**Konstrukce oboru integrity celých čísel (ℤ, +, . )**

Na kartézském součinu **ℕ** x **ℕ** definujeme binární relaci ~ (tzv.„ekvivalenci uspořádaných dvojic přirozených čísel“):

**[a,b] ~ [c,d]  a + d = b + c**

Tato relace je reflexivní, symetrická a tranzitivní na množině **ℕ** x **ℕ** (dokažte).

Je tedy relací ekvivalence na **ℕ** x **ℕ** a vytváří rozklad množiny **ℕ** x **ℕ** na třídy navzájem ekvivalentních dvojic přirozených čísel.

Rozklad množiny **ℕ** x **ℕ** vytvořený relací ~ nazýváme **množinou všech celých čísel**, ozn. ℤ.

Třídy rozkladu nazýváme **celá čísla**.

*Poznámka:*

Celá čísla, tj. třídy rozkladu **ℕ** x **ℕ**, budeme označovat velkými tiskacími písmeny A, B, ..., nebo pomocí kterékoli dvojice, která do této třídy patří:

Např. **A** =  = {[0,1], [1,2], [2,3], .... , [10,11], ......} =  = ...

Můžeme též psát [1,2]  **A**

**Sčítání a násobení celých čísel:**

Nechť celá čísla **A, B** jsou reprezentována uspořádanými dvojicemi [a,b], [c,d], tj.

**A** =  a **B** = . Pak

**- součet celých čísel A, B** definujeme: **A + B =**  +  = 

**- součin celých čísel A, B** definujeme: **A ∙ B =  ∙  = **

Součet ani součin celých čísel nezávisí na volbě reprezentantů.

Algebraická struktura (ℤ, **+, ∙) je obor integrity s jednotkovým prvkem**.

**Vlastnosti (**ℤ**, + , ∙ )** :

+ : ND, A, K, ZR, EN, EI

∙ : ND, A, K, EN

 ∙ D +

neexistují vlastní dělitelé nulového prvku

**Nulový prvek** (neutrální prvek vzhledem ke sčítání): **O** =  =  = {[0,0], [1,1], [2,2],....}

**Jednotkový prvek** (neutrální prvek vzhledem k násobení): **J** === {[1,0], [2,1], [3,2],...}

**Opačné číslo** k celému číslu **A** = : - **A** = 

**Rozdíl** **A – B** dvou celých čísel **A, B** je celé číslo **X**, pro které platí **A = B + X**.

Je-li **A** = , **B** = , je **X** = .

**USPOŘÁDÁNÍ V MNOŽINĚ VŠECH CELÝCH ČÍSEL**

**Kladná a záporná celá čísla**

*Definice*: Celé číslo A =  nazveme

a) **kladným** celým číslem, právě když *a > b*,

b) **záporným** celým číslem, právě když *a < b*.

Označíme: ℤ **+** - množinu všech kladných celých čísel

 ℤ **-** - množinu všech záporných celých čísel

**Věta 1**.

Pro každé celé číslo **A** nastane právě jedna ze tří možností:

**A** je - kladné, tj. **A**  ℤ **+**

 - záporné, tj. **A**  ℤ **-**

 **-** nulové, tj. **A** = **O** = .

**Důkaz**:

Tvrzení plyne z vlastnosti uspořádání přirozených čísel: Pro každá dvě přirozená čísla a, b nastane právě jedna ze tří možností: a > b, a = b, a < b.

Množinyℤ **+,** ℤ **-** , {O} tedy vytvářejí rozklad množiny ℤ.

**Věta 2**.

1. Součet libovolných dvou kladných celých čísel je kladné celé číslo.
2. Součin libovolných dvou kladných celých čísel je kladné celé číslo.

**Věta 3**.

1. Je-li **A** kladné celé číslo, pak číslo opačné (**-A**) je záporné celé číslo.
2. Je-li **A** záporné celé číslo, pak číslo opačné (**-A**) je kladné celé číslo.

Pomocí vět 1. – 3. lze dokázat další vlastnosti kladných a záporných celých čísel.

**Přirozené uspořádání množiny všech celých čísel – porovnávání celých čísel**

*Definice:* Pro libovolná celá čísla A, B platí: A > B  A – B  **C+ .**

Tato relace je AS, T, SO, AR, tzn. je lineárním ostrým uspořádáním na množině **C.**

(důkaz viz učebnice s. 179)