedge S = S \wedge Z$

$S \Rightarrow Z \neq Z \Rightarrow S$

z nulového předpokladu (A) ⇒ B
nepravdivého může vyplynout cokoliv
proto ho považujeme za pravdivý

③ A... Adam přijde na přednášku
F... Filip -||-
K... Katka -||-

a) Přijde Adam ale Filip nepřijde • $A \wedge \neg F$

b) Ze studentů Adam a Filip přijde nejvýš 1 • $A \veebar F \wedge F \Rightarrow \neg A$

přijde 1. nebo 2. nebo žádný

$\neg A \vee \neg F = \neg(A \wedge F)$

• $\neg A \vee \neg F$

• $\neg(A \wedge F)$

c) Přijde aspoň 1 student • $A \vee F \vee K$

⇒ negace "aspoň jeden" je žádný

d) Nepřijde nikdo • $\neg(A \vee F \vee K)$

je den nebo je noc

tautologie: ve výsledku samé 1, výrok se někdy označuje jako T (true)

kontradikce: -||- samé 0, -||- F (false)

je den a není den

④

A	B	implikace $A \Rightarrow B$	obrácení implikace $B \Rightarrow A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$\neg A \vee B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \Leftrightarrow \neg A \vee B$

↓ logicky ekvivalentní, platí tautologie

⑤

a) Včera jsem šel nakoupit a díval jsem se na televizi. • $A \wedge B$

¬ Nešel jsem nakoupit nebo jsem se nedíval na televizi. $\neg A \vee \neg B$

b) Zítra zajedu k doktorovi nebo půjdu běhat. (aspoň 1)

¬ Zítra nezajdu –||– a nepůjdu běhat. (nenastane žádná)

c) Když bude pršet, zůstanu doma. $A \Rightarrow B$ $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$

¬ Bude pršet a nezůstanu doma. $A \wedge \neg B$

d) Číslo n je dělitelný třemi právě tehdy kdy je ciferný součet dělitelné 3

$3/n$ ¬ Číslo n je dělitelné 3 právě tehdy když není dělitelný 3 CS

↓ n je dělitel 3

$3/cs(n)$

↓ ciferný součet n je dělitelný 3

$A \Leftrightarrow B$ → výrokové formule –||– formy

$\neg A \Leftrightarrow \neg B$

$\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow A \veebar B$

$\neg(A \veebar B) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$

$\boxed{(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]}$

↓ logicky ekvivalentní

$\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [\neg(A \Rightarrow B) \vee \neg(B \Rightarrow A)] \Leftrightarrow [(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)]$

⑥ Z ... dám si zmrzlinu

Č ... dám si čokoládu

a) Dám si zmrzlinu nebo Č $Z \vee Č$ $\neg(Z \vee Č) \Leftrightarrow \neg Z \wedge \neg Č$ ✓

b) Nedám si ani Z ani Č $\neg Z \wedge \neg Č$ $\neg(\neg Z \wedge \neg Č) \Leftrightarrow Z \vee Č$ ✓

c) Jestliže Z tak už ne Č $Z \Rightarrow \neg Č$ $\neg(Z \Rightarrow \neg Č) \Leftrightarrow A \wedge B$

d) Zmrzlinu si dám, když ne Č (právě jen tehdy) $Z \Leftarrow \neg Č$, $\neg Č \Rightarrow Z$ $\neg(Z \Leftarrow \neg Č) \Leftrightarrow \neg Z \wedge \neg Č$

$\neg(\neg Č \Rightarrow Z) \Leftrightarrow \neg Č \wedge \neg Z$

DŮKAZ IMPLIKACE, DŮKAZ EKVIVALENCE

první důkaz: Důkaz logické ekvivalence dvou výrokových forem

druhý důkaz:

PŘÍMÝ DŮKAZ IMPLIKACE $A \Rightarrow B$

⇒ vycházíme z toho, že platí výrok A; na základě A a dříve dokázaných matematických vět provedeme logicky korektní úsudek U_1

⇒ poté na základě A, U_1 a dříve dokázaných vět provedeme logicky korektní úsudek U_2 .. atd až po k krocích usoudíme, že platí B

$$A \Rightarrow U_1 \Rightarrow U_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow U_k \Rightarrow B$$

- B plyne z A na základě úsudků

Příklad: $\underbrace{a, b \in \mathbb{R}}_{A} \Rightarrow \underbrace{a^2 + b^2 \geq 2ab}_{B}$

Důkaz:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$
$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$
$$(a-b)^2 \geq 0$$

↓ vždy kladné

$a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$

⇒ důkaz plyne obrácením úvah

■

Důkaz tvrzení $A \Leftrightarrow B$ je důkaz pomocí řetězcové ekvivalence

$$B \Leftrightarrow U_1 \Leftrightarrow U_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow U_k = A$$

Třetí typ: **NEPŘÍMÝ DŮKAZ IMPLIKACE $A \Rightarrow B$**

⇒ logika: $A \Rightarrow B$ je logicky ekvivalentní s formou $\neg B \Rightarrow A$

