Rozvoj geometrických představ

Studijní opora DiV

Eva Nováková

Obsah

Průvodce studiem:

Předkládaný učební text je určen vám, studentům učitelství pro mateřské školy v prezenční i kombinované formě. Navazuje na text „Rozvoj předčíselných představ“. Je studijní oporou k předmětu „Rozvoj geometrických představ“, jako součásti kurzu, který vás má vybavit potřebnými oborově předmětovými kompetencemi k rozvíjení matematické pregramotnosti - matematických představ a zkušeností z reálného života dítěte v prostředí mateřské školy.

Využít zkušeností z reálného života a na základě nich rozvinout velký potenciál dětského prožívání vlastních aktivit vyžaduje od učitelky mateřské školy alespoň základní oborově předmětové, v tomto případě geometrické, znalosti. Potřebné základy vybraných partií geometrie jako jedné ze základních oblastí matematiky poskytuje následující studijní materiál. Pokusím se o co největší srozumitelnost výkladu, ale vždy tak, aby matematická správnost a korektnost zůstala zachována.

Text je členěn do 5 kapitol. Jednotlivé kapitoly mají jednotnou strukturu. Záměrem autorky je navázat a udržovat s vámi kontakt prostřednictvím *průvodce studiem*. Každá z kapitol má zřetelně vymezené *cíle.* V průběhu výkladu jsou zdůrazněny *důležité pasáže textu*, kterým je třeba věnovat zvýšenou pozornost. Studium vyžaduje samostatné vyřešení *kontrolních úkolů*, které byste po prostudování kapitoly měli umět vyřešit. K propojení osvojovaných geometrických znalostí s konkrétními aktivitami, které lze vhodným způsobem použít v prostředí mateřské školy, jsou zařazeny *náměty pro praktická cvičení.* Rozšíření a prohloubení vašich poznatků nad rámec základního učiva kurzu je umožněno prostudováním partií označených *pro zájemce.* V závěru každé kapitoly je uvedeno stručné *shrnutí* jejího obsahu a nejdůležitější *pojmy k zapamatování*. V závěru celého textu je *seznam použité a doporučené literatury*.

K ilustraci pojmů, námětů úloh a dalších aktivit bylo použito několika zdrojů, z nichž jsou převzaty také některé obrázky uvedené v textu:

FRANCOVÁ, M., MATOUŠKOVÁ, K., VAŇUROVÁ, M.: *Texty k základům elementární geometrie pro studium učitelství pro 1. st. ZŠ.* 2. opr. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 1994.

STOPENOVÁ, A.: *Základy matematiky 3, 5. Texty k distančnímu vzdělávání.* Olomouc: UP 2006.

FUCHS, E., LIŠKOVÁ, H., ZELENDOVÁ, E.: *Manipulativní činnosti rozvíjející matematickou gramotnost.* JČMF 2013.

OPAVA, Z.: *Matematika kolem nás*. Praha: Albatros 1989

V předmětu budeme využívat vašich dosavadních znalostí a vlastních zkušeností s geometrií a jejími praktickými aplikacemi v roli žáků základních a středních škol. Půjde nám společně o to, ukázat matematické poznatky jako zajímavé a podnětné pro rozvoj vašich profesních kompetencí a pokusit se rozvinout příznivý vztah k matematice.

Závěrem bych chtěla poděkovat Mgr. Jitce Panáčové, Ph.D. za pečlivé přečtení textu i doplnění obrazové dokumentace.

Autorka

1. Geometrická komponenta matematické pregramotnosti - „geometrické představy dítěte předškolního věku“

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni

- obecně charakterizovat matematickou pregramotnost dítěte předškolního věku
- popsat složky matematické pregramotnosti, které mají geometrickou povahu
- uvést příklady aktivit, jimiž lze geometrické představy dítěte rozvíjet

Průvodce studiem:

Náš výklad začneme připomenutím toho, co patří mezi obvyklé činnosti a aktivity dětí v mateřské škole, ale i v rodinném prostředí. Kromě přirozených situací – spontánní hry, vycházky do přírody, sport, stolování aj. lze záměrně připravovat situace, v nichž si dítě své okolí, tj. *trojrozměrný prostor,* ve kterém žije, uvědomuje, organizuje a orientuje se v něm. Tím se rozvíjí jeho tzv. matematická pregramotnost.

Pravděpodobně jste již v různých souvislostech slyšeli o různých „gramotnostech“ dnešního člověka - například

- *čtenářské* (ve smyslu porozumění textům, posouzení spolehlivosti a platnosti informací a jejich využití v životě),
- *mediální* - jako schopnosti vyhledávat informace, porozumět všem jejich významům, schopnost sdělení analyzovat a porovnávat s dosavadními zkušenostmi, schopnost kriticky hodnotit,
- *počítačové - ICT* (dovednost využívat moderní informační a komunikační technologie ve všech oblastech života moderního člověk, jako nástroje vzdělávání, komunikace, obchodu, zábavy aj.),
- *finanční* (chápané jako soubor znalostí, dovedností a hodnotových postojů člověka nezbytných k tomu, aby finančně zabezpečil sebe a svou rodinu v současné společnosti a aktivně vystupoval na trhu finančních produktů a služeb).

Podívejme se blíže na gramotnost **matematickou.**

1.1 Matematická gramotnost a pregramotnost

Matematická gramotnost se obvykle chápe jako „schopnost použít nástroje matematiky v reálném světě pro vlastní potřebu člověka, schopnost poznat a pochopit roli, kterou hraje matematika ve světě, dělat dobře podložené úsudky a proniknout do matematiky tak, aby splňovala jeho životní potřeby jako tvořivého, zainteresovaného a přemýšlivého občana“ (Straková, 2002, s.11).
Je zřejmé, že rozvíjet matematickou gramotnost je základním cílem a smyslem matematického vzdělávání žáka v základní a střední škole. Znamená to přesvědčit žáky, že matematické vzdělávání je pro ně užitečné a smysluplné, že rozvíjí schopnost jejich samostatného a kritického myšlení, že je složkou lidské kultury a tedy i pomocníkem v řešení

problémů každodenní praxe. Na tomto základě by pak matematické vzdělávání mělo rozvíjet zvídavost žáků, klást otázky a pracovní návyky žáků. K vytváření předpokladů pro rozvoj matematické gramotnosti je však potřebné využít příležitostí, které nabízí již předškolní věk dítěte.

Důležitá pasáž textu:

U dítěte ve věku do 6 let, tj. do zahájení povinného školního vzdělávání, mluvíme o **„matematické pregramotnosti“** - jako o propedeutické, přípravné fázi formování matematické gramotnosti. Jde především o schopnost uplatnit v praktickém životě, v realitě, při hrách, manipulativních činnostech a dalších aktivitách:

- geometrické představy (vnímání prostoru, orientace v rovině a prostoru)
- předčíselné představy (vnímání a rozlišení kvantity, určení počtu)
- práci s daty (třídění a řazení předmětů, zobrazení)
- propedeutiku míry (délka, obsah, objem, hmotnost)
- znalosti elementární matematické symboliky a terminologie (pojmenování geometrických tvarů, čtení číslic)
- uplatnění rytmu (synchronizace, pravidelnost, závislost)
- propedeutiku logiky (jazyková a manipulativní úroveň).

1.2 Geometrické představy

Náměty konkrétních aktivit, her a manipulativních činností běžně používaných v mateřské škole, lze najít na internetových portálech (portál „mateřská školka“,…), v dětských časopisech (Sluníčko aj.) i v dalších tištěných či interaktivních materiálech.

Geometrická komponenta matematické pregramotnosti (matematických představ) obvykle zahrnuje

a) **vnímání prostoru, určování směru a orientace v prostoru a v rovině**, prostorové vztahy a jejich kombinace:

vnímat a popsat rozmístění předmětů v prostoru (v místnosti, na hřišti,…) či rovině (na obrázku, v knize): nahoře, dole, nad, pod, vedle, vlevo, vpravo, daleko, blízko, vysoko,…

b) **stanovení cesty**, jejího průběhu a směru, **řešení labyrintů** v rovině a v prostoru

řešení situací s čarami otevřenými a uzavřenými (topologická propedeutika):

ukázat či vyznačit tužkou, kudy dojde myška k sýru nebo mravenec do svého mraveniště; projít prostorovým labyrintem v přírodě (v parku, na dětském hřišti, „kukuřičáci“); jakou rybu chytil který rybář,…

c) představy o **elementárních geometrických tvarech** prostorových a rovinných, jejich **poznávání** a vzájemné **rozlišování** na základě zrakem (vizuální) a hmatem (haptické, taktilní) vnímané odlišnosti (trojúhelník, kruh, čtverec, obdélník, oblá a hranatá tělesa):

od předškolního věku děti rozlišují, co je kulaté, oblé, hranaté, špičaté, později rozlišují geometrické útvary rovinné a prostorové. Konkrétními modely jsou např. míč, kostky ze stavebnice, desky různých tvarů aj.

d) představy **o velikosti objektů** jsou propedeutikou délky úsečky, obsahu rovinného útvaru - čtverce, obdélníku) či objemu tělesa (krychle, kvádr,…):

rozměry předmětů - délka, výška, šířka - jsou vždy podložené zkušenostmi, které získají děti jednoduchým „měřením“ (např. krokováním, stopou - bota, dřívkem,…), odhadem nebo vzájemným porovnáváním rozměrů,

e) **shodnosti, podobnosti, pravidelnosti, zákonitosti**, uplatnění rytmu:
činnosti využívající překládání papíru, tvorba podle vlastní fantazie či sděleného námětu - origami, obrázky symetrické podle osy - dokreslování „druhé poloviny“ obrázku, didaktické pomůcky typu Blokus, Magformers aj.

f) **vytváření prostorových modelů a maket konkrétních situací**, využití stavebnic a her s prvky tvořivosti, fantazie, konstrukce, při uplatnění manuální motorické zručnosti:
stavebnice LEGO, SEVA, MERKUR, modelína,…stavby z krychlí, činnosti s „geodeskou“, stavíme ploty, ohraničování a oplocování, rozdělování a půlení

g) **grafická reprodukce konkrétní reality** - kreslení, doplňování obrázků, omalovánky, tangram, mozaiky...:
sestavování rozstříhaných obrázků podle předlohy (pohlednice, pohádkové motivy), hry typu pexeso nebo puzzle, umožňující rozvíjení paměti pro rozložení obrázků v rovině aj.

Průvodce studiem:

Uvedením několika námětů pro dětské aktivity jsme pochopitelně nevyčerpali všechny možnosti, které se tvořivému učiteli v mateřské škole nebo rodiči předškolních dětí pro rozvíjení geometrické složky matematické pregramotnosti nabízejí. Možná si ani neuvědomují, že se zde jedná o formování budoucí geometrické gramotnosti dítěte.

K tomu, aby učitelka v MŠ dokázala záměrně a cílevědomě matematickou pregramotnost rozvíjet, je třeba, aby si systematicky osvojila alespoň základní poznatky z geometrie. Budou obsahem následujících kapitol.

Kontrolní úkoly:

1. Popište, matematicky vyjádřete a zdůvodněte (na základě znalostí z předchozího studia) podstatu třídění:

a) předmětů/kostek z dřevěné stavebnice - na oblé a hranaté,
b) dřevěných, plastových nebo papírových geometrických tvarů - na kruhy, čtverce, obdélníky a trojúhelníky.

2. Vytvořte si portfolio úloh/pracovních listů pro rozvoj geometrických představ v MŠ.
3. Seznamte se s didaktickou pomůckou MagFormers a zpracujte alespoň 3 náměty na její využití pro rozvoj geometrických představ.

Pojmy k zapamatování:

- matematická gramotnost
- matematická pregramotnost
- geometrické představy dítěte předškolního věku

Shrnutí:

Matematická gramotnost jako hlavní cíl výuky matematiky pro reálný život se rozvíjí již v předškolním věku. Mluvíme o matematické pregramotnosti. Její geometrická komponenta je zaměřena na orientaci v rovině a prostoru, řešení labyrintů, seznámení s elementárními geometrickými tvary, první představy o velikosti rovinných a prostorových objektů, poznávání shodnosti, podobnosti, pravidelnosti, zákonitosti, vytváření prostorových modelů konkrétních situací a grafickou reprodukci konkrétní reality. Probíhá ve spontánních a didaktických hrách rozmanitého zaměření s využitím manipulativních činností.

2. Základní geometrické pojmy v historických souvislostech

Cíle

Prostudování této kapitoly Vám umožní

- krátce se seznámit s dílem vybraných matematiků starověkého Řecka, kteří položili základy geometrie
- pochopit a interpretovat význam „euklidovské geometrie“.

Průvodce studiem:

Zvu vás na malý exkurz do historie matematiky, který však nebude mít podobu souvislejšího výkladu. Jsem přesvědčena, že vám přesto poskytne několik zajímavých informací k rozšíření vašeho poznání. Bude zaměřen na **geometrii**. Geometrie je jednou z nejstarších matematických disciplín. Utvářela se jako souhrn a zobecňování poznatků získaných lidmi při jejich činnostech, zejména pracovních, mořeplavbě, zeměměřictví, zemědělství nebo stavebnictví. S rozvojem společnosti a vznikem státních útvarů starověku asi od roku 5 000 př. n. l. (Egypt, Mezopotámie, Indie, Čína) si potřeba zemědělství, stavebnictví a obchodu postupně vyžadovala i rozvoj matematiky, tedy také geometrie. Například již na egyptských papyrech se dochovala řada zajímavých a náročných geometrických úloh (výpočet obsahu trojúhelníka). V celé své historii měla geometrie svůj nesmírný praktický význam, který si udržela i do dnešní doby.

Největší vliv na rozvoj matematiky - a tedy také geometrie - mělo nesporně starověké Řecko. Uveďme alespoň jména, která si jistě pamatujete ze studia matematiky a filozofie na základní a střední škole: *Thales z Miletu, Pythagoras ze Samu, Archimedes ze Syrakus, Euklides z Alexandrie.* Připomeneme si o nich alespoň několik významných údajů, které se pokusíme konfrontovat s Vašimi školními znalostmi. Pojmy, které byste měli znát z předchozího vzdělávání, vyznačíme kurzívou. Pokud potřebujete jejich znalost zopakovat, využijte učebnice pro základní školu.

Pro zájemce:

Thales z Milétu (asi 625 – asi 546 př. n. l.)

Významný starověký učenec, tradice s ním (a jeho tzv. milétskou školou) ztotožňuje počátek vědeckého vývoje. Jako obchodník a politik se seznámil se soudobými přírodovědnými a astronomickými poznatky – v Babylónii s periodicitou slunečních a měsíčních zatmění (úspěšně prý předpověděl zatmění Slunce 28. 5. 585 př. n. l.), tvrdil, že světlo Měsíce pochází od Slunce, v Egyptě s matematickými poznatky (vypočítával prý výšku pyramid podle jejich stínů – *podobnost trojúhelníků*). Dále se mu přisuzuje řada geometrických objevů a výsledků: *průměr* dělí *kruh* na 2 poloviny, *úhly* při základně *rovnoramenného trojúhelníka jsou shodné*, *vrcholové úhly* jsou shodné, *všechny úhly nad průměrem kružnice jsou pravé* (*Thaletova věta*).

Pythagoras ze Samu (asi 560 – asi 480 př. n. l.)

Starořecký filozof a matematik s jehož jménem (a tzv. pythagorejskou školou) je spojován vznik matematiky jako vědy. Pythagorejská koncepce matematiky (a veškeré filozofie) je aritmetická: čísla (přirozená) a jejich vzájemné poměry se stala základem pythagorejské koncepce výkladu světa. Podle Pythagora základem jsoucna je číslo (arithmós).
Populární *Pythagorova věta* byla ovšem známa již podstatně dříve (v Babylonu či Egyptě) – odtud pojem „pythagorejská čísla“ (např. 3, 4, 5) nebo pythagorejské trojúhelníky ($3^2 + 4^2 = 5^2$). Od pythagorejců pochází i tzv. zákon (hudební) harmonie, hudební úměra (čtveřice 12, 9, 8, 6 – č. 9 je *aritmetickým průměrem* 12 a 6, č. 8 jejich *harmonickým průměrem*.

Archimédes ze Syrakus (287 – 212 př. n. l.)

Všestranný matematik, fyzik a technik, jeden z nejvzdělanějších vědců starověku. Proslulé je i zvolání *„Heuréka“ (Nalezl jsem, objevil jsem)* po objevu slavného Archimédova zákona. Tradují se poslední slova Archimédova: „*Noli tangere circulos meos“ (Nedotýkej se mých kruhů)* – jimiž chtěl uchránit v písku narýsované obrazce před dobývajícími vojáky.

Je autorem mnoha spisů s tématikou matematickou (mj. odvodil vzorce pro výpočet plošných *obsahů a objemů* těles – *válec, kužel, koule,* se značnou přesností stanovil hodnotu čísla π – *kruh* vyjádřil jako šestadevadesátiúhelník),

Kontrolní úkoly:

1. Vyhledejte v učebnicích pro základní školu:

a) Thaletovu větu
b) Pythagorovu větu
c) Archimédův zákon.
Vysvětlete jejich podstatu, vyřešte ke každému pojmu alespoň jednu praktickou úlohu, na které ukážete význam pro dnešního člověka.

2. Vyhledejte na mapě a v dostupné literatuře nebo internetu geografické údaje uvedené v této kapitole (státní útvary starověku, rodiště a působiště významných geometrů). Sestavte časovou přímku a vyznačte do ní data uvedená v kapitole.

Důležitá pasáž textu:

Geometrie (z řečtiny: *gé, geo – země; metres, metrika - měření*) **je nauka o vlastnostech a vzájemných vztazích prostorových a rovinných útvarů.** Část geometrie, s níž se seznamují žáci na základních školách, se nazývá **elementární** neboli **„euklidovská“ geometrie.**
Základními kameny, na nichž budeme v našem výkladu stavět, jsou *bod, přímka, rovina a prostor.* Budeme používat množinovou terminologii a symboliku, kterou jste si osvojili v předmětu „Rozvoj předčíselných představ“. *Pro množiny bodů (bodové množiny)* se v geometrii užívá obvykle názvu **geometrický útvar.** *Základní množinou* bude **prostor E_3** (nebo **rovina E_2**), **body** jsou *prvky prostoru nebo roviny*, ostatní **geometrické útvary** chápeme obvykle jako *podmnožiny prostoru nebo roviny.*

Geometrie v rovině se označuje termínem *planimetrie*, geometrie v prostoru je *stereometrie*.

Průvodce studiem:

Pro vysvětlení symbolu $\mathbf{E}_3$ resp. $\mathbf{E}_2$ se musíme opět podívat do historie. Písmeno **E** připomíná řeckého matematika Euklida.

Euklidés (Eukleidés) z Alexandrie (asi 340 – asi 278 př. n. l.)
Přesná životní data nejsou známa – historky jej líčí jako skromného, ale hrdého muže, schopného říci pravdu do očí i všemocným vládcům. Byl autorem díla, které ovlivnilo geometrii rozhodujícím způsobem, které bylo po bibli přeloženo do největšího počtu jazyků, bylo mnohokrát vydáno a stalo se po dvě tisíciletí základem učebnic elementární geometrie na celém světě. Toto dílo s názvem „*Stoicheia*" (v překladu *Základy* nebo také *Prvky*) tvoří 13 knih (prvních 6 o planimetrii, 4 o numerické aritmetice a 3 o stereometrii), shrnul tehdejší geometrické znalosti řeckých matematiků a obohatil je vlastním *způsobem výkladu*: opírá se o
- „definice" základních pojmů (23 objektů, například: „Bod je to, co nemá části", „Čára je délka bez šířky", „Rovina je to, co má jen délku a šířku"), apod. Po těchto definicích následuje
- 5 *postulátů* (1.„Dva různé body lze spojit vždy jen jedinou přímkou p." 2.„Úsečku AB lze vždy neomezeně prodloužit." 3.„Z libovolného středu S lze vždy sestrojit kružnici k s libovolným poloměrem r." 4.„Všechny pravé úhly R jsou shodné." 5.„Daným bodem A lze k dané přímce p vést jedinou rovnoběžku" - tento postulát uvádím ve zjednodušené podobě, kterou poznávají žáci při rýsování rovnoběžek a
- 9 *axiomů* (např. „Celek je větší než jeho část", „Jsou-li dvě veličiny rovny třetí veličině, jsou si rovny navzájem").
Odtud *deduktivní metodou* popsal celý „geometrický svět". Formuloval základní vztahy mezi pojmy a vytvořil tak první *axiomatickou soustavu geometrie (tzv.* ***klasická, euklidovská geometrie****).*

Pro zájemce:
Axiomy euklidovské geometrie zpracoval německý matematik *David Hilbert* (1862-1943). Rozdělil je do pěti skupin: axiomy incidence, axiomy uspořádání, axiom rovnoběžnosti, axiomy shodnosti, axiomy spojitosti.

3. Geometrické útvary a jejich vlastnosti - (teoretické základy)

Cíle

Cílem této kapitoly je, abyste po jejím prostudování uměli:

- charakterizovat/definovat, vysvětlit a používat (narýsovat, vymodelovat) základní geometrické útvary jednorozměrné, dvojrozměrné (rovinné útvary) a trojrozměrné (tělesa)
- vyjádřit vztahy a souvislosti mezi nimi
- popsat základní polohové vlastnosti přímek a rovin

Průvodce studiem:

Následující kapitola, která je jádrem celého textu, vám umožní zopakovat si, zpřesnit a do vzájemných souvislostí zařadit geometrické pojmy, které patří do základů školské matematiky. Obsahuje teoretické - oborově předmětové - základy, které jsou nezbytné pro získání potřebného nadhledu nad efektivní a smysluplnou činností kompetentního učitele v mateřské škole. Kapitole je třeba věnovat mimořádnou pozornost, snažit se jednotlivé pojmy pochopit a porozumět jim.
Nejdůležitějšími geometrickými pojmy jsou *body* (označujeme zpravidla velkými písmeny latinské abecedy: A, B, X,…), *přímky* (označujeme buď malými písmeny latinské abecedy nebo pomocí bodů, jimiž jsou určeny: p, q, $\overleftrightarrow{AB}$,...), *roviny* (označujeme obvykle malými písmeny řecké abecedy: α, ϱ, π,…).

3.1 Úsečka, polopřímka, přímka, lomená čára

Důležitá pasáž textu:

Úsečka AB *je množina všech bodů prostoru E_3, která obsahuje body* ***A, B*** *a dále všechny body, které leží* ***mezi*** *body A, B.*
Body A, B jsou ***krajní*** body úsečky AB. Právě když A = B, je úsečka AB nulová. V dalším textu se budeme zabývat převážně *nenulovými* úsečkami. Tedy situací, kdy A je různé od B (A ≠ B).

Bod ***C leží mezi body A, B*** *právě tehdy, když náleží úsečce* ***AB*** *a je různý od jejích krajních bodů A, B.* Toto sdělení můžeme zapsat pomocí množinové symboliky takto:

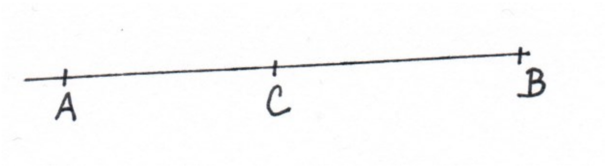
C μ A, B ⇔ C ∈ **AB** ∧ C ≠ A ∧ C ≠ B (písmeno μ čteme *mí* a znamená „leží mezi“).
Připomeňme význam symbolů: ⇔ …ekvivalence (právě tehdy, když), ∧ …konjunkce (platí/patří zároveň).

Ke každým dvěma bodům A, B prostoru E_3 existuje ***jediná*** *taková* ***úsečka AB****, která je podmnožinou prostoru* ***E_3*** *. Body A, B náležejí úsečce* ***AB*** *a platí* ***AB = BA****.*

Symbolicky zapisujeme : ∀A, B ∈ E_3, ∃! **AB** ⊂ E_3, **AB** = **BA.**

Připomeňme význam symbolů: ∀ …obecný kvantifikátor (pro každý, pro všechna), ∈ …být prvkem, elementem (patří do), ∃! … existenční kvantifikátor (existuje právě jeden), ⊂ …být podmnožinou.
K označení úsečky se používají dva možné způsoby:
- dvojicí krajních bodů: úsečka **AB**, úsečka **OP**,…
- písmenem malé abecedy úsečka **a**, úsečka **b** (např. strany a, b, c v trojúhelníku ABC)

Řekneme-li: „bod úsečky AB“, myslíme tím buď některý z krajních bodů A, B, nebo některý tzv. *vnitřní bod* úsečky AB. Na obr. 2.2 je bod C vnitřním bodem úsečky AB. Uvedenou skutečnost můžeme vyjádřit také pomocí relace „mezi“ takto: "bod C leží mezi body A, B".



