

Mechanika tuhého tělesa

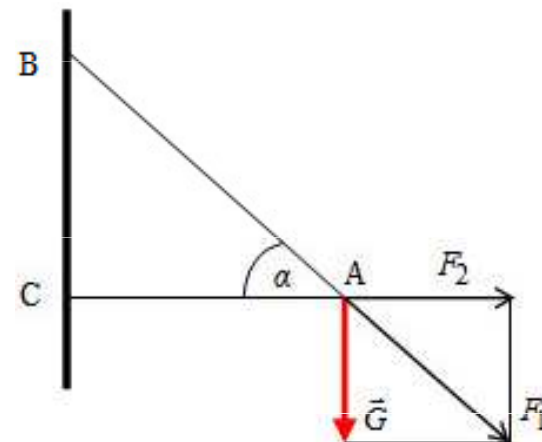
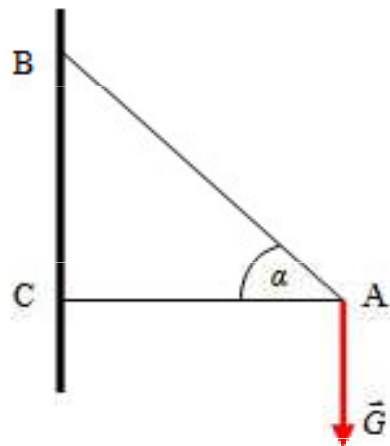
Ramena AB a AC mohou být zatížena maximálními silami 2100 N a 1700 N. Jak velký úhel konzoly je třeba zvolit a jakou největší zátěž může konzola unést?

$$F_1 = 2100 \text{ N}$$

$$F_2 = 1700 \text{ N}$$

$$\alpha = ?$$

$$G_{max} = ?$$



$$\alpha = \arccos \frac{F_2}{F_1} \Rightarrow \alpha = \underline{36^\circ}$$

$$G = F_1 \cdot \sin \left(\arccos \frac{F_2}{F_1} \right) \Rightarrow G = \underline{1234 \text{ N}}$$

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{F_2}{F_1}$$

$$\sin \alpha = \frac{G}{F_1}$$

Lampa visí na dvou drátech, které svírají s vodorovným směrem úhly o velikostech $\alpha = 55^\circ$ a $\beta = 33^\circ$. Jak velkou silou jsou dráty napínány, má-li tíha lampy velikost 12 N.

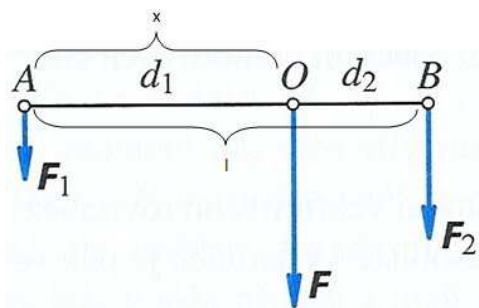
[10,07 N a 6,9 N]

Dělník táhne naložený dvoukolový dopravní vozík silou $F = 196,2 \text{ N}$. Určete složku síly ve směru pohybu F_1 a složku F_2 , která zvedá náklad. Výslednice F svírá se složkou F_1 úhel 30° .

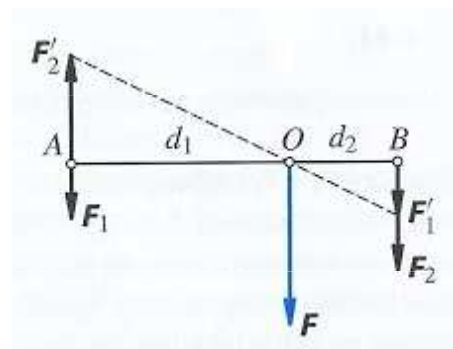
$$F_1 = F \cdot \cos\alpha = 196,2 \cdot \cos 30^\circ = \underline{170 \text{ N}}$$

$$F_2 = F \cdot \sin\alpha = 196,2 \cdot \sin 30^\circ = \underline{98,1 \text{ N}}$$

Na těleso působí ve dvou bodech A a B rovnoběžné síly o velikosti 90 N a 50 N. Vzdálenost bodů A, B je 28 cm. Určete velikost, směr, orientaci a polohu působišť výsledné síly, jsou-li síly orientovány a) souhlasně, b) nesouhlasně.



souhlasná orientace : $F = 140 \text{ N}$,
 $x = 10 \text{ cm}$, $d - x = 18 \text{ cm}$



nesouhlasná orientace : $F = 40 \text{ N}$,
 $x = 35 \text{ cm}$, $d + x = 63 \text{ cm}$

Dva myslivci nesou zastřeleného srnce s hmotností 90 kg zavěšeného na vodorovné tyči. Vzdálenosti bodů, ve kterých je tyč podepřena rameny nosičů od působíště tíhové síly srnce jsou 0,8 m a 1 m. Vypočtete velikost sil, které působí na ramena obou nosičů. Navrhněte změnu situace tak, aby se oba nosiči podíleli na nesení srnce stejně.

