Vzorová řešení

9. ročník Náboje Junior

19. listopadu 2021

Poděkování

Náměty úloh:

Alžběta Andrýsková, Anežka Čechová, Kateřina Charvátová, Robert Gemrot, Matej Hrmo, Soňa Husáková, Radek Kusek, Viktor Materna, Aleš Opl, Marián Poturnay, Patrik Švančara, Martin Vaněk

Autoři zadání a řešení úloh:

Jakub Hluško, Matej Hrmo, Nina Hronkovičová, Marián Poturnay, Patrik Rusnák, Ela Vojtková

Recenzenti:

Barbora Čemanová, Michal Farnbauer, Filip Hanzely, Matej Hrmo, Nina Hronkovičová, Marián Poturnay, Patrik Rusnák, Ela Vojtková

Překladatelé:

Alžběta Andrýsková, Anežka Čechová, Robert Gemrot, Filip Hanzely, Matej Hrmo, Patrik Kašpárek, Radek Kusek, Karolína Letochová, Viktor Materna, Marcel Palaj, Łukasz Popek, Marián Poturnay, Juraj Rosinský, Patrik Rusnák, Sabína Samporová, Tomáš Šimek, Patrik Švančara, Karolina Szulc, Mateusz Wojtas

Lokální organizátoři:

Michaela Dlugošová (SK), Radek Kusek (PL), Juraj Rosinský (FR), Patrik Švančara (CZ)

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

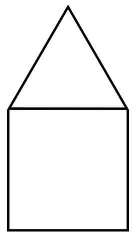
Realizace soutěže byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Úloha 1. Matěj si koupil tři kopečky zmrzliny. První kopeček stál 0,80 €, druhý 0,70 € a třetí byl za 1,05 €. Matěj za ně platil 5 € bankovkou. Kolik euro mu prodavač zmrzliny vrátil?

Výsledek. 2,45

Řešení. Matěj platil bankovkou v hodnotě 5 € za tři zmrzliny, jejichž celková cena byla 0,80 €+0,70 €+1,05 € = 2,55 €. Prodavač mu tedy vrátil 5 € − 2,55 € = 2,45 €.

Úloha 2. Naty si chce nakreslit domeček – čtverec s rovnostranným trojúhelníkem místo střechy (viz obrázek). Chce, aby délka strany čtverce byla 0,5 m. 1 dm čáry nakreslí za jednu sekundu. Za kolik sekund Naty nakreslí celý obrázek domečku?



Výsledek. 30

Řešení. Všechny strany čtverce mají stejnou délku, 0,5 m. Všechny strany trojúhelníka mají rovněž stejnou délku. Jak je vidět, jedna z čar je jak stranou daného čtverce, tak i trojúhelníku. Všechny čáry na obrázku tedy musejí mít stejnou délku 0,5 m. Obrázek se skládá z šesti takových čar a součet všech jejich délek je $6 \cdot 0{,}5\,\mathrm{m} = 3\,\mathrm{m}$. Každou sekundu Naty nakreslí 1 dm čáry, takže za každých 10 sekund nakreslí čáru o celkové délce $10 \cdot 1\,\mathrm{dm} = 10\,\mathrm{dm} = 1\,\mathrm{m}$. Aby měla celý obrázek, musí nakreslit třikrát delší čáru, takže jí kreslení zabere $3 \cdot 10\,\mathrm{s} = 30\,\mathrm{s}$.

Úloha 3. Archimédes měl digitální váhu, na kterou umístil nádobu s objemem 1 l a hmotností 250 g. Poté ji do poloviny naplnil vodou. Nakonec do ní přihodil kus dřeva o hmotnosti 300 g a hustotě $600\,\mathrm{kg/m^3}$, který zůstal plavat na hladině. Kolik gramů ukazuje Archimédova váha teď?

Výsledek. 1050

Řešení. I když dřevo plave (protože ho nadnáší vztlaková síla) nebude to mít žádný vliv na naměřenou hmotnost. Váha měří pouze celkovou hmotnost nádoby a jejího obsahu a ta není nijak ovlivněna silami mezi objekty v nádobě (vzhledem k tomu, že tyto objekty jsou v klidu). Díky tomu můžeme hmotnosti předmětů jednoduše sečíst: nádoba váží 250 g, polovina litru vody 500 g (neboť hustota vody je 1 kg/l) a kus dřeva 300 g. Váha tedy bude ukazovat hmotnost $250\,\mathrm{g} + 500\,\mathrm{g} + 300\,\mathrm{g} = 1050\,\mathrm{g}$.

Úloha 4. Patrik si vytváří rozvrh na jeden den. Chce umístit 3 hodiny matematiky a 2 hodiny fyziky do pětihodinového okna. Kolik různých verzí rozvrhu může poskládat?

Výsledek. 10

Řešení. Pojďme si vypsat všechny možnosti. Ty, kde je hodina matematiky na prvním místě, jsou MMFFF, MFMFF, MFFMF a MFFFM (M značí hodinu matematiky a F hodinu fyziky). Nyní si vypíšeme případy, kdy bude fyzika na prvním místě. Tyto možnosti jsou FMMFF, FMFMF, FMFFM, FFMMF, FFMFM a FFFMM. Jelikož libovolná kombinace hodin musí začínat matematikou nebo fyzikou, skutečně jsme zde vypsali všechny možnosti, jak si může Patrik rozvrh sestavit. Může si tedy vybrat mezi 10 možnostmi.

Úloha 5. Šnek se připravuje na dlouhou cestu. Rozhodl se přelézt 100 yardů dlouhé fotbalové hřiště. Kolik hodin mu tato cesta potrvá, když vzdálenost 1 palce překoná za 10 sekund?

Výsledek. 10

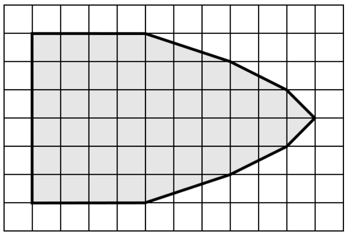
Řešení. Do jednoho yardu se vejdou 3 stopy a 12 palců se rovná 1 stopě. 1 yard se tak rovná $3 \cdot 12 = 36$ palcům. Šnek musí překonat vzdálenost 100 yardů, tj. $100 \cdot 36 = 3\,600$ palců. Jeden palec hřiště mu trvá přelézt 10 sekund, takže přelezení celého hřiště mu bude trvat $10 \cdot 3\,600 = 36\,000$ sekund. Každá hodina trvá 60 minut a každá minuta má 60 sekund, takže 1 hodina $= 60 \cdot 60 = 3\,600$ sekund. Vidíme, že šnek potřebuje $36\,000 \div 3\,600 = 10$ hodin k přelezení celého hřiště.

Úloha 6. Josef vynásobil číslo 111 111 111 samo sebou. Jaký je ciferný součet vzniklého čísla?

Výsledek. 81

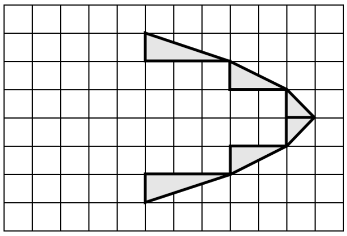
Řešení. Zkusme nejdříve násobit menší čísla. $11 \cdot 11 = 121$ a $111 \cdot 111 = 12321$. Tvar výsledků není náhodný a lze proto odhadnout, že vynásobením čísla 111 111 111 samo sebou získáme číslo 12 345 678 987 654 321, jehož ciferný součet je $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 81$.

Úloha 7. Zuzka na milimetrový papír nakreslila náboj, viz obrázek. Na vybarvení 1 čtverečku je potřeba 1 gram inkoustu. Kolik gramů inkoustu na celý obrázek potřebovala?



Výsledek. 46

Řešení. Nejprve spočítáme všechny čtverečky, které jsou vybarvené celé. Je jich 40, takže na jejich vybarvení bude potřeba 40 gramů inkoustu. Nyní se můžeme zabývat pouze čtverečky, které nejsou zcela vybarvené. Jak je vidět na obrázku, tvoří 6 vybarvených trojúhelníků.



Všechny trojúhelníky ležící na stejné svislé čáře můžeme spárovat a vytvořit tak 3 různé obdélníky. První obdélník pokrývá 3 čtverečky; ten druhý 2 a třetí 1 čtvereček. Na jejich vybarvení potřebujeme $3 + 2 + 1 = 6$ gramů inkoustu. Takže aby Zuzka vybarvila celý obrázek, potřebuje 46 g inkoustu.

Úloha 8. Jednoho rána si Adam šel zaběhat na atletický stadion na trať dlouhou 400 m. Prvních 20 minut běžel tak rychle, že kdyby toto tempo udržel po celou hodinu, okruh o délce 400 metrů by uběhl přesně 20krát. Jaká byla Adamova průměrná rychlost v km/h v prvních 20 minutách jeho běhu?

