Celá čísla

Motivace. Obor celých čísel musí mít tyto vlastnosti:

1. Musí v něm platit všechna pravidla a vlastnosti operací jako v oboru přirozených čísel.
2. Musí být zajištěno neomezené odčítání každých dvou celých čísel.
3. Přirozená čísla musí být součástí (podmnožinou) celých čísel. Matematicky říkáme, že pololookruh přirozených čísel lze izomorfně vnořit do oboru integrity celých čísel.

Konstrukce.

Vyjdeme z kartézského součinu $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$, na kterém definujeme pro každé dvě dvojice $[a, b], [c, d] \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ relaci $\sim$ vztahem:

$$[a, b] \sim [c, d] = a + d = b + c.$$

Tato relace je ekvivalence (je reflexivní, symetrická a tranzitivní), existuje tedy rozklad kartézského součinu $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ na třídy.

Definice. Třídy rozkladu kartézského součinu $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ určeného ekvivalencí $\sim$ se nazývají celá čísla. Celá čísla jsou tedy třídy navzájem ekvivalentních uspořádaných dvojic přirozených čísel.

Poznámka. Z definice relace ekvivalence $\sim$ plyne, že všechny navzájem ekvivalentní uspořádané dvojice přirozených čísel mají tentýž rozdíl mezi první a druhou složkou. Tento rozdíl určuje celé číslo, danou třídou definované. V dalším textu o celých číslech je proto nutno rozlišovat mezi případem, kdy $[a, b]$ bude označovat tuto jednu konkrétní uspořádanou dvojici přirozených čísel a případem, kdy bude hrát roli reprezentující dvojice nějakého celého čísla. V tomto druhém případě budeme užívat tučného označení ***[a, b]***. Platí tedy např.

[4, 2] = *{[2, 0], [3, 1], [4, 2], [5, 3], [6, 4], ...}*.

Celé číslo je vždy reprezentováno nekonečnou množinou navzájem ekvivalentních uspořádaných dvojic přirozených čísel. Podle dohodnutého označení je nutno také rozlišovat následující vztahy: Např. pro uspořádané dvojice *[5, 3], [6, 4]* platí $[5, 3] \neq [6, 4]$, $[5, 3] \sim [6, 4]$, pro dvě celá čísla ***[5, 3]***, ***[6, 4]*** ale platí rovnost ***[5, 3]*** = ***[6, 4]***, protože obě tyto dvojice jsou reprezentanty téže třídy rozkladu systému $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$. Poznamenejme, že v dalším textu budeme pro zjednodušení označovat celá čísla velkými tučnými písmeny, např. ***A, B,*** .... Toto označení není v rozporu s uvedenou konstrukcí; vždy lze přejít k reprezentaci pomocí uspořádaných dvojic, např. ***A*** = ***[a, b]***, ***B = [c, d]***, ***C = [e, f],*** ....

Operace s celými čísly

Definice. Sčítání na množině celých čísel je definováno předpisem

$$\boldsymbol{[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d].}$$

Věta. Operace + z předchozí definice je komutativní, asociativní, má neutrální prvek ***0*** reprezentovaný dvojicí ***[n, n]*** pro libovolné $n \in \boldsymbol{N}$ a ke každému celému číslu ***A*** = ***[a, b]*** existuje právě jedno opačné číslo $-\boldsymbol{A} = \boldsymbol{[b, a]}$.

Věta. Algebraická struktura *(**Z**, +)* je komutativní grupa, ve které jsou řešitelné základní rovnice, tj rovnice ***A + X = B*** má vždy řešení v množině ***Z*** pro každá dvě celá čísla ***A, B.***

Věta. V grupě $(Z, +)$ existuje právě jedna inverzní operace k operaci sčítání. Tato operace se nazývá odčítání a je definována vztahem $A - B = A + (-B)$.