Z obrázku můžeme také vyčíst (s využitím znalostí ze základů teorie množin), že platí **AB** = **AC** $\cup$ **CB**, {C} = **AC** $\cap$ **CB**.

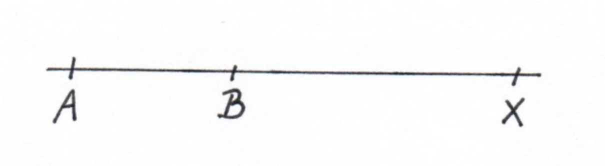
Úsečka AB je sjednocením úseček AC, CB, bod C je prvkem jednoprvkové množiny, která je průnikem množin AC, CB.

Úsečka je abstraktní pojem, nemůžeme ji znázornit, vhodným modelem (špejlí, nataženým provázkem, …) ji můžeme s určitou mírou nepřesnosti znázornit - uvědomme si, že například špejle je ve skutečnosti válec.

Důležitá pasáž textu:

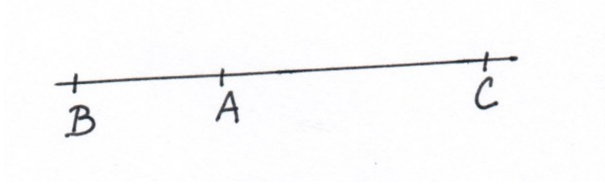
Polopřímka* $\rightarrow$*AB *je sjednocení úsečky AB a množiny všech bodů X* $\in$ $\mathbf{E}_3$*, pro které platí, že bod B leží mezi body A, X. Bod A nazýváme* ***počátek polopřímky*** $\rightarrow$***AB***.

Symbolicky: $\rightarrow$**AB** = {X $\in$ $\mathbf{E}_3$, X$\in$AB $\vee$ B μ A, X}.
Šipka $\rightarrow$ může být zapsána *před* písmeny AB nebo *nad nimi.*

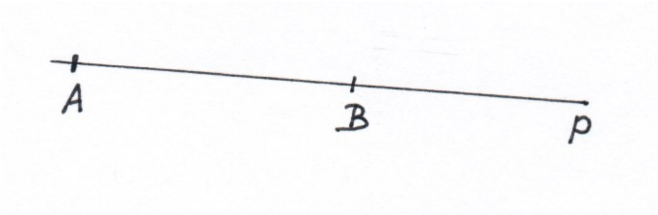


Právě když bod A leží mezi body B, C, nazýváme polopřímky $\rightarrow$***AB****,* $\rightarrow$***AC opačné polopřímky***.

Opačné polopřímky $\rightarrow$AB, $\rightarrow$AC mají společný právě jeden bod – **počátek** polopřímek, v našem případě bod **A**.



Důležitá pasáž textu:
Přímkou $\leftrightarrow$**AB**, kde bod A je různý od B (A $\neq$ B), se nazývá sjednocení polopřímek $\rightarrow$**AB**, $\rightarrow$**BA**.
Symbolicky: $\leftrightarrow$**AB** = $\rightarrow$**AB** $\cup$ $\rightarrow$ **BA**



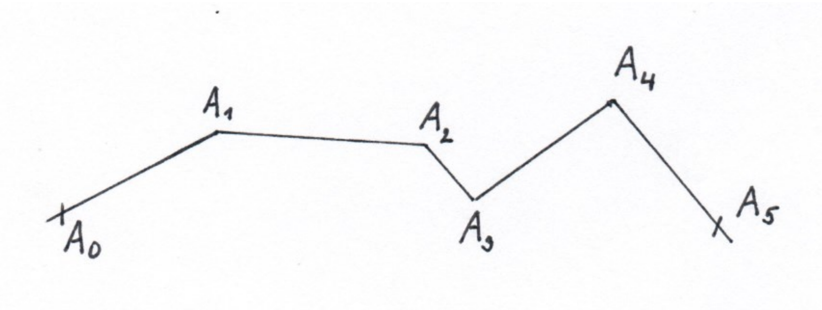
Připomeňme **správnou** terminologii: můžeme uvést, že *přímka p je určena body A, B* nebo *body A, B leží na přímce p* ($A \in p$, $B \in p$) nebo *přímka p prochází body A, B* nebo také, že *body A, B a přímka p jsou spolu incidentní.* Každé z uvedených vyjádření je správné a vystihuje situaci popsanou obrázkem.

Přímka je abstraktní pojem, nemůžeme ji znázornit, vhodným modelem (nataženým provázkem, kolejnicí,…) můžeme znázornit pouze její část, podmnožinu. Na každé přímce (ale také polopřímce nebo úsečce) leží nekonečně mnoho bodů prostoru $\boldsymbol{E_3}$, jsou to příklady *nekonečných bodových množin*.

Právě když existuje taková přímka, že jí body A, B, X náleží, říkáme, že body A, B, X ***jsou kolineární*** *(leží na téže přímce).* Jestliže na téže přímce *body A, B, X* neleží, jsou *nekolineární.*

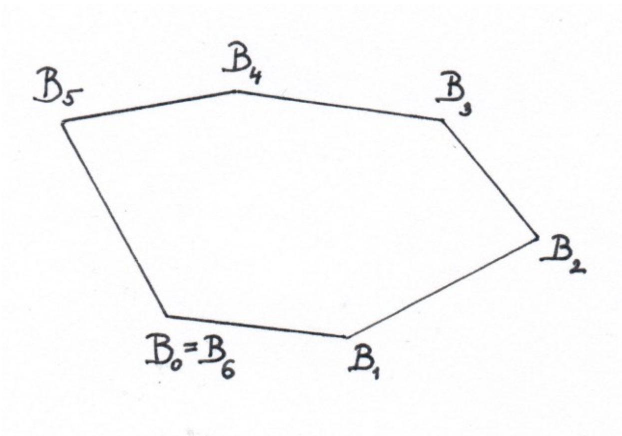
Ještě jednou si prohlédněme předchozí obrázek. Vidíme na něm: body **A, B**, úsečku **AB,** polopřímku **→AB**, polopřímku **→BA**, přímku **↔AB** (přímka **BA** je tatáž jako přímka **AB** *(↔AB = ↔BA)* – nezáleží na tom, který ze zápisů použijeme).

Důležitá pasáž textu:



Na obrázku je znázorněna **lomená čára.** Je to sjednocení konečného počtu úseček ($\mathbf{A_0A_1}$, $\mathbf{A_1A_2}$, $\mathbf{A_2A_3}$, $\mathbf{A_3A_4}$, $\mathbf{A_4A_5}$), z nichž ***každé 2 sousední mají společný pouze 1 (krajní) bod a neleží v téže přímce***.

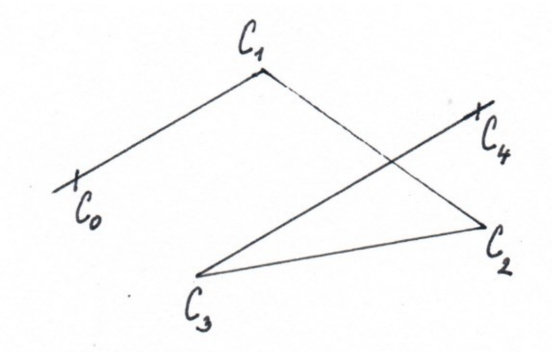
Takové sjednocení úseček A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4,..., $A_{n-1}A_n$ ($n > 2$, $n \in N$) budeme nazývat ***jednoduchá lomená čára*** $\boldsymbol{A_0A_1A_2A_3A_4..A_{n-1}A_n}$, *body A_0, A_1, A_2,... A_{n-1}, A_n* ***vrcholy*** *lomené čáry $A_0A_1A_2$ ...$A_{n-1}A_n$, úsečky* $\boldsymbol{A_0A_1}$, $\boldsymbol{A_1A_2}$, ..., $\boldsymbol{A_{n-1}A_n}$ ***strany*** *této lomené čáry.*



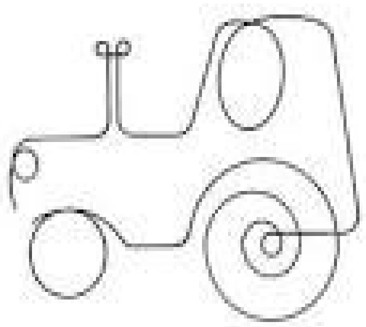
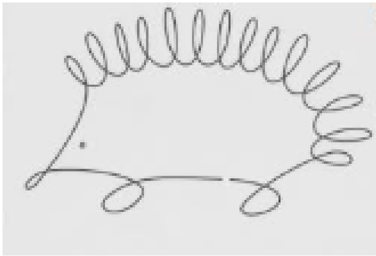
Na obrázku je znázorněna situace, kdy pro vrcholy lomené čáry platí $B_0 = B_6$. Takovou lomenou čáru nazýváme **uzavřenou** (můžeme zapsat také $B_0B_1B_2B_3B_4B_5B_0$).

Lomené čáry, pro které platí, že *žádné dvě jejich nesousední strany nemají společný bod,* nazveme **jednoduché.** Jednoduché lomené čáry jsou znázorněny na obou horních obrázcích.

Na dalším obrázku je znázorněn odlišný případ. Lomená čára $\mathbf{C_0C_1C_2C_3C_4}$ se od druhých dvou uvedených čar liší tím, že *nesousední strany* $\boldsymbol{C_1C_2}$ *a* $\boldsymbol{C_3C_4}$ *mají společný bod* (protínají se). Nepovažujeme ji tedy za jednoduchou lomenou čáru.



Společnou vlastností všech pojmů, které byly uvedeny v této kapitole, je to, že se jedná o útvary **jednorozměrné**. Znamená to, že mají „jen jeden rozměr“ - délku, lze je kreslit/rýsovat *jednou čarou* - přímku a polopřímku čarou přímou, úsečku také (přímka, která je „useknutá“ dvěma krajními body), lomenou čáru tak, jako bychom úsečky „zlomili“. Připomeňme v této souvislosti známé úlohy zadané pokynem „Nakresli jednou čarou (jedním tahem)“ - (jednotažky). Jednorozměrné útvary lze jednou čarou (aniž bychom zvedli tužku z papíru) nakreslit.
Kromě přímých čar a jejích částí se setkáváme s čarami, které *nejsou přímé*, říkáme jim *křivky.* I křivky mohou být *uzavřené* - ovál, kružnice a její části, také jste se někteří setkali s elipsou, parabolou, hyperbolou, nebo *nejsou uzavřené* (vlnovka). I tyto bodové množiny jsou jednorozměrné:

Kontrolní úkoly:

1. Narýsujte úsečku KL. Na přímce KL vyznačte bod M tak, aby bod K ležel mezi body M a L a bod N, aby L ležel mezi K a N.

a) vyznačte bod P, který nepatří úsečce KL, ale náleží polopřímce KN,
a) vyznačte a vypište všechny dvojice opačných polopřímek,
b) vypište všechny úsečky, které jsou zakresleny na obrázku.

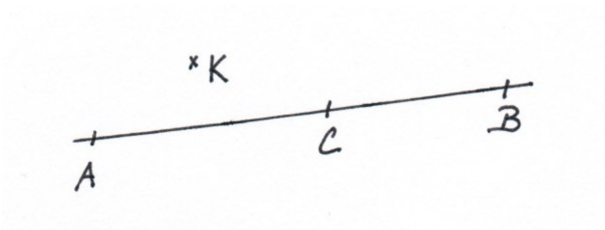
2. Jsou dány tři různé body A, B, C.

a) kolik úseček, polopřímek a přímek je určeno těmito body? Jak závisí tyto počty na poloze jednotlivých bodů?,
b) které bodové množiny mohou být průnikem (sjednocením) dvou z těchto úseček?

3. Narýsujte opačné polopřímky RS a RT.

a) na polopřímce RS vyznačte bod A, který nepatří úsečce RS,
b) na polopřímce RT vyznačte X, který patří úsečce RT.

4. Které geometrické útvary jsou na obrázku?



Vyjádřete, co platí pro úsečky a) AC, AB, b) AB, CB z obrázku?

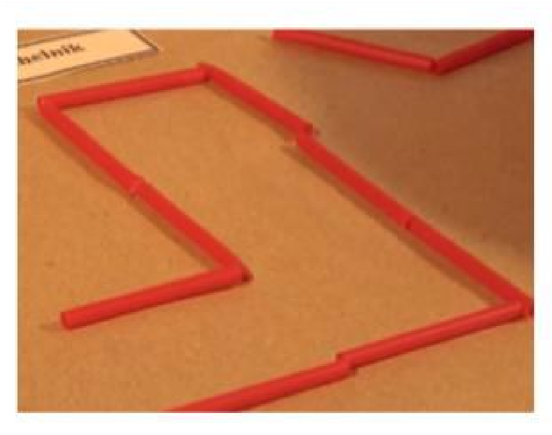
5. Nakreslete jednoduchou lomenou čáru, která není uzavřená, dále jednoduchou uzavřenou lomenou čáru. Popište je, určete, co platí pro vrcholy a strany lomených čar.

6. Zdůvodněte, proč např. trojúhelník nebo čtverec nejsou uzavřenou lomenou čarou (i když je lze také jedním tahem nakreslit)!

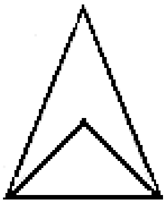
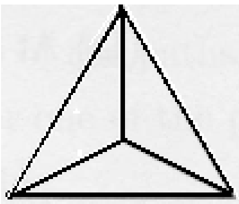
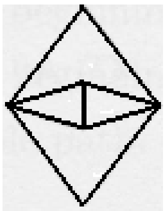
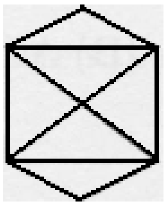
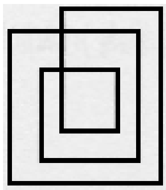
Náměty na praktická cvičení:

1. Využijte pomůcku „slámky a spojky“ (na webové stránce www.strawsandconnectors.com) nebo špejle či různobarevné slámky („brčka“) a vytvářejte modely

- grafického součtu úseček,
- násobku úsečky,
- otevřené a uzavřené lomené čáry.

2. Ověřte, které z obrázků nemůžete nakreslit jedním tahem - jednou čarou (tzn. nesmíte zvednout tužku z papíru a žádnou část obrázku nesmíš kreslit dvakrát)?

Pojmy k zapamatování:

- prostor E_3, rovina E_2, bod
- úsečka, polopřímka, opačné polopřímky, přímka
- kolineární body
- jednoduchá lomená čára, jednoduchá uzavřená lomená čára

Shrnutí:

Pojmy v této kapitole - úsečka, polopřímka, přímka, lomená čára - označujeme jako jednorozměrné útvary.

Ke každým dvěma bodům A, B prostoru E_3 existuje jediná taková úsečka AB, která je podmnožinou prostoru E_3.

Polopřímka $\rightarrow AB$ je sjednocení úsečky AB a množiny všech bodů $X \in E_3$, pro které platí, že bod B leží mezi body A, X. Bod A nazýváme počátek polopřímky $\rightarrow AB$.

Sjednocení polopřímek $\rightarrow AB$, $\rightarrow BA$, kde A je různé od B ($A \neq B$), je přímka $\leftrightarrow AB$.

Sjednocení konečného počtu úseček A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4,..., $A_{n-1}A_n$ ($n > 2$, $n \in N$), z nichž každé dvě sousední mají společný krajní bod a neleží v jedné přímce, je jednoduchá lomená čára.

3.2 Rovinné útvary

V této kapitole vysvětlíme další známé geometrické pojmy, zpřesníme jejich vymezení definicemi, popíšeme vlastnosti a vzájemné vztahy mezi nimi, nabídneme možné třídění. Společnou vlastností všech uvedených pojmů bude to, že se jedná o útvary **dvojrozměrné**, tj. můžeme stanovit jejich *obsah*, který lze obvykle vyjádřit dvěma rozměry: délkou a šířkou.

3.2.1 Trojúhelník

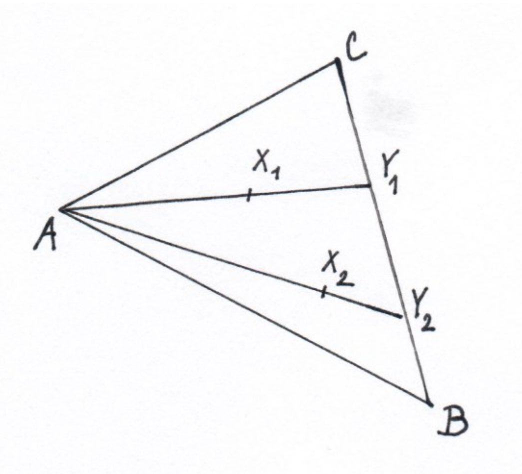
Průvodce studiem:

Výklad rovinných útvarů začneme trojúhelníkem. Jde pravděpodobně o jeden z nejznámějších rovinných útvarů (v jazyce mateřské školy „geometrických tvarů", který děti intuitivně poznávají v různých reálných situacích, zjišťují, co v jejich okolí má tvar trojúhelníka).
Trojúhelník je možné definovat různými způsoby, záleží na tom, které základní pojmy již máme k dispozici a můžeme je v definici využít. Řadu znalostí o trojúhelníku si jistě připomenete v přehledu, který bude uveden po definici. Další poznatky o trojúhelnících uvedeme v souvislosti s dalšími rovinnými útvary.

Důležitá pasáž textu:

Právě když body A, B, C prostoru E_3 neleží na jedné přímce (jsou nekolineární), nazývá se trojúhelníkem ABC množina všech takových bodů X prostoru E_3, že bod X náleží úsečce AY a zároveň bod Y náleží úsečce BC. Body A, B, C se nazývají vrcholy trojúhelníku ABC, úsečky AB, AC, BC strany trojúhelníku ABC.

Symbolicky: $ABC = \{ X \in E_3 ;\ X \in AY \wedge Y \in BC \}$



Jiným způsobem můžeme trojúhelník definovat takto:

Body A, B, C prostoru E_3 neleží na jedné přímce (jsou nekolineární). Trojúhelník ***ABC*** *je sjednocením všech úseček* ***AY****, kde bod Y náleží úsečce* ***BC****.*

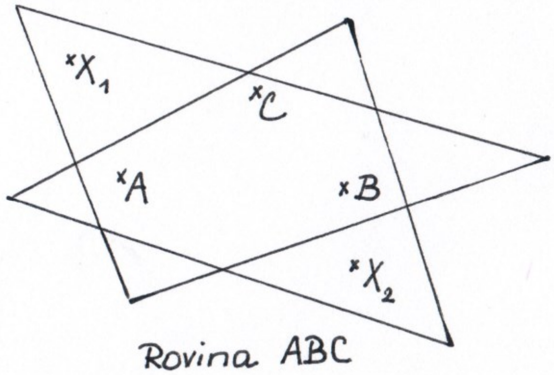
Co si o trojúhelníku pamatuji ze základní/střední školy? Co si nepamatuji, to si důkladně zopakuji!

a) V trojúhelníku rozeznáváme 3 *vrcholy*, 3 *strany* a 3 *vnitřní úhly*.
b) Pro strany trojúhelníku platí *trojúhelníková nerovnost*: *Součet velikostí libovolných dvou stran trojúhelníku je vždy větší než velikost strany třetí* ($a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$), *rozdíl velikostí libovolných dvou stran trojúhelníku je vždy menší než velikost strany třetí* ($a - b < c$, $a - c < b$, $b - c < a$).
c) *Těžnice* trojúhelníku je spojnice vrcholu se středem protější strany. *Těžiště* je průsečík těžnic a leží ve dvou třetinách těžnice od vrcholu a v jedné třetině těžnice od středu protější strany.
d) *Střední příčka* trojúhelníku je spojnice středů stran. Je rovnoběžná se stranou, kterou neprotíná a je to její polovina.
e) *Výška* trojúhelníku příslušná ke straně je kolmice k přímce obsahující tuto stranu procházející protilehlým vrcholem nebo úsečka, jejímiž krajními body jsou vrchol a pata kolmice ke straně. Všechny výšky se protínají v bodě, který se označuje jako *ortocentrum.*
f) *Střed kružnice opsané* trojúhelníku je průsečík os stran a *poloměr kružnice* je úsečka spojující střed s libovolným vrcholem.
g) *Střed kružnice vepsané* trojúhelníku je průsečík os vnitřních úhlů a poloměr je úsečka vedená ze středu kružnice kolmo na kteroukoliv stranu.
h) Trojúhelníky je možné třídit podle *velikosti stran* na trojúhelníky *různostranné, rovnoramenné, rovnostranné*.

3.2.2 Rovina, polorovina

Důležitá pasáž textu:

Právě když body A, B, C prostoru E_3 neleží v úsečce (resp. v jedné přímce – body A, B, C jsou nekolineární), nazývá se ***rovinou ABC*** *množina všech takových bodů X prostoru E_3, že body A, B, C, X leží v trojúhelníku. O bodech A, B, C, X říkáme, že jsou* ***komplanární*** *(leží v téže rovině).*



Každý trojúhelník je podmnožinou roviny **ABC**.

Rovinu můžeme označit dvěma způsoby:

a) pomocí jejích 3 různých bodů neležících v jedné úsečce (přímce) - nekolineárních: rovina *ABC,* rovina *OPR*,
b) písmenem řecké abecedy: rovina α, rovina δ.

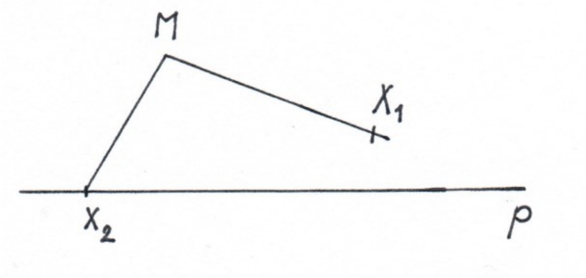
V každé rovině je opět nekonečně mnoho bodů, je to *nekonečná množina*. Stejně jako přímku, ani rovinu *nemůžeme znázornit*. Vhodným modelem (např. vodní hladina, list papíru, deska stolu, stěna třídy,…) znázorníme vždy jen její část (podmnožinu).

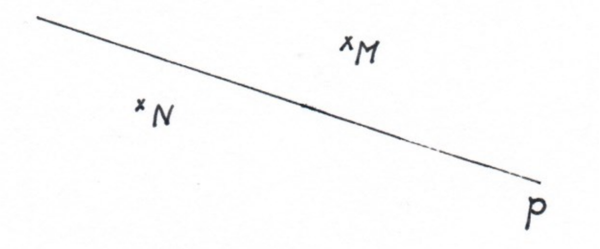
Rovinu můžeme určit

a) pomocí *3 nekolineárních bodů* (jako v naší definici), ale také
b) *přímkou a bodem mimo ni ležícím* (protože každá přímka sama je určena 2 body) nebo dvěma různoběžkami nebo dvěma různými rovnoběžkami.

Důležitá pasáž textu:

Nechť je dána v rovině $\boldsymbol{\rho}$ ***(****písmeno řecké abecedy ró) přímka* **p** *a bod M, který nenáleží přímce* **p**. ***Polorovinou pM*** *nazýváme množinu všech takových bodů X roviny* $\boldsymbol{\rho}$***,*** *že průnik úsečky* ***MX*** *s přímkou* **p** *je prázdná množina (na obrázku* MX_1*) nebo množina o jediném bodu X (na obrázku* MX_2*). Přímka* **p** *se nazývá* **hraniční přímka** *poloroviny* ***pM****.*





Bod N, který náleží rovině ρ, ale nenáleží polorovině *pM*, určuje s přímkou *p* polorovinu *pN.* Poloroviny *pM* a *pN* jsou **opačné poloroviny**.

Sjednocením opačných polorovin *pM, pN* je *rovina* ρ, průnikem opačných polorovin *pM, pN* je *přímka p.*

S využitím pojmu polorovina můžeme uvést ještě další definici trojúhelníka:
Trojúhelník ABC je průnikem tří polorovin:

- poloroviny *pA*, kde přímka *p* je určena body *BC*,

- poloroviny *qB*, kde přímka *q* je určena body *AC*,
- poloroviny *rC*, kde přímka *r* je určena body *AB*.

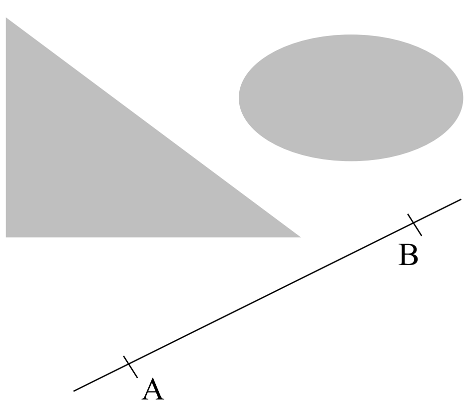
Nakreslete obrázek, na kterém vyznačíte jednotlivé poloroviny a jejich průnik šrafováním.