$$m = 90 \text{ kg}$$

$$F_g = 900 \text{ N}$$

$$r_1 = 0,8 \text{ m}$$

$$r_2 = 1 \text{ m}$$

$$F_1 = ?$$

$$F_2 = ?$$

$$F_1 + F_2 = 900 \Rightarrow F_2 = 900 - F_1$$

$$F_1 \cdot 0,8 = F_2 \cdot 1$$

$$F_1 \cdot 0,8 = (900 - F_1) \cdot 1$$

$$0,8 \cdot F_1 + F_1 = 900$$

$$1,8 \cdot F_1 = 900$$

$$F_1 = \frac{900}{1,8} = 500 \text{ N}$$

$$F_1 = \underline{500 \text{ N}}, \quad F_2 = 900 - F_1 = 900 - 500 = \underline{400 \text{ N}}$$

Druhá situace nastane, bude-li platit $r_1 = r_2 = 0,9 \text{ m}$. Pak na ramena obou nosičů bude působit stejná síla $F_1 = F_2 = 450 \text{ N}$.

Příklad

Děti Marcela a Martin se šly houpat na houpačce. Marcela váží 58 kg a Martin 32 kg. Martin si sednul na konec houpačky, který je od její osy otáčení vzdálený 2 m. Do jaké vzdálenosti od osy otáčení by si měla sednout Marcela, aby houpačka byla vyrovnaná?

$$g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$m_1 = 32 \text{ kg}$$

$$r_1 = 2 \text{ m}$$

$$m_2 = 58 \text{ kg}$$

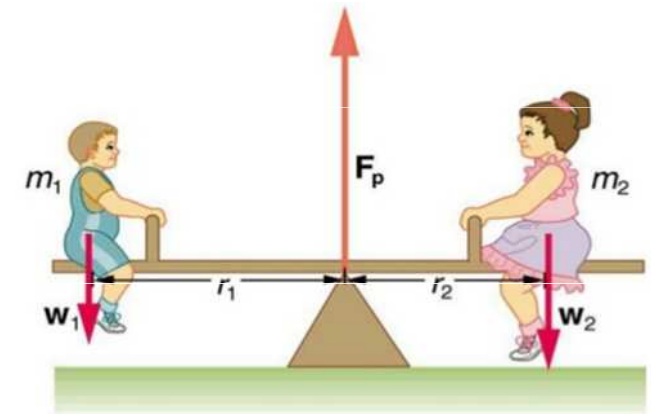
$$r_2 = ?$$

$$M_1 = M_2$$

$$m_1 \cdot g \cdot r_1 = m_2 \cdot g \cdot r_2$$

$$r_2 = m_1 \cdot r_1 / m_2 = 32 \cdot 2 / 58 = 1,1$$

$$\text{m}$$



Na rukojeť šroubováku působí ruka momentem dvojice sil 3 N.m. Jak veliké síly by musely působit na obvodu hlavice šroubu o průměru 5 mm, aby byl moment jejich dvojice stejně veliký ?

[600 N]

Určete polohu těžiště hřídele složeného ze dvou stejnorodých válců spojených navzájem tak, že mají společnou osu. První má výšku 20 cm a průřez 9 cm², druhý má výšku 12 cm a průřez 5 cm².

$$V_1 = 20 \text{ cm}$$

$$S_1 = 9 \text{ cm}^2$$

$$V_2 = 12 \text{ cm}$$

$$S_2 = 5 \text{ cm}^2$$

$$G_1 = v_1 \cdot S_1 \cdot \rho \cdot g$$

$$G_2 = v_2 \cdot S_2 \cdot \rho \cdot g$$

$$T_1 \cdot T_2 = d = 16 \text{ cm}$$

$$T_1 \cdot T = x$$

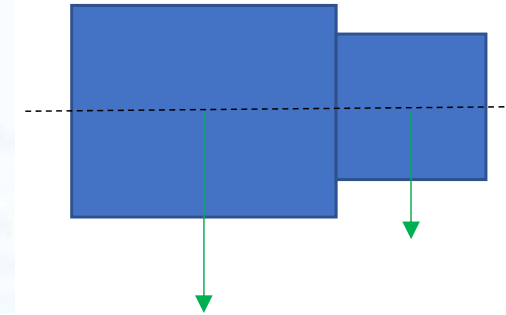
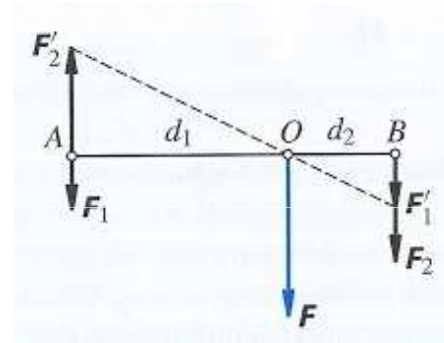
$$T_2 \cdot T = d - x$$