Poznámka. Z předchozí věty lze odvodit početní pravidlo pro operaci odčítání:

$$[a, b] - [c, d] = [a + d, b + c].$$

Definice. Na množině Z definujme binární operaci $\cdot$ následujícím způsobem:

$$[a, b] \cdot [c, d] = [ac + bd, ad + bc].$$

Tuto operaci nazveme násobením v množině celých čísel. Tato operace je v množině Z neomezeně definovaná, struktura $(Z, \cdot)$ je tedy grupoid.

Věta. Grupoid $(Z, \cdot)$ je asociativní, komutativní a má neutrální prvek 1 reprezentovaný dvojicí $[n+1, n]$ pro libovolné $n \in N$.

Věta. Operace násobení je v množině celých čísel svázána s operací sčítání distributivním zákonem, tj.

$$A, B, C \in Z: A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

Věta. Algebraická struktura $(Z, +, \cdot)$ je komutativní okruh s neutrálním prvkem, který není tělesem. V tomto okruhu neexistují vlastní dělitelé nuly, je to tedy obor integrity.

Věta. Nechť $A, B, C \in Z$. Pak platí:

(1) $-(-A) = A$;

(2) $-(A + B) = (-A) + (-B)$;

(3) $-(A - B) = B - A$;

(4) $(A - (B - C) = (A + C) - B$;

(5) $(-A) \cdot B = A \cdot (-B) = -(A \cdot B)$.

(6) $(-A) \cdot (-B) = A \cdot B$.

Poznámka. Operace dělení není v množině $\boldsymbol{Z}$ neomezeně definované, proto nemůže existovat obecný vzorec pro výpočet podílu každých dvou celých čísel. Chceme-li zjistit podíl dvou celých čísel $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = \boldsymbol{X}$, je nutno postupovat podle definice podílu. Vztah $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = \boldsymbol{X}$ přepíšeme na tvar $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{X}$, dosadíme za $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ reprezentující uspořádané dvojice a řešíme součin $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{X}$ jako rovnici. V případě, že podíl existuje, je možno ho tímto postupem určit.

Relace uspořádání v množině celých čísel

Definice. Nechť $\boldsymbol{A} = [a, b]$ je celé číslo. Řekneme, že toto číslo je kladné a píšeme $\boldsymbol{A} > 0$, právě když platí $a > b$. Platí-li $a = b$, pak číslo $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$; ve zbývajícím případě pro $a < b$ říkáme, že celé číslo $\boldsymbol{A}$ je záporné a píšeme $\boldsymbol{A} < 0$.

Poznámka. Je zřejmé, že jeden z předchozích případů vždy musí nastat. Každé celé číslo je tedy buďto kladné nebo záporné nebo je rovno nule. Existuje tedy rozklad množiny všech celých čísel na čísla kladná, nulu a čísla záporná.

Definice. Nechť $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ jsou celá čísla. Řekneme, že $\boldsymbol{A} < \boldsymbol{B}$, právě když platí $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} < 0$. Je-li $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = 0$, pak $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$; ve zbývajícím případě pro $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} > 0$ pak platí $\boldsymbol{A} > \boldsymbol{B}$.

Poznámka. Je zřejmé, že i v předchozí definici jeden z případů vždy musí nastat. Relace uspořádání všech celých čísel je tedy lineární.

Věta. Nechť $\boldsymbol{A}$ je celé číslo. Pak platí zřejmé tvrzení:

(1) $\boldsymbol{A} > 0 \Rightarrow -\boldsymbol{A} < 0.$

(2) $\boldsymbol{A} < 0 \Rightarrow -\boldsymbol{A} > 0.$

Věta. Nechť $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou kladná celá čísla. Potom jejich součet $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ i součin $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ jsou také kladná celá čísla.