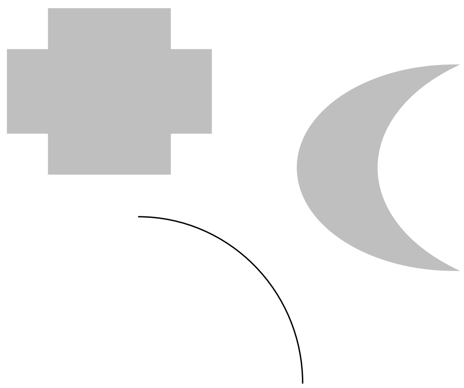
3.2.3 Konvexní množina, úhel

Důležitá pasáž textu:

*Množina bodů **M** (**M** $\subset$ **E_3**) je **konvexní**, právě když pro každé dva její body X, Y platí, že úsečka **XY** je podmnožinou množiny M. Množina prázdná a všechny jednobodové množiny jsou rovněž konvexní.*
Konvexními množinami bodů jsou např. úsečka, přímka, rovina, trojúhelník. Množina bodů, která není konvexní, se nazývá **nekonvexní.**

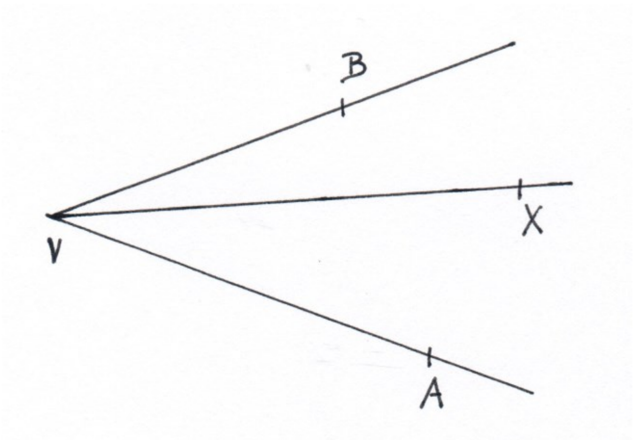
Konvexní bodové množiny: Nekonvexní bodové množiny:





Zjišťování konvexnosti geometrických útvarů bývá někdy obtížné. S výhodou je možné použít následující věty: ***Průnikem každých dvou konvexních množin bodů je konvexní množina bodů.*** Tak například trojúhelník je konvexní množina, protože je průnikem tří polorovin, tj. konvexních množin.

*Právě když body A, V, B jsou tři různé body roviny, které neleží v úsečce (jsou nekolineární), nazýváme **konvexním úhlem AVB** množinu všech takových bodů X roviny **AVB**, že bod X náleží polopřímce **VY** a zároveň bod Y náleží úsečce **AB**.*

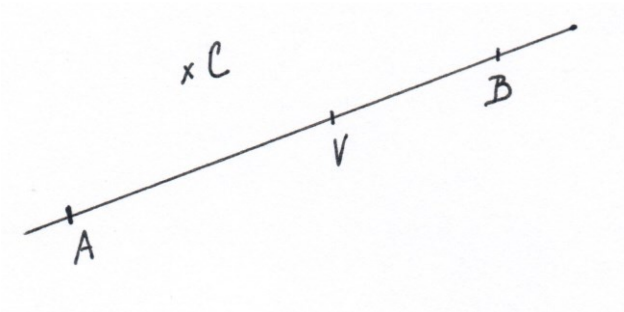


Polopřímky **VA**, **VB** se nazývají ***ramena úhlu AVB***, bod V ***vrchol úhlu AVB***. Úhly také označujeme malými písmeny řecké abecedy: α, β, χ…

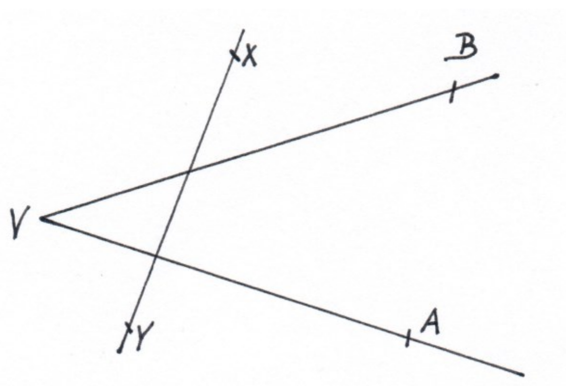
Mezi konvexní úhly řadíme úhel *nulový, ostrý, pravý, tupý, přímý, plný*. Pokud si nejste jisti významem jednotlivých typů úhlů, doporučuji opět zopakovat z učebnic pro základní školu!

Právě když bod V leží mezi body A, B, nazývá se kterákoliv z polorovin s hraniční přímkou AB ***přímý úhel AVB****.*

Na dalším obrázku jsme za příklad přímého úhlu zvolili úhel *AVB* - polorovinu, která obsahuje bod *C*. Stejně tak je přímým úhlem AVB polorovina opačná.



Právě když body A, V, B roviny jsou nekolineární, nazýváme sjednocení doplňku konvexního úhlu ***AVB*** *v rovině* ***AVB*** *a polopřímek* ***VA, VB nekonvexní úhel AVB****.*



Povšimněme si souvislosti právě probraného pojmu úhel a dalších vlastností trojúhelníka.

Co si pamatuji ze základní/střední školy? Co si nepamatuji, to si opět důkladně zopakuji!

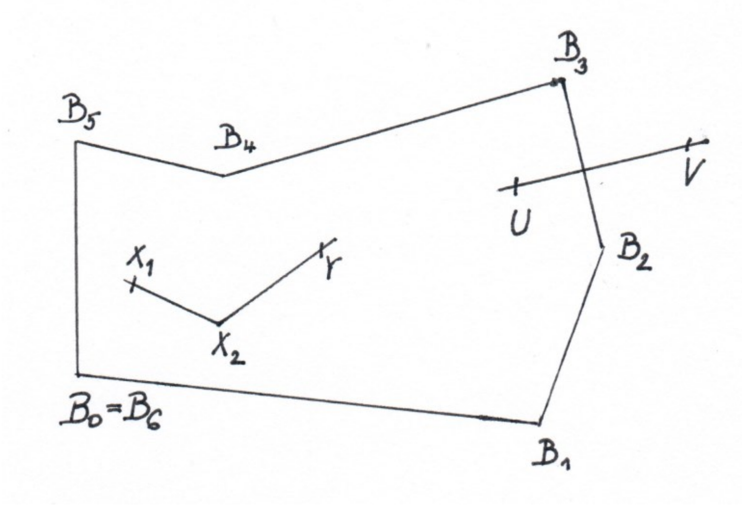
a) V trojúhelníku ABC rozlišujeme *vnitřní úhly* ABC, BCA, ACB (všechny jsou konvexní), ke každému vnitřnímu úhlu existuje *úhel vnější*.
b) Trojúhelník je *podmnožinou každého svého vnitřního úhlu*.
c) V každém trojúhelníku platí, že *proti shodným stranám leží shodné úhly*, proti *delší straně* leží *větší úhel, proti kratší straně menší úhel.*
d) *Součtem všech vnitřních úhlů v trojúhelníku je úhel přímý* (tato vlastnost se dá vyjádřit takto: součet *velikostí* všech vnitřních úhlů trojúhelníku je vždy *180°*).
e) Trojúhelníky je možné třídit podle *velikosti úhlů* na trojúhelníky *ostroúhlé, pravoúhlé, tupoúhlé*,

3.2.4 N-úhelníky

Průvodce studiem:

V úvodu kap. 3 jsme uvedli, že jednotlivé geometrické pojmy budeme interpretovat ve vzájemných souvislostech. Tímto způsobem jsme ukázali, jak spolu souvisí pojmy trojúhelník a úhel, trojúhelník a rovina, úhel a polorovina. Ukážeme si dále souvislost
a) dříve vysvětleného pojmu uzavřená lomená čára a rovinných geometrických útvarů, které označujeme obecným názvem *n-úhelníky*,
b) pojmu úhel a vlastností trojúhelníka (n-úhelníka).

Uzavřená lomená čára (kterou jsme např. v kap. 3.1 označili $B_0B_1B_2B_3B_4B_5B_0$), má důležité vlastnosti. Rozděluje totiž všechny body roviny, které na ní neleží, do dvou neprázdných podmnožin takových, že *mezi každými dvěma body patřícími různým podmnožinám leží aspoň jeden bod lomené čáry*. Tyto neprázdné podmnožiny označujeme *jako vnitřní a vnější oblast* uzavřené lomené čáry. Popsanou vlastnost ozřejmíme obrázkem:



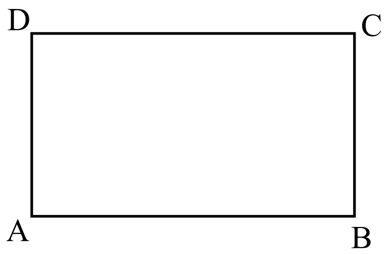
Bod **U** je **bodem vnitřní oblasti** lomené čáry $B_0B_1B_2B_3B_4B_5\ B_0$,
bod **V** je **bodem vnější oblasti** lomené čáry $B_0B_1B_2B_3B_4B_5\ B_0$.

Důležitá pasáž textu:

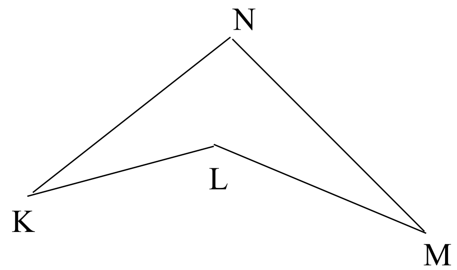
Sjednocení jednoduché uzavřené lomené čáry $\boldsymbol{A_0A_1A_2..A_{n-1}A_n}$ *(*$A_0 = A_n$*,* $n > 3$*,* $n \in \mathbf{N}$*) a její vnitřní oblasti se nazývá* ***mnohoúhelník*** $\boldsymbol{A_1A_2A_3..A_{n-1}A_n}$*. Mnohoúhelník s* ***n*** *vrcholy nazýváme také* ***n-úhelník****.*
Tak například n-úhelník se 4 vrcholy je *čtyřúhelník*, s 5 vrcholy *pětiúhelník*…s 8 vrcholy *osmiúhelník.*

N-úhelníky mohou být *konvexní a nekonvexní*. Na obrázcích 3.13 a 3.14 jsou ukázky konvexního a nekonvexního **čtyřúhelníku, tj. n-úhelníku, který má 4 vrcholy, 4 strany, 4 vnitřní úhly:**

Konvexní čtyřúhelník (obdélník):



Nekonvexní čtyřúhelník:



Důležitá pasáž textu:

Čtyřúhelníky mohou mít různou podobu. Dále se zmíníme pouze o některých typech konvexních čtyřúhelníků a některých jejich vlastnostech.

a) ***Různoběžník*** *je konvexní čtyřúhelník, který* ***nemá žádnou dvojici rovnoběžných*** *stran.*

b) Čtyřúhelník, který má dvě protější strany rovnoběžné a zbývající dvě strany různoběžné, se nazývá ***lichoběžník*** *(může být obecný, pravoúhlý, rovnoramenný).*

c) Rovnoběžník *je konvexní čtyřúhelník, ve kterém jsou každé dvě protější strany* ***rovnoběžné a shodné.***

d) Jestliže má rovnoběžník jeden úhel pravý, má i ***všechny ostatní úhly pravé****. Takový rovnoběžník se nazývá pravoúhlý* ***(pravoúhelník****).*

e) ***Čtverec*** *je rovnostranný pravoúhelník (má všechny strany shodné).*

f) ***Obdélník*** *je nerovnostranný pravoúhelník (má shodné každé dvě protější strany).*

g) ***Kosoúhelník*** *je rovnoběžník, jehož vnitřní úhel není pravý.*

h) Kosočtverec *je rovnostranný kosoúhelník.*

3.2.5 Kruh a kružnice

Průvodce studiem:

Zařazení pojmu „kružnice“ do kapitoly 3.2 je motivováno tím, abychom mohli ukázat analogii mezi definicí kruhu a kružnice - co mají oba pojmy společného, v čem se odlišují. Je třeba si uvědomit, že *kružnice není rovinný útvar*, ale čára (křivka), tedy *jednorozměrný útvar.*

Důležitá pasáž textu:

V rovině E_2 je dán bod S a úsečka AB. ***Kruh K*** *o středu S a poloměru AB je množina všech bodů X roviny E_2, které náleží úsečce SY a zároveň úsečka SY je shodná s úsečkou AB.*

Symbolicky zapíšeme: $\boldsymbol{K}\ (S,\boldsymbol{AB}) = \{X \in \boldsymbol{E_2},\ X \in \boldsymbol{SY} \wedge \boldsymbol{SY} \cong \boldsymbol{AB}\}$.

V rovině E_2 je dán bod S a úsečka AB. ***Kružnice k*** *o středu S a poloměru AB je množina všech bodů X roviny E_2, pro které platí, že úsečka SX je shodná s úsečkou AB.*
Symbolicky zapíšeme: $\boldsymbol{k}\ (S,\boldsymbol{AB}) = \{X \in \boldsymbol{E_2},\ \boldsymbol{SX} \cong \boldsymbol{AB}\}$

Kruh (kružnice) je určen/a středem S a poloměrem r. Poloměr r je úsečka, jejímiž krajními body jsou střed kružnice S a libovolný bod ležící na kružnici.

Kružnice *k (S, r)* je *podmnožinou* kruhu *K (S, r)*. Kružnice *k (S, r)* je *hranicí kruhu K*, její vnitřní oblastí je *vnitřek kruhu*, vnější oblastí je *vnějšek kruhu*.

Kruh *K (S, r)* můžeme považovat za sjednocení kružnice *k (S, r)* a její vnitřní oblasti.

Jestliže na kružnici *k* zvolíme dva různé body A, B, pak tyto dva body kružnici *k* rozdělí na dva *oblouky* kružnice *k*. Spojíme-li body A, B, A ≠ B, určíme *tětivu* kružnice *k*. Nejdelší tětivou kružnice *k* je *průměr* kružnice (je to tětiva, procházející středem kružnice a její velikost je rovna dvojnásobku poloměru kružnice *k*).

3.2.5 Kruh a kružnice

Průvodce studiem:

Zařazení pojmu „kružnice“ do kapitoly 3.2 je motivováno tím, abychom mohli ukázat analogii mezi definicí kruhu a kružnice - co mají oba pojmy společného, v čem se odlišují. Je třeba si uvědomit, že *kružnice není rovinný útvar*, ale čára (křivka), tedy *jednorozměrný útvar.*

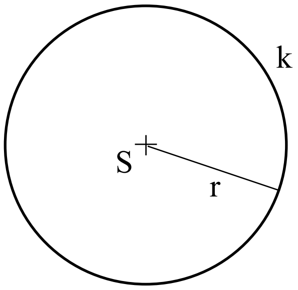
Důležitá pasáž textu:

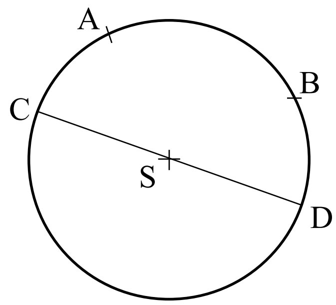
V rovině E_2 je dán bod S a úsečka AB. ***Kruh K*** *o středu S a poloměru AB je množina všech bodů X roviny E_2, které náleží úsečce SY a zároveň úsečka SY je shodná s úsečkou AB.*

Symbolicky zapíšeme: $\boldsymbol{K}\ (S,\boldsymbol{AB}) = \{X \in \boldsymbol{E_2},\ X \in \boldsymbol{SY} \wedge \boldsymbol{SY} \cong \boldsymbol{AB}\}$.

V rovině E_2 je dán bod S a úsečka AB. ***Kružnice k*** *o středu S a poloměru AB je množina všech bodů X roviny E_2, pro které platí, že úsečka SX je shodná s úsečkou AB.*
Symbolicky zapíšeme: $\boldsymbol{k}\ (S,\boldsymbol{AB}) = \{X \in \boldsymbol{E_2},\ \boldsymbol{SX} \cong \boldsymbol{AB}\}$

Kruh (kružnice) je určen/a středem S a poloměrem r. Poloměr r je úsečka, jejímiž krajními body jsou střed kružnice S a libovolný bod ležící na kružnici.





Kružnice *k (S, r)* je *podmnožinou* kruhu *K (S, r)*. Kružnice *k (S, r)* je *hranicí kruhu K*, její vnitřní oblastí je *vnitřek kruhu*, vnější oblastí je *vnějšek kruhu*.

Kruh *K (S, r)* můžeme považovat za sjednocení kružnice *k (S, r)* a její vnitřní oblasti.

Jestliže na kružnici *k* zvolíme dva různé body A, B, pak tyto dva body kružnici *k* rozdělí na dva *oblouky* kružnice *k.* Spojíme-li body A, B, A ≠ B, určíme *tětivu* kružnice *k*. Nejdelší tětivou kružnice *k* je *průměr* kružnice (je to tětiva, procházející středem kružnice a její velikost je rovna dvojnásobku poloměru kružnice *k*).

Kontrolní úkoly:

1. Narýsujte libovolný trojúhelník, vyznačte v něm

a) všechny výšky a ortocentrum,
b) všechny těžnice a těžiště,
c) všechny osy stran a střed kružnice opsané.

2. Narýsujte

a) ostroúhlý trojúhelník,
b) pravoúhlý trojúhelník,
c) tupoúhlý trojúhelník.
Opište a vepište narýsovaným trojúhelníkům kružnici.

3. Narýsujte libovolný trojúhelník. Názorně ukažte, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku se rovná přímému úhlu. *Návod:* trojúhelník rozstřihněte, jednotlivé vnitřní úhly „přisuňte“ k sobě.

4. Je dán trojúhelník ABC. Uvnitř strany AB zvolte bod X, uvnitř strany AC bod Y. Zdůvodněte, že čtyřúhelník YCBX je konvexní.

5. Načrtněte dva nekonvexní rovinné útvary a to takové, že jejich sjednocením je množina

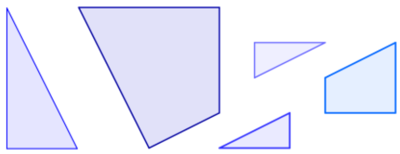
a) konvexní,
b) nekonvexní.

6. Dvě shodné kružnice k_1 (S_1, r), k_2 (S_2, r) mají tu vlastnost, že střed jedné leží na kružnici druhé. Označte průsečíky obou kružnic P, Q a sestrojte průměry PS_1, PS_2. Jakou vlastnost má trojúhelník PS_1S_2?

Náměty na praktická cvičení:

1. Zpracujte pojmovou mapu, na které dokumentujete třídění
a) trojúhelníků,
b) čtyřúhelníků.
Jednotlivé trojúhelníky a čtyřúhelníky definujte, zapište jejich vlastnosti.

2. Skládáme čtverce:
a) složte z daných částí dva čtverce (menší a větší),
b) složte ze všech částí jeden velký čtverec.

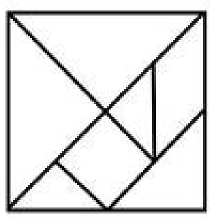
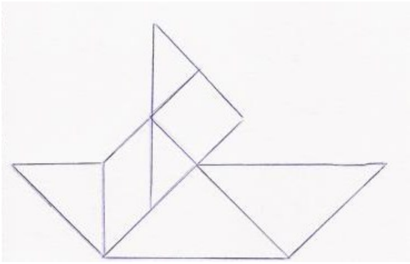
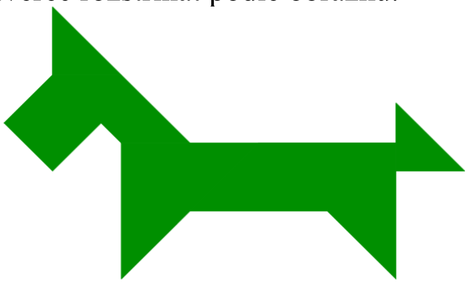


2. Seznamte se v literatuře nebo na internetu s pojmem „deltoid“. Nakreslete deltoid a určete jeho vlastnosti (délky stran, velikosti vnitřních úhlů, úhlopříčky a jejich průsečík). K jakým činnostem/hrám bychom mohli deltoidu využít v mateřské škole? Navrhněte vhodnou aktivitu.

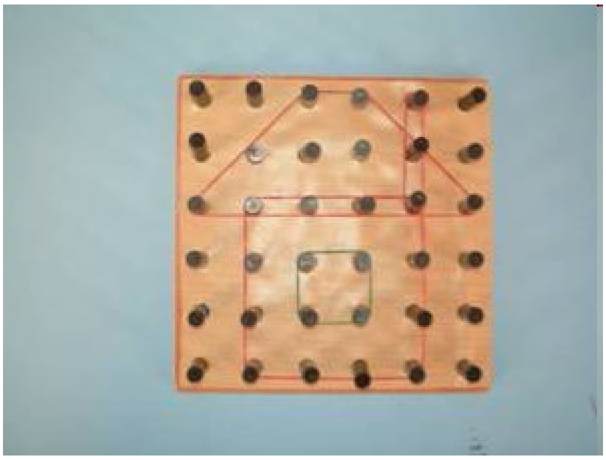
3. Seznamte se s hlavolamem TANGRAM: základem je čtverec, který je rozdělen na 7 dílů (viz obrázek). Při skládání je nutno použít všech 7 dílů, jednotlivé díly musí ležet na podložce vele sebe, nesmí se překládat, díly (n-úhelníky) musejí mít společnou stranu nebo se musejí dotýkat alespoň vrcholem, díly tangramu lze libovolně převracet. S tangramem lze pracovat v několika úrovních obtížnosti. Základní rozlišení je:

- skládat figury podle předlohy se zřejmým ohraničením jednotlivých dílů (lodička),
- skládat figury podle předlohy bez zřejmého ohraničení jednotlivých dílů (koník),
- vytvoření vlastní figury.

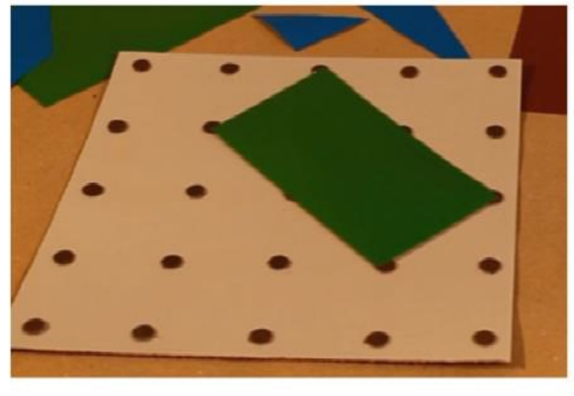
Tangram je možné jednoduše vyrobit z tvrdého papíru - čtverec rozstříhat podle obrázku.

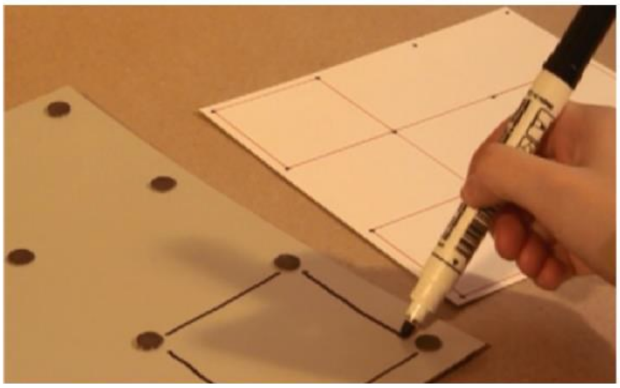




4. Vyhledejte v literatuře nebo na internetu učební pomůcku, označovanou jako „geodeska“ (geoboard) - viz obrázek. Pomocí gumičky napnuté kolem kolíčků na desce vytvářejte rozmanité geometrické útvary. Navrhněte náměty pro práci s pomůckou v MŠ.



5. Podobné činnosti jako s geodeskou můžeme ukázat při práci s pomůckou, nazývanou „bodový rastr“ (tabulka, na které jsou vyznačeny body, které tvoří čtvercovou síť). Vystřihneme-li barevné pravoúhlé trojúhelníky, obdélníky a čtverce, které mají takové rozměry, aby jejich vrcholy mohly ležet v bodech rastru, lze je na rastr pokládat nebo fixou zakreslovat spojením tzv. mřížových bodů (vrcholů n-úhelníků).