$$G_2 / G_1 = x / (d - x)$$

$$x = G_2 \cdot d / (G_1 + G_2)$$

$$x = v_2 \cdot S_2 \cdot d / (v_1 \cdot S_1 + v_2 \cdot S_2)$$

$$x = 60 \cdot 16 / (180 + 60) = \underline{4 \text{ cm}}$$



$$G_1 / G_2 = 180 / 60 = 3 / 1 = 12 / 4$$

Na konci tyče o délce 30 cm je připojena koule o poloměru 6 cm, její střed leží na prodloužené ose tyče. Obě tělesa jsou ze stejnorodého materiálu a jsou stejně těžká. Určete polohu těžiště soustavy těles.

[25,5 cm od volného konce]

Válcová tyč o délce 30 cm má polovinu objemu z oceli a druhou z olova. Určete polohu těžiště.

[8,8 cm od středu ocelové části]

Hmotnost traktoru je 2 t, jeho těžiště je ve vodorovné vzdálenosti 60 cm od osy zadních kol, vzdálenost os předních a zadních kol je 240 cm. Jak velkými tlakovými silami působí přední a zadní kola na zem?

[5000 N, 1500 N]

Nákladní automobil s nákladem má hmotnost 5340 kg. Vzdálenost os předních a zadních kol je 330 cm. Jak velké tlakové síly působí na osy, jestliže svislá přímka procházející těžištěm dělí vzdálenost os v poměru 1:3 (těžiště je blíže zadní osy).

[13350 N, 40050 N]

Ocelovou trubku o hmotnosti 20 kg a délce 5 m, která leží na vodorovné rovině postavíme do svislé polohy. O kolik se zvýší její potenciální energie?

[500 J]

Plné kolo (kruhový kotouč) o hmotnosti 20 kg a poloměru 50 cm se kutálí (valí) rychlostí 10 ms^{-1} . Jakou má kinetickou energii?

$$m = 20 \text{ kg}, r = 50 \text{ cm} = 0,5 \text{ m}, v = 10 \text{ m.s}^{-1}$$

$$I_0 = \frac{1}{2} m r^2, \quad \omega = \frac{v}{r} = \frac{10 \text{ m.s}^{-1}}{0,5 \text{ m}} = 20 \text{ s}^{-1}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} 20 \cdot 10^2 \text{ J} + \frac{1}{4} \cdot 20 \cdot 0,5^2 \cdot 20^2 \text{ J} = 1000 \text{ J} + 500 \text{ J} = 1500 \text{ J}$$

$$E_k = 1,5 \text{ kJ}$$

Rotor elektromotoru o hmotnosti 110 kg má moment setrvačnosti 2 kg.m^2 a koná 1050 otáček za minutu. Jak velkou má kinetickou energii?

[12100 J]

Brusný kotouč, mající hmotnost 8,621 kg a průměr 280 mm, vykoná 280 otáček za minutu. Určete jeho moment setrvačnosti za předpokladu, že jeho tloušťka je velmi malá vzhledem k poloměru. Určete jeho kinetickou energii.

[0,086 kg.m^2 , 36,8 J]

Páka o hmotnosti 2 kg s těžištěm uprostřed je podepřena v 1/3 své délky. Na konci kratšího ramene je zavěšeno těleso hmotnosti 9 kg. Jakou silou působící na konci delšího ramene udržíme rovnováhu?