Důkaz: a) Součet. Nechť $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{[a, b]} > 0$, tj. $a > b$.
Nechť také $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{[c, d]} > 0$, tj. $c > d$. Nerovnosti $a > b$, $c > d$ sečteme. Dostaneme $a + c > b + d$, tedy $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} > 0$.

b) Součin. Nechť $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{[a, b]} > 0$, tj. $a > b$.
Nechť také $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{[c, d]} > 0$, tj. $c > d$. Proto existuje nenulové přirozené číslo $c - d$. Tímto číslem vynásobíme nerovnost $a > b$.

$$a > b \mid \cdot (c - d)$$
$$a \cdot (c - d) > b \cdot (c - d)$$
$$ac - ad > bc - bd$$
$$ac + bd > ad + bc$$

tedy platí $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} > 0$.

Věta: a) nechť $\boldsymbol{A} > 0$ a $\boldsymbol{B} < 0$, potom $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} < 0$.
b) nechť $\boldsymbol{A} < 0$ a $\boldsymbol{B} > 0$, potom $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} < 0$.
c) nechť $\boldsymbol{A} < 0$ a $\boldsymbol{B} < 0$, potom $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} > 0$.

Důkaz:

a) $\boldsymbol{A} > 0 \wedge \boldsymbol{B} < 0 \Rightarrow \boldsymbol{A} > 0 \wedge (-\boldsymbol{B}) > 0 \Rightarrow \boldsymbol{A} \cdot (-\boldsymbol{B}) > 0 \Rightarrow -(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) > 0 \Rightarrow \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} < 0$.

b) $\boldsymbol{A} < 0 \wedge \boldsymbol{B} > 0 \Rightarrow (-\boldsymbol{A}) > 0 \wedge \boldsymbol{B} > 0 \Rightarrow (-\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} > 0 \Rightarrow -(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) > 0 \Rightarrow \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} < 0$.

c) $\boldsymbol{A} < 0 \wedge \boldsymbol{B} < 0 \Rightarrow (-\boldsymbol{A}) > 0 \wedge (-\boldsymbol{B}) > 0 \Rightarrow (-\boldsymbol{A}) \cdot (-\boldsymbol{B}) > 0 \Rightarrow \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} > 0$.

Věta. Nechť $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ jsou libovolná celá čísla. Pak platí:
(1) Jestliže $\boldsymbol{A} > \boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C} < 0$, potom $\boldsymbol{AC} < \boldsymbol{BC}$;
(2) Jestliže $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C} > \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$, potom $\boldsymbol{A} > \boldsymbol{B}$;
(3) Jestliže $\boldsymbol{AC} > \boldsymbol{BC}$ a $\boldsymbol{C} > 0$, potom $\boldsymbol{A} > \boldsymbol{B}$;

(4) Jestliže $\boldsymbol{AC} > \boldsymbol{BC}$ a $\boldsymbol{C} < 0$, potom $\boldsymbol{A} < \boldsymbol{B}$;
(5) Jestliže $\boldsymbol{A} > \boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C} > \boldsymbol{D}$, potom $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C} > \boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$;
(6) Jestliže $\boldsymbol{A} > \boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C} > \boldsymbol{D}$ a $\boldsymbol{C} > 0$ a $\boldsymbol{B} > 0$,
potom $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} > \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{D}$.

Důkazy všech šesti tvrzení předchozí věty jsou v učebnici, jedná se o cvičení 199/16. Uvedeme tři příklady.

Důkaz tvrzení (1): Jestliže $\boldsymbol{A} > \boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C} < 0$, potom $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} > 0$ a $(-\boldsymbol{C}) > 0$. Potom $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) \cdot (-\boldsymbol{C}) > 0 \Rightarrow \boldsymbol{BC} - \boldsymbol{AC} > 0$, tzn. platí $\boldsymbol{AC} < \boldsymbol{BC}$.

Důkaz tvrzení (4): Nechť $\boldsymbol{AC} > \boldsymbol{BC}$, pak $\boldsymbol{AC} - \boldsymbol{BC} > 0$. Odtud $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} > 0$. Tento součin je kladné číslo, tedy obě čísla musí být buďto kladná nebo obě záporná. Podle předpokladu $\boldsymbol{C} < 0$, tedy také $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} < 0$. To ale znamená, že $\boldsymbol{A} < \boldsymbol{B}$.