Pojmy k zapamatování:

- trojúhelník, vrchol, strana, vnitřní úhel trojúhelníka
- výška, těžnice, střední příčka trojúhelníka
- kružnice opsaná trojúhelníku, kružnice vepsaná trojúhelníku
- rovina, polorovina, hraniční přímka, opačné poloroviny
- konvexní množina
- konvexní úhel, nekonvexní úhel, vrchol úhlu, ramena úhlu
- přímý úhel, pravý úhel, ostrý a tupý úhel, dvojice úhlů
- n-úhelník, čtyřúhelník, lichoběžník, rovnoběžník – čtverec, obdélník, kosočtverec, kosodélník
- kruh, kružnice, střed, poloměr, průměr kruhu/kružnice
- hranice, vnitřek, vnějšek kruhu
- oblouk kružnice

Shrnutí:

Rovinné útvary jsou podmnožinami roviny E_2, jsou to útvary dvourozměrné.

Trojúhelník lze definovat několika způsoby, s využití množiny bodů úseček nebo pomocí průniku polorovin. Každý trojúhelník je konvexní množina. Každý trojúhelník ABC je podmnožinou konvexního úhlu BAC s vrcholem A. Trojúhelníky lze třídit podle délky stran nebo velikosti vnitřních úhlů. Součtem všech vnitřních úhlů trojúhelníka je přímý úhel. Úhly jsou konvexní nebo nekonvexní, ostré, pravé, tupé.

Podle počtu vrcholů rovinného útvaru rozlišujeme n-úhelníky (mnohoúhelníky). Mohou být konvexní nebo nekonvexní. Důležitými n-úhelníky ve školské matematice jsou čtyřúhelníky. Lze je třídit podle vzájemné polohy a délky protějších stran a velikosti vnitřních úhlů. Rovnoběžníky jsou konvexní útvary. Pravoúhelníky mají dvě protější strany rovnoběžné a vnitřní úhly pravé (čtverec, obdélník), kosoúhelníky (kosočtverec, kosodélník) jsou konvexní, mají každé dvě protější strany rovnoběžné a nemají vnitřní úhly pravé.

Kruh je rovinný útvar se středem S a poloměrem r. Podmnožinou kruhu je kružnice. Kružnice je hranicí kruhu, vymezuje vnitřek a vnějšek kruhu.

3.3 Polohové vlastnosti přímek a rovin

Cíle

Po prostudování kapitoly budete schopni

- rozeznat, pojmenovat a vysvětlit vzájemnou polohu bodů, přímek a rovin,
- využít znalostí o vlastnostech binárních relací - rovnoběžnost, různoběžnost, mimoběžnost, kolmost

Průvodce studiem:

V předchozích kapitolách jste poznali řadu důležitých geometrických pojmů. Tyto útvary mohou zaujímat různou vzájemnou polohu. Bude nás především zajímat vzájemné poloha bodů, přímek a rovin, ale také přímek a kružnic a kružnic navzájem. Nejprve zopakujeme, upřesníme a zkompletujeme terminologii, kterou jsme již částečně v předchozích kapitolách v různých souvislostech použili.

Důležitá - terminologická - pasáž textu:

Pro každé dva body v rovině nebo v prostoru nastane právě jedna z možností:

a) A = B (body splývají, jsou totožné),

b) A ≠ B (body jsou navzájem různé).

O bodech náležejících přímce či rovině a o přímkách náležejících rovině se obecně říká, že jsou navzájem ve vztahu **incidence**. To, že je *bod incidentní (inciduje) s přímkou či rovinou*, resp. *přímka je incidentní (inciduje) s rovinou* se častěji vyjadřuje slovy:

- bod *náleží přímce (leží na přímce)* nebo *přímka prochází bodem*, symbolicky zapisujeme $\boldsymbol{A \in p}$,

- bod *náleží rovině (leží v rovině),* symbolicky zapisujeme $A \in \varrho$,
- přímka *leží v rovině* nebo *rovina prochází přímkou* , symbolicky zapisujeme $p \subset \varrho$.

V případě *vzájemné polohy bodu a přímky* může nastat právě jedna z možností:
a) bod *A náleží* přímce *p* $(A \in p)$,
b) bod *A nenáleží* přímce *p* $(A \notin p)$.

V případě *vzájemné polohy bodu a roviny* může nastat právě jedna z možností:
a) bod A *náleží* rovině ϱ $(A \in \varrho)$,
b) bod A *nenáleží* rovině ϱ $(A \notin \varrho)$.

3.2.1 Vzájemná poloha přímek

Zopakujme si nejprve, co vyplývá z naší intuitivní zkušenosti:
a) Dvěma různými body prochází jediná přímka (Euklidův postulát, viz kapitola 2.)
b) Dvě různé přímky mají *nejvýše jeden společný bod* (tzn. mají *právě jeden* společný bod nebo *nemají žádný* společný bod)..

Důležitá pasáž textu:
Povšimněme si případu, kdy ***dvě přímky leží v téže rovině*** *($a \subset \varrho$, $b \subset \varrho$).* Jako model roviny nám může posloužit třeba deska stolu nebo list papíru. Pak pro přímky *a, b* v rovině nastane právě jedna z následujících tří možností:

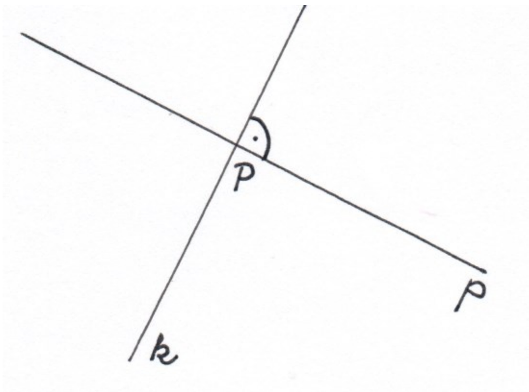
1) přímky jsou **rovnoběžné (rovnoběžky)** - mohou přitom nastat dva případy
- **a** = **b** *mají všechny body společné* přímky jsou *totožné*, navzájem splývají. Totožnost považujeme za speciální případ rovnoběžnosti,
- **a** $\parallel$ **b** *nemají žádný bod společný*, **a** $\cap$ **b** = ϕ (průnikem přímek je prázdná množina).

Opět připomeňme, že v textu „Rozvoj předčíselných představ“ jsme rovnoběžnost přímek uváděli jako příklad binární relace *R*, která má vlastnosti *ekvivalence* - je reflexivní, symetrická a tranzitivní a způsobuje *rozklad množiny M všech přímek v rovině na třídy vzájemně rovnoběžných přímek*. Relace *R* rovnoběžnost přímek je tedy

a) *reflexivní*, protože pro všechny přímky platí, že každá přímka je rovnoběžná sama se sebou, je s ní totožná, $x = x$. Symbolicky s využitím znalostí množin a binárních relací $\forall x \in M, [x, x] \in R,$
b) *symetrická,* protože pro každé dvě přímky *x,y* platí, že jestliže přímka *x* je rovnoběžná s přímkou *y*, pak přímka *y* je rovnoběžná s přímkou *x*. Symbolicky zapíšeme $\forall x, y \in M, [x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R)$,
c) *tranzitivní,* protože pro každé tři přímky *x, y, z* platí, že jestliže přímka *x* je rovnoběžná s přímkou *y* a současně přímka *y* je rovnoběžná s přímkou *z*, pak přímka *x* je rovnoběžná s přímkou *z*: $(\forall x, y, z \in M, [x, y] \in R \wedge [y, z] \in R \Rightarrow [x, z] \in R).$

2) přímky jsou **různoběžné (různoběžky)**, mají *společný právě jeden bod,* **a** $\nparallel$ **b**, **a** $\cap$ **b = {P}** (průnikem přímek je jednoprvková množina, obsahující jediný bod P). Tento bod se nazývá *průsečík.* Pokud jedním bodem prochází více než dvě přímky, říkáme, že máme *svazek přímek.* Různoběžnost je binární relace v množině přímek v rovině.

Libovolné dvě různoběžky *p, q* s průsečíkem *P* rozdělují rovinu, v níž leží, na *čtyři konvexní úhly* se společným vrcholem. Tyto čtyři úhly tvoří *dvě dvojice shodných úhlů*, jejichž ramena jsou polopřímky.
Úhel, který je *shodný s úhlem k němu vedlejším*, nazýváme **pravý** úhel.
Je-li jeden ze čtyř úhlů sevřených různoběžkami *p, k* pravý, jsou i ostatní tři úhly pravé. O takových přímkách *p, q* říkáme, že jsou **přímkami navzájem kolmými** (každá z nich je **kolmicí** k druhé přímce). Kolmost přímek zapisujeme $p \perp k$, bod *P* je *pata kolmice*.



K dané přímce *p* lze daným bodem *B* vést jedinou kolmici *k.*

Kolmost přímek je zvláštním případem různoběžnosti přímek. Je to binární relace na množině přímek v rovině, která *není reflexivní, je symetrická, není tranzitivní,* není to tedy relace ekvivalence.

Jiný případ nastane, když ***dvě přímky neleží v téže rovině,*** například $a \subset \varrho$, $b \subset \sigma$. Říkáme, že přímky jsou **mimoběžné (mimoběžky),** *a je mimoběžná s b***.**

3.2.2 Vzájemná poloha přímky a roviny

Vzájemnou polohu přímky a roviny popíšeme obdobně jako u vzájemné polohy dvou přímek.

Důležitá pasáž textu:

1) přímka *a* **je rovnoběžná** s rovinou ϱ ($\boldsymbol{a \parallel \varrho}$). Mohou přitom nastat dva případy.

- *přímka leží v rovině* ($a \subset \varrho$) - jestliže průniku přímky ***a*** a roviny $\boldsymbol{\varrho}$ náleží *dvě různé body*, pak přímka *a je podmnožinou* roviny ϱ *(všechny body přímky náleží rovině)*,
- přímka *neleží v rovině* ($a \not\subset \varrho$), jestliže je jejich průnikem prázdná množina, nemají žádný společný bod.

2) přímka *a* je **různoběžná** s rovinou ϱ ($\boldsymbol{a \nparallel \varrho}$), právě když má přímka *a* s rovinou ϱ právě jeden společný bod - průnikem přímky *a* a roviny ϱ je jednoprvková množina obsahující jediný bod P, platí $\boldsymbol{a \cap \varrho = \{P\}}$. Společný bod se nazývá *průsečík.* Zvláštním případem různoběžnosti je podobně jako u vzájemné polohy dvou přímek *kolmost* přímky a roviny. *Přímka p je kolmá k rovině* ϱ*, právě když je kolmá ke všem přímkám roviny* ϱ*.*

3.2.3 Vzájemná poloha dvou rovin

Důležitá pasáž textu:

1) pokud jsou dvě roviny ϱ, σ **rovnoběžné** ($\varrho \parallel \sigma$), mohou nastat dva případy:

- obě roviny sobě *se rovnají* (splývají), mají všechny body společné, platí: $\varrho = \sigma$,
- jejich průnikem je prázdná množina, nemají žádný společný bod, platí: $\varrho \cap \sigma = \phi$.

2) dvě různé roviny ϱ, σ jsou **různoběžné**, právě když *je jejich průnikem přímka*, například $\varrho \cap \sigma = p$. Společná přímka p se nazývá *průsečnice* různoběžných rovin.

O rovnoběžnosti *přímky a roviny* a *rovnoběžnosti dvou rovin* rozhodujeme pomocí **kritérií rovnoběžnosti**:

- přímka a je rovnoběžná s rovinou ϱ, právě když *existuje aspoň jedna přímka* ***b*** *roviny* ϱ taková, že přímka a je rovnoběžná s přímkou b.
- rovina ϱ je rovnoběžná s rovinou σ, právě když *existují v rovině* ϱ *dvě různoběžky a, b* tak, že platí: přímka ***a*** je rovnoběžná s rovinou σ a zároveň přímka ***b*** je rovnoběžná s rovinou σ.

Podobně o *kolmosti přímky a roviny* a *kolmosti dvou ro*vin rozhodujeme pomocí **kritérií kolmosti**:

- přímka ***p*** je kolmá k rovině ρ, právě když je *kolmá ke dvěma různoběžkám* ***a, b*** *roviny* ρ,
- rovina ϱ je kolmá k rovině σ, právě když v rovině ϱ existuje přímka **p** kolmá k rovině σ.

Také kolmost dvou rovin je relace antireflexivní, symetrická a není tranzitivní.

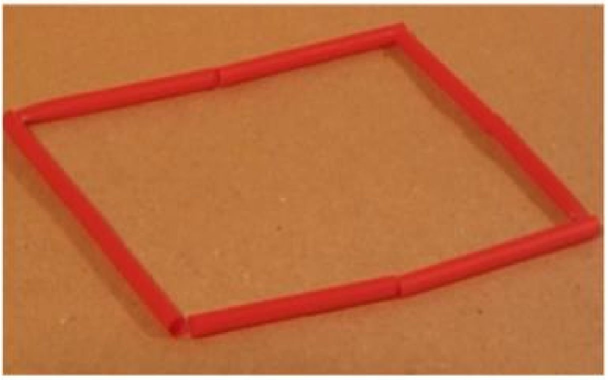
Kontrolní úkoly:

Navrhněte schéma třídění dvojic přímek z hlediska jejich vzájemné polohy. Jakou vzájemnou polohu mohou dvě přímky mít?

Náměty na praktická cvičení:

1. Využijte opět pomůcku „slámky a spojky“ (na webové stránce www.strawsandconnectors.com) nebo špejle či různobarevné slámky („brčka“) a modelujte pomocí nich

a) vzájemnou polohu dvou úseček (přímek): rovnoběžky, různoběžky, kolmice,
b) různé trojúhelníky,
c) různé n-úhelníky.



Pojmy k zapamatování:

- incidence bodů a přímek
- rovnoběžky, různoběžky, mimoběžky
- rovnoběžnost přímek a rovin
- různoběžnost přímek a rovin
- kritérium rovnoběžnosti přímek a rovin
- kolmost přímek a rovin
- kritérium kolmosti přímek a rovin.

Shrnutí:

Body, přímky a roviny, které považujeme za základní geometrické pojmy, mohou být v různých vztazích a v různé vzájemné poloze.
Uvažujme nejdříve situaci v rovině: Body A, B se sobě buď rovnají nebo jsou navzájem různé. Dvěma různými body A, B prochází jediná přímka p. Dvě různé přímky p, q mají nejvýše jeden společný bod, kterému říkáme průsečík. Takové přímky označujeme jako různoběžky. Zvláštním případem různoběžnosti přímek je kolmost. Nemají-li přímky žádný bod společný a leží v téže rovině, jsou to rovnoběžky. Jako speciální případ rovnoběžnosti chápeme situaci, kdy přímky splývají.
Nyní uvažujme situaci v prostoru: Přímka p leží v rovině ϱ (je její podmnožinou), jestliže průniku přímky a roviny náležejí dva různé body. Přímka p, která neleží v rovině ϱ, má s rovinou ϱ nejvýše jeden společný bod, průsečík přímky s rovinou. Má-li přímka s rovinou společný právě jeden bod, je s ní různoběžná. Zvláštním případem různoběžnosti přímky a roviny je kolmost. Nemá-li přímka s rovinou žádný bod společný, je s ní rovnoběžná.

Dvě roviny ϱ, σ jsou rovnoběžné, právě když se sobě rovnají (splývají) nebo když je jejich průnikem prázdná množina. Dvě různé roviny ϱ, σ jsou různoběžné, právě když je jejich průnikem přímka, průsečnice. Zvláštním případem různoběžnosti dvou rovin je kolmost.
O rovnoběžnosti přímky a roviny, resp. rovnoběžnosti dvou rovin rozhodujeme pomocí kritérií rovnoběžnosti. O kolmosti přímky a roviny, resp. kolmosti dvou rovin rozhodujeme pomocí kritérií kolmosti.

3.4 Tělesa

Cíle
Po prostudování kapitoly budete schopni

- rozeznat, pojmenovat a popsat základní mnohostěny, tj. hranatá tělesa - čtyřstěn, jehlan, rovnoběžnostěn (krychle, kvádr, hranol), a rotační tělesa (koule, kužel, válec) a vysvětlit jejich vlastnosti a vztahy mezi nimi,
- využít znalostí o prostorových útvarech k identifikaci předmětů v realitě, které mají tvar těles,
- vytvořit sítě vybraných těles,
- nakreslit/narýsovat tělesa ve volném rovnoběžném promítání.

Průvodce studiem:

Dosud jsme se v našem textu zabývali geometrickými útvary, které byly podmnožinami jedné roviny (jednorozměrnými i dvojrozměrnými). *Geometrie v rovině* se označuje termínem *planimetrie.* Ta část geometrie, která se zabývá prostorovými útvary (tělesy) se označuje *stereometrie,* je to *geometrie v prostoru*. Do stereometrie jsme „nahlédli" již v předchozí kapitole. Stereometrie se totiž kromě studiem prostorových útvarů zabývá i vzájemnou polohou přímek, rovin, jejich zobrazením atd. V následující kapitole se budeme zabývat *omezenými částmi prostoru ohraničenými plochami* - říkáme jim *mnohostěny* (např. krychle, hranol, jehlan) a *rotační - oblá tělesa* (např. válec, kužel nebo koule).

3.4.1 Volné rovnoběžné promítání

Prostorové geometrické útvary můžeme znázornit trojrozměrnými modely. Jistě si ze ZŠ pamatujete na dřevěné, plastové či drátěné modely krychle, kvádru, jehlanu atd. Abychom mohli prostorová tělesa zobrazit (narýsovat, nakreslit) v rovině, například na list papíru, je třeba zvolit vhodnou *zobrazovací metodu*. Stručně popíšeme způsob, který je ve školské matematice nejběžnější: **volné rovnoběžné promítání,** které je jednoduché a názorné.

Rovnoběžné promítání *je určeno danou rovinou π*, zvanou **průmětna** a *danou přímkou s*, která je s průmětnou **různoběžná.**

Při tomto způsobu zobrazování kreslíme názorné obrazy těles podle několika jednoduchých pravidel, a to na **nárysnu** (list papíru, tabule):

1. Obrazce, které leží v rovinách rovnoběžných s nárysnou (těmto rovinám říkáme *průčelné roviny*) kreslíme ve skutečné velikosti.

2. Přímky zobrazujeme jako přímky nebo jako body.
3. Jestliže se rovnoběžné přímky zobrazí jako přímky, pak je zobrazujeme opět jako rovnoběžky.
4. Přímky kolmé k nárysně kreslíme jako rovnoběžky, z nichž každá svírá s vodorovnou přímkou nárysny úhel o velikosti 45°.
5. Kreslíme-li obraz v měřítku 1:1, pak obraz každé úsečky kolmé k nárysně kreslíme jako úsečku, jejíž délka se rovná polovině délky dané úsečky.

Ve volném rovnoběžném promítání můžeme kreslit přímo názorné obrázky jednoduchých těles.

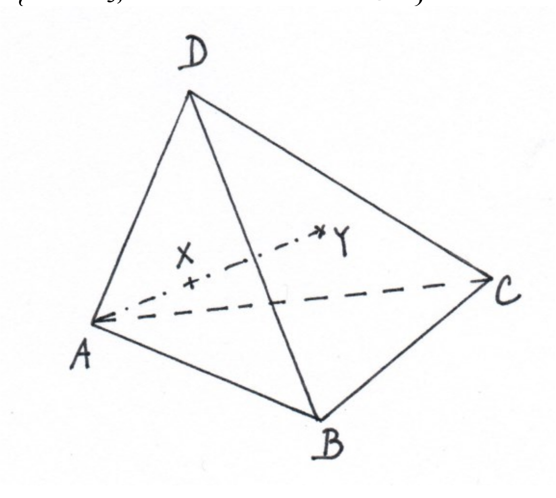
3.4.2 Mnohostěny - čtyřstěn, jehlan, hranol, krychle, kvádr

3.4.2.1 Čtyřstěn, jehlan

Výklad o tělesech začneme tělesy *hranatými*, které označujeme společným názvem **mnohostěny**. Budeme se zabývat pouze mnohostěny, které jsou konvexními bodovými množinami. Všimneme si určité analogie mezi mnohoúhelníky (n-úhelníky) - útvary *rovinnými* a mnohostěny - útvary *prostorovými.* Tato analogie zřetelně vystupuje při vymezení *mnohostěnu s nejmenším počtem vrcholů - čtyřstěnu.*

Důležitá pasáž textu:

*Právě když body A, B, C, D prostoru E_3 neleží v jedné rovině (jsou nekomplanární), nazýváme **čtyřstěnem ABCD** množinu všech takových bodů X prostoru E_3, že bod X náleží úsečce AY a zároveň bod Y náleží trojúhelníku BCD.*
Symbolicky: $ABCD = \{X \in E_3, X \in AY \wedge Y \in \Delta BCD\}$.



Body A, B, C, D nazýváme **vrcholy** (u čtyřstěnu jsou 4**)**, úsečky AB, BC, CA, AD, BD, CD **hrany** (čtyřstěn jich má 6) a trojúhelníky ABC, BCD, CDA, AED **stěny** (čtyřstěn jich má - jak vyplývá z jeho názvu - 4) čtyřstěnu ABCD. Čtyřstěn je tedy těleso, ohraničené čtyřmi trojúhelníkovými stěnami.

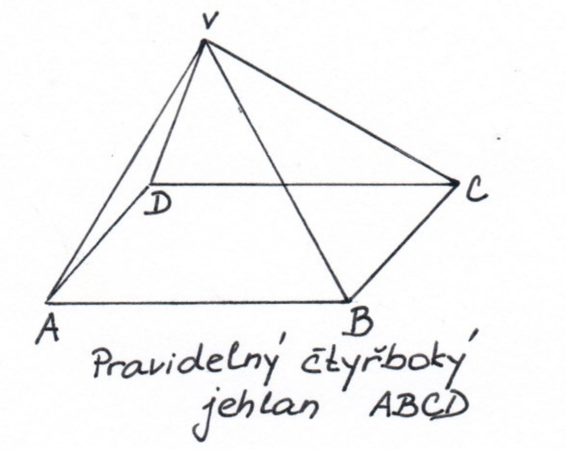
Porovnejme uvedenou definici s definicí trojúhelníka z kap. 2 - analogie je zřejmá. Trojúhelník je *rovinný* útvar - je podmnožinou roviny, čtyřstěn *prostorový* útvar (těleso) - je podmnožinou prostoru. Připomeneme si definici trojúhelníka:

Právě když body A, B, C prostoru E_3 neleží v úsečce (jsou nekolineární), nazývá se trojúhelníkem ABC množina všech takových bodů X prostoru E_3, že bod X náleží úsečce AY a zároveň bod Y náleží úsečce BC.
Symbolicky: $ABC = \{ X \in E_3; X \in AY \wedge Y \in BC\}$.

Pro porovnání uvedeme definici dalšího známého tělesa - **pravidelného čtyřbokého jehlanu.** Takový tvar mají například egyptské pyramidy.

Důležitá pasáž textu:

Nechť je dán čtyřúhelník ABCD a bod V, který na něj neleží. ***Čtyřboký jehlan ABCDV*** *je množina všech takových bodů X prostoru E_3, že bod X náleží úsečce VY a zároveň bod Y náleží danému čtyřúhelníku ABCD a daný bod V nenáleží rovině čtyřúhelníku ABCD.*
Symbolicky: $ABCDV = \{X \in E_3, X \in VY \wedge Y \in ABCD\}$.



Průvodce studiem:

Připomeňme ze základní a střední školy některé termíny:
Bod V je *(hlavní) vrchol* jehlanu, čtyřúhelník ABCD je *podstava* jehlanu, body A, B, C, D jsou *vrcholy podstavy* jehlanu, úsečky AB, BC, CD, AD jsou *podstavné hrany* jehlanu, trojúhelníky ABV, BCV, CDV, ADV *boční stěny*, úsečky AV, BV, CV, DV *boční hrany* jehlanu. Podstava a boční stěny se souhrnně označují jako *stěny* jehlanu, sjednocení všech stěn je *hranice* jehlanu, sjednocení všech bočních stěn je *plášť* jehlanu. Vzdálenost (hlavního) vrcholu od roviny jeho podstavy je *výška* jehlanu.

Budeme uvažovat pouze některé typy jehlanů:
kolmý jehlan - přímka určená vrcholem V jehlanu a středem podstavy je kolmá k rovině podstavy,
pravidelný n-boký jehlan - kolmý jehlan, jehož podstavou je pravidelný n-úhelník, jeho bočními stěnami jsou rovnoramenné trojúhelníky (například pravidelný čtyřboký jehlan).