Výsledek. 8

Řešení. Pokud by Adam udržel tempo, uběhl by 20krát vzdálenost 400 m neboli $20 \cdot 400\,\mathrm{m} = 8000\,\mathrm{m}$ za jednu hodinu. To odpovídá rychlosti 8 km/h. A co jeho průměrná rychlost? Jelikož Adam během prvních 20 minut běží stejnou rychlostí, 8 km/h musí být zároveň Adamova průměrná rychlost během této části běhu.

Úloha 9. Městské autobusy jezdí tam a zpět mezi dvěma konečnými stanicemi tak, že cestující nikdy nečekají déle než 10 minut. Jaký je minimální počet autobusů nezbytných pro provozování této trasy, když její délka je 7200 m a autobusy jezdí průměrnou rychlostí 5 m/s?

Výsledek. 5

Řešení. Jednosměrná cesta mezi konečnými stanicemi trvá

$$\frac{7200\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{m/s}} = 1440\,\mathrm{s} = 24\,\mathrm{min}.$$

I se zpáteční cestou potrvá trasa jakémukoli autobusu $2 \cdot 24\,\mathrm{min} = 48\,\mathrm{min}$. Pokud nechceme, aby cestující čekali přes 10 min, musí v době, kdy přijíždí první autobus, na cestě být alespoň čtyři další autobusy. Potřebujeme tedy minimálně pět autobusů.

Úloha 10. Jarda má ve své kanceláři tiskárnu, která tiskne 20 stránek za minutu. V zasedací místnosti je však ještě druhá tiskárna, která je schopná vytisknout 25 stránek za minutu. Ta je připojena na Jardův počítač, takže Jarda může svoje dokumenty poslat do obou tiskáren přímo ze své kanceláře. Cesta z jeho kanceláře do zasedací místnosti mu trvá 1 minutu. Kolik nejméně stránek musí Jarda naráz vytisknout, aby se mu časově vyplatilo tisknout v zasedací místnosti a nikoli ve své kanceláři?

Výsledek. 101

Řešení. Jarda potřebuje tisknout tolik stránek, aby je tiskárna v zasedací místnosti vytiskla alespoň o minutu rychleji než tiskárna v kanceláři (minutu totiž Jarda „vyplýtvá“ na cestu ze zasedací místnosti zpět do kanceláře; cestu do místnosti totiž může absolvovat ještě během tisku).

Ze zadání vyplývá, že tiskárna v kanceláři vytiskne jednu stránku za $60\,\mathrm{s} \div 20 = 3\,\mathrm{s}$, zatím co tiskárna v zasedací místnosti to zvládne za $60\,\mathrm{s} \div 25 = 2{,}4\,\mathrm{s}$. Při časové úspoře 0,6 s na jednu stránku je potřeba vytisknout více než 100 stránek, aby výsledná časová úspora byla větší než $100 \cdot 0{,}6\,\mathrm{s} = 60\,\mathrm{s} = 1\,\mathrm{min}$. Nejmenší počet stránek, které se Jardovi skutečně vyplatí tisknout v zasedací místnosti, je tedy 101.

Úloha 11. Pedro se rozhodl hrát si se svým oblíbeným kladným celým číslem. Nejprve ho zaokrouhlil na desítky, potom na stovky a nakonec na tisíce. Byl velice překvapený, když zjistil, že všechny tři výsledky zaokrouhlování byly stejné, ale nebyla to nula. Jaké nejmenší číslo by mělo všechny vlastnosti Pedrova oblíbeného čísla?

Výsledek. 995

Řešení. Při zaokrouhlování na desítky je maximální rozdíl mezi výsledkem a Pedrovým číslem 5. Nejmenší kladné celé číslo, které je výsledkem zaokrouhlování na tisíce je 1 000. Takže Pedrovo oblíbené číslo musí být alespoň $1\,000 - 5 = 995$. Můžeme vidět, že číslo 995 splňuje všechny podmínky.

Úloha 12. Nina si šla zaběhat kolem jezera s obvodem 6 km. První okruh uběhla za 40 minut. Po tom, co uběhla druhý okruh, všimla si, že její průměrná rychlost za oba okruhy byla 8 km/h. Za kolik minut uběhla druhý okruh?

Výsledek. 50

Řešení. Nina uběhla dva okruhy, takže celková dráha, kterou uběhla, byla $2 \cdot 6\,\mathrm{km} = 12\,\mathrm{km}$, s průměrnou rychlostí 8 km/h. Proto byl celkový čas jejího běhu

$$\frac{12\,\mathrm{km}}{8\,\mathrm{km/h}} = 1{,}5\,\mathrm{h} = 90\,\mathrm{min}.$$

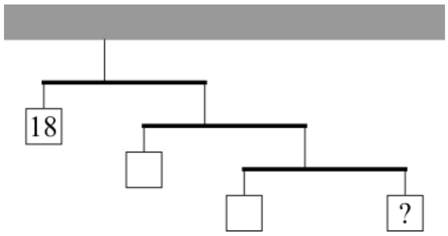
Pokud Nina uběhla první okruh za 40 minut, ten druhý musela zvládnout za $90 - 40 = 50$ minut.

Úloha 13. Andrej, Bětka a Ctibor si uspořádali šachový turnaj, kde hráli každý s každým a žádná hra neskončila remízou. Andrej vyhrál 7krát a prohrál 10krát. Bětka vyhrála 8krát a prohrála 9krát. Ctibor prohrál 8krát. Kolikrát ale Ctibor vyhrál?

Výsledek. 12

Řešení. To, že někdo prohrál, se stalo přesně $10 + 9 + 8 = 27$krát. Z toho ale vyplývá, že 27 je také celkový počet odehraných her. To znamená, že Ctibor musel vyhrát $27 - 7 - 8 = 12$ her.

Úloha 14. Patrik má tři lehké zavěsitelné páky. Každá páka má delší rameno dvakrát delší než kratší rameno. Na kratší konec první páky Patrik pověsil 18 kg závaží. Na delší konec první páky zavěsil druhou páku a na delší konec druhé páky potom zavěsil třetí páku. Následně Patrik zavěsil různá závaží na zbývající dosud volné konce pák tak, aby byl systém v rovnováze. Jakou hmotnost v kilogramech má závaží, které je zavěšeno na delším konci třetí páky?



Výsledek. 1

Řešení. Pro libovolnou páku v rovnováze platí, že momenty tíhových sil, tj. součiny tíhových sil závaží vynásobené délkami příslušných ramen, jsou stejné. Aby byla tato podmínka splněna pro Patrikovy páky, musí pro každou z nich platit, že hmotnost závaží pověšeného na kratším konci musí být dvakrát větší než na druhém, delším konci.
Protože na kratším konci první páky je pověšená hmotnost 18 kg, součet hmotností závaží na druhé a třetí páce musí být $18\,\mathrm{kg} \div 2 = 9\,\mathrm{kg}$. I pro druhou páku musí platit, že závaží na kratším konci je dvakrát těžší než součet hmotností na třetí páce. Z toho vyplývá, že závaží na kratším konci bude mít hmotnost 6 kg a dvě závaží na třetí páce budou mít dohromady hmotnost 3 kg. Nakonec rozdělíme tuto hmotnost mezi zbývající dvě závaží ve stejném poměru $2 : 1$ a dospějeme k závěru, že závaží na delším konci třetí páky váží 1 kg.

Úloha 15. Nad Janiným domem se rozpršelo. Naštěstí má Jana na své vodorovné střeše systém na zachytávání a odvádění vody. Systém pokrývá plochu $100\,\mathrm{m}^2$ a během dne dohromady zachytil 4000 l vody. Jana má vedle domu také bazén. O kolik milimetrů jí během deště stoupla v bazénu hladina vody?

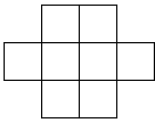
Výsledek. 40

Řešení. Pokud by voda nebyla odvedena záchytným systémem a ani by nepřetekla přes okraje střechy, na konci deště bychom na střeše našli kvádr tvořený vodou. Za předpokladu, že kapky deště padaly do bazénu rovnoměrně a stejně hustě jako na střechu, zvýšení hladiny vody v bazénu by přesně odpovídalo tloušťce onoho pomyslného kvádru tvořeného vodou. Tento kvádr má nám známý objem $4000\,\mathrm{l} = 4000\,\mathrm{dm}^3 = 4\,\mathrm{m}^3$. Plocha jeho podstavy je stejná jako plocha střechy: $100\,\mathrm{m}^2$. Víme, že objem kvádru je součin jeho výšky a plochy jeho podstavy. Proto je jeho výška

$$\frac{4\,\mathrm{m}^3}{100\,\mathrm{m}^2} = 0{,}04\,\mathrm{m} = 40\,\mathrm{mm}.$$

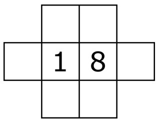
Z toho vyplývá, že hladina v bazénu stoupla o 40 mm.

Úloha 16. Sergej našel v podkroví zvláštní destičku (viz obrázek). Rozhodl se do každé buňky vyrýt jedno z čísel 1 až 8 tak, že rozdíl mezi jakýmikoli dvěma sousedními buňkami (podle okraje nebo rohu buňky) bude alespoň 2. Jaký bude součet čísel v buňkách sousedících s buňkou s číslem 4 (opět podle okraje nebo rohu buňky)?