Důkaz tvrzení (6): $\boldsymbol{A} > \boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C} > 0$, potom $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} > \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}$,
$\boldsymbol{C} > \boldsymbol{D}$ a $\boldsymbol{B} > 0$, potom $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} > \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{D}$.
Relace uspořádání je tranzitivní, proto $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} > \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{D}$.

Vnoření N do Z: Podle vztahů pro operace s celými čísly platí:

$$[a, 0] + [b, 0] = [a + b, 0],$$
$$[a, 0] \cdot [b, 0] = [a \cdot b, 0].$$

Pokud tedy zvolíme za reprezentující dvojici pro každé nezáporné celé číslo n dvojici $[n, 0]$, počítáme při obou operacích pouze s prvními složkami. To umožňuje definovat vnoření $\psi\colon \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{Z}$ polookruhu $\boldsymbol{N}$ do oboru integrity $\boldsymbol{Z}$. Toto vnoření je zobrazením, které je definováno pro každé přirozené číslo $n \in \boldsymbol{N}$ předpisem $\psi(n) = \{[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{0}];\ n \in \boldsymbol{N}\}$. Každé celé kladné (tj. přirozené) číslo n je tedy reprezentováno dvojicí $[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{0}]$, číslo nula je reprezentováno dvojicí $[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}]$ a tedy také místo celého čísla ***[n, 0]*** můžeme nadále psát pouze *n*. Víme ale také, že ke každému celému číslu ***[a, b]*** existuje opačné celé číslo $-$***[a, b]*** = ***[b, a]*** **.** Tedy i ke každému celému číslu ***[n, 0]*** existuje opačné celé číslo ***–[n, 0]***= ***[0, n]***. Vzhledem k výše dohodnuté reprezentaci nezáporného celého (tj. přirozeného) čísla *n* uspořádanou dvojicí ***[n, 0]*** je tedy každé celé záporné číslo $-\,n$ reprezentováno dvojicí ***[0, n].*** Proto můžeme běžně označovat celá čísla malými písmeny.

Definice. Absolutní hodnotu $|\boldsymbol{A}|$ celého čísla $\boldsymbol{A}$ definujeme takto:

(1) Je-li $\boldsymbol{A} \geq 0$, pak $|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{A}$;

(2) Je-li $\boldsymbol{A} < 0$, pak $|\boldsymbol{A}| = -\boldsymbol{A}$. (opačné celé číslo!!)

Věta. Nechť $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou libovolná celá čísla, pak platí:

(1) $|\boldsymbol{A}| = |-\boldsymbol{A}|$;

(2) $\boldsymbol{A} \leq |\boldsymbol{A}|$;–

(3) $|\boldsymbol{A}|^2 = \boldsymbol{A}^2$;

(4) $|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$;

(5) $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| \leq |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}|$;

(6) $|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}| \geq |\boldsymbol{A}| - |\boldsymbol{B}|$.

Důkaz tvrzení (1): pro $\mathbf{A} = 0$ je tvrzení zřejmé.

a) Nechť $\boldsymbol{A} > 0$, pak $|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{A}$;
potom ale $-\boldsymbol{A} < 0$, pak $|-\boldsymbol{A}| = -(-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}$.

b) Nechť $\boldsymbol{A} < 0$, pak $|\boldsymbol{A}| = -\boldsymbol{A}$;
potom ale $-\boldsymbol{A} > 0$, pak $|-\boldsymbol{A}| = -\boldsymbol{A}$. Tvrzení tedy platí.

