

IMAk13 Aritmetika 1 (podzim 2023)

Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D., doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.,

Ekvivalence množin, konečné a nekonečné množiny

Definice 1: Říkáme, že dvě množiny A, B jsou **ekvivalentní** právě tehdy, když existuje prosté zobrazení množiny A na množinu B . Zapisujeme $A \sim B$.

Příklad 1. Jsou dány množiny $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y, z\}$, $C = \{x, y\}$. Rozhodněte, které dvojice zadaných množin jsou ekvivalentní.

Poznámka. Relace \sim dvou množin definovaná v libovolném systému množin \mathcal{M} má vlastnosti: reflexivní, symetrická, tranzitivní. Relace \sim je tedy relací ekvivalence. Relace ekvivalence dvou množin v libovolném systému množin \mathcal{M} vytváří rozklad systému \mathcal{M} na třídy ekvivalentních množin.

Příklad 2. Je dán systém množin $\mathcal{M} = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$, kde $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{x, y\}$, $D = \{\circ, \circ, \circ, \circ\}$, $E = \{\Delta, \Delta, \Delta\}$, $F = \{*, *\}$, $G = \{\square\}$, $H = \{\odot, \odot, \odot, \odot\}$. Rozhodněte, které množiny ze systému \mathcal{M} jsou ekvivalentní.

Definice 2: Množina A je **konečná** právě tehdy, když žádná vlastní podmnožina množiny A není ekvivalentní s množinou A .

Definice 3: Množina B je **nekonečná** právě tehdy, když existuje alespoň jedna vlastní podmnožina množiny B , která je ekvivalentní s množinou B .

Poznámka. Množina M je **vlastní podmnožinou** množiny N právě tehdy, když $M \subset N \wedge M \neq N$.

KARDINÁLNÍ ČÍSLA

Definice 4: Třidu, do které patří množina A z neprázdného systému množin \mathcal{M} a všechny množiny z tohoto systému, které jsou s množinou A ekvivalentní, nazveme **kardinální číslo množiny A** . Kardinální číslo množiny A budeme značit: $|A|$

Poznámka: Pro kardinální číslo množiny se užívá také pojmu mohutnost množiny.

Příklad 3. Je dán systém množin $\mathcal{M} = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ z *Příkladu 2* výše. Určete kardinální čísla množin ze systému \mathcal{M} .

Řešení: V *Příkladu 2* relace ekvivalence množin rozložila zadaný systém množin na následující třídy:

$$T_1 = \{A, E\}, \quad T_2 = \{B, C, F\}, \quad T_3 = \{D, H\}, \quad T_4 = \{G\}.$$

Třída T_1 je kardinálním číslem každé z množin A, E . Můžeme psát $T_1 = |A| = |E|$.

K označení třídy, tj. kardinálního čísla, si můžeme vybrat kteroukoli z množin patřících do této třídy. Každá z těchto množin dané kardinální číslo (danou třídu rozkladu) reprezentuje.

Třída T_2 je kardinálním číslem množin B, C, F , tedy $T_2 = |B| = |C| = |F|$. Dále $T_3 = |D| = |H|$, $T_4 = |G|$.

IMAk13 Aritmetika 1 (podzim 2023)

Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D., doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.,

Důležité: Pro každé dvě množiny X, Y platí: Kardinální čísla množin X, Y se rovnají, právě když jsou množiny X, Y ekvivalentní. $|X| = |Y| \Leftrightarrow X \sim Y$

Definice 4: Kardinální čísla konečných množin nazveme **přirozenými čísly**.

Poznámka: Kardinální číslo množiny L tedy nazveme „pět“ a označíme $|L| = 5$.

Z uvedených příkladů je zřejmé, že kardinální číslo konečné množiny vyjadřuje společnou vlastnost této množiny a všech množin, které mají stejně prvků jako tato množina, tj. jsou stejně početné.