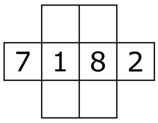


Výsledek. 22

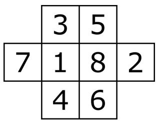
Řešení. V zadání je podmínka, že spolu mohou sousedit pouze buňky, jejichž rozdíl bude minimálně 2. To znamená, že buňky lišící se pouze o 1 spolu nemohou sousedit.
Pojďme se podívat na druhou a třetí buňku v prostředním řádku. Obě sousedí se všemi ostatními buňkami kromě jedné. Jaká čísla můžeme dát na tyto pozice? Pouze čísla, která se liší o 1 od přesně jednoho dalšího čísla v rozmezí 1 až 8. Tuto podmínku zjevně splňují pouze čísla 1 a 8. Vzhledem k symetrii destičky nezáleží na tom, v jakém pořadí tam tato dvě čísla umístíme, a tak to uděláme tímto způsobem:



Obě čísla 1 a 8 mají pouze jedno číslo, se kterým mají rozdíl 1. To jsou 2 a 7. Takže tato dvě čísla musíme umístit na dvě krajní pozice v prostředním řádku.



Buňka s číslem 2 nemůže sousedit s číslem 3, které tedy musí být pod, nebo nad číslem 1. Ze stejného důvodu bude číslo 6 umístěno pod, nebo nad buňku s číslem 8. Tady máme dvě možnosti. Pokud umístíme 3 a 6 do stejného řádku, do zbývajícího řádku budeme muset umístit 4 a 5 vedle sebe, což nesmíme. Vydáme se tedy druhou možností, kdy umístíme čísla 3 a 6 do dvou různých řádků. Všimněme si, že 4 a 3 nemohou být v sousedních buňkách, takže nám zbývá přesně jedna možnost, jak tabulku sestavit:



Nakonec vypočítáme, že součet čísel sousedících s buňkou s číslem 4 je $7 + 1 + 8 + 6 = 22$.

Úloha 17. Kuba sedí ve vlaku, který se pohybuje rychlostí 108 km/h. Najednou ale vjel do tunelu, který je, na základě Kubovy knihy o vlacích, dlouhý 2 km. Kuba si všiml, že vlak tunel opustil 75 s po tom, co do něj vjel. Kolik metrů je dlouhý vlak?

Výsledek. 250

Řešení. Pro pohodlí si převedeme rychlost z kilometrů za hodinu na metry za sekundu: $108\,\mathrm{km/h} = 30\,\mathrm{m/s}$. Vlak jedoucí rychlostí 30 m/s za dobu 75 s překoná vzdálenost $75\,\mathrm{s} \cdot 30\,\mathrm{m/s} = 2250\,\mathrm{m}$. Lokomotiva tedy od doby, co vjela do tunelu, urazila 2250 m. Protože tunel je dlouhý 2000 m, po 75 sekundách byla lokomotiva $2250\,\mathrm{m} - 2000\,\mathrm{m} = 250\,\mathrm{m}$ za koncem tunelu. Vlak tedy musí být dlouhý 250 m.

Úloha 18. Ela má šest různě dlouhých oblíbených tužek, jejichž délky vyjádřené v milimetrech jsou přirozená čísla. Průměrná délka tužky je 12 mm. Jaká je největší možná délka (v milimetrech) tužky, kterou Ela může mít?

Výsledek. 57

Řešení. Jelikož je průměrná délka Eliných tužek 12 mm, součet všech jejich délek musí být $6 \cdot 12\,\mathrm{mm} = 72\,\mathrm{mm}$. Aby byla jedna z tužek nejdelší, musí být ostatních pět co možná nejkratších. Proto musí mít délky 1 mm, 2 mm, 3 mm, 4 mm a 5 mm, což je dohromady 15 mm (tužku délky nula neuvažujeme). Na nejdelší tužku zbývá $72\,\mathrm{mm} - 15\,\mathrm{mm} = 57\,\mathrm{mm}$.

Úloha 19. Honza trénuje na zmrzlém jezeře curling. Vezme si curlingový kámen o hmotnosti 18,6 kg a hodí jej klouzat se po ledu s počáteční rychlostí 2 m/s. Koeficient tření mezi ledem a kamenem je 0,05. Kolik metrů dokáže kámen od Honzy doklouzat?

Výsledek. 4

Řešení. Kámen ztrácí kinetickou energii v souladu se zákonem zachování energie kvůli působení síly tření, která koná práci. Na začátku má kámen s hmotností $m = 18{,}6\,\mathrm{kg}$ a rychlostí $v = 2\,\mathrm{m/s}$ kinetickou energii

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2.$$

Síla tření F_t, která kámen zpomaluje, se rovná součinu tíhové síly $F_G = mg$ a koeficientu tření $f = 0{,}05$. Práce síly tření je pak

$$W = F_t s = F_G f s = mgfs,$$

kde s je vzdálenost, jež kámen na ledě urazí. Když se kámen na ledě zastaví, jeho kinetická energie se celkem promění na práci W. Z rovnosti pak můžeme následně spočítat vzdálenost s:

$$\begin{aligned}\Delta E_k &= W,\\ \frac{1}{2}mv^2 &= mgfs,\\ s &= \frac{v^2}{2fg} = \frac{(2\,\mathrm{m/s})^2}{2\cdot 0{,}05\cdot 10\,\mathrm{m/s^2}} = 4\,\mathrm{m}.\end{aligned}$$

Kámen se tedy doklouže od Honzy do vzdálenosti 4 m.

Úloha 20. Když Kája kráčela po školních chodbách, na jedné nástěnce spatřila podivný obrazec. Útvar sestával z úsečky BC, na jejíž ose byly body A a D tak, že bod D byl uvnitř trojúhelníku ABC. Velikost úhlu BAC byla 40° a velikost úhlu BDC byla 140°. Jaká byla velikost úhlu ACD v stupních?

Výsledek. 50

Řešení. Protože body A a D jsou na ose úsečky BC, trojúhelníky ABC a DBC jsou rovnoramenné se základnou BC. S touto informací můžeme dopočítat velikosti úhlů u základny v trojúhelníku ABC jako

$$\frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$$

a v trojúhelníku DBC jako

$$\frac{180^\circ - 140^\circ}{2} = 20^\circ.$$

Velikost úhlu ACD je tedy $|\measuredangle ACD| = |\measuredangle ACB| - |\measuredangle DCB| = 70^\circ - 20^\circ = 50^\circ$.

Úloha 21. Káťa vyrazila na túru do hor. Počasí bylo chladné, a proto se rozhodla připravit si čaj. Káťa měla 0,5 l vody o teplotě 0°C. Čaj vařila nad ohništěm s účinností 0,5 %. Kolik kilogramů dřeva Káťa potřebovala na to, aby přivedla k varu veškerou vodu?

Výsledek. 2

Řešení. Spalné teplo dřeva je $21\,\mathrm{MJ/kg} = 21\,000\,\mathrm{kJ/kg}$. Protože je účinnost jeho spalování pouze 0,5 %, spálením jenoho kilogramu dřeva získáme $21\,000\,\mathrm{kJ/kg}\cdot 0{,}005\cdot 1\,\mathrm{kg} = 105\,\mathrm{kJ}$ energie, která se využije na ohřev vody. Aby se voda začala vařit, musíme ji z teploty 0 °C zahřát o 100 °C. Na to je potřeba energie $0{,}5\,\mathrm{kg}\cdot 4{,}2\,\mathrm{kJ/(kg\,°C)}\cdot 100\,\mathrm{°C} = 210\,\mathrm{kJ}$, což je přesně dvojnásobek 105 kJ. Káťa tedy na ohřev vody potřebovala 2 kg dřeva.

Úloha 22. Lenka si koupila sáček bonbónů, který obsahoval jablečné a banánové bonbóny. V sáčku bylo dvakrát více jablečných než banánových bonbónů. Lenka okamžitě snědla 17 jablečných a 17 banánových bonbónů. Potom si všimla, že v sáčku zůstalo třikrát tolik jablečných bonbónů než banánových. Kolik jablečných bonbónů bylo v sáčku na začátku?

Výsledek. 68

Řešení. Označme si J jako počet jablečných bonbónů a B jako počet banánových bonbónů. Na začátku bylo jablečných dvakrát více, což lze zapsat jako $J = 2B$. Potom, co Lenka snědla 17 jablečných a 17 banánových bonbónů, zůstalo jí třikrát více jablečných bonbónů než banánových. To opět zapíšeme v jazyce rovnic jako $J - 17 = 3(B - 17)$. Dosazením $2B$ za J (známe z první rovnice) dostaneme:

$$\begin{aligned}2B - 17 &= 3(B - 17),\\ 2B - 17 &= 3B - 51,\\ B &= 51 - 17 = 34.\end{aligned}$$

Na začátku tedy v sáčku bylo $B = 34$ banánových bonbónů a $J = 2B = 68$ jablečných bonbónů.