Důkaz tvrzení (4): pro $\mathbf{A} = 0$ nebo $\mathbf{B} = 0$ je tvrzení zřejmé.

a) Nechť $\mathbf{A} > 0 \wedge \mathbf{B} > 0$, pak $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} > 0$. Potom $|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}| = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$.
Platí $\boldsymbol{A} > 0$, pak $|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{A}$**,** $\boldsymbol{B} > 0$, pak $|\boldsymbol{B}| = \boldsymbol{B}$**.** Proto platí
$|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$**.**

b) Nechť $\mathbf{A} > 0 \wedge \mathbf{B} < 0$, pak $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} < 0$, tedy $|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}| = -(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$.
Platí $\boldsymbol{A} > 0$, pak $|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} < 0$, pak $|\boldsymbol{B}| = -\boldsymbol{B}$. Proto platí
$|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = \boldsymbol{A} \cdot (-\boldsymbol{B}) = -(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$.

c) Nechť $\mathbf{A} < 0 \wedge \mathbf{B} > 0$, pak $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} < 0$, tedy $|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}| = -(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$.
Platí $\boldsymbol{A} < 0$, pak $|\boldsymbol{A}| = -\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} > 0$, pak $|\boldsymbol{B}| = \boldsymbol{B}$. Proto platí
$|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = (-\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} = -(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$.

d) Nechť $\mathbf{A} < 0 \wedge \mathbf{B} < 0$, pak $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} > 0$, tedy $|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}| = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$.
Platí $\boldsymbol{A} < 0$, pak $|\boldsymbol{A}| = -\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} < 0$, pak $|\boldsymbol{B}| = -\boldsymbol{B}$. Proto platí
$|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = -(\boldsymbol{A}) \cdot (-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$.

Věta. Nechť a, b jsou libovolná celá čísla, přičemž $b \neq 0$. Pak existuje jednoznačně určená dvojice celých čísel q, z (přičemž $0 \leq z < |b|$) s vlastností $a = b \cdot q + z$. Číslo a se nazývá dělenec, číslo b dělitel, číslo q je podíl (někdy též neúplný podíl) a číslo z je zbytek. Proces nalezení čísel q, z se nazývá dělení se zbytkem v množině celých čísel.

Příklady: Pro kladná čísla a, b jsou výpočty zřejmé.

a) a = –19, b = 4. Pak –19 = 4 · (–5) + 1, tj, q = –5, z = 1.

b) a = 26, b = –7. Pak 26 = –7 · (–3) + 5, tj, q = –3, z = 5.

c) a = –31, b = –9. Pak –31 = (–9) · 4 + 5, tj, q = 4, z = 5.

d) a = – 43, b = 8. Pak – 43 = 8 · (–6) + 5, tj, q = –6, z = 5.

e) a = 61, b = –11. Pak 61 = –11 · (–5) + 6, tj, q = –5, z = 6.

f) a = –1, b = –6. Pak –1 = (–6) · 1 + 5, tj, q = 1, z = 5.

Racionální čísla

Motivace. Známe obor integrity všech celých čísel a známe všechny jeho vlastnosti a pravidla pro počítání s celými čísly. Problémem ale je, že v oboru celých čísel nelze neomezeně dělit. Problém s dělením vyřešíme zavedením racionálních čísel. Obor racionálních čísel musí mít tedy následující vlastnosti:

1. Musí v něm platit všechna pravidla a vlastnosti operací jako v oboru celých čísel.
2. Musí být zajištěno neomezené dělení každých dvou racionálních čísel (kromě dělení nulou).
3. Celá čísla musí být součástí (podmnožinou) racionálních čísel. Matematicky říkáme, že obor integrity celých čísel lze izomorfně vnořit do tělesa racionálních čísel.

Konstrukce.

Vyjdeme z kartézského součinu $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C} - \{0\}$, na kterém definujeme pro každé dvě dvojice $[a, b], [c, d] \in \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C} - \{0\}$ relaci $\sim$ vztahem:

$$[a, b] \sim [c, d] = a \cdot d = b \cdot c.$$

Tato relace je ekvivalence (je reflexivní, symetrická a tranzitivní), existuje tedy rozklad kartézského součinu $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C} - \{0\}$ na třídy.

Definice. Třídy rozkladu kartézského součinu $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C} - \{0\}$ určeného ekvivalencí $\sim$ se nazývají racionální čísla. Racionální čísla jsou tedy třídy navzájem ekvivalentních uspořádaných dvojic celých čísel.