$$m_p = 2 \text{ kg}$$

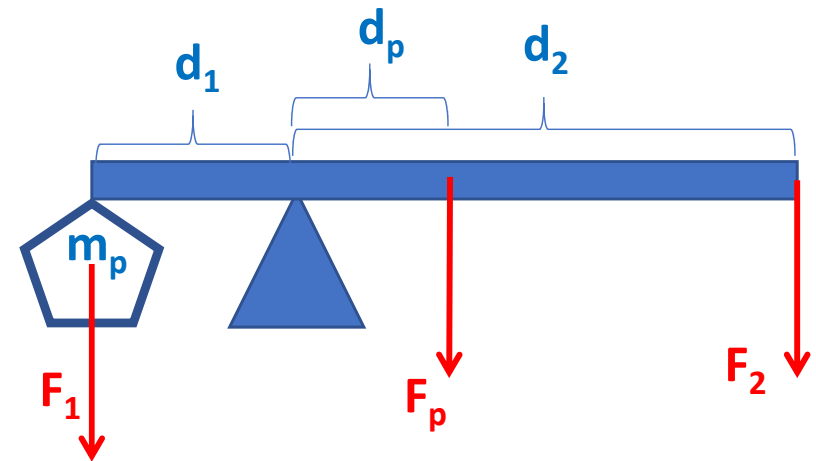
$$m_1 = 9 \text{ kg}$$

$$d_1 = 0,333 \cdot d$$

$$d_2 = 0,667 \cdot d$$

$$d_p = 0,50 \cdot d - 0,333 \cdot d = 0,167 \cdot d$$

$$F_2 = ?$$



$$M_1 = M_2 + M_g$$

$$F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2 + F_p \cdot d_p$$

$$F_2 = (m_1 \cdot d_1 - m_p \cdot d_p) \cdot g / d_2$$

$$F_2 = (9 \cdot 0,333 \cdot d - 2 \cdot 0,167 \cdot d) \cdot 9,81 / (0,667 \cdot d) = (9 \cdot 0,333 - 2 \cdot 0,167) \cdot 9,81 / 0,667 = \underline{\underline{39,2 \text{ N}}}$$

Do výpočtu je nutno zahrnout i tíhovou sílu působící na páku o hmotnosti 2 kg. Působíště této síly je v těžišti, tedy v polovině délky páky.

Na 15 cm dlouhé rameno louskáčku tlačíme silou 29,4 N. jak velká tlaková síla působí na ořech, který je 4 cm od osy?

$$F_1 = 29,4 \text{ N}$$

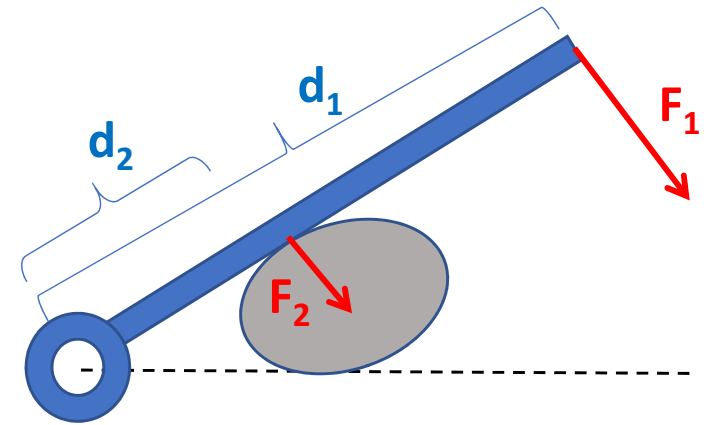
$$F_2 = ?$$

$$d_1 = 15 \text{ cm} = 0,15 \text{ m}$$

$$d_2 = 4 \text{ cm} = 0,04 \text{ m}$$

$$F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2$$

$$F_2 = F_1 \cdot d_1 / d_2 = 29,4 \cdot 0,15 / 0,04 = 0,204 \text{ m} = \underline{\underline{110.3 \text{ N}}}$$



Jak dlouhé držadlo musí mít kleště, jestliže k přestřípnutí ocelového drátu je třeba tlakové síly 834 N. Čelisti jsou 6 cm dlouhé a na držadlo a na držadlo můžeme působit silou 245 N.

$$F_1 = 834 \text{ N}$$

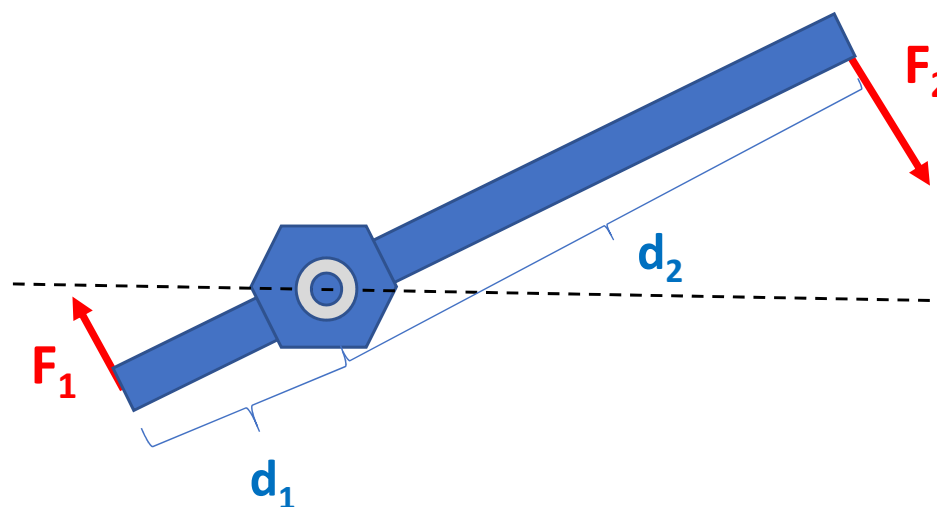
$$F_2 = 245 \text{ N}$$

$$d_1 = 6 \text{ cm} = 0,06 \text{ m}$$

$$d_2 = ?$$

$$F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2$$

$$d_2 = F_1 \cdot d_1 / F_2 = 834 \cdot 0,06 / 245 = 0,204 \text{ m} = \underline{20,4 \text{ cm}}$$