Úloha 23. Někdo ukradl Náboj! Musel to být jeden z těchto čtyř lidí: Majo, Matěj, Jerry nebo Marcel. Tito podezřelí řekli Šerifovi následující:

- Majo: *Já Náboj nemám. Má ho Matěj.*
- Matěj: *Marcel má Náboj. Pokud ho má Marcel, pak Majo Náboj nemá.*
- Jerry: *Právě jedna z mých vět je pravdivá. Marcel říká buď dvě pravdivé, nebo dvě nepravdivé věty.*
- Marcel: *Každý podezřelý řekl alespoň jednu nepravdivou větu. Já nemám Náboj.*

Kolik vět, které Šerif slyšel, je pravdivých? Najděte součin všech možných odpovědí.

Výsledek. 20

Řešení. Nejdříve se podívejme na Jerryho první větu. Kdyby byla pravdivá, byla by sama o sobě Jerryho jedinou pravdivou větou, takže jeho druhá věta by musela být nepravdivá. Kdyby jeho první věta byla nepravdivá, druhá věta by také nemohla být pravdivá – v opačném případě by první věta musela být také pravdivá. Můžeme tak s jistotou tvrdit, že Jerryho druhá věta je lživá. Nemůžeme však zatím nic říct o jeho první větě.
Jerryho druhá věta je lživá. Potom musí Marcel říkat jednu pravdivou a jednu lživou větu. Zamysleme se, co by se stalo, kdyby jeho první nebo druhá věta byly pravdivé.
Kdyby byla pravda, že *každý podezřelý řekl alespoň jednu nepravdivou větu*, potom by Marcelova věta, že *nemá Náboj*, byla lživá, a musel by tedy být oným zlodějem. Potom by ale obě Matějovy věty musely být pravdivé, což by bylo nemožné, protože považujeme Marcelovu větu *každý podezřelý řekl alespoň jednu nepravdivou větu* za pravdivou.
Proto tou pravdivou větou musí být Marcelova druhá věta, tedy ta, že on *nemá Náboj.* Jelikož je jeho první věta lživá, musí zde být někdo, kdo řekl dvě pravdivé věty. To může být jenom Majo nebo Matěj. Jelikož ale Marcel nemá Náboj, Matěj nemohl říct dvě pravdivé věty. Proto ten, jehož obě věty jsou pravdivé, musí být Majo, který říká, že Matěj má Náboj. Matěj je tak zloděj.
Nakonec musíme spočítat, kolik vět bylo pravdivých. Dokázali jsme, že obě Majovy věty byly pravdivé. Z Matějových vět byla pravdivá jedna. Stejně tak jen druhá z Marcelových vět byla pravdivá. Nyní vidíme, že Jerryho první věta může být pravdivá i nepravdivá. Může to tak být 4 nebo 5 pravdivých vět. Součin možných počtů pravdivých vět tak je $4 \cdot 5 = 20$.

Úloha 24. Marie si koupila 8 knih, z nichž každá má tvar kvádru o rozměrech 5 cm, 15 cm a 20 cm a hustotu $1200\,\mathrm{kg/m^3}$. Knihy jsou položené jedna na druhé ve vysoké krabici s víkem. Navzájem se dotýkají stěnami s největší plochou. Marie si donesla krabici domů a položila ji na zem. Sundala víko a nyní by si ráda vyskládala knihy na poličku, která je 1,6 m nad zemí, a to tak, aby se knihy poličky dotýkaly stěnou s nejmenší plochou. Jak velkou práci (kolik joulů) musí Marie vykonat, aby dokončila svůj úkol?

Výsledek. 216

Řešení. Knihy na zemi tvoří dohromady kvádr s výškou $8 \cdot 5\,\mathrm{cm} = 40\,\mathrm{cm}$, tudíž jejich těžiště leží ve výšce $20\,\mathrm{cm} = 0{,}2\,\mathrm{m}$ nad zemí. Pokud by knihy byly položené na poličce, vytvořily by kvádr s výškou 20 cm a těžištěm ve výšce $10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}$ nad poličkou. Vzhledem k tomu, že je polička 1,6 m nad zemí, společné těžiště knih před a po vyskládání na poličku musí překonat výškový rozdíl $1{,}6\,\mathrm{m} - 0{,}2\,\mathrm{m} + 0{,}1\,\mathrm{m} = 1{,}5\,\mathrm{m}$. Objem knih je $8 \cdot 5\,\mathrm{cm} \cdot 15\,\mathrm{cm} \cdot 20\,\mathrm{cm} = 12\,000\,\mathrm{cm^3} = 12\,\mathrm{dm^3}$ a jejich hustota je $1200\,\mathrm{kg/m^3} = 1{,}2\,\mathrm{kg/dm^3}$. Jejich hmotnost je tedy $12\,\mathrm{dm^3} \cdot 1{,}2\,\mathrm{kg/dm^3} = 14{,}4\,\mathrm{kg}$. Práce, kterou Marie musí vykonat, je rovna změně potencální energie knih v krabici na zemi a na poličce, jež činí $14{,}4\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 1{,}5\,\mathrm{m} = 216\,\mathrm{J}$.

Úloha 25. Jirka má ve svém batohu trojúhelník ABC s celočíselnými hranami (v centimetrech). Strana AB není kratší než 21 cm, ale zároveň není delší než 28 cm. Strana AC je dlouhá nejméně 11 cm a nejvýše 18 cm. Strana BC není delší než 8 cm, ale současně je dlouhá alespoň 1 cm. Jaký je nejvyšší možný obvod (v centimetrech), který může mít Jirkův trojúhelník?

Výsledek. 51

Řešení. Klíčem k řešení úlohy je vzpomenout si, že pro každý trojúhelník platí trojúhelníková nerovnost. Ta nám říká, že součet délek libovolných dvou stran trojúhelníku musí být ostře větší než délka zbylé strany. Pojďme prozkoumat dvě kratší strany Jirkova trojúhelníku: BC a AC. Víme, že jejich délky mohou být nanejvýš 8 cm a 18 cm. Na základě toho můžeme říct, že aby mohl trojúhelník vůbec existovat, musí jeho třetí strana být kratší než $8\,\mathrm{cm} + 18\,\mathrm{cm} = 26\,\mathrm{cm}$, tedy může mít nanejvýš 25 cm. Trojúhelník s délkami stran 8 cm, 18 cm a 25 cm tedy může existovat a navíc jeho dvě kratší strany přispívají k obvodu trojúhelníku maximální povolenou délkou. Proto je nejvyšší možný obvod Jirkova trojúhelníku $8\,\mathrm{cm} + 18\,\mathrm{cm} + 25\,\mathrm{cm} = 51\,\mathrm{cm}$.

Úloha 26. Sabina si koupila nové auto, které má zajímavou funkci: přeměňuje energii v palivu na svou kinetickou energii s konstantní efektivitou, bez ohledu na to, jak rychle auto zrychluje. Když se Sabina ve městě rozjela z klidu na rychlost 40 km/h, její auto spotřebovalo 700 kJ energie. Potom jela na dálnici, kde zrychlila z rychlosti 40 km/h na 120 km/h. Kolik energie (v kilojoulech) použila během zrychlování na dálnici?

Výsledek. 5600

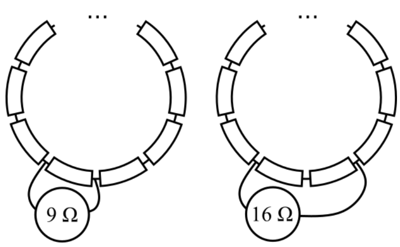
Řešení. Během zrychlování na dálnici vzrostla rychlost Sabinina auta trojnásobně. Protože kinetická energie roste s druhou mocninou rychlosti, při rychlosti 120 km/h je kinetická energie Sabinina auta $3^2 = 9$krát větší než energie při rychlosti 40 km/h. Na zrychlení z 40 km/h na 120 km/h tedy Sabinino auto spotřebuje $9 - 1 = 8$krát více energie než na rozjezd na 40 km/h, což činí $8 \cdot 700\,\mathrm{kJ} = 5600\,\mathrm{kJ}$.

Úloha 27. Radek napsal na jeden list papíru všechna kladná přirozená čísla od 1 do 100. Potom na druhý list papíru napsal všechny kladné rozdíly všech možných dvojic čísel z prvního papíru. Které číslo se na druhém listu papíru objevuje nejčastěji?

Výsledek. 1

Řešení. Pojďme prozkoumat všechny možné dvojice čísel z prvního papíru. Začněme dvojicemi, které obsahují číslo 1. Rozdíly v těchto dvojicích jsou všechna čísla od 1 to 99. Dále se podívejme popořadě na dvojice, které obsahují číslo 2 a zároveň neobsahují číslo 1 (nebo alternativně na dvojice, v nichž je 2 nejmenší číslo). Rozdíly čísel mezi těmito dvojicemi jsou čísla od 1 do 98. Analogicky můžeme pokračovat, dokud se nedostaneme ke všem dvojicím, kde je nejmenší číslo 99. Taková dvojice existuje právě jedna (jsou to čísla 99 a 100). Ve všech případech, které jsme postupně prošli, bylo vždy mezi rozdíly přítomno pouze číslo 1, a proto se číslo 1 objevuje na druhém papíru nejčastěji.