$\neg B \Rightarrow \neg A$ ... obměna implikace $A \Rightarrow B$"

Příklad: $a, b \in \mathbb{N}$: nelze krátit $\frac{a-b}{a+b}$ ⇒ nelze krátit $\frac{a}{b}$

Důkaz: $\neg B \Rightarrow \neg A$ ... nepřímý důkaz uděláme obměnu $A \Rightarrow B$, poté dokazujeme přímo

$\underbrace{\frac{a}{b} \text{ lze krátit}}_{\text{předpokládáme že to platí}} \Rightarrow \frac{a-b}{a+b}$ lze krátit

$x, y \in \mathbb{N}$

$a = x \cdot k$, $b = y \cdot k$ $\frac{a}{b} = \frac{x \cdot k}{y \cdot k}$ ⇒ lze krátit

z toho plyne:

$\frac{a-b}{a+b} = \frac{k(x-y)}{k(x+y)}$ lze krátit

□

Čtvrtý typ: DŮKAZ EKVIVALENCE $A \Leftrightarrow B$

$\Rightarrow$ dokážeme $A \Leftrightarrow B$ pomocí důkazu, že platí $A \Rightarrow B$ a současně $B \Rightarrow A$

Pátý typ: DŮKAZ výroku A SPOREM

$\Rightarrow$ předpokládáme, že platí $\neg A$ z toho usoudíme $U_1 \Rightarrow U_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow U_k$ = nepravda (rozpor)

tím pádem předpoklad že platí $\neg A$ je nepravdivý, takže A je pravda

Příklad: $\log_2 3 \notin \mathbb{Q}$

Důkaz: předpokládáme: $\log_2 3 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \log_2 3 = \frac{m}{n} \quad m,n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{\frac{m}{n}} = 3 \;/()^n \Rightarrow 2^m = 3^n$

tohle nikdy neplatí $\square$

CVIČENÍ

① Pro každé přirozené číslo platí, že je sudé:

~~[illegible]~~ $\forall x \in \mathbb{N}:$ ~~[illegible]~~ $2 \mid n$

"je dělitelné"

$\neg \quad \exists x \in \mathbb{N}: 2 \nmid n$

② Existuje alespoň 1 reálné číslo, pro které $x^2 - 4x + 7 > 0$.

$\exists x \in \mathbb{R}: x^2 - 4x + 7 > 0$

$\neg \quad \forall x \in \mathbb{R}: x^2 - 4x + 7 \leq 0$

③ $\forall x \in \mathbb{N}: x^2 \mid 2 \Rightarrow x \mid 2$ $\quad \boxed{2 \mid x}$

$\boxed{\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ \neg: \quad A \wedge \neg B \end{array}}$

$\exists x \in \mathbb{N}:$ ~~[illegible]~~

$x^2 \mid 2 \wedge x \nmid 2$

$\underbrace{2 \mid x^2 \Rightarrow 2 \mid x}$

samotný výrok není $\Rightarrow$ nevíme z jaké množiny bereme x

④

$5 \mid n$ když $n = 5 \cdot k \quad n,k \in \mathbb{N}$

$d \mid n$ když $\exists k \in \mathbb{N}: n = k \cdot d$

⑤

$\forall a,b,c \in \mathbb{N};\ a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid (b+c)$

důkaz: $\rightarrow$ přímý důkaz

předpokládáme že $a \mid b \wedge a \mid c$ platí:

$\frac{b}{a} = k \wedge \frac{c}{a} = \ell \Rightarrow b = k \cdot a \wedge c = \ell \cdot k \Rightarrow$

$\Rightarrow b + c = a(k+\ell) \Rightarrow \frac{b+c}{a} = k + \ell$

$b + c = a(k+\ell) = ak + a\ell$

$\frac{\cancel{a}(k+\ell)}{\cancel{a}} = k + \ell$

⑥

$\forall n \in \mathbb{N}: \underbrace{3 \mid (n^2+2)}_{A} \Rightarrow \underbrace{3 \nmid n}_{B}$

$\Updownarrow$

důkaz nepřímo: $\neg B \Rightarrow \neg A$

$3 \mid n \Rightarrow 3 \nmid (n^2+2)$

$n = 3k \Rightarrow n^2 + 2 = 9k^2 + 2$

je dělitel 3 ale když přičtu 2 tak se to ruší $\square$

vždy bude zbytek 2

⑦ Důkaz ekvivalence: $\forall n \in \mathbb{N}: \underbrace{2 \mid n^2}_{A} \Leftrightarrow \underbrace{2 \mid n}_{B}$

DK: $A \Rightarrow B$ ~~[illegible]~~

$\neg B \Rightarrow \neg A$

$2 \nmid n \Rightarrow 2 \nmid n^2$

$n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ není dělitelné 2 protože 1 $\square$

$B \Rightarrow A$: $2 \mid n \Rightarrow 2 \mid n^2$

$n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2$ $\quad 2 \mid 4k^2$

⑧ → Důkaz sporem!

odmocnina ze dvou není Q

$\sqrt{2} \notin Q$

DK sporem: $\sqrt{2} \in Q \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2b^2 = a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 2k \Rightarrow 2b^2 = 4k^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow b = 2l$

mají být už pokrácené ale oba mají 2 ve vzorci

$\sqrt{2} \in Q$ neplatí $\sqrt{2} \notin Q$ → platí !