Těleso o hmotnosti 30 kg bylo vytaženo kladkou volnou o hmotnosti 2 kg do výšky 4 m. Jak velikou silou a po jaké dráze jsme působili?

$$m_t = 30 \text{ kg}$$

$$m_k = 2 \text{ kg}$$

$$h = 4 \text{ m}$$

$$F = ?$$

$$s = ?$$

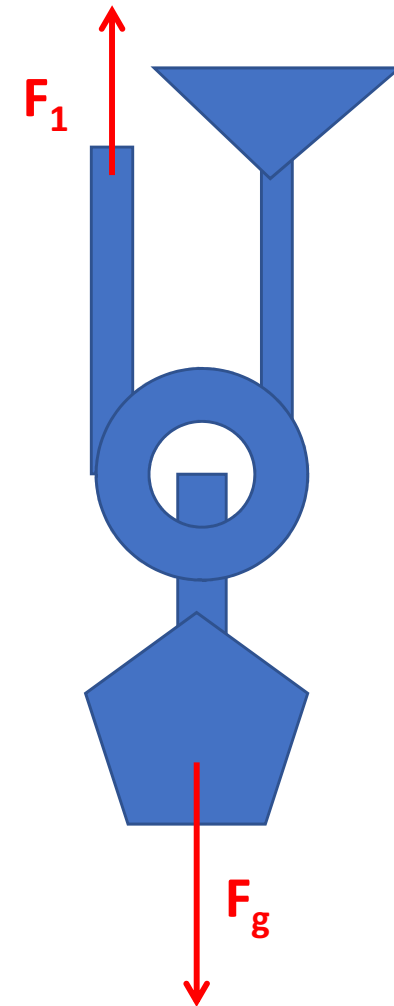
$$m = m_t + m_k$$

$$F_g = m \cdot g = (30 + 2) \cdot 9,81 = 313,92 \text{ N}$$

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot F_g = 313,92 / 2 = \underline{157 \text{ N}}$$

$$W = m \cdot g \cdot h = F_1 \cdot s$$

$$s = m \cdot g \cdot h / F_1 = m \cdot g \cdot h / (0,5 \cdot m \cdot g) = 2 \cdot h = 2 \cdot 4 = \underline{8 \text{ m}}$$



Jakou tlakovou sílu vyvoláme šroubem (závit 2 mm), působíme-li silou 10 N na klíči délky 20 cm?

$$h = 2 \text{ mm} = 0,002 \text{ m}$$

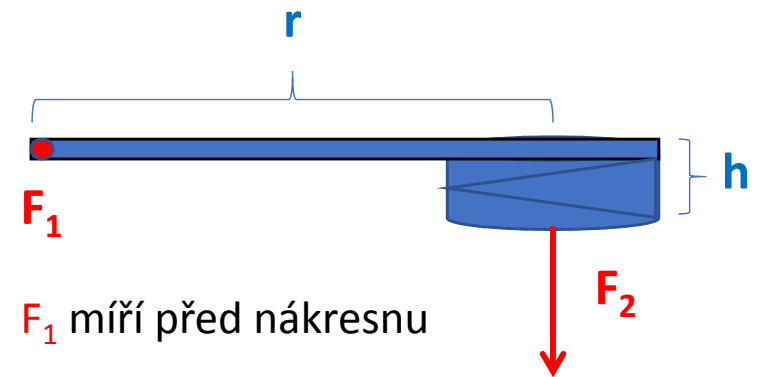
$$F_1 = 10 \text{ N}$$

$$r = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$$

$$F_2 = ?$$

$$W = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot F_1 = F_2 \cdot h$$

$$F_2 = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot F_1 / h = 2 \cdot \pi \cdot 0,2 \cdot 10 / 0,002 = \underline{\underline{6280 \text{ N}}}$$



Příklad č. 2:

Určete, zda se začne smýkat ocelový hranol po šikmé ploše vyrobené ze dřeva, která svírá s vodorovnou rovinou úhel 30° . Součinitel klidového (statického) tření mezi ocelí a dřevem je **0,55**.