Úloha 28. Nina vyrobila náhrdelník z několika stejných rezistorů tak, že je spojila do kruhu. Potom k náhrdelníku připojila multimetr, a to tak, že mezi svorkami multimetru byl jen jeden rezistor. Přístroj naměřil odpor $9\,\Omega$. Když připojila multimetr tak, aby mezi svorkami byly tentokrát dva rezistory, ukázal odpor $16\,\Omega$. Z kolika rezistorů byl Ninin náhrdelník vyroben?



Výsledek. 10

Řešení. Označme si počet rezistorů n a odpor každého z rezistorů jako R. Když připojíme multimetr k jednomu rezistoru, měříme odpor v obvodu se dvěma paralelně zapojenými větvami. V jedné větvi obvodu je jeden a ve druhé větvi je $n-1$ rezistorů. Pokud připojíme multimetr ke dvěma rezistorům, v jedné větvi budou 2 rezistory a ve druhé bude $n-2$ rezistorů. To nás vede k následující soustavě rovnic vyplývající ze vztahu pro odpor paralelně zapojených rezistorů:

$$\frac{1}{9\,\Omega} = \frac{1}{R} + \frac{1}{(n-1)R},$$
$$\frac{1}{16\,\Omega} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{(n-2)R}.$$

Po vynásobení rovnic jmenovateli dostaneme soustavu

$$(n-1)R = (n-1)(9\,\Omega) + 9\,\Omega,$$
$$(n-2)R = (n-2)(8\,\Omega) + 16\,\Omega.$$

Když roznásobíme závorky a rovnice upravíme, získáme:

$$nR - R = 9n\Omega,$$
$$nR - 2R = 8n\Omega.$$

Nyní odečteme druhou rovnici od první a dostaneme rovnici $R = n\Omega$. Číselné hodnoty odporů jednotlivých rezistorů v ohmech jsou tedy stejné jako celkový počet zapojených rezistorů. Pokud tuto informaci dosadíme do rovnice $nR - R = 9n\Omega$, získáme

$$(n^2 - n)\Omega = 9n\Omega,$$
$$[n(n-10)]\Omega = 0\Omega.$$

Tato rovnice je splněna pro $n = 0$ nebo $n = 10$. Výsledek $n = 0$ ale nedává fyzikální smysl, a tak se musel Ninin náhrdelník skládat z 10 rezistorů.

Úloha 29. Laura nakreslila pravidelný osmiúhelník $ABCDEFGH$. Nyní chce nakreslit 4 neprotínající se úsečky (úsečky by se neměly protínat ani v krajních bodech), a to tak, aby jejich krajní body byly vrcholy osmiúhelníku $ABCDEFGH$. Kolika různými způsoby toho může docílit?

Výsledek. 14

Řešení. Rozlišujme jednotlivé případy podle toho, s jakým vrcholem je úsečkou propojený vrchol A. Pokud je vrchol A spojen s některým z vrcholů C, E nebo G, potom odpovídající úsečka dělí zbývající vrcholy na dvě skupiny s lichým počtem vrcholů. Ty už ale nemohou být rozděleny do dvojic, tudíž nemůžeme nakreslit zbývající úsečky tak, aby byly splněny podmínky v zadání. Pokud je vrchol A spojen s vrcholem B, bude nám zbývat spojit 6 vrcholů. Máme 5 možností jak toho docílit:

$$\begin{gathered}(CD)(EF)(GH)\\(CD)(EH)(FG)\\(CF)(DE)(GH)\\(CH)(DE)(FG)\\(CH)(DG)(EF)\end{gathered}$$

Kdybychom vrchol A spojili s vrcholem H, získali bychom (na základě symetrie této situace) dalších 5 způsobů. Pokud bychom jej spojili s vrcholem D, museli bychom nutně spojit vrcholy B a C. Pro zbývající 4 vrcholy máme následující dva způsoby:

$$\begin{gathered}(EF)(GH)\\(EH)(FG)\end{gathered}$$

Analogicky dostaneme 2 další způsoby, pokud spojíme vrcholy A a H. Postupně jsme tedy analyzovali všechny případy vrcholů, se kterými může být vrchol A spojen. Proto můžeme s jistotou tvrdit, že existuje právě $5 + 5 + 2 + 2 = 14$ způsobů, jak může Laura úsečky nakreslit.

Úloha 30. Archimédes si vzal digitální váhu a na ni položil nádobu s objemem 1 l a hmotností 250 g. Potom nádobu naplnil z poloviny vodou. Následně do nádoby s vodou vložil oblázek na provázku tak, aby byl celý oblázek ponořený pod vodou, ale aby se současně nedotýkal stěn nádoby. Váha ukázala hmotnost 1 kg. Nakonec Archimédes položil na váhu pouze samotný oblázek. Váha ukázala opět hmotnost 1 kg. Jaká byla hustota oblázku v $\mathrm{kg/m^3}$?

Výsledek. 4000

Řešení. Pokud bychom položili nádobu o hmotnosti $m_{\text{nádoba}} = 250\,\mathrm{g} = 0{,}25\,\mathrm{kg}$ na váhu a nalili do ní vodu s celkovým objemem $V = 0{,}5\,\mathrm{l}$, váha by ukázala hmotnost $m_1 = m_{\text{nádoba}} + \rho_{\text{voda}}V = 0{,}75\,\mathrm{kg}$. Po vložení oblázku na provázku váha ukázala hmotnost $m_2 = 1\,\mathrm{kg}$. Co způsobilo tento nárůst? Na oblázek působily dvě síly, gravitační a vztlaková. Vztlakovou silou na oblázek působila voda, a proto můžeme na základě zákona akce a reakce usoudit, že oblázek musel na vodu působit silou se stejnou velikostí, ale působící opačným směrem. Toto je zároveň jediná síla, která ovlivní hmotnost, kterou váha ve výsledku ukáže. Velikost síly odpovídající hmotnosti m_2, kterou váha ukázala, musí být tedy rovna součtu velikost tíhové síly od nádoby $F_G = m_1 g$ a velikosti vztlakové síly působící na oblázek $F_{\text{vz}} = V_{\text{oblázek}}\rho_{\text{voda}}g$. Platí tedy

$$\begin{aligned}m_2 g &= F_G + F_{\text{vz}},\\m_2 g &= m_1 g + V_{\text{oblázek}}\rho_{\text{voda}}g,\\m_2 &= m_1 + V_{\text{oblázek}}\rho_{\text{voda}}.\end{aligned}$$

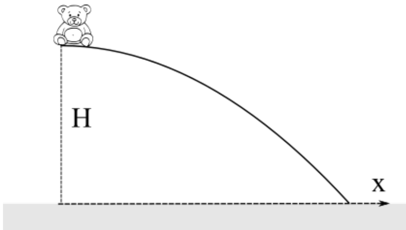
Objem oblázku pak můžeme vyjádřit jako

$$V_{\text{oblázek}} = \frac{m_2 - m_1}{\rho_{\text{voda}}}.$$

Z druhého vážení víme, že hmotnost oblázku je $m_{\text{oblázek}} = 1\,\mathrm{kg}$. Proto jeho hustota musí být

$$\rho_{\text{oblázek}} = \frac{m_{\text{oblázek}}}{V_{\text{oblázek}}} = \frac{m_{\text{oblázek}}}{m_2 - m_1}\rho_{\text{voda}} = \frac{1\,\mathrm{kg}}{1\,\mathrm{kg} - 0{,}75\,\mathrm{kg}} \cdot 1000\,\mathrm{kg/m^3} = 4000\,\mathrm{kg/m^3}.$$

Úloha 31. Alex položil svého medvídka na vrchol rampy, jejíž tvar vypadal jako křivka $h(x) = H - ax^2$, kde $a = 0{,}2/\mathrm{m}$ a $h(0) = H = 2{,}5\,\mathrm{m}$. Zapomněl však, že rampa je hladká, a to do té míry, že tření je zanedbatelné, takže medvídek začal velmi rychle klouzat. Jaká bude rychlost Alexova medvídka (v m/s), když bude od Alexe vzdálen ve vodorovném směru o $x = 3\,\mathrm{m}$?



Výsledek. 6

Řešení. Protože je tření medzi rampou a medvídkem zanedbatelné, celková mechanická energie medvídka se během klouzání zachovává. Pokles potenciální energie Alexova medvídka musí proto v každém okamžiku odpovídat nárůstu jeho kinetické energie. Klesání rampy je rovno $\Delta h = h(x) - h(0) = ax^2$. Proto musí platit:

$$mg\Delta h = \frac{1}{2}mv^2,$$

kde m je hmotnost Alexova medvídka a v je jeho rychlost. Hmotnost m ale nepotřebujeme znát, protože se nachází na obou stranách rovnice a můžeme ji z rovnice vykrátit. Platí tedy

$$g\Delta h = \frac{1}{2}v^2,$$
$$v = \sqrt{2g\Delta h} = \sqrt{2gax^2} = x\sqrt{2ga}.$$

Když do rovnice dosadíme hodnoty ze zadání, medvídek získá rychlost:

$$v = 3\,\mathrm{m} \cdot \sqrt{2 \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}2/\mathrm{m}} = 6\,\mathrm{m/s}.$$

Úloha 32. Lukáš měl bílou krychli. Rozhodl se namalovat každou její stěnu buď modře nebo oranžově, a to tak, aby žádné dvě protilehlé stěny neměly stejnou barvu. Potom tuto krychli rozřezal na 125 malých krychliček identických rozměrů. Kolik z těchto krychliček bude mít právě jednu stěnu modrou a současně právě jednu stěnu oranžovou?