3.4.2.2 Hranol, rovnoběžnostěn, kvádr, krychle

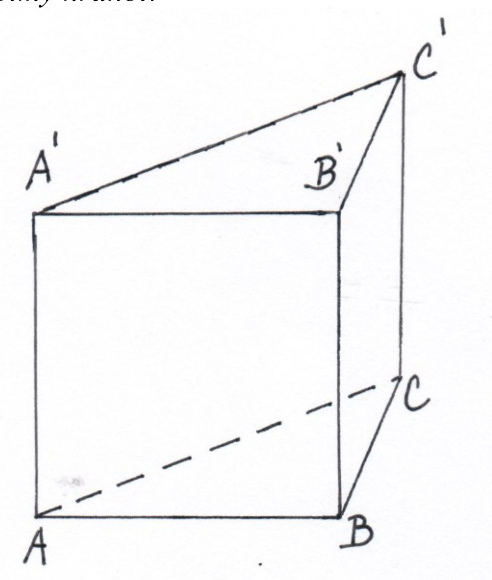
Průvodce studiem:

Další mnohostěny, s nimiž se setkáte, se označují souhrnným názvem **hranoly.** Opět si zopakujte některé termíny. Hranoly mají dvě *podstavy (dolní a horní*). Podstavami mohou být různé *n-úhelníky* (trojúhelník, čtverec, obdélník, pětiúhelník,…). *Boční stěny* jsou rovnoběžníky, strany těchto rovnoběžníků jsou *boční hrany*. Sjednocení všech bočních stěn je *plášť* hranolu, sjednocení všech stěn (podstav + bočních stěn) je *hranice* hranolu. Vzdálenost rovin, v nichž leží podstavy, se nazývá *výška* hranolu. Nás budou zajímat **kolmé hranoly** - takové, jehož boční hrany jsou kolmé k podstavám.

Důležitá pasáž textu:

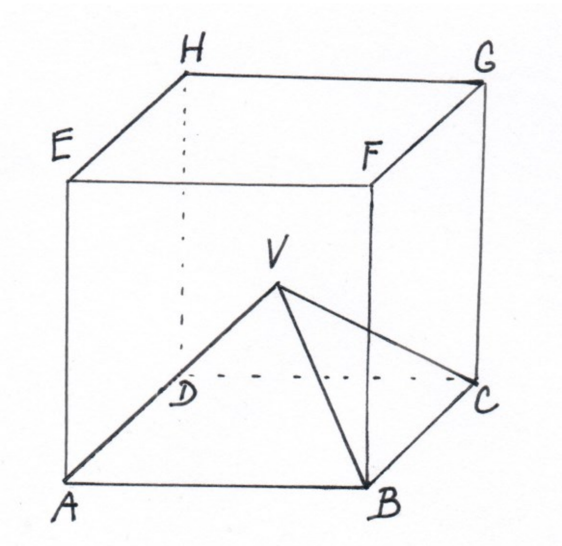
Právě když n-úhelníky U_1*,* U_2 *jsou shodné a leží v rovnoběžných rovinách, nazýváme* ***hranolem*** *množinu všech takových bodů X prostoru* E_3*, že bod X náleží úsečce YZ a zároveň bod Y náleží n-úhelníku* U_1 *(dolní podstavě), bod Z náleží n-úhelníku* U_2 *(horní podstavě).*

Na obrázku je *trojboký kolmý hranol:*



Čtyřboký hranol, jehož všemi stěnami jsou rovnoběžníky, je rovnoběžnostěn.

Rovnoběžnostěn ABCDEFGH *je sjednocením nepřekrývajících se čtyřbokých jehlanů ABCDV, EFGHV, ABFEV, DCGHV, BCGFV, ADHEV, právě když ABCD je daný rovnoběžník a bod V neleží v rovině rovnoběžníku ABCD a je středem úseček AG, BH, CE, DF (tzv. tělesových úhlopříček).*



Z obrázku, na kterém je pro přehlednost vyznačen pouze jeden ze *šesti* čtyřbokých jehlanů, jejichž sjednocením je rovnoběžnostěn, je zřejmá jeho definice.

Speciálními případy rovnoběžnostěnu jsou známá tělesa - kvádr a krychle.

***Kvádr** je kolmý rovnoběžnostěn, jehož stěnami jsou **obdélníky** (popř. čtverce), z nichž každé dva protější jsou shodné.*

*Kolmý rovnoběžnostěn, jehož všechny stěny jsou **čtverce**, se nazývá **krychle.***

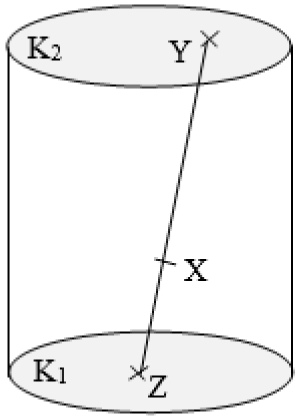
3.4.3 Rotační tělesa - válec, kužel, koule

Další tělesa, s nimiž se setkáváme a jejichž tvar nám připomínají mnohé předměty ze života, nazveme **rotační**. Jsou to *oblá* (nemají hrany) tělesa, která vznikají *otáčením (rotací) rovinných útvarů* kolem přímky (osy rotace):

- válec vznikne rotací obdélníku kolem jedné své strany nebo kolem osy své strany,
- kužel vznikne rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem jedné své odvěsny nebo rotací rovnoramenného trojúhelníku kolem osy základny
- koule vznikne rotací kruhu kolem přímky procházející středem kruhu.

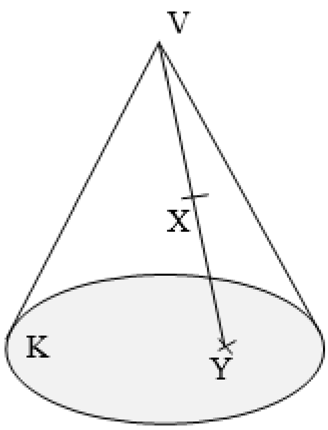
K vymezení jednotlivých rotačních těles opět využijeme analogie.

Jestliže v definici hranolu *zaměníme jako podstavy shodné n-úhelníky za shodné kruhy*, dostaneme válec:
*Právě když kruhy K_1, K_2 jsou shodné a leží v rovnoběžných rovinách, nazýváme **válcem** množinu všech takových bodů X prostoru E_3, že bod X náleží úsečce **YZ** a zároveň bod Y náleží kruhu K_1 a bod Z náleží kruhu K_2.*



Podobně si všimněme analogie mezi definicí *kužele a jehlanu*:

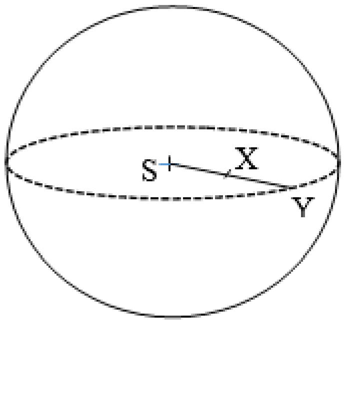
Je dán kruh K a bod V, který nenáleží rovině kruhu K, potom ***kuželem*** *nazýváme množinu všech takových bodů X prostoru E_3, že bod X náleží úsečce* ***VY*** *a zároveň bod Y náleží kruhu* ***K****.*



Jestliže vyjdeme z definice kruhu, ve které místo roviny E_2 budeme za základní množinu uvažovat prostor E_3, definujeme *kouli*:

Je dán bod S a úsečka AB. ***Koulí K_o*** *o středu S a poloměru AB nazýváme množinu všech takových bodů X prostoru E_3, že bod X náleží úsečce SY a zároveň úsečka SY je shodná s úsečkou AB.*

Symbolicky: $K_o\ (S,AB) = \{X \in E_3,\ X \in SY \wedge SY \cong AB\}$.



Kontrolní úkoly:

1. Narýsujte ve volném rovnoběžném promítání:
a) krychli o délce hrany 4 cm,
b) kvádr o délkách hran 6 cm, 4 cm a 3 cm.

2. Narýsujte síť krychle o délce hrany 5 cm.
   a) síť vystřihněte a krychli složte,
   b) narýsujte ještě alespoň 3 jiné sítě téže krychle a přesvědčte se o správnosti složením krychle.

Náměty na praktická cvičení:

1. Najděte příklady předmětů/staveb, s nimiž se setkáváte v realitě ve svém okolí, a jejichž tvar připomíná geometrická tělesa. Například: egyptské pyramidy - čtyřboký jehlan, atletické nářadí vrhačů - koule,.. Vysvětlete, proč např. fotbalový míč nemůžeme považovat za příklad koule!

2. Vyberte z dětské stavebnice několik prvků (barevných„kostek“), které mohou být považovány za modely těles: krychle, hranol, jehlan, kvádr, válec, kužel, koule. Navrhněte vhodné třídění (podle tvaru nebo barvy).

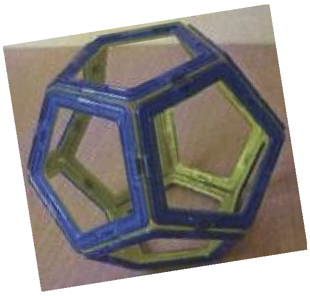
3. Zpracujte námět na konkrétní dětskou aktivitu v MŠ zaměřenou na volnou práci se stavebnicí (např. Lego) podle vlastní fantazie - „vytvořte stavbu“. Která použitá tělesa umíme pojmenovat? Jak je můžeme pojmenovat jinak? Co o nich kromě názvu můžeme říct?

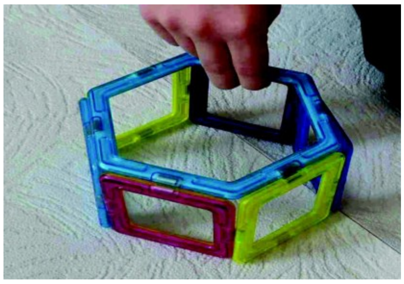
4. Zpracujte námět na konkrétní dětskou aktivitu v MŠ zaměřenou na rozlišení předmětů podle hmatu a hmatovou paměť. Ukázka:

- vybereme soubor barevných kostek (různých tvarů) ze stavebnice - například několik z množiny hranatých i rotačních těles - krychle. kvádr, hranol, jehlany, válec, kužel, koule - které dětem postupně vkládáme do dlaně tak, aby si mohly předmět pomalu, řádně a v klidu prozkoumat hmatem. Zrakový vjem vyloučíme tím, že dítěti zavážeme oči šátkem,
- poté, po rozvázání šátku, nabídneme dětem soubor všech těles a požádáme děti, aby označily tělesa, která si zapamatovaly.

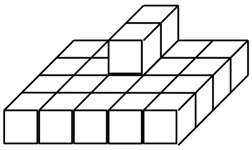
5. Seznamte se se stavebnicemi MagFormers a Polydron. Vytvořte z těchto stavebnic

modely čtyřstěnu, krychle, kvádru, pravidelného čtyřbokého jehlanu, pravidelného pětibokého jehlanu a kolmého šestibokého hranolu. Ukažte na vytvořených modelech vrcholy, stěny a hrany. Promyslete možnosti využití uvedených stavebnic k manipulativním činnostem dětí v prostředí mateřské školy.





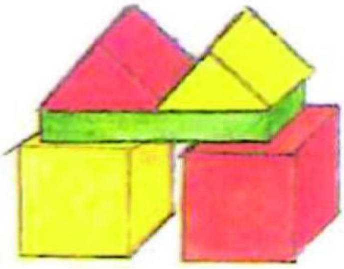
6. Seznamte se s krychlovou stavebnicí. Z krychlí vytvářejte různé stavby (tělesa). Zdůvodněte, zda můžete sestavit tělesa tvaru krychle, kvádru, hranolu. Určete a zdůvodněte, kolik krychliček stavebnice na ně budete potřebovat.

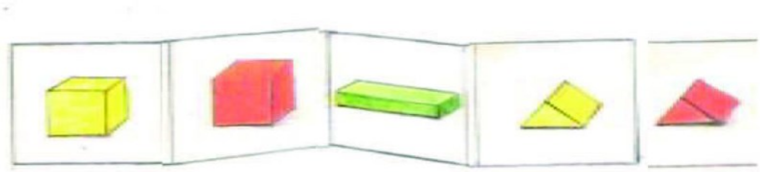


Těleso sestavené z krychlí

9. Zpracujte námět na konkrétní dětskou aktivitu v MŠ zaměřenou na řešení problémů podle následujícího vzoru:

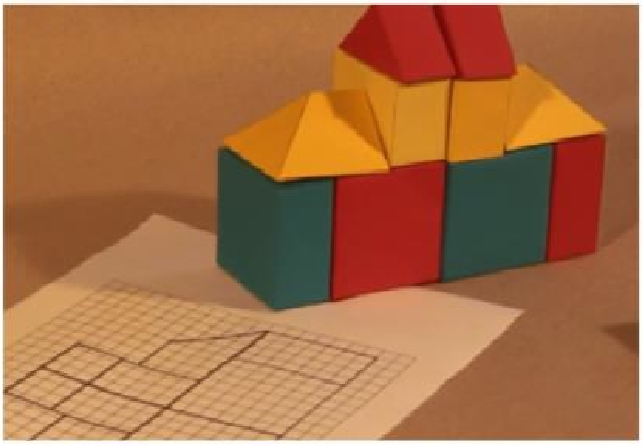
- připravíme pro děti sadu barevných kostek (různých tvarů) ze stavebnice a dítě z nich postaví libovolnou stavbu. Řešeni problému spočívá v sestavení plánku (postupu, jak vznikala stavba) z jednotlivých kartiček, na nichž jsou jednotlivé stavební díly vyobrazeny (popř. využijeme fotosnímků).





- sestavíme plánek postupu stavby (řadíme kartičky za sebe, jednu vedle druhé) a dítě má podle plánku postavit stavbu, popř. rozhodnout, zda takovou stavbu lze postavit, zda něco chybí nebo je tam kartička navíc - tuto činnost takto vhodně gradovat podle obtížnosti.

10. Zakreslete do čtvercové sítě nárys a půdorys jednoduché stavby, kterou vytvoříte z dětských stavebnic (ukázka na obrázku).



Pojmy k zapamatování:

- stereometrie (geometrie v prostoru)
- volné rovnoběžné promítání
- průmětna, promítací přímka, průmět útvaru
- mnohostěn,
- čtyřstěn, jehlan,
- hranol, rovnoběžnostěn, krychle, kvádr
- vrchol, hrana, stěna mnohostěnu
- podstava, plášť, hranice tělesa
- rotační tělesa - válec, kužel, koule
- síť tělesa

Shrnutí:

Geometrická tělesa - prostorové útvary jsou podmnožinami prostoru E_3, jsou to útvary trojrozměrné. Vhodnou zobrazovací metodou, která nám umožňuje znázornit tělesa v rovině, je volné rovnoběžné promírání. Rovnoběžné promítání je určeno průmětnou a s ní různoběžnou přímkou *s*. Za průmětnu obvykle volíme nákresnu (list papíru, tabuli). Libovolný bod X prostoru lze promítnout do průmětny π tak, že jím vedeme promítací přímku (rovnoběžku s přímkou s) a určíme její průsečík X´s průmětnou π, tzv. průmět bodu. Množina průmětů všech bodů daného zobrazovaného útvaru U se nazývá průmět útvaru U a značí se U´. Leží-li útvar U v rovině rovnoběžné s průmětnou π (tzv. průčelné rovině) je útvar U´ shodný s útvarem U. Úsečky kolmé na průčelnou rovinu se zobrazují pod úhlem 45 stupňů a jejich velikost se zkracuje na polovinu.
Tělesa můžeme rozdělit na hranatá (mnohostěny) a rotační (oblá). Mnohostěny popisujeme pomocí vrcholů, hran a stěn. Mnohostěn s nejmenším počtem vrcholů je čtyřstěn, který je ohraničený čtyřmi trojúhelníkovými stěnami. Čtyřboký jehlan má čtyřúhelníkovou podstavu a čtyři boční stěny, n-boký jehlan má podstavu ve tvaru n-úhelníka a *n* stěn. Vzdálenost (hlavního) vrcholu od roviny jeho podstavy je výška jehlanu.
Hranoly mají dvě podstavy (dolní a horní). Podstavami mohou být různé n-úhelníky (trojúhelník, čtverec, obdélník, pětiúhelník,…). Boční stěny jsou rovnoběžníky, strany těchto rovnoběžníků jsou boční hrany. Vzdálenost rovin, v nichž leží podstavy, se nazývá výška hranolu. Kolmé hranoly jsou takové, jehož boční hrany jsou kolmé k podstavám.
Podstava a stěny mnohostěnu tvoří jeho hranici.

Čtyřboký hranol, jehož všemi stěnami jsou rovnoběžníky, je rovnoběžnostěn. Kvádr je kolmý rovnoběžnostěn, jehož stěnami jsou obdélníky (popř. čtverce), z nichž dva protější jsou shodné. Kolmý rovnoběžnostěn, jehož všechny stěny jsou čtverce, se nazývá krychle.
Rotační tělesa - oblá (nemají hrany), vznikají otáčením rovinných útvarů - obdélníku, pravoúhlého nebo rovnoramenného trojúhelníku nebo kruhu. Jsou to válec, kužel a koule. Při definování rotačních těles lze využít analogie s definicemi mnohostěnů nebo rovinných útvarů: válce s hranolem, kužele s n-bokým jehlanem, koule s kruhem.

4. Shodnost

Průvodce studiem:

V běžném životě se setkáváme se sděleními typu „listy papíru v nepopsaném sešitě jsou stejné“, „čtyři židle u stolu jsou stejné“, „auta stejné značky na parkovišti jsou stejná,…“ V matematice vyjadřujeme tuto skutečnost výrazem „být shodný“, který popisuje binární relaci - *shodné zobrazení*.
S pojmem *relace zobrazení* jste se setkali již v předmětu a studijním textu *„Rozvoj předčíselných představ“.* Poznali jste různé druhy a typy zobrazení, setkali jste se s pojmy *vzor a obraz.* Doporučuji Vám zopakovat si poznatky o relaci zobrazení, abychom na ně mohli navázat i v geometricky zaměřeném učivu.

4.1 Shodnost úseček, grafický součet, grafický rozdíl a násobek úsečky

Cíle
Cílem kapitoly je, abyste po jejím prostudování byli schopni:

- porozumět pojmu shodné zobrazení, uměli najít obraz a vzor ve shodném zobrazení
- porovnávat úsečky, sestrojit grafický součet a rozdíl úseček
- sestrojit n-násobek úsečky a střed úsečky

Připomeňte si pojmy zobrazení, zobrazení na množinu a prosté zobrazení, které budeme v následujícím výkladu potřebovat.

Relace $Z \subset A \times B$ je *zobrazením z množiny A do množiny B*, právě když ke *každému prvku a* z množiny *A existuje nejvýše jeden prvek b* z množiny *B* takový, že $[a, b] \in Z$. Prvek *a* se nazývá *vzorem* prvku *b*, prvek *b* se nazývá *obrazem* prvku *a* v zobrazení *Z*. První obor zobrazení *Z* se nazývá *definiční obor* zobrazení $O_1(Z)$ a druhý obor zobrazení *Z* se nazývá *obor hodnot* zobrazení $O_2(Z)$.

Zobrazení Z je zobrazením *množiny A na množinu B,* právě když platí $O_1(Z) = A$ a $O_2(Z)=B$. Jde o zobrazení „celé“ množiny A na „celou“ množinu B (tzn. každý prvek z A je vzorem a každý prvek z B je aspoň jednou obrazem nějakého prvku z A).

Zobrazení *Z* z množiny *A* na množinu *B* se nazývá *prosté*, právě když *každým dvěma různým vzorům* $x_1, x_2 \in A$ *přiřadíme dva různé obrazy* $y_1, y_2 \in B$ v zobrazení *Z*.

Místo obecného pojmu „prvky“ budeme v geometrii používat pojem „body“ (prvky roviny nebo prostoru).

Důležitá pasáž textu:

Jestliže A, B jsou *bodové množiny* v téže rovině, pak každému zobrazení množiny A do množiny B říkáme **geometrické zobrazení v rovině**. V tomto zobrazení *přiřazujeme libovolnému bodu X roviny jako jeho* ***obraz*** *právě jeden bod X´ téže roviny*, zapisujeme
X →X´.

Prosté zobrazení v rovině nazýváme **shodným zobrazením (shodností),** právě když pro každé dva body X, Y roviny a pro jejich obrazy X´, Y´ (X →X´, Y→ Y´) platí
X Y ≅ X´Y. *Symbol ≅ čteme "je shodný".*

Řešený příklad:

a) Vyznačíme na listu papíru dva různé body A, B a přiložte jej na jiný list papíru. Propíchneme oba listy v bodech A a B vyznačíme body C, D na přiloženém listu papíru. Tímto způsobem (propíchnutím) jsme provedli zobrazení, ve kterém jsme bodům A, B (vzorům), přiřadili body C, D (jejich obrazy). Úsečky AB a CD jsou shodné, což zapíšeme *AB ≅ CD.*

b) Nakresleme libovolný rovinný útvar U, například trojúhelník ABC, na list papíru. Překresleme jej na průsvitku, pak průsvitku přemístíme a útvar překreslíme na jiné místo na papíru. Dostaneme tak obraz U', který je shodný s originálem (vzorem) U. Bude nás zajímat cesta, kterou se obkreslený útvar U pohyboval. Libovolnému bodu X ∈ U (vzoru) po přemístění odpovídá jediný bod X´ ∈ U´ (obraz). Libovolné body X, Y ∈ U a jejich obrazy X´, Y´∈ U´ určují shodné úsečky. V našem případě jsou shodné strany trojúhelníka: *AB ≅ A´B´, AC≅ A´C´, BC≅ B´C´.* Popsané přemístění útvaru budeme interpretovat jako *shodné zobrazení*.

Základní vlastnosti shodných zobrazení vyjadřují následující věty:

1. Obrazem každé úsečky AB je úsečka A´B´ s ní shodná (AB ≅ A´B´).
2. Obrazem každé polopřímky AB je polopřímka A´B´. Obrazem navzájem opačných polopřímek jsou navzájem opačné polopřímky.
3. Obrazem každé přímky AB je přímka A´B´. Obrazy rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky.
4. Obrazem každé poloroviny pA je polorovina p´A´. Obrazy navzájem opačných polorovin jsou opačné poloroviny.
5. Obrazem každého konvexního úhlu AVB je konvexní úhel A´V´B´s ním shodný.
6. Obrazem každého trojúhelníku ABC je trojúhelník A´B´Ć´s ním shodný.

Průvodce studiem:

Shodnosti úseček využijeme při jejich porovnávání, určení grafického součtu a rozdílu úseček a násobku úsečky. Uvědomte si přitom souvislost *operací s úsečkami* (grafický součet, grafický rozdíl, násobek) s *aritmetickými* operacemi sčítání, odčítání a násobení a *množinovými operacemi* sjednocení a průnik množin! V následujících definicích použijeme také symboliku teorie množin a výrokové logiky. Pokud to považujete za potřebné, je třeba si zopakovat z textu „Rozvíjení předčíselných představ“.

Při ***porovnávání*** *dvou libovolných úseček AB, CD existuje na polopřímce CD jediný takový bod E, že AB ≅ CE a nastane právě jedna ze tří možností:*

a) *bod E leží mezi body C, D, potom pro úsečky platí AB < CD,*
b) *E = D, potom pro úsečky platí AB ≅ CD,*
c) *bod D leží mezi body C, E, potom pro úsečky platí AB > CD.*

Doporučuji vám, abyste si k uvedeným možnostem nakreslili příslušný obrázek. Z obrázku si uvědomíte, že

- úsečka *AB* je *menší* než úsečka *CD (AB < CD)*, právě když existuje úsečka *XY ≅ AB*, která je podmnožinou úsečky *CD*,
- úsečka AB je *větší* než CD (*AB > CD),* právě když existuje úsečka *XY ≅ CD,* která je podmnožinou úsečky AB.

Důležitá pasáž textu:

Úsečka EF se nazývá ***grafický součet*** *úseček AB a CD (píšeme* ***EF = AB + CD****), právě když je sjednocením úseček EH a HF (EF = EH ∪ HF). Přitom platí: EH ≅ AB ∧ HF ≅ CD ∧ úsečky EH, HF mají jediný společný bod H (EH ∩ HF = {H}) a leží na jedné přímce.*

Úsečka AB se nazývá ***grafický rozdíl*** *úseček EF a CD (píšeme* ***AB = EF - CD****), právě když je úsečka EF grafickým součtem úseček AB a CD (EF = AB + CD).*

Pomocí grafického součtu úseček zavádíme **násobek úsečky**.
Pro každou úsečku AB a každou úsečku s ní shodnou platí, že 1. AB = AB.
N-násobkem úsečky AB (n ∈ N, n > 1) nazýváme grafický součet (n-1)-násobku úsečky AB a úsečky AB.
2 . AB = AB + AB
3 . AB = 2 . AB + AB
4 . AB = 3 . AB + AB, atd.