□

⑨ $\forall n \in \mathbb{N}:$ $6 | n \Rightarrow 3 | n$ … 1

obrácení: $3 | n \Rightarrow 6 | n$ … 0

obměna: $3 \nmid n \Rightarrow 6 \nmid n$ … 1

negace: $\exists n \in \mathbb{N}:$ $6 | n \wedge 3 \nmid n$ … 0

⑩ $\forall a,b,c \in \mathbb{N}: a | b \wedge b | c \Rightarrow a | c$

DK přímo: $\exists k \in \mathbb{N}: b = k \cdot a \Rightarrow \exists l \in \mathbb{N}: c = a \cdot l \Rightarrow c = b \cdot l = k \cdot a \cdot l$

"je dělitelné číslem a?

ANO!

⑪ $\forall n \in \mathbb{N}: 3 | n \Leftrightarrow 3 | n^2$

DK "⇒": $3 | n \Rightarrow 3 | n^2$

$n = 3 \cdot k \Rightarrow n^2 = 9k^2 = 3 \cdot (3k^2)$ → je dělitelný 3

DK "⇐": $3 | n^2 \Rightarrow 3 | n$ nepřímo: $3 \nmid n \Rightarrow 3 \nmid n^2$

$\forall k \in \mathbb{N}: n \neq 3k \Rightarrow n = \begin{matrix} 3k+1 \\ 3k+2 \end{matrix} \Rightarrow n^2 = \begin{matrix} 9k^2+6k+1 \\ 9k^2+12k+4 \end{matrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{matrix} 3(3k^2+2k)+1 \\ 3(3k^2+4k)+1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 \nmid n^2 \\ 3 \nmid n^2 \end{matrix}$ □

desátý typ: **A ⇔ B POMOCÍ ŘETĚZCE EKVIVALENCÍ**

Příklad: $\forall x \in \mathbb{R}: x^4 + 1 \geq 2x^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \underbrace{(x^2-1)^2 \geq 0}_{\text{očividně platí}}$

šestý typ: **DŮKAZ ÚPLNOU MATEMATICKOU INDUKCÍ**

⇒ dokazujeme univerzální výrok, který platí většinou pro všechna přirozená čísla, která jsou větší nebo rovna přirozenému číslu n_0:

$\forall n \geq n_0 : V(n)$

Platnost univerzálního výroku dokazujeme:

a) Dokážeme platnost výroku $V(n_0)$

b) Dokážeme platnost implikace $V(n) \Rightarrow V(n+1)$

} Pokud platí dosáhneme platnost $V(n)$ na $\forall n \in \mathbb{N}$

INDUKTIVNÍ ZOBECŇOVÁNÍ

1) $1+2+\cdots+99+100 = 101 \cdot 50 = 5050$

(popisujeme to a všechny mají pár hodnotu 101 a je tam 50 párů)

$1+2+\cdots+150+151 = 151 \cdot 75 + 151 =$
$=$ výsledek

ÚPLNÁ MATEMATICKÁ INDUKCE

Příklad:

1) $1+2+\cdots n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

KROK 1: $n=1: n = 1 = 1$

$n=2: 2+1 = \frac{2 \cdot 3}{2}$

$n=3: 1+2+3 = \frac{3 \cdot 4}{2}$

KROK 2: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}: V(n) \Rightarrow V(n+1)}$

$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow 1+2+3+\cdots+n+n+1 = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$

DK přímo: předpokládáme, že platí ⇒

$L = \underbrace{1+2+\cdots+n}_{\frac{n(n+1)}{2}} + n+1 \overset{PP}{\Rightarrow} \frac{n(n+1)}{2} + n+1 \Rightarrow (n+1) \cdot \left[\frac{n}{2}+1\right] \Rightarrow \frac{(n+1)(n+2)}{2} = P$

□

sedmý typ: **DŮKAZ EXISTENCE, NEBO PROTIPŘÍKLAD**

7A 7B

7A: Důkaz existence uvedením příkladu či konstrukcí ... Uvedeme důkaz toho, že jistá struktura existuje, prostě tak, že ji sestrojíme

$\exists$ objekt určitých vlastností

7B: Vyvrácení univerzální platnosti pomocí protipříkladu

Příklad: Pomocí 2 a 5 korun lze v obálce zaplatit jakoukoliv sumu $n \geq 2$ Kč:

DK (7B) neplatí pro $n = 3$ Kč $\square$

Úprava: ——— " ——— $n \geq 4$ Kč.