Výsledek. 18

Řešení. Tři stěny původní kostky musely být namalovány oranžově a tři modře, jinak bychom našli alespoň jednu dvojici stěn namalovaných stejnou barvou. Navíc, aby měly protilehlé stěny různé barvy, musely mít tři stěny obarvené stejnou barvou jeden společný vrchol. Rozřezáním krychle na $125 = 5^3$ kousků získáme krychličky, jež mají 5krát kratší hranu jako původní krychle.

Aby měla malá krychlička jednu stěnu modrou a jednu oranžovou, musí mít nutně jednu hranu společnou s původní kostkou, a to konkrétně hranu, která byla společná pro jednu oranžovou a jednu modrou stěnu původní kostky. Protože malé krychličky jsou 5krát menší, podél každé takové hrany vzniklo 5 krychliček. Ale z těchto pěti mají 2 krychličky s původní krychlí společný i vrchol, a proto musí mít nutně obarvenou i třetí stěnu. Podél každé hrany původní kostky, kde se potkává oranžová a modrá stěna, bude tedy jen $5 - 2 = 3$ malých krychliček, které mají právě jednu modrou a jednu oranžovou stěnu. Jelikož původní kostka má 6 hran kde se potkává oranžová a modrá stěna, existuje celkem $6 \cdot 3 = 18$ malých krychliček vyhovujících podmínkám v zadání.

Úloha 33. Adam naprogramoval počítač tak, že když do něj zadá kladné celé číslo, počítač toto číslo vynásobí 2 021 krát samo sebou a zobrazí počet cifer, které tento výsledek má. Když Adam zadal číslo 2, počítač ukázal číslo 609. Když zadal 3, počítač ukázal 965. A nakonec, když zadal 4, počítač mu ukázal číslo 1 217. Jaké číslo počítač ukáže, když Adam zadá číslo 5?

Výsledek. 1 413

Řešení. Číslo jež vznikne tak, že vynásobíme b-krát číslo a, označujeme jako $a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b\text{-krát}}$. Vynásobíme-li 2 021 dvojek ($2^{2\,021}$) s výsledkem násobení 2 021 pětek ($5^{2\,021}$), dostaneme tím stejné číslo jako když vynásobíme 2 021 desítek ($10^{2\,021}$). Poslední jmenované číslo má velmi jednoduchý tvar – začíná se cifrou 1 a pokračuje 2 021 nulami, tj. $1\underbrace{00\ldots0}_{2\,021\text{-krát}}$.

Ze zadání víme, že číslo $2^{2\,021}$ má 609 cifer. Proto je určitě větší než číslo $1\underbrace{00\ldots0}_{608\text{-krát}}$ (tyto čísla jsou různá, neboť číslo $2^{2\,021}$ není násobkem pěti, a proto se nemůže končit cifrou 0). Zároveň je ale toto číslo menší jako číslo $1\underbrace{00\ldots0}_{609\text{-krát}}$. Máme tak:

$$1\underbrace{00\ldots0}_{608\text{-krát}} < 2^{2\,021} < 1\underbrace{00\ldots0}_{609\text{-krát}}.$$

Označíme-li n hledaný počet cifer čísla $5^{2\,021}$, stejně jako výše můžeme říci, že toto číslo je větší jako $1\underbrace{00\ldots0}_{(n-1)\text{-krát}}$ (znovu tyto čísla jsou různá, protože číslo $5^{2\,021}$ není násobkem dvou, a tudíž nemůže končit cifrou 0). Zároveň je toto číslo menší jako $1\underbrace{00\ldots0}_{n\text{-krát}}$, takže platí:

$$1\underbrace{00\ldots0}_{(n-1)\text{-krát}} < 5^{2\,021} < 1\underbrace{00\ldots0}_{n\text{-krát}}.$$

Teď se podívejme na součin $2^{2\,021}\cdot 5^{2\,021}$. Nahradíme-li oba činitele menšími odhady, dostaneme i menší odhad tohoto součinu. Proto platí:

$$1\underbrace{00\ldots0}_{608\text{-krát}}\cdot 1\underbrace{00\ldots0}_{(n-1)\text{-krát}} < 2^{2\,021}\cdot 5^{2\,021}.$$

Podobně lze použít i větší odhady jednotlivých činitelů:

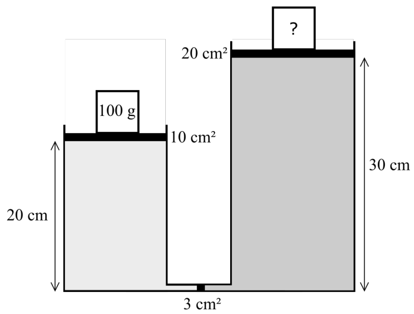
$$2^{2\,021}\cdot 5^{2\,021} < 1\underbrace{00\ldots0}_{609\text{-krát}}\cdot 1\underbrace{00\ldots0}_{n\text{-krát}}.$$

Jelikož při násobení mocnin desítky se ve výsledku pouze sčítává počet nul jednotlivých činitelů, dostáváme nerovnost:

$$1\underbrace{00\ldots0}_{(n+607)\text{-krát}} < 2^{2\,021}\cdot 5^{2\,021} < 1\underbrace{00\ldots0}_{(n+609)\text{-krát}}.$$

Tím jsme součin $2^{2\,021}\cdot 5^{2\,021}$ ohraničili dvěma čísly. Jediné další číslo v tomto intervalu jež začíná jedničkou následovanou nuly je číslo obsahující $n+608$ nul. My ale již víme, že $2^{2\,021}\cdot 5^{2\,021}$ má přesně tento tvar. Jinými slovy, platí $2^{2\,021}\cdot 5^{2\,021} = 1\underbrace{00\ldots0}_{2021\text{-krát}}$, tedy platí $n+608 = 2\,021$. Dostáváme tedy, že počet cifer čísla $5^{2\,021}$ je $n = 2\,021 - 608 = 1\,413$.

Úloha 34. Matěj má hydraulické zařízení, které můžeme vidět na obrázku. Skládá se ze dvou částí. Jedna je naplněna vodou, druhá olejem. Obě části jsou propojeny pohyblivým pístem s plochou $3\,\mathrm{cm}^2$. Část naplněná vodou má ve výšce $20\,\mathrm{cm}$ ještě druhý píst s plochou $10\,\mathrm{cm}^2$. Část naplněná olejem má také druhý píst, ten má ale plochu $20\,\mathrm{cm}^2$ a nachází se ve výšce $30\,\mathrm{cm}$. Matěj postavil na píst v části s vodou závaží o hmotnosti $100\,\mathrm{g}$. Jaká musí být hmotnost závaží (v gramech), které Matěj potřebuje položit na píst v části s olejem tak, aby systém zůstal v rovnováze?



Výsledek. 60

Řešení. Pokud se písty nehýbají, musí na ně působit z obou stran stejně velké síly. Jelikož má píst mezi vodou a olejem stejnou velikost povrchu na obou stranách, musí být stejný i tlak, který na obě strany pístu působí. Tlak působící ve směru od pístu s vodou má dvě součásti – hydrostatický tlak a tlak vyvolaný vnější silou (váha předmětu na prvním pístu). Hydrostatický tlak vodního sloupce o výšce $h_1 = 20\,\mathrm{cm}$ je $p_{h1} = h_1\rho_{\text{voda}}g$ a tlak vyvolaný závažím o hmotnosti $m_1 = 100\,\mathrm{g}$ položeným na píst o povrchu $S_1 = 10\,\mathrm{cm}^2$ je $p_{t1} = m_1g/S_1$.
Stejně tak hydrostatický tlak sloupce oleje o výšce $h_2 = 30\,\mathrm{cm}$ je $p_{h2} = h_2\rho_{\text{olej}}g$, kde ρ_{olej} je hustota oleje, a tlak vyvolaný objektem s neznámou hmotností m_2 položeným na píst o povrchu $S_2 = 20\,\mathrm{cm}^2$ je $p_{t2} = m_2g/S_2$. Rovnost celkových tlaků pak můžeme zapsat jako $p_{h1} + p_{t1} = p_{h2} + p_{t2}$, což lze rozepsat jako

$$h_1\rho_{\text{voda}}g + \frac{m_1g}{S_1} = h_2\rho_{\text{olej}}g + \frac{m_2g}{S_2},$$
$$h_1\rho_{\text{voda}} + \frac{m_1}{S_1} = h_2\rho_{\text{olej}} + \frac{m_2}{S_2}.$$

Odsud můžeme vyjádřit m_2 jako

$$m_2 = S_2 \left(h_1 \rho_{\text{voda}} - h_2 \rho_{\text{olej}} + \frac{m_1}{S_1} \right) = 20\,\text{cm}^2 \cdot \left(20\,\text{cm} \cdot 1\,\text{g/cm}^3 - 30\,\text{cm} \cdot 0{,}9\,\text{g/cm}^3 + \frac{100\,\text{g}}{10\,\text{cm}^2} \right) = 60\,\text{g}.$$

Matěj musí na druhý píst položit závaží o hmotnosti 60 g.