$$\alpha = 30^\circ$$

$$f_0 = 0,55$$

$$? F > F_{t0}$$

$$F_{t0} = f_0 \cdot F_n$$

$$F_{t0} = 0,55 \cdot 0,866 \cdot F_G$$

$$F_{t0} = 0,48 \cdot F_G$$

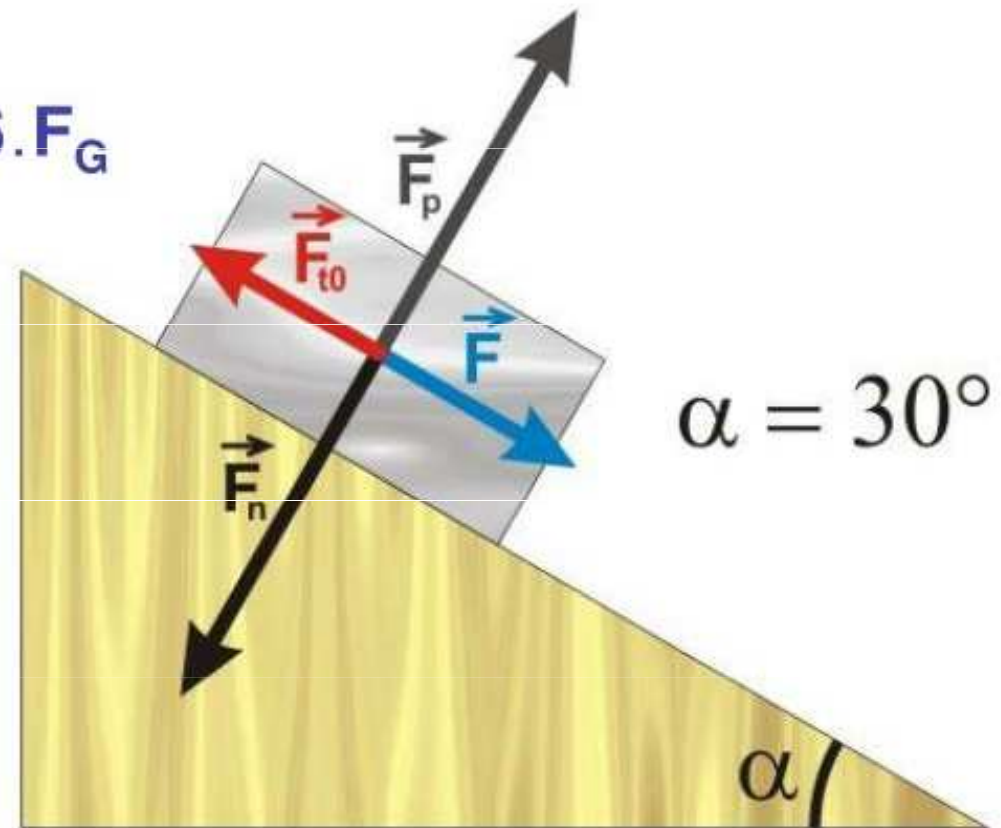
$$\vec{F}_G = \vec{F}_n + \vec{F}$$

$$F_n = \cos \alpha \cdot F_G$$

$$F_n = 0,866 \cdot F_G$$

$$F = \sin \alpha \cdot F_G$$

$$F = 0,5 \cdot F_G$$



Auto o hmotnosti 1200 kg má motor o výkonu 33 kW. V jakém největším stoupání je schopno udržet rychlost 72 km·h⁻¹?

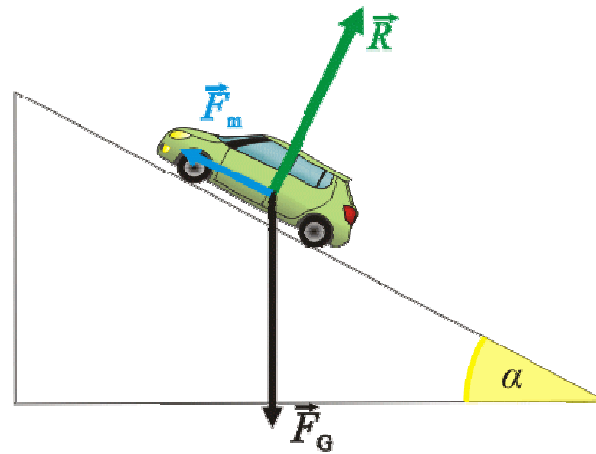
$$P = 33 \text{ kW} = 33000 \text{ W}$$

$$m = 1200 \text{ kg}$$

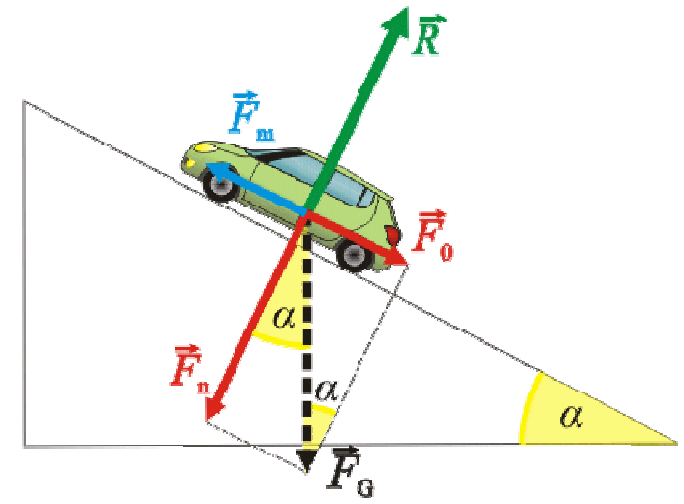
$$g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$v = 72 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\alpha = ?$$