DK mat. indukcí:

krok 1: $n = 4$ ②② $n = 6$ ②②②

krok 2: $V(n) \Rightarrow V(n+1)$

zbytečně složité :)

devátý důkaz: **DŮKAZ DEDUKCÍ**

$\Rightarrow$ z dílčích částí výroku vyvodíme jeho platnost (převkčený typ $\frac{2}{4}$ / 10)

DK dedukcí: $n = 4, 6, 8, 12$ .. zaplatíme dvoukorunami

$n = 5, 7, 9, 11, 13 \ldots$ 1 pětikoruna < sumu 12 a zbytek 2koruny

Příklad: Pomocí 12 zápalek stejné délky lze sestavit 4 rovnostranné $\triangle$:

DK 7A: $\triangle \triangle \triangle \triangle$

Pomocí 6 zápalek ——— " ———.

CVIČENÍ 3:

$A \Rightarrow B$ obměna $\neg B \Rightarrow \neg A$

① $\forall n \in \mathbb{N}: \underbrace{3 \mid n}_{A} \rightarrow \underbrace{3 \mid n^2}_{B}$

- DK přímo:

předpokládejme že platí $A \Rightarrow n = 3 \cdot k, k \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2 = 9k^2 = 3(3k^2) \Rightarrow B$

$\square$

- DK sporem: $A \Rightarrow B$

$\neg$ $A \wedge \neg B$

$3 \mid n \wedge 3 \nmid n^2$ spor $\Rightarrow$ negace implikace $A \wedge \neg B$ neplatí, tuže $A \Rightarrow B$ platí

předpoklad $n = 3k \Rightarrow n^2 = 3(3k)$ $\square$

② $1^3 + 2 \cdot 1 = 3$

$2^3 + 2 \cdot 2 = 12$

$3^3 + 2 \cdot 3 = 33$

$\vdots$

$\underbrace{n^3 + 2(n) \stackrel{?}{=}}_{\text{induktivní zkoumání a ~~stanovení~~ stanovení hypotézy}}$

Je výsledek vzorce násobek 3?

$\forall n \in \mathbb{N}: 3 \mid (n^3 + 2n)$

- DK dedukcí:

$n^3 + 2n = n(n^2 + 2)$

$n = 3 \cdot k \Rightarrow 27k^3 + 6k \Rightarrow 3k(9k^2 + 2)$

je to dělitelné 3.

$n = 3k + 1 \Rightarrow n^3 + 2n \Rightarrow (3k+1)(9k^2 + 6k + 1 + 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow (3k+1)(9k^2 + 6k + 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow (3k+1) 3 (3k^2 + 2k + 1)$

$n = 3k + 2 \Rightarrow (3k+2)(9k^2 + 12k + 4 + 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow (3k+2) 3 (9k^2 + 4k + 2)$

$\square$

zbytky dělením 3 jsou 0, 1, 2 proto $n+1/2$ zkoumáme

- DK matematickou indukcí: $\forall n \in \mathbb{N}: 3 \mid (n^3 + 2n)$

KROK 1:

$n = 1$ $3 \mid 3$

$n = 2$ $3 \mid 12$

$n = 3$ $3 \mid 33$ (psáno $33 \mid 12$)

KROK 2: $V(n) \Rightarrow V(n+1)$ dokazujeme přímo

$\forall n \in \mathbb{N}: 3 \mid (n^3 + 2n) \Rightarrow 3 \mid [(n+1)^3 + 2(n+1)]$

předpokládáme že platí $A \Rightarrow n^3 + 2n = 3k \Rightarrow \underbrace{27k^3 + 27k^2 + 15k + 3}_{\text{vše je dělitelné 3}}$

$(n+1)^3 + 2n + 2 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 =$ ~~[illegible]~~

$\underbrace{n^2 + 2n}_{3 \mid n} + \underbrace{3(n^2 + n + 1)}_{3 \mid n} = n^3 + 3n^2 + 5n + 3$

$\square$

(5)

$1^3+2^3+3^3=36$
$2^3+3^3+4^3=99$
$3^3+4^3+5^3=216$

$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3 \overset{?}{=}$

- DK dedukcí: $\forall n\in N: 9 \mid [n^3+(n+1)^3+(n+2)^3]$

$n^3+n^3+3n^2+3n+1+n^3+6n^2+12n+8=$

$=3n^3+9n^2+15n+9=\underbrace{3(n^3+3n^2+5n+3)}$ je dělitelné 3, ale my chceme 9

$3(n^3+5n)+9(n^2+1)=\underbrace{9(n^2+1)}_{9|n}+\underbrace{3n(n^2+5)}_{?}$ nevíme dokážeme

máme něco uvát 3

$3n(n^2+5) \Rightarrow n^3+5n$

dokážeme pro všechny možnosti zbytku

$3|n$; $n=3k+1 \Rightarrow 27k^3+27k^2+9k+1+15k+5=\underbrace{27k^3+27k^2+24k+6}$

$\underbrace{(3k+1)3(2+3k^2+2k)}_{3|k}$

$n=3k+2$

$\Downarrow$

$\underbrace{(3k+2)[3(3+3k^2+4k)]}_{3|k}$

□

- DK matematickou indukcí: $\forall n\in N: 9 \mid [n^3+(n+1)^3+(n+2)^3]$

KROK 1

$n=1$ $\quad 9|36$
$n=2$ $\quad 9|99$
$n=3$ $\quad 9|216$

KROK 2: $V(n) \Rightarrow V(n+1)$ dokazujeme přímo jsou stejné

$\forall n\in N: \underbrace{9 \mid [n^3+\boxed{(n+1)^3}+\boxed{(n+2)^3}]}_{A} \Rightarrow \underbrace{9 \mid [\boxed{(n+1)^3}+\boxed{(n+2)^3}+(n+3)^3]}_{B}$