Porovnávání kardinálních čísel

Definice 5: Jestliže $|A| \neq |B|$ a množina A je ekvivalentní s vlastní podmnožinou množiny B , říkáme, že kardinální číslo množiny A je **menší než** kardinální číslo množiny B , píšeme $|A| < |B|$.

Poznámka: Z této definice vycházíme při porovnávání přirozených čísel.

Příklad 4: Uvažujme systém množin $\mathcal{M} = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ z minulého příkladu:

Platí např. $|A| < |D|$, protože $|A| \neq |D|$ a A je ekvivalentní např. s množinou $D^* = \{\circ, \circ, \circ\}$, což je vlastní podmnožina množiny D .

$|A| < |D|$, protože $|D| \neq |A|$ a $A \sim D^*$, $D^* \subset D$, $D^* \neq D$, kde $D^* = \{\circ, \circ, \circ\}$.

Sčítání kardinálních čísel

V dalším textu budeme pracovat se systémem množin \mathcal{M} , který obsahuje prázdnou množinu, jednoprvkovou množinu, s každými dvěma množinami A, B i jejich sjednocení $A \cup B$ a jejich kartézský součin $A \times B$ a také s každými dvěma množinami A, B i množinu B^* , která je s množinou B ekvivalentní ($B \sim B^*$) a s množinou A disjunktní ($A \cap B = \emptyset$)

Definice 6: Jestliže pro množiny A, B ze systému množin \mathcal{M} platí $A \cap B = \emptyset$, pak **součtem kardinálních čísel** $|A|, |B|$ rozumíme kardinální číslo sjednocení množin A, B , tj. $|A| + |B| = |A \cup B|$.

Příklad 5: Vypočítejte součet kardinálních čísel množin A, B , kde

- a) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$, b) množin A, B , kde $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, x\}$.

Řešení:

- a) $A \cap B = \emptyset$, tedy $|A| + |B| = |A \cup B|$, tj. $|A| + |B| = |\{a, b, c, 1, 2\}|$
Srovnejte: $|A| = 3$, $|B| = 2$, $3 + 2 = 5 = |A \cup B|$.

- b) $A \cap B \neq \emptyset$, množiny A, B mají společný prvek. K určení součtu kardinálních čísel si tedy musíme zvolit jiného reprezentanta jednoho z kardinálních čísel, např. místo množiny B zvolíme jinou množinu, která je s ní ekvivalentní (tedy také má stejné kardinální číslo s B) a která je současně s tou druhou množinou (tedy s A) disjunktní (nemá s ní společné prvky):
Např. zvolíme $C = \{p, q\}$. Platí $C \sim B$ a $A \cap C = \emptyset$.

Pak $|A| + |B| = |A| + |C| = |A \cup C|$, tj.

$$|\{a, b, c\}| + |\{a, x\}| = |\{a, b, c\}| + |\{p, q\}| = |\{a, b, c\} \cup \{p, q\}| = |\{a, b, c, p, q\}|.$$

Srovnejte: $|A| = 3$, $|B| = |C| = 2$, $3 + 2 = 5 = |A \cup C|$.

IMAk13 Aritmetika 1 (podzim 2023)

Mgr. Jitka Panáčková, Ph.D., doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.,

Násobení kardinálních čísel

Definice 7: Součinem kardinálních čísel $|A|$, $|B|$ rozumíme kardinální číslo kartézského součinu množin A , B , tj. $|A| \cdot |B| = |A \times B|$.

Příklad 6: Vypočítejte součet kardinálních čísel množin A , B , kde $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, x\}$.

Řešení:

$$|A| \cdot |B| = |A \times B|, \text{ tj. } |A| \cdot |B| = |\{[a,a], [a,x], [b,a], [b,x], [c,a], [c,x]\}|$$

$$\text{Srovnejte: } |A| = 3, \quad |B| = 2, \quad 3 \cdot 2 = 6 = |A \times B|.$$