<http://reseneulohy.cz/>



<http://reseneulohy.cz/>

Postup 1

$$F_0 = F_g \cdot \sin \alpha$$

$$F_0 = m \cdot g \cdot \sin \alpha$$

$$F_m = P \cdot v$$

$$F_0 - F_m = 0$$

$$\sin \alpha = P \cdot m \cdot g \cdot v$$

$$\sin \alpha = P / m \cdot g \cdot v = 33000 / 1200 \cdot 9,81 \cdot 20 = 0,140 \Rightarrow \underline{\alpha = 8^\circ 3'}$$

$$F_n - R = 0$$

$$F_0 - F_m = 0$$

Postup 2

$$\Delta E_p = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot v \cdot t \cdot \sin \alpha$$

$$W = P \cdot t$$

$$\sin \alpha = P \cdot m \cdot g \cdot v$$

$$\sin \alpha = P / m \cdot g \cdot v = 33000 / 1200 \cdot 9,81 \cdot 20 = 0,140 \Rightarrow \underline{\alpha = 8^\circ 3'}$$

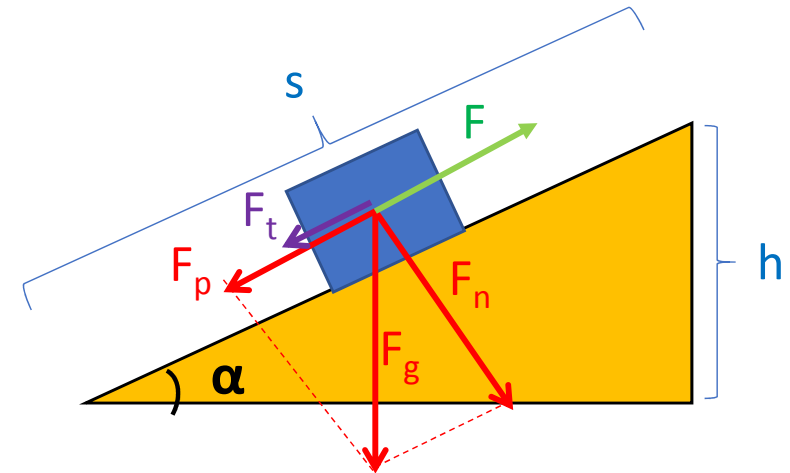
Těleso jsme zvedli po délce 9 m nakloněné roviny s elevačním úhlem 30° . Součinitel smykového tření je 0,2. S jak velkou účinností jsme pracovali?

$$s = 9 \text{ m}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\sigma = 0,2$$

$$\eta = ?$$



$$W = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha \quad (\text{bez tření, 100\% účinnost})$$

$$W_t = F_t \cdot s = s \cdot \sigma \cdot F_g \cdot \cos \alpha = s \cdot \sigma \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$\eta = W / (W + W_t) = s \cdot \sin \alpha / (s \cdot \sin \alpha + s \cdot \sigma \cdot \cos \alpha) = \sin \alpha / (\sin \alpha + \sigma \cdot \cos \alpha)$$

$$\eta = \sin 30^\circ / (\sin 30^\circ + 0,2 \cdot \cos 30^\circ) = 0,5 / (0,5 + 0,174) = 0,742 = \underline{74,2 \%}$$

Jakou tahovou sílu musí vyvinout elektromotor nákladního výtahu, jestliže zdvihá dva pytle cementu přes kladku pevnou, každý po 50 kg a hmotnost samotné plošiny výtahu je 30 kg?

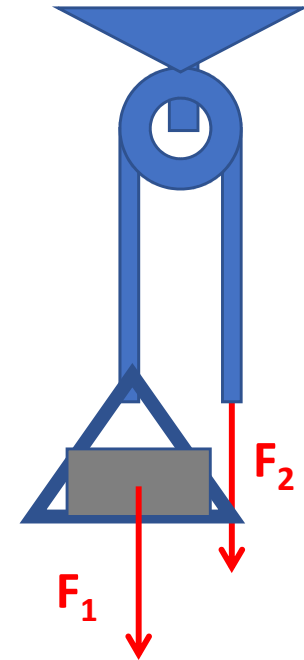
$$m_c = 50 \text{ kg}$$

$$m_p = 30 \text{ kg}$$

$$F_2 = ?$$

$$F_1 = F_2 = m \cdot g$$

$$F_2 = (2 \cdot m_c + m_p) \cdot g = (2 \cdot 50 + 30) \cdot 10 = \underline{1300 \text{ N}}$$



Mramorový blok o objemu $3,5 \text{ m}^3$ váží 10 t. Jaká bude hmotnost mramorového náhrobního kamene tvaru pravoúhlého rovnoběžnostěnu o délce 2,5 m, šířce 0,9 m a výšce 35 cm?