Předpokládáme že platí $A \Rightarrow \underline{n^3+(n+1)^3+(n+2)^3}=9k \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{(n+1)^3+(n+2)^3+n^3}_{9k}+\underbrace{9n^2+27n+27}_{}$

$\underbrace{9(n^2+3n+3)}_{9|n}$

⇒ celý výraz je dělitelný 9

□

— důkaz existence a protipříkladu

(4) a) $\forall n\in N: 2|n^2 \Rightarrow 2|n$

→ DK nepřímo □

b) $\forall n\in N: 4|n^2 \Rightarrow 4|n \Rightarrow$ nepravdivý : $4|2^2 \wedge 4\nmid 2$ $n=2$ je protipříklad □

c) $\forall a,b\in N: 6|a\cdot b \Rightarrow 6|a \vee 6|b$

$6|2\cdot 3 \Rightarrow 6\nmid 2 \wedge 6\nmid 3$ protipříklad, výraz neplatí □

d) $\forall n\in N: 6|n^2 \Rightarrow 6|n$ … platí, důkaz nepřímý □

OPERACE S MNOŽINAMI, VENNOVY DIAGRAMY, KARTÉZSKÝ SOUČIN

- Množina = rovná se souboru prvků, které lze navzájem rozlišit a zařadit do 1 množiny a nezáleží na pořadí
  = neuspořádaná n-tice prvků

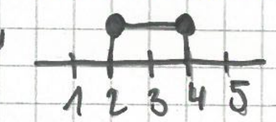
A, B … množiny

a, b, c … prvky množiny

$\overline{A}$ … doplněk množiny

$=$ … definiční, přiřazovací rovnítko „se definuje jako"

$K=\{x\in R: |x-3|\leq 1\}$ … zadání charakteristickou vlastností



$N=\{1,2,3\dots\}$ … zadání výčtem prvků

$\emptyset$ … prázdná množina

$\subseteq$ … je podmnožinou

$\subset$ … je vlastní podmnožinou, je podmnožina ale nerovná se dané množině

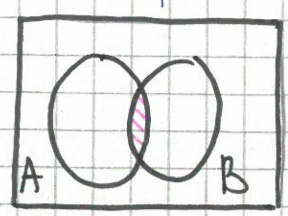
$A\subseteq B \wedge A\neq B$

je to lepší

$A\setminus B$ … rozdíl množin A a B … $A-B$

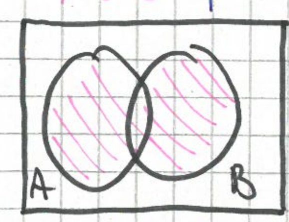
$A\setminus B := \{x\in A: x\notin B\}$

$A\cap B$ … průnik



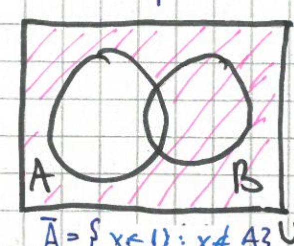
$A\cap B=\{x: x\in A \wedge x\in B\}$

$A\cup B$ … sjednocení



$A\cup B=\{x: x\in A \vee x\in B\}$

$\overline{A}$ … doplněk



$\overline{A}=\{x\in U: x\notin A\}$

unární operace

Vennovy diagramy

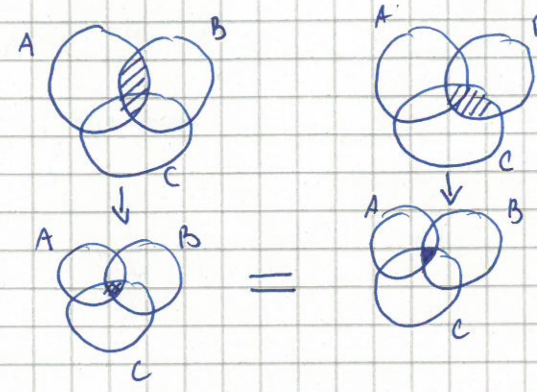
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ... asociativní

binární operace .. 2 množiny
binární operace použita 2x .. 3 množiny

osmý typ: DŮKAZ POMOCÍ ROVNOSTI MNOŽIN VENNOVÝMI DIAGRAMY

Příklad: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

ven. diag.:



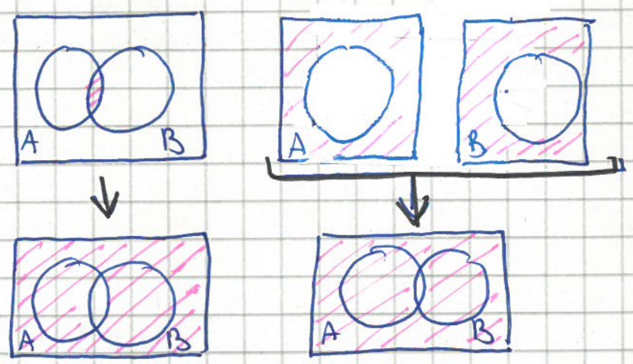
DK typ 10: $x \in (A \cap B) \cap C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \in C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C \Leftrightarrow$
$x \in A \wedge x \in (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C)$ ▫

THEOREM

Věta: $\forall A, B \subseteq \mathbb{R}^2$

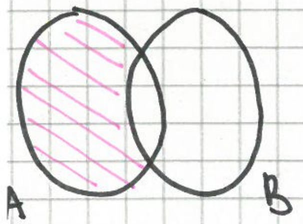
- De Morganova pravidla:
  1. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
  2. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

DK:



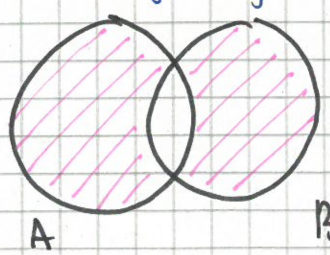
$x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow \neg(x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \Leftrightarrow x \in \bar{A} \cup \bar{B}$

$A - B$ ... rozdíl množin



$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

$A \div B$ .. symetrický rozdíl (symetrický součin) → $(A \cup B) - (A \cap B)$



$A \div B = \{x : x \in A \veebar x \in B\}$

$A \times B$ .. kartézský součin A, B → Není množinová operace

$A \times B = \{[a, b] : a \in A \wedge b \in B\}$

uspořádaná dvojice

$A \times B$

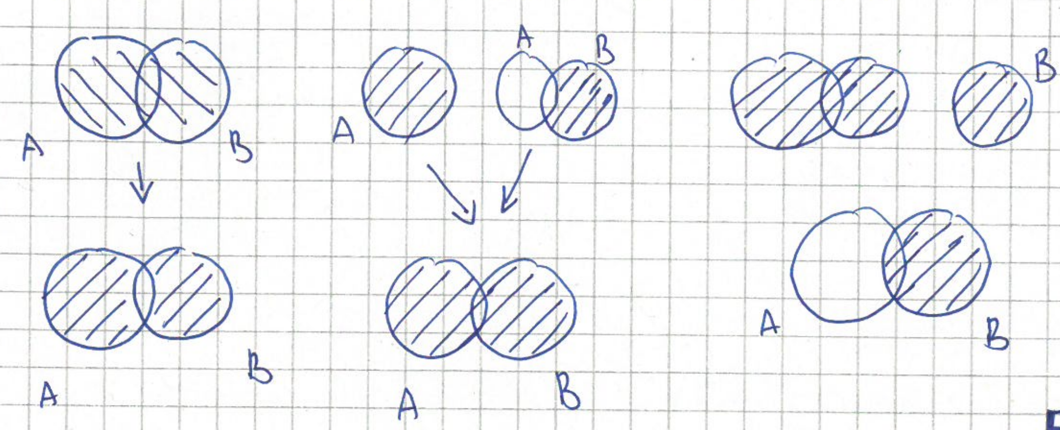
B

○	[1,○]	[2,○]	[3,○]
Δ	[1,Δ]	[2,Δ]	[3,Δ]
	1	2	3

A

} kartézská síť

Příklad:
Platí: $(A \cup B) - (A \cap B) \neq A \cup [(B - A) \cap B] \neq [A \cup (B - A)] \cap B$
($A \cup B$; B)



⇒ sjednocení a průnik má větší prioritu než rozdíl

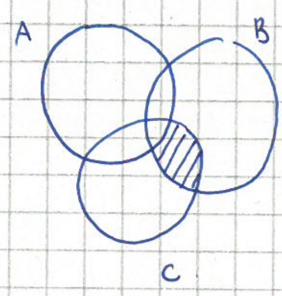
- $A \times A = \{[a, b] : a \in A \wedge b \in A\}$ ... kartézská množina

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $A \times A = \{[1,2] [1,3] [1,4]; [1,1]; [2,2]; [2,3]; [2,4]; [3,4]; [3,3]; [4,4];$
$[2,1]; [2,3]; [2,4]; [3,1]; [3,2]; [4,1]; [4,2]; [4,3]\}$

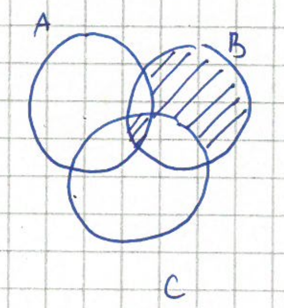
- $M = \{[1,1]; [2,2]; [3,3]; [4,4]\}$ ... binární relace

Příklad:

1)