Úloha 35. Deset osob se zúčastnilo divadelního představení o dvou jednáních. Během prvního jednání všech deset osob sedělo v přední řadě. Skupina si ale v pauze mezi jednáními vyměnila sedačky. Všichni zůstali v přední řadě, ale jenom dvě osoby seděly na svých původních místech. Navíc všech osm osob, které neseděly na svém původním místě, se nyní nacházelo na sedačkách jednoho ze svých původních sousedů. Kolika různými způsoby si mohli místa vyměnit?

Výsledek. 15

Řešení. Nejdíve si vyberme dvě osoby, které si místa nevyměnily. Tyto dvě osoby dělí zbytek lidí na tři skupiny – nalevo od zafixovaných sedadel, mezi nimi a napravo od nich. V takovém rozdělení považujeme i skupinu o nula osobách za skupinu. Všimněme si, že člen každé skupiny musí sedět na sedačce, která původně patřila jinému členovi stejné skupiny (v opačném případě by se nejednalo o jejich souseda).
Nyní se podívejme na jeden okraj neprázdné skupiny – sedačku, která sousedí s fixovaným místem nebo která se nachází na okraji řady. Jelikož má tato sedačka ve skupině pouze jednoho souseda, osoba původně sedící na tomto místě měla jen jednu možnost, kam si přesednout. Stejně tak pro osobu sedící po výměně na sedačce na okraji existuje jen jedna možnost, jak mohla sedět předtím. To ale znamená, že zmíněný pár si vyměnil sedačky a vytvořil nový okraj. Tudíž ve skupině můžeme párovat osoby, které si jednoduše pouze vymění místa. To znamená, že každá skupina musí mít sudý počet členů tak, abychom byli schopni je vyměnit v souladu se zadáním.
Nyní tak můžeme každý takový pár „spojit“ do jedné osoby, čímž vytvoříme 4 „dvojosoby“. Otázkou zůstává, kolika způsoby mezi ně můžeme rozmístit dvě fixované osoby? Se dvěma fixovanými osobami máme 6 pozic, na které může být osoba umístěna. Můžeme tak první fixovanou osobu umístit 6 způsoby a druhou 5 způsoby, což nám dává $6 \cdot 5 = 30$ způsobů. Nicméně zatím jsme každou možnost počítali dvakrát, protože pokud vyměníme dvě fixované osoby, nezískáme novou možnost. To znamená, že osoby se mohly vyměnit 15 různými způsoby.

Úloha 36. Jonáš vlastní dvě pružinky, jednu s tuhostí 3 N/cm a druhou s 6 N/cm. Jaká je tuhost pružinky (v N/cm), kterou získal jejich spojením za sebe?

Výsledek. 2

Řešení. Když Jonáš natáhne spojené pružinky silou F, obě se natahují touto silou. Pružinka s tuhostí $k_1 = 3\,\text{N/cm}$ se natáhne o F/k_1. Obdobně pružinka s tuhostí $k_2 = 6\,\text{N/cm}$ se prodlouží o F/k_2. Celkové prodloužení spojených pružinek je pak součtem těchto prodloužení. Když si označíme neznámou tuhost spojených pružinek jako k, lze toto prodloužení zapsat i jako F/k. Musí proto platit

$$\begin{aligned} \frac{F}{k} &= \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}, \\ \frac{1}{k} &= \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}, \\ k &= \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}. \end{aligned}$$

Spojené pružinky tak mají tuhost

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{3\,\text{N/cm} \cdot 6\,\text{N/cm}}{3\,\text{N/cm} + 6\,\text{N/cm}} = 2\,\text{N/cm}.$$

Úloha 37. Jaro dostal k Vánocům stolní hru, jejíž herní deska se skládá z 2 020 hracích polí poskládaných do kruhu. Jaro postaví žeton na libovolné pole. Poté hraje následujícím způsobem: v prvním kole posune žeton o 2 pole ve směru hodinových ručiček, ve druhém o 4 pole ve směru hodinových ručiček, ve třetím o 6 polí a tak dále – v každém tahu posune žeton o 2 pole dál než v tom předchozím. Jaký nejmenší počet tahů musí Jaro udělat, než se žeton zastaví na poli, kde byl položen na začátku?

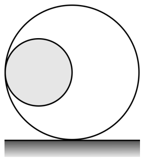
Výsledek. 100

Řešení. Po tom, co Jaro provede n tahů, žeton se pohne o $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$ polí. Když vytkneme číslo 2 a využijeme vzorec pro součet prvních n kladných celých čísel, získáme

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1).$$

Abychom dostali žeton po posunutí o $n(n+1)$ polí na pole začáteční, číslo $n(n+1)$ musí být dělitelné 2 020. Prvočíselný rozklad čísla 2 020 je $2\,020 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$, číslo $n(n+1)$ tak musí být dělitelné prvočíslem 101. Nejmenší n, proto které toto nastane, je $n = 100$, tj. když $n + 1 = 101$. V tomto případě navíc platí, že $n = 100$ je násobek $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$ a tudíž platí, že pro $n = 100$ je číslo $n(n+1)$ dělitelné 2 020.
Tím jsme dokázali, že po 100 tazích žeton dorazí na počáteční pole a že by tato situace nenastala po méně tazích. Jaro tak musí udělat nejméně 100 tahů.

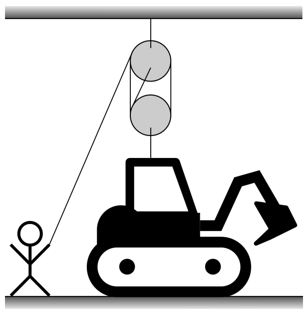
Úloha 38. Kouzelník Marco vložil míč s poloměrem 20 cm a hmotností 0,5 kg do většího míče s poloměrem 40 cm a stejnou hmotností 0,5 kg tak, jak je ukázáno na obrázku. Marco poté ukončil kouzlo, které drželo vnitřní míč na místě, a oba míče se začali pohybovat. O chvíli později se malý míč zastavil na dně toho většího. O kolik centimetrů se větší míč posunul ze svého původního bodu doteku s povrchem?



Výsledek. 10

Řešení. Jediné vnější síly působící na oba míče jsou tíhová síla a síla, kterou na míče působí podložka. Obě tyto síly působí ve svislém směru, což znamená, že těžiště našeho systému se vodorovném směru nikam nepohne. Větší míč se proto posune o takou vzdálenost, o jakou je v původní poloze vzdáleno společné těžiště od středu většího míče.
Těžiště většího míče je v jeho středu (vzdáleno je tedy o 0 cm v horizontálním směru). Těžiště menšího míče je také v jeho středu, tj. ve vzdálenosti 20 cm od středu většího míče. Jelikož oba míče mají stejnou hmotnost, těžiště celého systému je ve středu úsečky spojující těžiště míčů, tj. ve vzdálenosti 10 cm od středu většího míče. Větší míč se tedy pohne rovněž o 10 cm.

Úloha 39. Bořek Stavitel chce usnadnit práci na staveništi. Julča mu doporučila vybudovat systém kladek, který je na obrázku. Klíčová část tohto systému spočívá v tom, že lano je několikrát vedeno přes kladky (lano neprokluzuje a kladky se otáčejí bez tření). Bořek může tahat za lano maximální silou 800 N a potřebuje zvednout Béďu, který váží 3500 kg. Kolikrát minimálně musí jít lano pod volnou kladkou, aby mohl Bořek Béďu zvednout?



Výsledek. 22

Řešení. Bořek tahá za lano silou $F = 800\,\mathrm{N}$. Napětí v laně je tak stejné jako síla F v každém jeho bodě. To platí také pro spodní kladku a obě strany lana, které je kolem ní. Lano proto na spodní kladku působí silou $2F$, která kladku tahá vytahuje nahoru. To platí pro každou smyčku kolem spodní kladky, tzn. pro n je celková síla působící na spodní kladku $2nF$. Aby mohl Bořek zvednou Béďu o hmotnosti $m = 3500\,\mathrm{kg}$, musí tato síla být větší než tíhová síla působící na Béďu. Proto

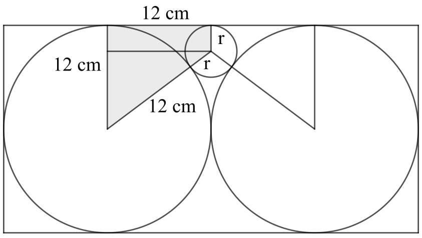
$$
\begin{aligned}
2nF &\geq mg, \\
n &\geq \frac{mg}{2F} = \frac{3500\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2}}{2 \cdot 800\,\mathrm{N}} = 21{,}875.
\end{aligned}
$$

Můžeme vidět, že lano se musí kolem spodní kladky otočit alespoň 22krát.