Každé nenulové úsečce AB náleží právě jeden takový bod S, že AS ≅ BS.
Právě když bod S je bodem nenulové úsečky AB a platí AS ≅ BS, nazývá se bod S ***střed úsečky*** *AB.*

Pro zájemce:

Analogicky můžeme postupovat při porovnávání úhlů, definici grafického součtu a grafického rozdílu úhlů. Uvedeme pouze základní pojmy - podrobněji najdete v literatuře:

a) *Pro každé dva úhly α, β nastane právě jedna ze tří možností: $\alpha < \beta$, $\alpha \cong \beta$, $\alpha > \beta$.*
b) *Úhel ω se nazývá grafický součet úhlů α a β ($\omega = \alpha + \beta$), právě když je úhel ω sjednocením úhlů α', β' ($\omega = \alpha' \cup \beta'$), přičemž $\alpha' \cong \alpha \wedge \beta' \cong \beta \wedge$ úhly α' a β' jsou styčné.*
c) *Úhel α se nazývá grafický rozdíl úhlů ω a β ($\alpha = \omega - \beta$), právě když ω je grafickým součtem α, β ($\omega = \alpha + \beta$).*
d) *Ke každému konvexnímu úhlu AVB lze určit právě jednu takovou polopřímku VO ($\rightarrow VO \subset AVB$), že úhel AVO je shodný s úhlem BVO. Právě když pro konvexní*

úhel AVB a polopřímku VO platí AVO ≅ BVO, nazývá se polopřímka VO osou konvexního úhlu AVB.

e) Pomocí osy úhlu přímého můžeme zavést úhel pravý. *Právě když je polopřímka VO osou přímého úhlu AVB, nazývá se úhel AVO (případně BVO) pravý.*

Co si pamatuji ze základní/střední školy? Co si nepamatuji, to si opět důkladně zopakuji!

Trojúhelník ABC je shodný s trojúhelníkem KLM, právě když strana AB je shodná se stranou KL, strana BC je shodná se stranou LM a strana AC je shodná se stranou KM.

Pomocí vlastností shodných úseček a shodných úhlů se dají odvodit známé **věty o shodnosti trojúhelníků**:

sss: Shodují-li se dva trojúhelníky ve všech třech stranách, jsou shodné.
sus*:* Shodují-li se dva trojúhelníky ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném, jsou shodné.
usu: Shodují-li se dva trojúhelníky v jedné straně a dvou úhlech k ní přilehlých, jsou shodné.
Ssu: Shodují-li se dva trojúhelníky ve dvou stranách a úhlu proti větší z nich, jsou shodné.

Kontrolní úkoly:

1. Zvolte v rovině dvě úsečky AB, CD, které nejsou shodné. Sestrojte grafický součet a grafický rozdíl těchto úseček.
2. Zvolte v rovině dvě úsečky PQ a RS. Sestrojte grafický součet a grafický rozdíl těchto úseček. Jak se liší příklady 1 a 2?
3. Sestrojte v rovině úsečku AB = 3 cm. Sestrojte dvojnásobek (trojnásobek, pětinásobek) úsečky AB.
4.

Pojmy k zapamatování:

- shodné zobrazení,
- obraz a vzor ve shodném zobrazení
- porovnávání úseček,
- grafický součet a grafický rozdíl úseček,
- n-násobek úsečky,
- střed úsečky.

Shrnutí:

1. Jestliže A, B jsou bodové množiny v téže rovině, pak každému zobrazení množiny A do množiny B říkáme geometrické zobrazení v rovině. V tomto zobrazení přiřazujeme libovolnému bodu X roviny jako jeho obraz právě jeden bod X′ téže roviny, zapisujeme $X \rightarrow X'$.
2. Prosté zobrazení v rovině nazýváme shodným zobrazením (shodností), právě když pro každé dva body X, Y roviny a pro jejich obrazy X′, Y′ ($X \rightarrow X'$, $Y \rightarrow Y'$) platí $XY \cong X'Y'$.
3. Při porovnávání dvou libovolných úseček AB, CD existuje na polopřímce CD jediný takový bod E, že $AB \cong CE$ a nastane právě jedna ze tří možností:
   a) bod E leží mezi body C, D, potom pro úsečky platí $AB < CD$,
   b) $E = D$, potom pro úsečky platí $AB \cong CD$,
   c) bod D leží mezi body C, E, potom pro úsečky platí $AB > CD$.

4. Grafický součet úseček AB a CD je úsečka EF (EF = AB + CD), právě když je sjednocením úseček EH a HF ($EF = EH \cup HF$). Přitom platí: $EH \cong AB \wedge HF \cong CD$ a současně úsečky EH, HF mají jediný společný bod H ($EH \cap HF = \{H\}$) a leží na jedné přímce.
5. Grafický rozdíl úseček EF a CD je úsečka AB (AB = EF - CD), právě když je úsečka EF grafickým součtem úseček AB a CD (EF = AB + CD).
6. Pro každou úsečku AB a každou úsečku s ní shodnou platí, že 1. AB = AB.
7. N-násobkem úsečky AB ($n \in N$, $n > 1$) nazýváme grafický součet (n-1) -násobku úsečky AB a úsečky AB.
8. Právě když bod S je bodem nenulové úsečky AB a platí $AS \cong BS$, nazývá se bod S střed úsečky AB.

4.2 Shodná zobrazení v rovině

Cíle

Cílem kapitoly je, abyste po jejím prostudování uměli

- vysvětlit a používat osovou souměrnost, nalézt obraz geometrického útvaru v osové souměrnosti, určit vlastnosti osové souměrnosti,
- najít rovinné útvary osově souměrné,
- vysvětlit a používat středovou souměrnost, nalézt obraz geometrického útvaru ve středové souměrnosti, určit vlastnosti středové souměrnosti,
- najít rovinné útvary středově souměrné,
- vysvětlit a používat posunutí, nalézt obraz geometrického útvaru v posunutí, určit vlastnosti posunutí,
- vysvětlit a používat otáčení, nalézt obraz geometrického útvaru v otáčení, určit vlastnosti otáčení
- řešit jednoduché úlohy s využitím jednotlivých shodných zobrazení.

Průvodce studiem:

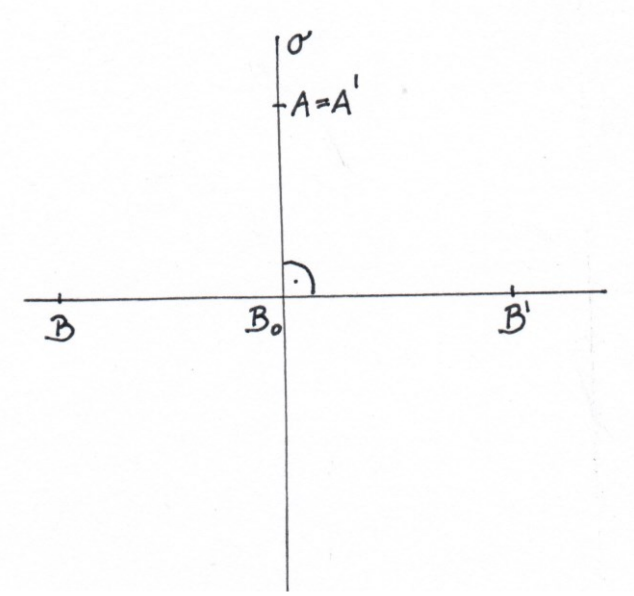
V kapitole využijeme pojmy probrané v předchozím textu: zopakujte si obecnou definici shodného zobrazení v rovině (shodnosti) a shodnost úseček.
Pokusíme se o co nejnázornější výklad, budeme se opírat o manipulativní činnosti. K přemisťování používejte vystřižených útvarů z papíru, proužku papíru nebo průsvitky. Shodné zobrazení můžete názorně realizovat pohybem, ukážeme, že *dva geometrické útvary jsou shodné, jestliže se po přemístění na sebe kryjí (rovnají se*). (Uvedená věta v prostoru neplatí - pravou a levou botu nelze ztotožnit, dvě korunové mince ano).

4.2.1 Osová souměrnost

Důležitá pasáž textu:

Osovou souměrností O *s osou o nazýváme takové zobrazení v rovině E_2, které každému bodu X roviny E_2 přiřazuje bod X′ roviny E_2 tak, že platí*
a) je-li $X \in o$, je $X = X'$,
b) jeli $X \notin o$, pak X′ leží na přímce procházející bodem X kolmo k přímce o tak, že střed X_0 úsečky XX' náleží přímce o.

*Přímka **o** se nazývá **osa** osové souměrnosti.*

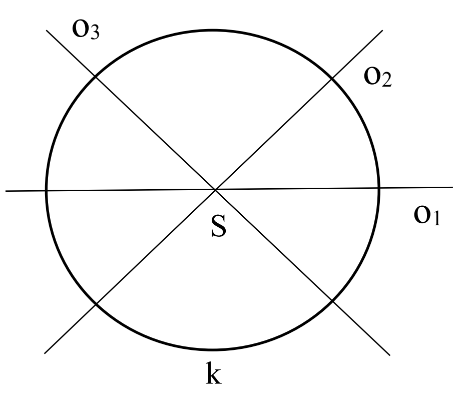


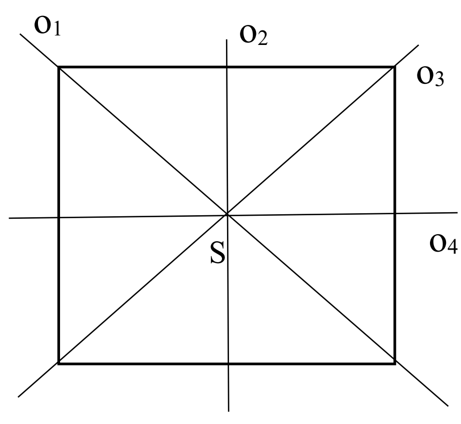
Je zřejmé, že platí

- pro obraz bodu A, který leží na ose: A´= A. Bod A se zobrazil sám na sebe, je to **samodružný** bod,
- pro obraz bodu B, který neleží na ose: úsečka BB´ je kolmá k ose o, bod B_0 je středem BB. Bod B se zobrazil do B´.

Osová souměrnost je jednoznačně určena osou souměrnosti. Body, které *náleží ose souměrnosti, jsou samodružné*, tzn. zobrazí se v osové souměrnosti samy na sebe.

*Dva geometrické útvary U_1, U_2 v rovině, které mají tu vlastnost, že každý bod $X \in U_1$ lze přemístit podle osy souměrnosti o do bodu $X' \in U_2$ a platí $U_1 \neq U_2$ nazývají se útvary **souměrně sdružené podle osy.***

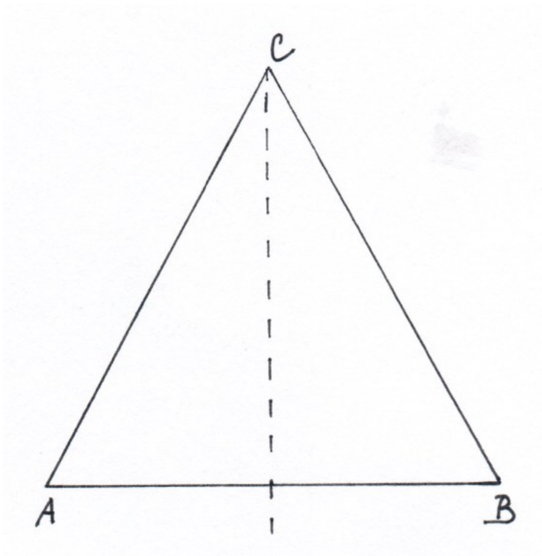




Geometrický útvar U se nazývá ***souměrný podle osy o (osově souměrný)****, právě když se útvar U v osové souměrnosti s osou o ~~se~~ zobrazí sám na sebe (U' = U). Říkáme, že se útvar U tímto zobrazením reprodukuje.*

Osově souměrné jsou například tyto rovinné útvary:

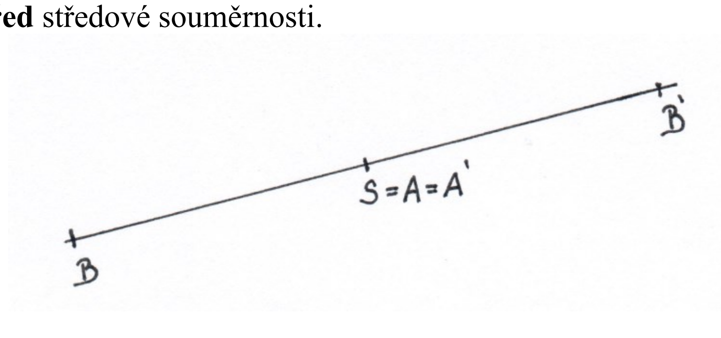
- kružnice (kruh) jsou souměrné podle každé přímky, která prochází středem (má nekonečně mnoho os souměrnosti),
- čtverec je souměrný podle čtyř přímek (dvou os stran a dvou os vnitřních úhlů),
- obdélník je souměrný podle dvou přímek (os stran),
- rovnostranný trojúhelník je souměrný podle tří přímek (os stran, resp. os vnitřních úhlů),
- rovnoramenný trojúhelník je souměrný podle jedné přímky (osy základny, resp. osy úhlu při hlavním vrcholu:



4.2.2 Středová souměrnost

Důležitá pasáž textu:

V rovině E_2 je dán bod S. ***Středovou souměrností S*** *v rovině E_2 se nazývá zobrazení, které*
a) bodu S přiřadí týž bod S,
b) každému bodu X roviny E_2, který je různý od bodu S, přiřadí bod X´ roviny E_2 tak, že bod S je středem úsečky XX´.
Bod S se nazývá **střed** středové souměrnosti.



Dva geometrické útvary U_1, U_2 roviny E_2, které mají tu vlastnost, že každý bod $X \in U_1$ lze přemístit podle středu souměrnosti S do bodu $X' \in U_2$ a platí $U_1 \neq U_2$, se nazývají ~~se~~ útvary ***souměrně sdružené podle středu****.*

Středová souměrnost je jednoznačně určena středem souměrnosti. Střed středové souměrnosti je *jediným* samodružným bodem, tzn. zobrazí se ve středové souměrnosti sám na sebe ($S' = S$).

Geometrický útvar U se nazývá ***souměrný podle středu S****, právě když se útvar U ve středové souměrnosti se středem S zobrazí sám na sebe (U' = U). Bod S se nazývá* ***středem souměrnosti*** *útvaru U. Říkáme, že se útvar U tímto zobrazením reprodukuje.*

Středově souměrné jsou například tyto rovinné útvary:

- kružnice (kruh) jsou souměrné podle svého středu,
- čtverec je souměrný podle průsečíku čtyř přímek (dvou os stran a dvou os vnitřních úhlů),
- obdélník je souměrný podle průsečíku svých úhlopříček,
- rovnoběžník je souměrný podle průsečíku svých úhlopříček.

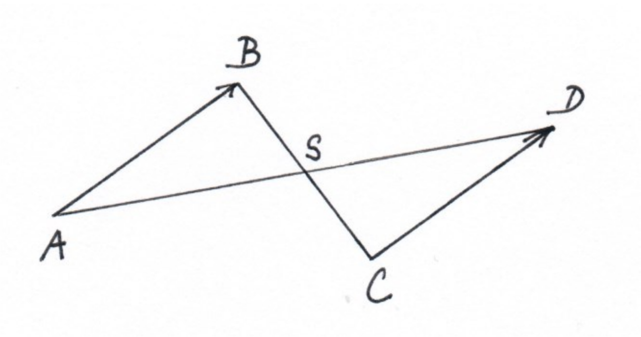
4.2.3 Posunutí a otáčení

Průvodce studiem:

Slova „posunutí" a „otáčení" jsou nám známá z denního života. Chceme-li přestavět nábytek v bytě, budeme jednotlivé kusy posouvat či otáčet. Posunujeme také židli, knihu na stole, trojúhelníkové pravítko aj. určitým směrem a o určitou vzdálenost. Při přemisťování těchto předmětů se obvykle snažíme, aby cesta, po které přemisťujeme, byla co nejkratší.
Rovněž otáčení si zřejmě umíme představit v realitě. Otáčíme hlavou, volantem auta aj. Posunutí (translace) a otáčení (rotace) jsou však shodná zobrazení v rovině, jejichž podstatu nyní vysvětlíme. Potřebujeme k tomu ale nejdříve vymezit pojmy *orientovaná úsečka, shodnost uspořádaných dvojic bodů* a *orientovaný úhel.* Pomůžeme si názornými obrázky.

Orientovanou úsečku AA′ zakreslenou na obrázku můžete zapsat jako uspořádanou dvojici bodů [A, A′].

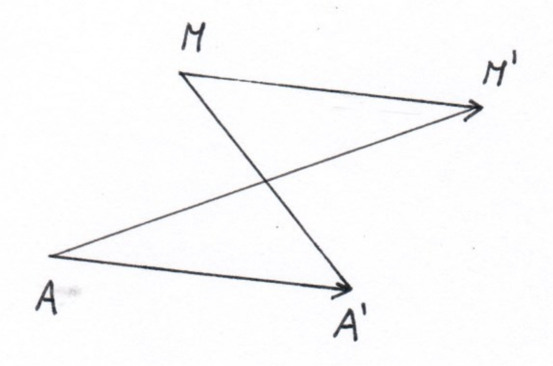
Uspořádaná dvojice bodů *[A,B] je shodná s uspořádanou dvojicí bodů [C,D], právě když úsečky AD a BC mají týž střed.* Úsečky *AD* a *BC* jsou útvary souměrně sdružené podle středu S.



Protože útvar ACDB je rovnoběžník, jsou úsečky AB a CD *shodné a rovnoběžné.*

Důležitá pasáž textu:

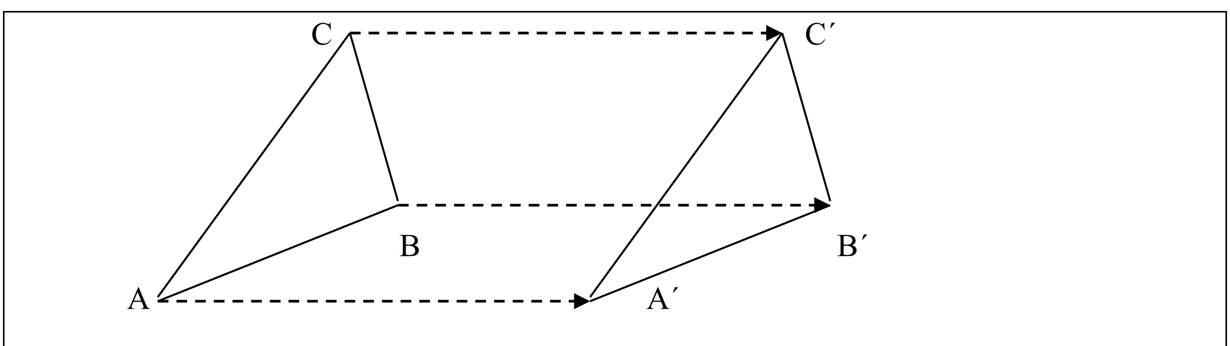
*V rovině E_2 je dána uspořádaná dvojice bodů [M, M´]. Zobrazení, které každému bodu $X \in E_2$ přiřadí bod $X' \in E_2$ tak, že úsečky XX´ a MM´ jsou shodné a polopřímky XX´ a MM´ jsou "souhlasně rovnoběžné, se nazývá p**osunutí (translace) T.***



Posunutí je jednoznačně určeno uspořádanou dvojicí bodů [M, M´]. *Velikost a směr* posunutí jsou určeny orientovanou úsečkou MM´. Obrazem bodu A v posunutí je bod A´.
V posunutí neexistují *žádné samodružné body*, všechny přímky se v posunutí zobrazí jako rovnoběžky.

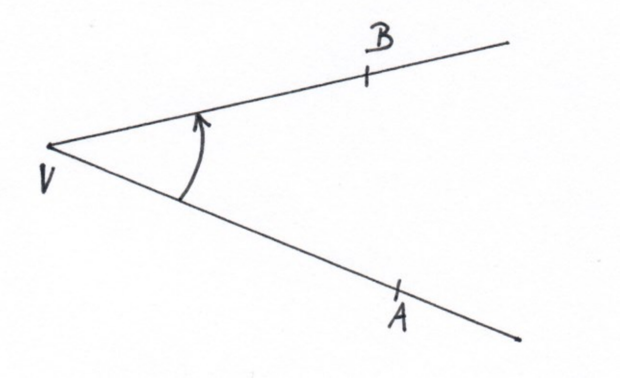
Řešený příklad:

V rovině je dán trojúhelník ABC a trojúhelník A´B´C´, který je obrazem trojúhelníku ABC v posunutí T. Určete velikost a směr posunutí.



Řešení:
V posunutí je bod A´obrazem bodu A, bod B´ obrazem bodu B, bod C´ obrazem bodu C. Velikost a směr posunutí jsou určeny orientovanou úsečkou AA´ (popřípadě BB´, CC´). Každý bod trojúhelníku ABC se pohybuje při posunutí stejným směrem a o stejnou velikost, trojúhelník po přemístění nezmění ani tvar ani velikost. Změní pouze svou polohu.

K vymezení dalšího shodného zobrazení, otáčení, potřebujeme definovat orientovaný úhel.



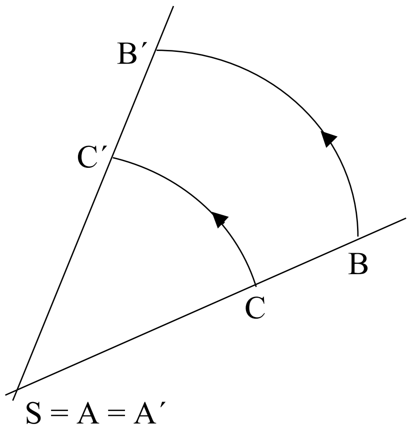
Orientovaný úhel *AVB je uspořádaná dvojice polopřímek VA, VB se společným počátkem V. Polopřímky VA, VB se nazývají ramena orientovaného úhlu, jejich společný počátek V se nazývá vrchol orientovaného úhlu AVB. Zapíšeme: AVB = [→VA, →VB].*

Průvodce studiem:

Pozor: pojem orientovaný úhel je *pojem značně odlišný od pojmu úhel*, se kterým jsme pracovali v předchozích kapitolách. Velikost orientovaného úhlu AVB se rovná velikosti úhlu AVB, který vznikne otočením *počátečního ramene VA* kolem *počátku V* do polohy *koncového ramene VB* v kladném smyslu (tj. proti směru pohybu hodinových ručiček).
Z definice je také zřejmé, že orientovaný úhel AVB se nerovná orientovanému úhlu BVA!
Dva orientované úhly AVB a CUD jsou shodné, jsou-li shodné příslušné úhly AVB a CUD, přičemž *zachováváme pořadí jejich ramen* (zachováváme smysl – kladný či záporný).

Důležitá pasáž textu:

V rovině je dán bod S a orientovaný úhel AVB. Zobrazení, které
a) bodu S přiřadí týž bod S,
b) každému bodu X ≠ S dané roviny přiřadí X´ této roviny tak, že úsečka SX´ je shodná s úsečkou SX a orientovaný úhel XSX´ je shodný s orientovaným úhlem AVB, se nazývá ***otáčení (rotace) R.***



Otáčení je jednoznačně určeno bodem *S* a orientovaným úhlem (někdy říkáme úhlem otáčení). Otáčení má *jeden samodružný bod S*, který je zároveň středem otáčení.
Zvláštním případem otáčení je středová souměrnost (otočení o 180°).

Řešený příklad:

Na papír narýsujme trojúhelník ABC. Přiložíme průsvitku, na ni obkreslíme trojúhelník ABC a označíme A´B´C´. Upevníme průsvitku špendlíkem v bodě S a *otočíme o ostrý úhel proti směru pohybu hodinových ručiček*. Trojúhelník ABC a otočený trojúhelník A´B´C´na průsvitce mají stejný tvar i velikost. Při otáčení se bod A přemístil po kružnici o středu S a poloměru $|SA|$ do bodu A´, bod B se také přemístil po kružnici o středu S, ale o poloměru $|SB|$ do bodu B´, bod C opět po kružnici o stejném středu S, ale poloměru $|SC|$ do bodu C´. Všimneme-li si délky drah pohybu jednotlivých bodů, zjistíme, že délky drah bodů jsou různé, bod vzdálenější od bodu S opisuje delší dráhu než bod, který je blíže bodu S, bod S je při otáčení pevný.

Při otáčení se všechny body zobrazovaného útvaru pohybují po kružnicích, které jsou soustředné a jejich poloměry („dráhy“) jsou různé.

Kontrolní úkoly:

1. V rovině je dána osa souměrnosti o. Najděte obrazy přímek a, b, c v osové souměrnosti určené osou o, je-li
   a) přímka a je rovnoběžná s osou souměrnosti o,
   b) přímka b je různoběžná s osou souměrnosti o,
   c) přímka c je kolmá k ose souměrnosti.

2. Je dán trojúhelník ABC a přímka p. Sestrojte obraz trojúhelníku A´B´C´ v osové souměrnosti určené přímkou p. Rozeznávejte případy:
   a) přímka p nemá s trojúhelníkem ABC společný žádný bod,
   b) přímka p prochází vrcholem A,
   c) přímka p protíná obvod trojúhelníku ve dvou bodech,
   d) přímka p prochází vrcholy B, C.