$(B \cap C) - A$



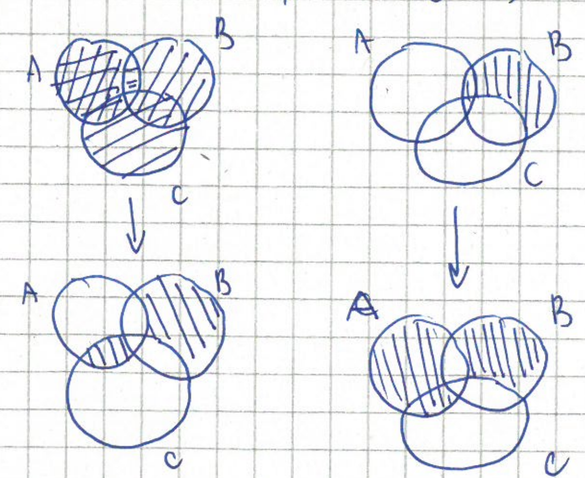
$(B - A) \cup (B - C) \cup (A \cap B \cap C)$

$(A \cap B \cap C) \cup ((B - A) - C)$

$(A \cap B \cap C) \cup (B - (A \cup C))$

$B - (A \div C)$

2) $A \div B - A \div C \neq A \div (B - C)$



▫

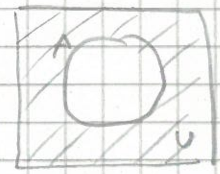
CVIČENÍ

1

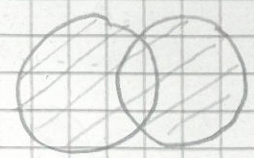
$A \cap B = \{x : x \in A \land x \in B\}$

→ pouze 1 množina u doplňku - unární

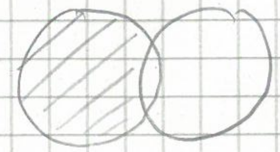
$\bar{A} = \{x \in U : x \notin A\}$



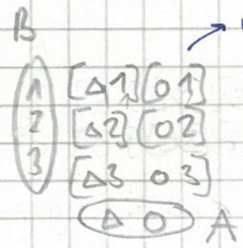
$A \cup B : \{x : x \in A \lor x \in B\}$



$A - B = \{x : x \in A \land x \notin B\}$



$A \times B = \{[a,b] : a \in A \land b \in B\}$

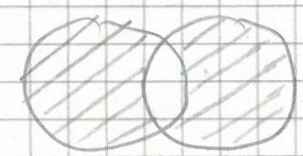


→ uspořádaná dvojice

kartézský graf

→ první množina se píše vodorovně

$A \div B = \{x : x \in A \veebar x \in B\}$



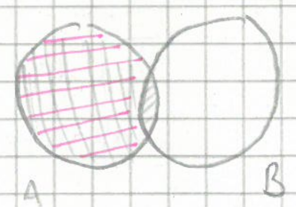
$A \div B = \{x\ (x \in A \lor x \in B) \land x \notin A \cap B\}$

$A \div B = \{x : x \in A - B \lor x \in B - A\}$

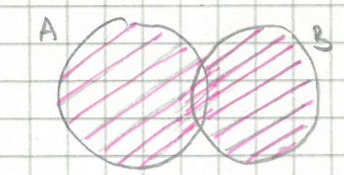
$A \div = \{x : (A \cup B) - (A \cap B)\}$

2

$A \div (A \cap B) = A - B$

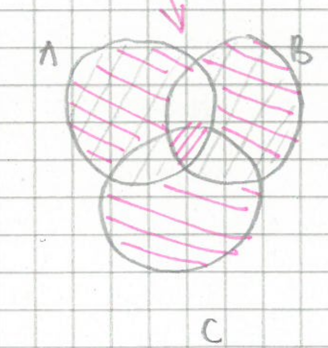


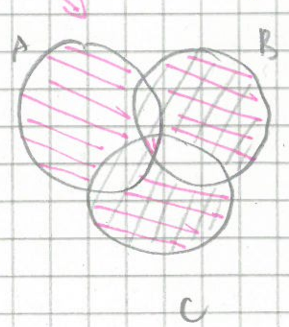
$A \div (B \div (A \cap B)) = A \cup B$



3

$(A \div B) \div C = A \div (B \div C)$

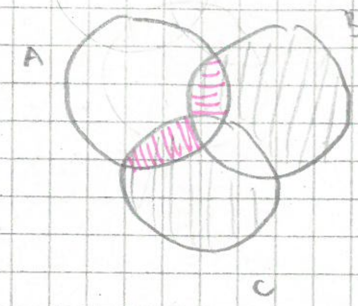


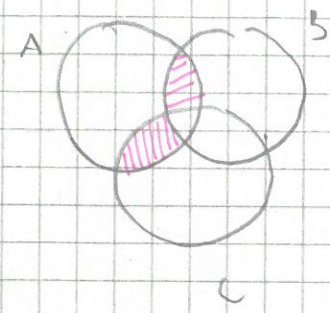


symetrický rozdíl nechce stejné prvky 2 množin

□

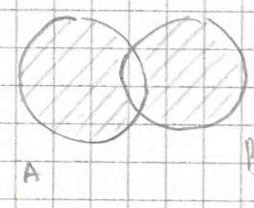
$A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$