Úloha 40. Laura chce vymyslet nový design olympijské vlajky. Nakreslila proto obdélník s délkami stran 24 cm a 48 cm. Poté dovnitř nakreslila dvě kružnice s poloměrem 12 cm a to tak, že tyto kružnice měly stejnou tečnu, která procházela jediným bodem jejich doteku a kružnice zároveň jedna k druhé byly vnější. Nakonec nakreslila menší kružnici, která byla tečná k oběma předchozím kružnicím a k delší straně obdélníku. Jaký poloměr v centimetrech má menší kružnice?

Výsledek. 3

Řešení. Poloměr menší kružnice označíme jako r. Nakreslíme-li si náčrtek, můžeme si zapsat některé délky:



Zaměřme se na zvýrazněný pravoúhlý lichoběžník. Jeho základny jsou poloměry větší a menší kružnice. Rameno, které je kolmé k základnám, má také délku rovnou poloměru větší kružnice a zbývající rameno má délku, která je rovna součtu poloměrů větší a menší kružnice. Jak lze vidět i z obrázku, lichoběžník lze rozdělit na obdélník a pravoúhlý trojúhelník. V tomto trojúhelníku jsou délky odvěsen $12\,\mathrm{cm}$ a $12\,\mathrm{cm} - r$, délka přepony je pak $12\,\mathrm{cm} + r$. Z Pythagorovy věty tedy platí

$$\begin{aligned}(12\,\mathrm{cm})^2 + (12\,\mathrm{cm} - r)^2 &= (12\,\mathrm{cm} + r)^2,\\ 144\,\mathrm{cm}^2 + 144\,\mathrm{cm}^2 - r\cdot(24\,\mathrm{cm}) + r^2 &= 144\,\mathrm{cm}^2 + r\cdot(24\,\mathrm{cm}) + r^2,\\ 144\,\mathrm{cm}^2 &= 2\cdot r\cdot(24\,\mathrm{cm}),\\ r &= \frac{144\,\mathrm{cm}^2}{48\,\mathrm{cm}} = 3\,\mathrm{cm}.\end{aligned}$$

Poloměr menší kružnice je $r = 3\,\mathrm{cm}$.

Úloha 41. Lucie si hraje s ledem. Vezme si malý oblázek a zamrazí ho do ledové krychle. Potom si vezme mísu s vodou a položí krychli na hladinu vody. Část krychle, která je nad hladinou, je 3,2 mm vysoká. Poté si Lucie vezme malou skleněnku a zamrazí ji do ledové krychle o stejných rozměrech, jako byla ta předchozí. Když tuto kostku položí do vody, část krychle nad vodou je vysoká jen 2,6 mm. Lucie ale stále není spokojená, a tak obě krychle rozmrazí a skleněnku s oblázkem zamrazí do krychle o stejné délce strany jako u obou předchozích. Když položí krychli do vody, část krychle nad vodou je vysoká 1,9 mm. Jaká byla délka strany (v milimetrech) každé krychle?

Výsledek. 39

Řešení. Když Lucie zamrazuje oblázek a skleněnku do krychle, nemění její objem, ale zvyšuje hmotnost, což mění její průměrnou hustotu. Pokud se krychle nepotopí, objem ponořené části je přímo úměrný průměrné hustotě krychle, tedy i výška ponořené části musí být přímo úměrná průměrné hustotě. Navíc přidání oblázku (nebo skleněnky) vždy zvýší průměrnou hustotu o stejnou hodnotu. Proto jejich zamrazení do krychle zvýší výšku ponořené části krychle o stejnou hodnotu, což také znamená, že sníží výšku části nad hladinou o stejnou hodnotu.

Když jsme v krychli měli pouze oblázek a poté přidali skleněnku, výška neponořené části klesla o $3{,}2\,\mathrm{mm} - 1{,}9\,\mathrm{mm} = 1{,}3\,\mathrm{mm}$. Přidání skleněnky tak vždy sníží výšku nepotopené části o 1,3 mm. Pokud si vezmeme krychli pouze se skleněnkou a tu odstraníme, krychle obsahující pouze led by měla výšku nepotopené části $2{,}6\,\mathrm{mm} + 1{,}3\,\mathrm{mm} = 3{,}9\,\mathrm{mm}$. Čistě ledová krychle s délkou strany a má objem $V = a^3$ a hmotnost $m = \rho_{\mathrm{led}}V$. Je-li objem ponořené části $V' = a^2(a-h)$, kde $h = 3{,}9\,\mathrm{mm}$ je výška neponořené části, potom z Archimedova zákona získáváme

$$\begin{aligned}mg &= V'\rho_{\mathrm{voda}}g,\\ a^3\rho_{\mathrm{led}} &= a^2(a-h)\rho_{\mathrm{voda}},\\ a(\rho_{\mathrm{voda}} - \rho_{\mathrm{led}}) &= h\rho_{\mathrm{voda}},\\ a &= h\frac{\rho_{\mathrm{voda}}}{\rho_{\mathrm{voda}} - \rho_{\mathrm{led}}} = 3{,}9\,\mathrm{mm}\cdot\frac{1000\,\mathrm{kg/m^3}}{1000\,\mathrm{kg/m^3} - 900\,\mathrm{kg/m^3}} = 39\,\mathrm{mm}.\end{aligned}$$

Luciina krychle tak má délku strany 39 mm.

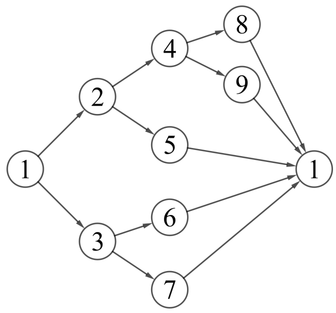
Úloha 42. Majo začal psát číselný seznam: 1, 2, 4, 8, 16, 32 a tak dále, tj. každé napsané číslo bylo dvakrát větší než číslo předchozí. Tímto způsobem napsal celkem 555 čísel. Poté vytvořil druhý seznam, obsahující pouze první cifry čísel z prvního seznamu. Druhý seznam tak začínal čísly 1, 2, 4, 8, 1, 3 . . . a končil čísly . . . 1, 3, 7, 1, 2, 5. Majo si všiml, že číslo 8 je na druhém seznamu napsáno 30krát a že poslední číslo na prvním seznamu má 167 cifer. Kolikrát je na druhém seznamu napsáno číslo 9?

Výsledek. 24

Řešení. Na první pohled to vypadá, že mezi čísly ve druhém seznamu neplatí žádná zákonitost. Opak je ale pravdou. Když si napíšeme některé z prvních cifer z druhého seznamu, můžeme se všimnout, že číslo 1 se zde objevuje až podezřele často. Od něj čísla vzrůstají, dokud se nedostanou zpět k 1. Pojďme se proto zaměřit na to, jaká čísla mohou ve druhém seznamu následovat po sobě:

- Číslo 1 může být následováno jen 2 nebo 3.
- Číslo 2 může být následováno jen 4 nebo 5.
- Číslo 3 může být následováno jen 6 nebo 7.
- Číslo 4 může být následováno jen 8 nebo 9.
- Čísla 5, 6, 7, 8 a 9 mohou být následovány pouze číslem 1, protože desítka se přesouvá na další cifru.

Možné posloupnosti čísel ve druhém seznamu jsou znázorněna na obrázku níže:



Můžeme tedy vidět, že jedničky rozdělují čísla ve druhém seznamu na oddělené bloky. Navíc, téměř všechny bloky se skládají ze třech čísel (počítáme zde i číslo 1). Existují pouze dva bloky, které obsahují 4 čísla – blok 1, 2, 4, 8 a blok 1, 2, 4, 9. Toto jsou navíc jediné bloky, které obsahují číslice 8 a 9. Nyní si musíme uvědomit ještě jednu věc. Když narazíme ve druhém seznamu na číslo 1, potom odpovídající číslo v prvním seznamu bude mít o cifru více než předchozí číslo v tomtéž seznamu – to proto, že číslo 1 se objevuje jako první cifra v okamžiku, kdy číslo v prvním seznamu „přeroste“ před desítku.

Nyní poskládáme všechno dohromady. První blok z druhého seznamu odpovídá jednociferným číslům z prvního seznamu. Navíc, poslední tři čísla ve druhém seznamu jsou 1, 2, 5, tudíž vytvářejí kompletní blok který odpovídá posledním, 167ciferným číslům z prvního seznamu. Druhý seznam proto musí obsahovat 167 bloků čísel. Pokud by všechny bloky obsahovaly 3 čísla, měl by druhý seznam dohromady pouze $3 \cdot 167 = 501$ čísel. Čtyři čísla tak musí být obsažena v $555 - 501 = 54$ blocích. Ve druhém seznamu se tak musí čísla 8 nebo 9 objevit 54krát. Jelikož se číslo 8 objevuje 30krát, číslo 9 se musí ve druhém seznamu objevit celkem $54 - 30 = 24$krát.