[2250 kg]

Kapka oleje o objemu $0,050 \text{ mm}^3$ se roztekla po povrchu vody a vytvořila skvrnu přibližně tvaru kruhu o obsahu 600 cm^2 . Za předpokladu, že skvrnu tvoří 2 vrstvy molekul vypočtete průměr molekuly oleje.

[0,4 nm]

Železná deska 2 m dlouhá a 40 cm široká má mít tíhu 1850 N. Jaká bude tloušťka desky? Hustota železa je 7873 kg/m^3 .

[3 cm]

Víko s průměrem 32 cm třeba připevnit k otvoru tlakové nádoby 24 šrouby. Tlak plynu v nádobě je 6 MPa. Jaký plošný obsah průřezu šroubů třeba zvolit?

$$d = 32 \cdot 10^{-2} \text{ m}, p = 6 \cdot 10^6 \text{ Pa}, \sigma_{\text{dv}}(\text{skrutka}) = 50 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

Nádoba:

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \Rightarrow S = \frac{3,14 \cdot (32 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2}{4} = 803,84 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$p = \frac{F}{S}$$

$$F = p \cdot S \Rightarrow F = 6 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot 803,84 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 4823,04 \cdot 10^2 \text{ N}$$

$$F' = \frac{1}{24} \cdot F \Rightarrow F' = \frac{1}{24} \cdot 4823,04 \cdot 10^2 \text{ N} = 200,96 \cdot 10^2 \text{ N}$$

Skutka:

$$\sigma_{\text{dv}} = \frac{F'}{S_0}$$

$$S_0 = \frac{F'}{\sigma_{\text{dv}}}$$

$$S_0 = \frac{200,96 \cdot 10^2 \text{ N}}{50 \cdot 10^6 \text{ Pa}} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 4 \text{ cm}^2$$

$$\underline{S_0 = 4 \text{ cm}^2}$$

Na ocelovém laně příčného průřezu 2 cm^2 je zavěšeno břemeno o hmotnosti 4000 kg . Jaké je relativní prodloužení lana?

$$m = 4 \cdot 10^3 \text{ kg}, E = 220 \cdot 10^9 \text{ Pa}, g = 10 \text{ m.s}^{-2}, S = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2, \varepsilon = ?$$

$$F = m \cdot g$$

$$F = 4 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m.s}^{-2} = 4 \cdot 10^4 \text{ N}$$

$$\frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0} \quad \wedge \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\frac{F}{S} = E \cdot \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{F}{E \cdot S}$$

$$\varepsilon = \frac{4 \cdot 10^4 \text{ N}}{220 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 0,0009$$

$$\varepsilon = 0,0009 \cdot 100\% = 0,09\%$$

$$\underline{\varepsilon = 0,09\%}$$

Zjistěte, zda se přetrhne železný drát o průměru 2 mm, pokud je napínán silou 1 kN.
($\sigma_E = 314 \text{ MPa}$)

$$\sigma_n = \frac{F}{S}$$

$$\sigma_n = \frac{F}{\pi \cdot r^2}$$

$$\sigma_n = \frac{10^3 \text{ N}}{3,14(10^{-3} \text{ m})^2} = \frac{10^3 \text{ N}}{3,14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = 318,5 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$\sigma_n = 318,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_n > \sigma_E$$

Protože $\sigma_n > \sigma_E$, železný drát se přetrhne.

Mosazný drát délky 1,1 m a průřezu o obsahu 4 mm² byl deformován v tahu silou 80 N, čímž se prodloužil o 0,2 mm. Vypočítejte modul pružnosti v tahu mosazi.

[110 GPa]

Při výrobě dílců z předpjatého železobetonu byly ocelové pruty o délce 6 m napínány silou $6 \cdot 10^4 \text{ N}$. Vypočítejte prodloužení ocelových tyčí, je-li jejich průměr 10 mm. Modul pružnosti použité oceli je 220 GPa.

[21 mm]

Osobní výtah o hmotnosti 500 kg drží 3 ocelová lana, každé o průměru 1 cm. Vypočítejte napětí v každém ocelovém laně. (Vlastní tíhu lana zanedbejte).

[20,83 MPa]

Na konec ocelové tyče ($E = 220 \text{ GPa}$) s délkou 1,5 m umístěné ve vertikální poloze má být zavěšeny závaží o hmotnosti 500 kg. Jaký průměr tyče zvolíme, pokud chceme, aby se tyč po zavěšení závaží neprodloužila o více než 0,3 mm. (Vlastní tíhu tyče neuvažovat)

[12 mm]

Zjistěte, zda se přetrhne železný drát o průměru 2 mm, pokud je napínán silou 1 kN. ($\sigma_E = 314 \text{ MPa}$)

[318,5 MPa]

Určete práci, kterou je potřeba vykonat, aby se ocelová tyč o délce 1 m a o obsahu průřezu 1 cm^2 prodloužila při pružné deformaci v tahu o 1 mm. Modul pružnosti v tahu použité oceli je 220 GPa.

[11 J]