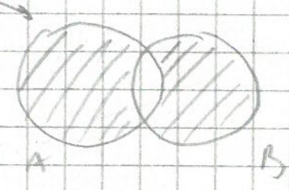




□

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

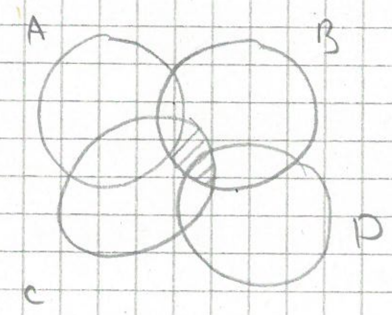




□

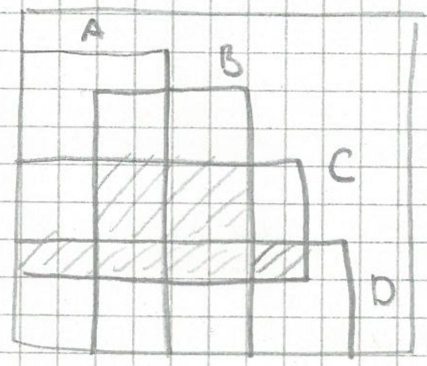
4

a)



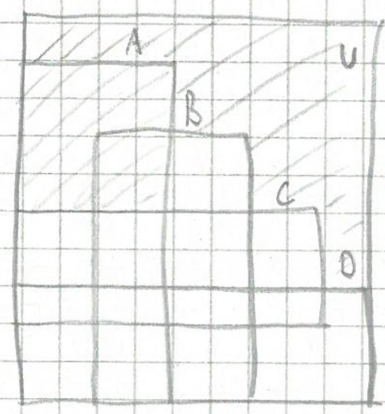
$(B \cap C) - A$

b)



$(C \cap D) \cup (B \cap C)$

$C - (\overline{B \cup D})$



$[A - (C \cup D)] \cup \overline{(A \cup B \cup C \cup D)}$

OPAKOVÁNÍ PROVĚRKA

1. prvočíslo = má dělitele sebe sama nebo 1

$\boxed{p \geq 2;\ p \in \mathbb{N} \text{ je prvočíslo když } 1|p \wedge p|p \wedge \nexists\, n: n \in \mathbb{N}: n \nmid p \wedge n \neq p \wedge n \neq 1}$

$\boxed{\exists!\, n \in \mathbb{N}: n \neq 1 \wedge n | p}$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}: n | p \Rightarrow (n = 1 \vee n = p)}$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}: n \nmid p \veebar (n = 1 \vee n = p)}$ → definice prvočísla!

$\neg \exists n \in \mathbb{N}: n|p \wedge (n \neq 1 \wedge n \neq p)$

2. $a, b \in \mathbb{N}$ jsou nesoudělná, když

$\nexists\, n \in \mathbb{N}: n|a \wedge n|b \wedge n \neq 1$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}: n \nmid a \vee n \nmid b \vee n = 1}$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}: n|a \wedge n|b \Rightarrow n = 1}$

→ definice nesoudělnosti

$\neg \exists n \in \mathbb{N}: (n|a \wedge n|b) \wedge (n \neq 1)$

3. $a, b, d \in \mathbb{N}$ malé d je největší společný dělitel a, b:

$\boxed{d|a \wedge d|b \quad \nexists\, n \in \mathbb{N}: n|a \wedge n|b \wedge d > n}$

$\boxed{\exists d \in \mathbb{N}: d|a \wedge d|b \wedge \forall n \in \mathbb{N}: (n|a \wedge n|b) \Rightarrow n \leq d \ \ldots\ !}$

DĚLITELNOST CELÝCH ČÍSEL, DIRICHLETŮV PRINCIP, KOMPLEXNÍ ČÍSLA

DĚLITELNOST

- celých čísel, desetinný rozvoj racionálního čísla

C.. množina komplexních čísel

typ1

dedukce

2 6
3 7 10
4 8
5 9

typ 9: DŮKAZ POMOCÍ DIRICHLETOVA PRINCIPU

Pokud rozdělujeme $k+1$ předmětů do k přihrádek, aspoň v jedné najdeme po rozdělení aspoň 2 předměty.

Věta: Každé rac. číslo má desetinný rozvoj buď ukončený, nebo neukončený periodický

DK: $1:7 = 0,\overline{142857}$

10
30
20
60
40
50
10

→ periodický → zbytek $\in \mathbb{N}$

všechny možné zbytky jsou: 0, 2, 1, 3, 4, 5, 6

⇒ při 8 dělení dostaneme opět některý ze zbytků

- zbytek je 0

∨

- zbytek je nenulový se zopakuje ⇒ desetinný rozvoj je periodický

□

$m : n =$

a) dělíme tak dlouho, až vyčerpáme všechny cifry čísla m → čísla připisované tomuto dělenci jsou pak už 0

b) nyní po $n+1$ krocích je zbytek buď 0 (rozvoj je konečný) nebo se zopakuje, a též připsání 0 vede k zopakování všech následujících zbytků (periodický rozvoj)