3. Sestrojte kružnici k o středu S a poloměru r. Sestrojte obraz kružnice k v osové souměrnosti s osou p, která
   a) prochází středem kružnice k,
   b) dotýká se kružnice k,
   c) nedotýká se kružnice k.

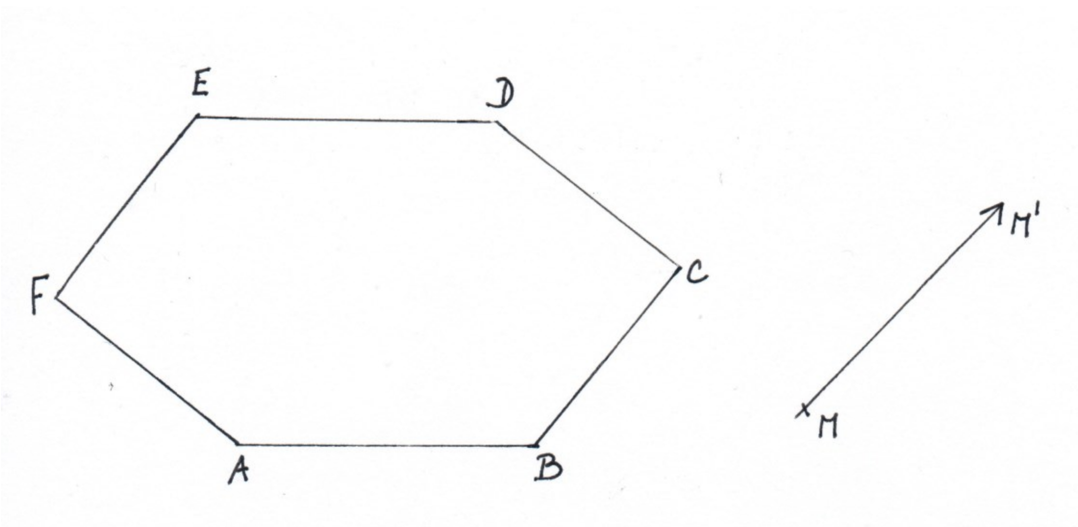
   V každém z uvedených případů zvolte na kružnici dva různé body A, B a sestrojte jejich obrazy A´, B´.

4. Narýsujte čtverec ABCD. Určete osu osové souměrnosti, které náleží
   a) uspořádaná dvojice [A, B],
   b) uspořádaná dvojice [A, C],
   c) uspořádaná dvojice [A, D].

   V každé z těchto osových souměrností najděte obrazy ostatních vrcholů čtverce.

5. Uvažujte v rovině tyto geometrické útvary: kružnice, rovnostranný trojúhelník, dvojice rovnoběžek, obdélník.
   a) Které z nich jsou souměrné aspoň podle tří os souměrnosti?
   b) Které z nich jsou souměrné aspoň podle jednoho středu souměrnosti?

6. Sestrojte obraz šestiúhelníku ABCDEF na obrázku v posunutí určeném orientovanou úsečkou [M, M´].



7. Sestrojte trojúhelník ABC a pak jej otočte o 45° kolem středu otáčení, který leží:
   a) uvnitř trojúhelníku ABC,
   b) ve vrcholu C.

Náměty na praktická cvičení:

Vlastnosti osové souměrnosti lze prakticky odpozorovat při překládání listu papíru (v přeložení je osa souměrnosti). Po jeho opětovném rozložení vidíte, že některé body se zobrazily na sebe (jsou to všechny body náležející ose souměrnosti) a každá z polorovin s osou o se zobrazí na polorovinu opačnou.

1. Vystřihněte z papíru čtverec a snažte se najít způsob, jak *přeložením* čtverce podle nějaké přímky (osy) určíte, že čtverec je souměrný. Kolik os souměrnosti má čtverec?

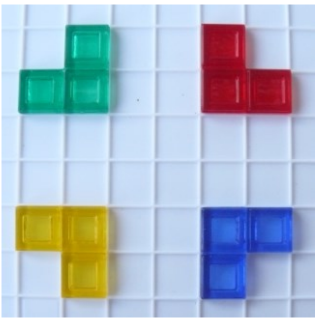
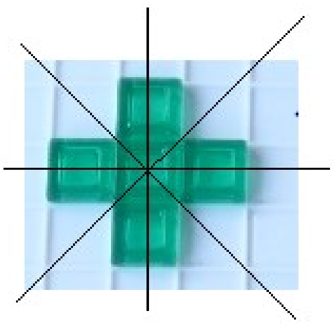
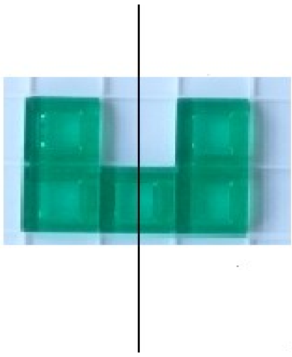
2. Obdobným způsobem zkoumejte obdélník, trojúhelník, kruh. U každého z těchto útvarů zjistěte počet os.

3. Postupným překládáním papíru podle os souměrnosti a vystřihováním z něho různých útvarů dostanete po rozložení zajímavé obrazce, které jsou vždy souměrné. Připravte vlastní náměty papírových výzdob do oken (sněhová vločka, květina,…).

4. Najděte ve svém okolí obrázky předmětů, které jsou souměrné podle osy a podle středu.

5. Nakreslete velká tiskací písmena a zkoumejte, která z nich jsou souměrná podle osy nebo podle středu, případně kolik os souměrnosti mají.

6. Seznamte se se stolní hrou *Blokus.* Vytvářejte na hrací ploše rovinné útvary z hracích kamenů tvořených malými čtverci různé barvy tak, aby
   a) byly souměrné podle aspoň jedné osy souměrnosti,
   b) byly souměrné podle středu souměrnosti.
   c) zkoumejte jednotlivé dílky, hledejte, zda jsou souměrné podle osy

Pojmy k zapamatování:

- shodné zobrazení, shodnost rovinných útvarů,
- samodružný bod, samodružné přímky,
- osová souměrnost, osa osové souměrnosti,
- středová souměrnost, střed středové souměrnosti,
- uspořádaná dvojice bodů,
- orientovaná úsečka,
- orientovaný úhel,
- posunutí,
- otáčení.

Shrnutí:

1. Prosté zobrazení Z množiny M na množinu N se nazývá shodné zobrazení, právě když pro každé dva různé body $X, Y \in M$ a jejich obrazy $Z(X) = X'$, $Z(Y) = Y'$ platí $XY \cong X'Y'$. Právě když pro obraz X' bodu X v zobrazení Z platí $X' = X$, nazývá se bod X

samodružný bod v zobrazení Z. Útvar U se nazývá samodružný útvar v zobrazení Z, právě když jeho obraz U´ v zobrazení Z se rovná útvaru U. Říkáme také, že se útvar U zobrazením reprodukuje.

2. Osovou souměrností O s osou o nazýváme takové zobrazení v rovině E_2, které každému bodu X přiřazuje bod X´ tak, že platí

a) je-li $X \in o$, je $X = X'$,

b) jeli $X \notin o$, pak X´ leží na přímce procházející bodem X kolmo k přímce o tak, že střed X_0 úsečky XX' náleží přímce o. Přímka o se nazývá osa osové souměrnosti. Geometrický útvar U se nazývá souměrný podle přímky o (osově souměrný), právě když se útvar U v osové souměrnosti s osou o se zobrazí sám na sebe (U' = U).

3. Středovou souměrností S v rovině E_2 se nazývá zobrazení, které

a) bodu S přiřadí týž bod S,

b) každému bodu X, který je různý od bodu S, přiřadí bod X´tak, že bod S je středem úsečky XX´. Bod S se nazývá střed středové souměrnosti. Geometrický útvar U se nazývá souměrný podle středu S, právě když se útvar U ve středové souměrnosti se středem S zobrazí sám na sebe (U' = U). Bod S se nazývá středem souměrnosti útvaru U.

4. Je dána uspořádaná dvojice bodů [M, M´], kde $M \neq M'$. Zobrazení, které každému bodu $X \in E_2$ přiřadí bod $X' \in E_2$ tak, že úsečky XX´ a MM´ jsou shodné a polopřímky XX´ a MM´ jsou souhlasně rovnoběžné, se nazývá posunutí (translace) T. V posunutí neexistují žádné samodružné body,

5. Orientovaný úhel AVB je uspořádaná dvojice polopřímek VA, VB se společným počátkem V. Polopřímky VA, VB se nazývají ramena orientovaného úhlu, jejich společný počátek V se nazývá vrchol orientovaného úhlu AVB.

6. Zobrazení, které

a) bodu S přiřadí týž bod S,

b) každému bodu $X \neq S$ přiřadí X´ tak, že úsečka SX´ je shodná s úsečkou SX a orientovaný úhel XSX´ je shodný s orientovaným úhlem AVB, se nazývá otáčení (rotace) R. Zvláštním případem otáčení je středová souměrnost (otočení o 180°).

5. Měření geometrických útvarů

Cíle

Po prostudování kapitoly budete schopni

- popsat postup měření úsečky (určit délku úsečky),
- uvést podstatu metody, podle níž je možné určit míru každého měřitelného rovinného útvaru a míru každého prostorového útvaru,
- najít ke každému měřitelnému rovinnému útvaru jádro a obal ve čtvercové síti,
- řešit úlohy s využitím čtvercové sítě a geodesky,
- najít ke každému prostorovému útvaru jádro a obal v krychlové síti,
- řešit úlohy na stavby z krychlí,
- uvést přehled jednotek délky, obvodů a obsahů rovinných útvarů, povrchů a objemů těles.

Průvodce studiem:

V předchozích kapitolách jsme si připomněli (a prohloubili) základní geometrické pojmy z učiva základní a střední školy. Dovednost měřit patří mezi základní kompetence člověka, s požadavkem určit délku, obsah a objem se setkáváme prakticky denně. V dalším textu uvedeme *teoretická východiska měření (teorie míry),* která uplatníme při řešení běžných praktických problémů:

- změřte délku a šířku Vašeho pracovního stolu,
- změřte délku a šířku Vaší zahrady,
- změřte vzdálenost (délku cesty) mezi Vaším bydlištěm a pracovištěm.

5.1 Délka úsečky

V kapitole 3. jsme zavedli pojmy shodnost úseček a seznámili se s tím, že tento pojem nám umožňuje porovnávat úsečky, určit grafický součet, grafický rozdíl úseček a násobek úsečky. Ze znalosti těchto pojmů nyní vyjdeme při měření úseček. Popíšeme způsob, který je vám znám při měření nejrůznějších délek.
S měřením úsečky se setkávají (a v minulosti setkávali) lidé v rozmanitých praktických situacích. Měří například vzdálenost dvou míst v terénu pomocí kroků, rozměry místnosti pomocí tyče nebo provázku - vždy však s využitím jiné úsečky. Poznávali, že pro sjednocení výsledků měření bude výhodné, když užijí úsečky jednotně zvolené (úsečky délky 1 metr, 1 centimetr aj.).

Důležitá pasáž textu:

Cílem měření úsečky je určení její **velikosti**: stanovení *čísla, které vyjadřuje, kolikrát je daná úsečka větší (nebo menší) než jistá, pevně zvolená, tzv.* ***jednotková úsečka***. Délkou jednotkové úsečky rozumíme číslo 1. Při měření úsečky tedy zjišťujeme, *jakým násobkem jednotkové úsečky* je měřená úsečka. Tento násobek, jak je známo, nemusí být celočíselný.

V praxi postupujeme tak, že na měřenou úsečku postupně nanášíme od jednoho jejího krajního bodu úsečku jednotkovou. Pak mohou nastat dvě možnosti:
a) může se stát, že měřená úsečka AB je *celočíselným násobkem* jednotkové úsečky, například čtyřnásobkem. Zvolíme-li jednotkovou úsečku 1 *cm*, je délka měřené úsečky d(AB) = 4 · 1 *cm* = 4 *cm*.

b) není-li měřená úsečka AB celočíselným násobkem jednotkové úsečky, a platí-li pro ni například, že 4 cm < d(AB) < 5 cm, můžeme její délku vyjádřit buď přibližně - d(AB) ≐ 4 cm, nebo postupovat dál tak, abychom její délku určili přesněji.
Délka 4 cm v našem příkladu se označuje jako *dolní mez*, délka 5 cm jako *horní mez* délky úsečky AB.
Chceme-li stanovit délku úsečky AB přesněji, užijeme místo jednotkové úsečky o délce 1 cm úsečku, která se rovná $\frac{1}{10}$ původní jednotkové úsečky. Tak zjistíme například, že d(AB) = 4,6 cm nebo 4,6 cm < d(AB) < 4,7 cm.

Pro zájemce:

Podrobnější výklad teorie měření úsečky lze opět najít v literatuře. Vychází ze dvou axiomů spojitosti - *Archimédova axiomu a Cantorova axio*mu. Je možné dokázat, že každé úsečce se dá při dané jednotkové úsečce přiřadit nezáporné reálné číslo jako její délka a každé nezáporné reálné číslo je při dané jednotkové úsečce délkou některé úsečky.

Důležitá pasáž textu:

Zvolíme-li jednotkovou úsečku a každé úsečce přiřadíme nezáporné reálné číslo, je toto přiřazení *zobrazením množiny všech úseček na množinu všech nezáporných reálných čísel,* Toto zobrazení se nazývá **funkce míra úsečky.** Tato funkce má následující vlastnosti: (M …množina všech úseček, f … funkce míra úsečky):

a) pro *každou úsečku* $x \in$ M je $\mathbf{f(x) \geq 0}$,
b) jsou-li $x, y \in M$ *shodné úsečky* $(x \cong y)$, je $\mathbf{f(x) = f(y)}$,
c) je-li $\mathbf{x + y}$ *grafický součet úseček* x, y, kde $x, y \in M$, je $\mathbf{f(x + y) = f(x) + f(y)}$
d) existuje úsečka x, že $f(x) = 1$.

Vlastnosti velikosti úsečky můžeme vyjádřit také takto:

a) velikost každé úsečky je nezáporné reálné číslo.
b) velikosti každých dvou shodných úseček se rovnají.
c) velikost sjednocení nepřekrývajících se úseček, (příp. velikost grafického součtu úseček) je rovna součtu velikostí těchto úseček.
d) existuje úsečka, jejíž velikost se rovná jedné.

Funkční hodnoty uvedené funkce jsou délky (velikosti) jednotlivých úseček, značíme je **d**, tj. *místo f(x), resp. f(AB) píšeme* ***d(AB).***

Je třeba rozlišovat pojmy:

- *úsečka AB*, tj. (jednorozměrný) *geometrický útvar* jistých vlastností,
- *velikost úsečky AB* je *nezáporné reálné číslo* (je to matematický pojem),
- *délka úsečky AB*, tj. *uspořádaná dvojice [číslo, jednotka],* například d (AB) = 3 cm, je to fyzikální pojem - veličina.

5.2 Obsah rovinného útvaru. Čtvercová síť

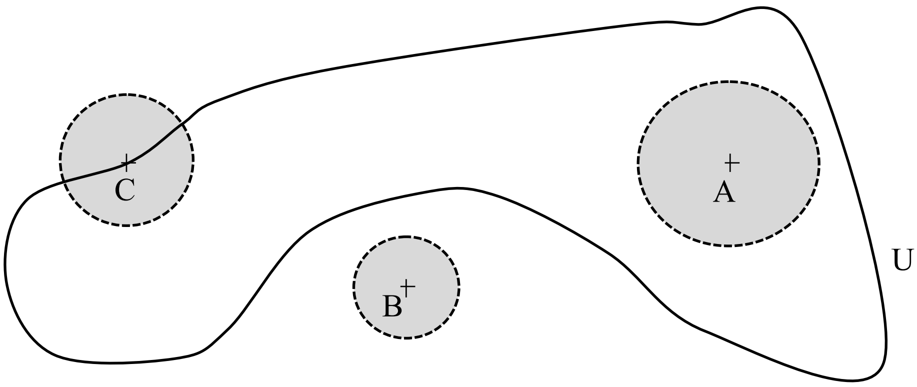
Jedním z cílů, který byl vymezen na začátku kapitoly, je charakterizovat podstatu metody, podle níž je možné určit *míru (velikost) každého měřitelného rovinného útvaru a míru každého prostorového útvaru.* Tento postup se nazývá **Jordanova teorie míry** (Camille Jordan, francouzský matematik, 1838 - 1922). V našem výkladu ji nebudeme analyzovat podrobně, pouze ji v hlavních rysech naznačíme. Potřebujeme k tomu ovšem vysvětlit (bez uvedení hlubších souvislostí) některé další pojmy.

Okolí bodu *A* s poloměrem *r* v rovině E_2 je *vnitřek kruhu se středem v bodě A a s poloměrem r.* Označujeme O_A.
Je zřejmé, že ke každému bodu může v rovině existovat nekonečně mnoho okolí (záleží na volbě poloměru *r*).

Pomocí pojmu okolí můžeme rozlišovat *vnitřní, vnější a hraniční body* bodové množiny M (v našem případě rovinného útvaru U):

Bod A je **vnitřním bodem** útvaru U v rovině, právě když *existuje aspoň jedno jeho okolí O_A takové, že obsahuje jen body útvaru U a žádné jiné body*. *Vnitřkem* útvaru U je množina všech jeho vnitřních bodů.

Bod B je **vnějším bodem** útvaru U v rovině, právě když *existuje aspoň jedno jeho okolí O_B takové, že neobsahuje žádný bod útvaru U*. *Vnějškem* útvaru U je množina všech jeho vnějších bodů.



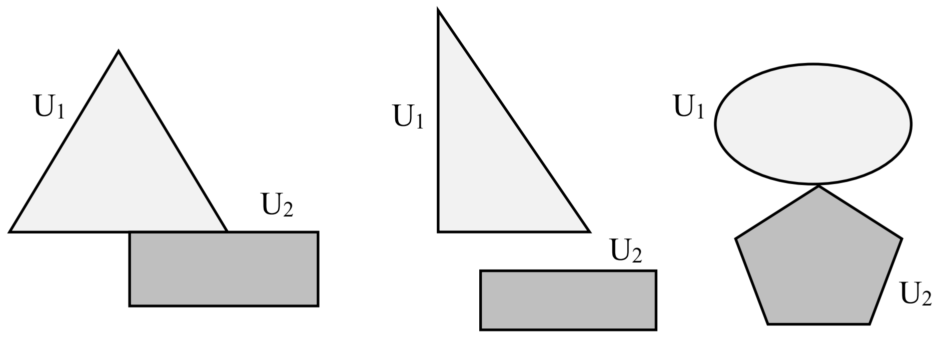
Bod C je **hraničním bodem** útvaru U v rovině,, právě když *v každém okolí bodu C existuje aspoň jeden bod X, který náleží útvaru U a zároveň aspoň jeden bod Y, který nenáleží útvaru U. Hranicí* útvaru U je množina všech jeho hraničních bodů.

Například hranicí trojúhelníka v rovině je sjednocení jeho stran (obvod), hranicí kruhu v rovině je kružnice.

Rovinný útvar U se nazývá **omezený**, leží-li ve „vhodném okolí vhodného bodu“, tj. *existuje-li v dané rovině aspoň jeden bod S a aspoň jedno okolí O_S tak, že platí* $\boldsymbol{U \subset O_S}$. Rovinný útvar, který není omezený, *je neomezený*.

Například trojúhelník, obdélník, kruh jsou omezené útvary, úhel, polorovina jsou útvary neomezené.

Dva rovinné útvary U_1 a U_2 **se nepřekrývají**, právě *když je jejich průnik podmnožinou průniku jejich hranic nebo prázdná množina.* V ostatních případech se rovinné útvary *překrývají.*



Nyní již můžeme přikročit k měření rovinných útvarů. Přitom však je třeba rozhodnout, které útvary lze - pomocí Jordanovy teorie míry - měřit, tj. zavést *pojem měřitelný útvar*. Budou nás zajímat tzv. základní měřitelné útvary.

Základním **měřitelným útvarem** v rovině je každý rovinný útvar, který je *omezený a jehož hranice je jednoduchá uzavřená křivka*.

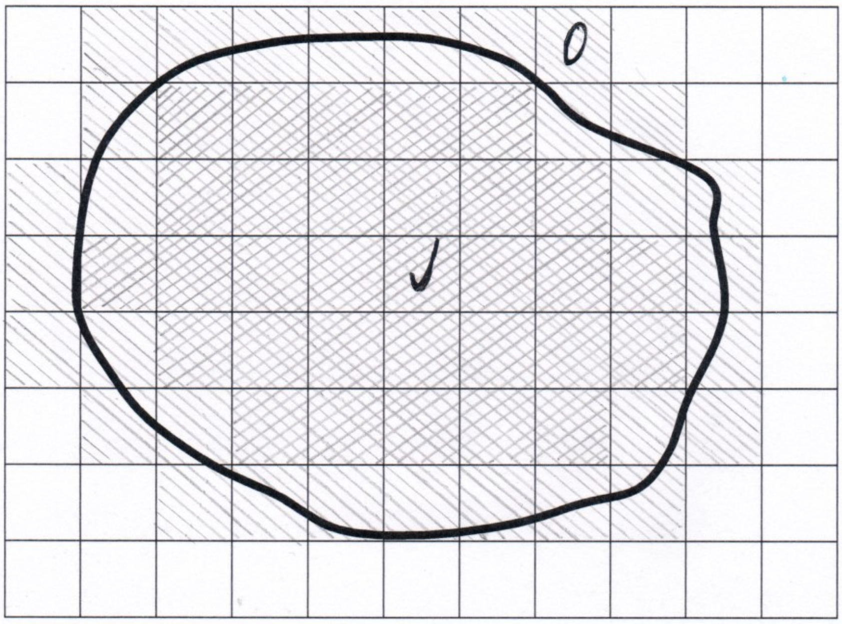
Základními měřitelnými útvary jsou například trojúhelník, n-úhelníky, kruh aj.

Průvodce studiem:

Při konstrukčním určování velikosti rovinného útvaru můžeme postupovat obdobně jako při měření úsečky. Budeme opět hledat dolní a horní mez velikosti měřeného útvaru.
Chceme-li změřit velikost (obsah) desky stolu, můžeme postupovat takto: Za jednotkový útvar zvolíme list papíru velikosti A_4. Listy klademe tak, že se nepřekrývají , a pokryjeme jimi celou desku stolu. Pravděpodobně nastane případ, že se deska stolu nepokryje přesně určitým počtem listů - pak zjistíme, mezi kterými hodnotami (počty listů) se velikost desky nachází. Při tomto postupu bude vhodné volit jako jednotkový útvar čtverec, místo kladení jednotlivých čtverců na měřený útvar užít *čtvercovou síť* a měřený útvar do ní umístit. Popíšeme nyní naznačený postup přesněji.

Důležitá pasáž textu:

Nechť je dán v rovině měřitelný útvar U. Zvolme jednotkovou úsečku δ. V rovině dále sestrojme dvě navzájem *kolmé přímky* a s nimi veďme *rovnoběžky* ve vzdálenostech $\delta, 2\delta, 3\delta, \ldots$ Tím vzniknou dvě osnovy navzájem kolmých přímek, které vytvoří **čtvercovou síť S o rozměru δ.** Čtvercová síť se skládá ze shodných čtverců δ^2, jejichž stranou je jednotková úsečka. Síť *S* pokryje rovinu.



Jádro J rovinného útvaru U v síti S je *sjednocením všech takových čtverců sítě, že **každý jejich bod** náleží útvaru U.*
Obal O rovinného útvaru U v síti S je *sjednocením všech takových čtverců sítě S, že **alespoň jeden jejich bod** náleží útvaru U.*

Obal každého rovinného útvaru obsahuje aspoň jeden čtverec sítě S, jádro nemusí obsahovat žádný čtverec sítě S.

V libovolné síti S *je vždy jádro J podmnožinou útvaru U* a *útvar U je podmnožinou obalu O*, platí: $\mathbf{J \subset U \subset O}$.

Protože jádro i obal jsou útvary omezené, jejich hranice jsou jednoduché uzavřené křivky, jsou jádro i obal měřitelné útvary. Můžeme tedy určovat jejich velikost.

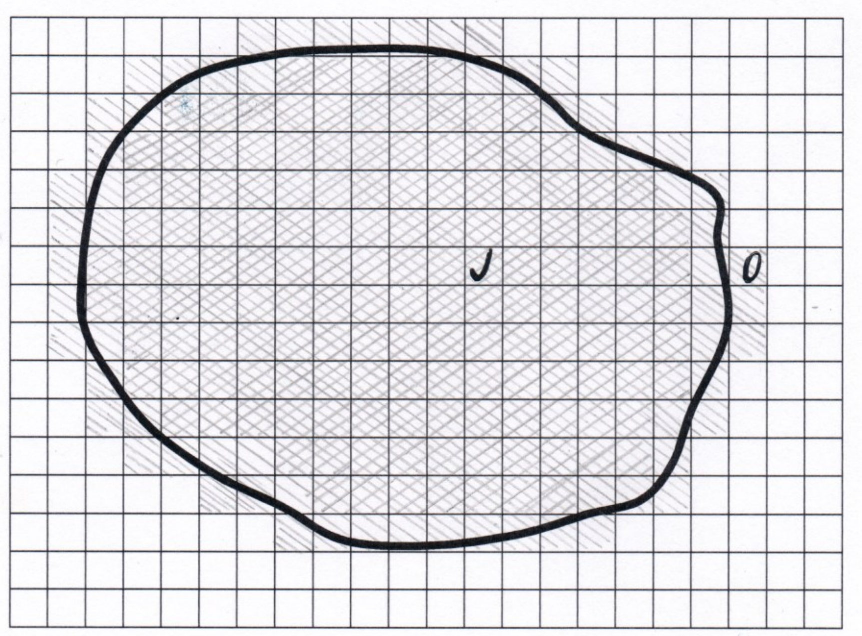
Zavedeme pojmy
- **velikost jádra f (J)** jako *počet čtverců jádra je dolní mez útvaru*,
- **velikost obalu f (O)** jako *počet čtverců obalu je horní mez útvaru.*

Pak platí: $\mathbf{f(J) \leq f(U) \leq f(O)}$.

Chceme-li měření zpřesnit, vytvoříme tzv. zjemněnou síť S_1 o rozměru δ_1, kde $\delta_1 < \delta$. Obvykle volíme $\delta_1 = \frac{1}{10}\delta$. Takto lze ve zjemňování sítí pokračovat. Potom v každé síti S_k (kde $1 \leq k \leq n$) lze útvaru U přiřadit jádro J_k a obal O_k a platí inkluze:
$J_1 \subset J_2 \subset J_3 \subset \ldots J_n \subset \ldots \subset U \subset \ldots O_n \subset \ldots O_3 \subset O_2 \subset O_1$

Pro *velikosti* jader, měřitelného rovinného útvaru a obalů podobně platí:
$f(J_1) \leq f(J_2) \leq f(J_3) \ldots \leq f(J_n) \leq f(O_n) \ldots \leq f(O3) \leq f(O_2) \leq f(O_1)$

Postupným zjemňováním sítí se bude velikost jader zvětšovat, velikost obalů se bude zmenšovat, z obou stran - zdola i shora - se budeme přibližovat k velikosti rovinného útvaru, rozdíl horní meze a dolní meze velikosti útvaru lze učinit libovolně malým.



Zvolíme-li jednotkový čtverec čtvercové sítě a každému měřitelnému rovinnému útvaru přiřadíme nezáporné reálné číslo, je toto přiřazení *zobrazením množiny všech měřitelných rovinných útvarů na množinu všech nezáporných reálných čísel*. Toto zobrazení se nazývá **funkce míra měřitelného rovinného útvaru.** Tato funkce má následující vlastnosti: (M …množina všech měřitelných útvarů, f … funkce míra měřitelného útvaru):

a) pro *každý útvar* $U \in$ M je $\mathbf{f(U) \geq 0}$,

b) pro každé $U_1, U_2 \in M$, *které jsou shodné* ($U_1 \cong U_2$), je $\mathbf{f(U_1) = f(U_2)}$,

c) pro každé $U_1, U_2 \in M$ *takové, že se nepřekrývají*, je $\mathbf{f(U_1 \cup U_2) = f(U_1) + f(U_2)}$,

d) existuje U, pro které $\mathbf{f(U) = 1}$.

Funkční hodnota míry rovinného útvaru je **obsah.**

Již ze základní školy víme, že u každého měřitelného rovinného útvaru zjišťujeme vedle obsahu i jeho **obvod.**

Důležitá pasáž textu:

Obvodem **o** *měřitelného rovinného útvaru je velikost jeho hranice:*

a) hranicí n-úhelníku je jednoduchá lomená čára, *obvodem n-úhelníku je součet velikostí jeho stran,*

b) hranicí kruhu je kružnice, *obvodem kruhu je délka kružnice*.

Co si pamatuji ze základní/střední školy? Co si nepamatuji, to si opět důkladně zopakuji!

Trojúhelník: obsah $S = \frac{1}{2}(a \cdot v_a)$, obvod $o = a + b + c$, kde a, b, c jsou velikosti stran, v_a velikost výšky na stranu a,

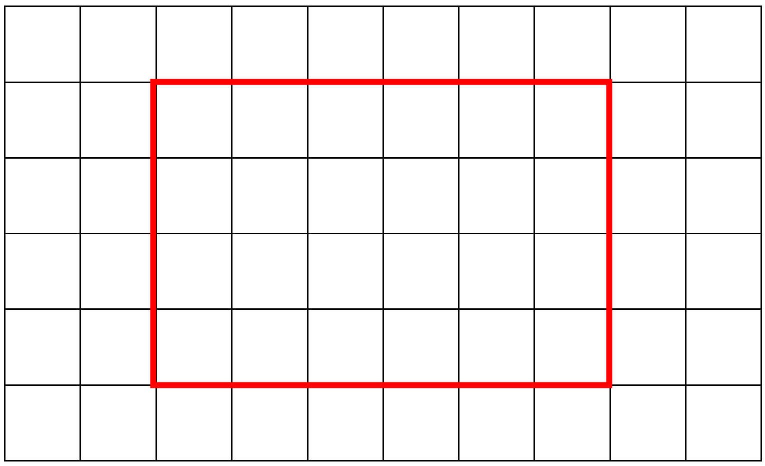
Čtverec: obsah $S = a \cdot a = a^2$, obvod $o = 4 \cdot a$, kde a je velikost strany

Obdélník: $S = a \cdot b$, obvod $o = 2(a + b)$, kde a, b jsou velikosti stran

Kruh: obsah $S = \pi \cdot r^2$, obvod (délka kružnice) $o = 2 \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot d$, kde π … řecké písmeno pí, $\pi \doteq 3,141592\ldots$, *(Ludolfovo číslo).*

Náměty na praktická cvičení:

1. Vytvořte čtvercovou síť o rozměru δ = 1 cm. Můžete použít papírovou podložku s vyznačeným rastrem („lenoch“), kterou zkopírujete na průhlednou fólii. Vystřihněte obdélník o délkách stran 6 cm a 4 cm a umístěte jej do této čtvercové sítě tak, aby strany obdélníku byly podmnožinami přímek sítě. Chceme zjistit, kolik čtverců sítě bude mít obdélník, který jsme do sítě umístili: na obrázku se přesvědčíme, že obdélník obsahuje *čtyři řady čtverců po šesti*. Jeho obsah tedy tvoří 15 čtverců jednotkové sítě, tj. $S = 24\ cm^2$.



2. Do stejné čtvercové sítě stejným způsobem umístěte vystřihnutý obdélník o délkách stran 3 cm a 8 cm. Opět spočítejte, kolik čtverců sítě tvoří jeho obsah. Přesvědčíte se, že obsah tvoří 3 krát 8 jednotkových čtverců, tj. S = 24 cm^2.

Obdélníky ze cvičení 1 a 2 *mají stejný obsah, ale nejsou shodné*. Takovým rovinným útvarům říkáme útvary **rovnoploché.**

3. Vyznačte na dlažbě s dlaždicemi ve tvaru čtverce - v místnosti nebo venku - různé obdélníky a čtverce, počítejte jejich obsahy vyjádřené počtem čtverců.

4. Ohraničte na dlažbě s dlaždicemi ve tvaru čtverce šňůrou o délce 36 metrů:
a) aspoň 3 různé obdélníky,
b) čtverec.
Jsou všechny ohraničené útvary rovnoploché?

5. Využijte geodesku (tato pomůcka byla popsána v kapitole 3.2). Považujte ji za čtvercovou síť o rozměru δ = 1. Gumičkami na ní vyznačte různé rovinné útvary (čtverce, obdélníky, rovnoběžníky - kosočtverce a kosodélníky), trojúhelníky,.., určujte jejich obsahy a obvody.

Kontrolní úkoly:

1. Na čtverečkovaném papíru (modelu čtvercové sítě) vyznačte několik různých rovinných útvarů a určujte jejich jádro a obal.

2. Vypočítejte obvod obdélníku, jehož strana a je dvakrát větší než strana b, je-li jednotková úsečka a) $j = \frac{1}{2}$ b, b) $j = \frac{1}{2}$ a.
Řešení: a) o = 12j, b) o = 6j.

5.3 Objem tělesa. Stavby z krychlí

Průvodce studiem:

Měření velikosti prostorového útvaru (tělesa) opět pouze naznačíme. Vyjdeme z analogie s měřením rovinného útvaru. Budeme tentokrát uvažovat *krychlovou síť*, kterou vytvoříme stejným způsobem jako síť čtvercovou. Porozumění následujícímu postupu bude vyžadovat schopnost, která se označuje jako *prostorová představivost.*

Důležitá pasáž textu:

Nechť je dán v prostoru měřitelný útvar U. Zvolme jednotkovou úsečku δ. V prostoru dále sestrojme tři navzájem *kolmé přímky* a s nimi veďme *rovnoběžky* ve vzdálenostech *δ, 2δ, 3δ,…* Tím vzniknou tři osnovy navzájem kolmých přímek, které vytvoří **krychlovou síť S o rozměru δ.** Krychlová síť se skládá ze shodných krychlí δ^3, jejichž hranou je jednotková úsečka. Síť *S* vyplní prostor.
Prostorový útvar (těleso) „umístíme" do krychlové sítě a budeme určovat jádro a obal jako při měření velikosti rovinných útvarů.

Jádro J prostorového útvaru U v síti S je *sjednocením všech takových krychlí sítě, že* ***každý jejich bod*** *náleží útvaru U.*
Obal O prostorového útvaru U v síti S je *sjednocením všech takových krychlí sítě S, že* ***alespoň jeden jejich bod*** *náleží útvaru U.*

Obal každého útvaru obsahuje aspoň jednu krychli sítě S, jádro nemusí obsahovat žádnou krychli sítě S.

V libovolné síti S *je vždy jádro J podmnožinou prostorového útvaru U* a *útvar U je podmnožinou obalu O*, platí: $\mathbf{J \subset U \subset O}$.

Zavedeme pojmy
- **velikost jádra F (J)** jako *počet krychlí jádra je dolní mez prostorového útvaru*,
- **velikost obalu F (O)** jako *počet krychlí obalu je horní mez prostorového útvaru.*

Pak platí: $\mathbf{F(J) \le F(U) \le F(O)}$.

Chceme-li měření zpřesnit, opět vytvoříme tzv. zjemněnou krychlovou síť S_1 o rozměru δ_1, kde $\delta_1 < \delta$. Obvykle volíme $\delta_1 = \frac{1}{10}\delta$. Takto lze ve zjemňování sítí pokračovat. Potom v každé síti S_k (kde $1 \le k \le n$) lze útvaru U přiřadit jádro J_k a obal O_k a platí inkluze:
$J_1 \subset J_2 \subset J_3 \subset \ldots J_n \subset \ldots \subset U \subset \ldots O_n \subset \ldots O_3 \subset O_2 \subset O_1$

Pro *velikosti* jader, měřitelného prostorového útvaru a obalů podobně platí:
$F(J_1) \le F(J_2) \le F(J_3) \ldots \le F(J_n) \le F(O_n) \ldots \le F(O3) \le F(O_2) \le F(O_1)$

Postupným zjemňováním sítí se opět bude velikost jader zvětšovat, velikost obalů se bude zmenšovat, z obou stran - zdola i shora - se budeme přibližovat k velikosti prostorového útvaru, rozdíl horní meze a dolní meze velikosti útvaru lze učinit libovolně malým.

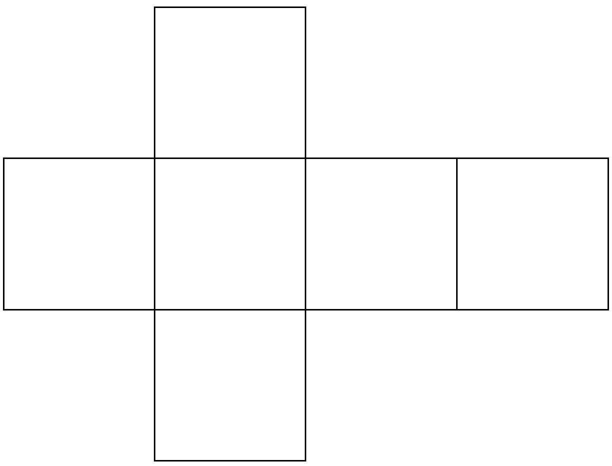
Zvolíme-li jednotkovou krychli krychlové sítě a každému měřitelnému prostorovému útvaru přiřadíme nezáporné reálné číslo, je toto přiřazení *zobrazením množiny všech měřitelných prostorových útvarů na množinu všech nezáporných reálných čísel*. Toto zobrazení se nazývá **funkce míra měřitelného prostorového útvaru.** Tato funkce má následující vlastnosti: (M …množina všech měřitelných útvarů, F … funkce míra měřitelného útvaru):

e) pro *každý útvar* $U \in$ M je $\mathbf{F(U) \geq 0}$,
f) pro každé $U_1, U_2 \in M$, *které jsou shodné* ($U_1 \cong U_2$), je $\mathbf{F}(U_1) = \mathbf{F}(U_2)$,
g) pro každé $U_1, U_2 \in M$ *takové, že se nepřekrývají*, je $\mathbf{F}(U_1 \cup U_2) = \mathbf{F}(U_1) + \mathbf{F}(U_2)$,
h) existuje U, pro které **F(U) = 1.**

Funkční hodnota míry prostorového útvaru je **objem.**

U každého měřitelného prostorového útvaru (tělesa) zjišťujeme vedle objemu i jeho **povrch.** Určujeme velikost povrchu tělesa, tj. velikost hranice tělesa v prostoru. Povrch hranatých těles určíme jako součet obsahů všech jeho stěn. Rozvineme-li povrch hranatého tělesa do roviny, vytvoříme **síť tělesa.**

Například síť krychle může být podle obrázku:



Poznámka: Je třeba rozlišovat: *čtvercová (krychlová) síť* a *síť tělesa.*

Náměty na praktická cvičení:

1. Vytvořte ze stavebnice MagFormers a Polydron několik různých sítí
    a) krychle,
    b) kvádru,
    c) pravidelného čtyřbokého jehlanu.

2. S využitím vytvořených modelů těles doplňte tabulku a pokuste se objevit vztah (Eulerovu formuli) mezi počtem vrcholů, stěn a hran u každého konvexního

mnohostěnu:

počet	čtyřstěn	kvádr	Krychle	pravidelný čtyřboký jehlan	pravidelný pětiboký jehlan	pravidelný šestiboký hranol
vrcholů (v)						
stěn (s)						
v + s						
hran (h)						

5.4 Jednotky míry

Průvodce studiem:

V předchozích kapitolách jsme k popisu měření úsečky, rovinného útvaru a tělesa použili jednotkovou úsečku δ, jednotkový čtverec δ^2, jednotkovou krychli δ^3. Tento teoretický rámec je ovšem třeba převést do praktického využití. V historii lidstva se např. délka úsečky (vzdálenosti dvou míst) měřila podobně, jako zjišťují rozměry předmětů děti předškolního věku - odhadem, vzájemným porovnáváním nebo jednoduchým měřením s využitím částí lidského těla (stopou, kroky,…).

Jednotky délky:
Základní jednotkou délky je *1 metr (1 m).* Je jednou ze základních fyzikálních jednotek mezinárodní soustavy jednotek SI (Systéme International). V praxi se používají násobky metru (především 1 kilometr, 1 km = 1 000 m) a díly metru: 1 decimetr (1 dm = 0, 1 m), 1 centimetr (1 cm = 0, 01 m), 1 milimetr (1 mm = 0,001 m).
Kromě uvedených jednotek se v praxi měření v některých zemích používají i jiné jednotky délky: stopa, yard, anglická míle, námořní míle, versta… Zajímavé je rovněž seznámení s historií vývoje jednotek délky.

Pro zájemce:

- Základem staročeských délkových měr bylo ječné zrno. 5 těchto zrn položených těsně vedle sebe dávalo palec, 4 palce byl prst,10 prstů byla píď, 3 pídě byl pražský loket (59,4 cm).
- V roce 1101 změřili anglickému králi Jindřichovi I. vzdálenost od špičky jeho královského nosu ke špičce ukazováčku jeho rozpažené ruky. Tak vznikla anglická délková míra, 1 yard = 91,44 cm.
- V jedné knize vydané na začátku 17. stol. v Německu byl popsán zajímavý návod, jak určit délku stopy. Mělo se čekat u kostela, až půjdou lidé ze mše. Prvních 16 mužů, kteří vyjdou, mělo být vyzváno, aby se seřadili za sebou a dali každý svou levou nohu za levou nohu svého souseda. Celková vzdálenost všech stop se měla dělit 16 a výsledkem byla průměrná délka jedné stopy.
- Historie unifikace jednotky délky: odvození ze čtvrtiny zemského poledníku, jehož část byla změřena mezi Dunkerque a Barcelonou na konci 18. století - odtud odvozen

1 metr jako vzdálenost rysek na platiniridiovém prototypu uloženém v Mezinárodním ústavu pro míry a váhy v Sèvres u Paříže.

Jednotky obsahu (plochy):

Odvozujeme je z jednotek délky úsečky. Základní jednotkou obsahu je *1 metr čtvereční (1 m^2),* čtverec o délce strany 1 m. Násobky metru čtverečního jsou 1 km^2, 1 ha (hektar), 1 a (ar). Kilometr čtvereční je čtverec o délce strany 1 000 m, 1 hektar je čtverec o délce strany 100 m, 1 ar čtverec o délce strany 10 m. Platí: 1 km^2 = 1 000 000 m^2, 1 ha = 10 000 m^2, 1 a = 100 m^2.

Pozor: obsah 1 m^2 ovšem nemusí mít pouze čtverec o délce strany 1 m, ale také jiné rovinné útvary, například obdélník o délkách stran 2 m a 0,5 m (protože obsah obdélníku je $S = a \cdot b$, tedy 2 m · 0,5 m = 1 m^2). Podobně můžeme uvažovat o obsahu rovinných útvarů o jednotce 1 ha, 1 a.
Díly metru čtverečního jsou 1 dm^2, 1 cm^2, 1 mm^2.

Jednotky objemu:

Odvozujeme je z jednotek délky úsečky. Základní jednotkou objemu je *1 metr krychlový (1 m^3),* krychle o délce hrany 1 m. Násobkem metru krychlového jsou 1 km^3 , krychle o délce hrany 1 000 m. Platí: 1 km^3 = 1 000 000 000 m^3.
Díly metru krychlového jsou 1 dm^3, 1 cm^3, 1 mm^3. Platí: 1 dm^3 = 0, 001 m^3, 1 cm^3 = 0,000 001 m^3, 1 mm^3 0,000´000 001 m^3.
Další jednotky objemu, které známe z praxe, jsou tzv. „duté míry“, napřílad *1 litr* (1 l = 1 dm^3, *1 hektolitr* (1 hl = 0, 1 m^3).

Kontrolní úkoly:

1. Sestavte tabulku s převody jednotek
a) délky, b) obsahu, c) objemu.

2. Vypočtěte obsah obdélníku, jehož
a) obvod je 24 cm, délka jedné strany je 6 cm,
b) obvod je 3, 6 m, délka jedné strany je 4 m.
Převeďte vypočtené obsahy na m^2 (cm^2).

Náměty pro praktické činnosti:

1. Využijte stavebnici MERKUR. Z několika stejných dílků stavebnice (modely shodných úseček) vytvářejte spojením jiné a zjišťujte jejich délku. Sledujte vztah míry překrytí dílků a délku nové, sestavené části.

Pojmy k zapamatování:

- délka úsečky,
- okolí bodu v rovině,
- vnitřní, vnější a hraniční body,
- hranice rovinného útvaru,
- omezený rovinný útvar,
- nepřekrývající se rovinné útvary,
- měřitelný rovinný útvar,
- měřitelný prostorový útvar,
- Jordanova teorie míry,
- jádro a obal rovinného útvaru ve čtvercové síti,
- jádro a obal prostorového útvaru v krychlové síti,
- jednotky délky úsečky, obsahu rovinného útvaru, objemu tělesa.

Shrnutí:

Cílem měření úsečky je určení její velikosti, tj. stanovení čísla, které vyjadřuje, kolikrát je daná úsečka větší (nebo menší) než jednotková úsečka. Při měření určujeme dolní a horní mez délky úsečky AB. Funkce míra úsečky má následující vlastnosti:

a) pro každou úsečku $x \in M$ je $f(x) \geq 0$,
b) jsou-li $x, y \in M$ shodné úsečky ($x \cong y$), je $f(x) = f(y)$,
c) je-li $x + y$ grafický součet úseček x, y, kde $x, y \in M$, je $f(x + y) = f(x) + f(y)$
d) existuje úsečka x, že $f)x) = 1$.

Míru (velikost) každého měřitelného rovinného útvaru a míru každého prostorového útvaru určujeme postupem, který se nazývá Jordanova teorie míry. Je založen na umístění měřitelného rovinného útvaru do čtvercové sítě, resp. měřitelného prostorového útvaru do krychlové sítě. Určujeme jádro a obal útvaru (velikost jádra a velikost obalu), které se zjemněním sítí přibližuje zdola i shora k velikosti útvaru.
Výsledkem je určení míra měřitelného rovinného (prostorového) útvaru. Tato funkce má následující vlastnosti:

a) pro každý útvar $U \in M$ je $f(U) \geq 0$,
b) pro každé $U_1, U_2 \in M$, které jsou shodné ($U_1 \cong U_2$), je $f(U_1) = f(U_2)$,
c) pro každé $U_1, U_2 \in M$ takové, že se nepřekrývají, je $f(U_1 \cup U_2) = f(U_1) + f(U_2)$,
d) existuje U, pro které $f(U) = 1$.

Funkční hodnota míry rovinného útvaru je obsah, míry prostorového útvaru (tělesa) je objem.
U každého měřitelného rovinného útvaru určujeme rovněž obvod jako velikost jeho hranice v rovině.
U každého měřitelného prostorového útvaru (tělesa) zjišťujeme vedle objemu i jeho povrch jako velikost hranice tělesa v prostoru.. Rozvineme-li povrch hranatého tělesa do roviny, vytvoříme síť tělesa.
Základní jednotkou délky je 1 metr (1 m), základní jednotkou obsahu je 1 metr čtvereční (1 m^2), základní jednotkou objemu je 1 metr krychlový (1 m^3). V praxi používáme násobky a díly základních jednotek, které jsou násobky deseti.

Průvodce studiem:

Text, k jehož závěru jste právě dospěli, je pokusem zpracovat studijní materiál tak, aby vám byla poskytnuta možnost využít jej k samostatnému studiu - učební činnosti, řízené formou minimálního počtu kontaktních konzultací. Zároveň by vám má alespoň určitým dílem mohl pomoci v propojení teoretické části a praxe. Chce být příspěvkem k získání takových teoretických poznatků, které se mohou stát užitečným návodem k jednání skrze vaše tvořivé myšlení.
Přeji vám mnoho úspěchů ve studiu i v tvořivé práci s dětmi.

Autorka

Použitá literatura:

1. ZAPLETAL, F. a kol.: *Didaktika matematiky pro stud. učitelství 1. st. ZŠ. I. Základy elementární geometrie s metodikou*. Olomouc: UP, 1984.
2. FRANCOVÁ, M., MATOUŠKOVÁ, K., VAŇUROVÁ, M.: *Texty k základům elementární geometrie pro studium učitelství pro 1. st. ZŠ.* 2. opr. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 1994.
3. STOPENOVÁ, A.: *Základy matematiky 3, 5. Texty k distančnímu vzdělávání.* Olomouc: UP 2006.
4. FUCHS, E., LIŠKOVÁ, H., ZELENDOVÁ, E.: *Manipulativní činnosti rozvíjející matematickou gramotnost.* JČMF, 2013.
5. KOUŘIM, J. a kol.: *Základy elementární geometrie pro učitelství 1. stupně ZŠ.* Praha: SPN, 1985.
6. KUPČÁKOVÁ, M.: *Geometrie ve světě dětí i dospělých*. Hradec Králové: Gaudeamus, 2001.
7. MOLNÁR, J., PERNÝ, J., STOPENOVÁ, A. *Prostorová představivost a prostředky k jejímu rozvoji. Studijní materiály k projektu „Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP“* . JČMF, 2006.
8. STRAKOVÁ, J. Vědomosti a dovednosti pro život. Čtenářská, matematická a přírodovědná gramotnost patnáctiletých žáků v zemích OECD. Praha: ÚIV, 2002.

$\doteq$