

Opakování (předmět IMAk02)

Kartézský součin, binární relace

- **Kartézským součinem** dvou množin A, B rozumíme množinu $A \times B = \{[x,y]; x \in A \wedge y \in B\}$, tj. množinu všech uspořádaných dvojic $[x,y]$, kde $x \in A$ a $y \in B$.
- **Binární relací R z množiny A do množiny B** rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$.
- **Binární relací R v neprázdné množině A** rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times A$.

Příklad 1. Na množině $A = \{0,1,2,3,4\}$ jsou definovány binární relace R, S, T, U, V . Zapište je výčtem prvků:

$$R = \{[x,y] \in A \times A; x > y\}$$

$$S = \{[x,y] \in A \times A; x + y = 5\}$$

$$U = \{[x,y] \in A \times A; x = y\}$$

$$V = \{[x,y] \in A \times A; x = y \vee x = 2 \cdot y\}$$

- Necht' v A je definována relace R : Relaci R' v množině M definovanou předpisem $R' = (A \times A) - R$ nazýváme **doplňkovou relací** k relaci R v množině A .
- Necht' v A je definována relace R : Relaci $R^{-1} = \{[x,y] \in A \times A; [y,x] \in R\}$ nazýváme **relací inverzní** k relaci R v množině A .

Vlastnosti binárních relací v množině A

Binární relace R v množině A je

- **reflexivní** právě tehdy, když $(\forall x \in A) ([x,x] \in R)$,
(obsahuje všechny uspořádané dvojice $[x,x]$, kde $x \in A$, tj. v uzlovém grafu je každý uzel opatřen smyčkou)
- **antireflexivní** právě tehdy, když $(\forall x \in A) ([x,x] \notin R)$,
(neobsahuje žádnou uspořádanou dvojici typu $[x,x]$, kde $x \in A$, tj. v uzlovém grafu není žádný uzel opatřen smyčkou)
- **symetrická** právě tehdy, když $(\forall x,y \in A) ([x,y] \in R \Rightarrow [y,x] \in R)$,
(s každou uspořádanou dvojicí $[x,y]$ obsahuje i dvojici $[y,x]$, tj. v uzlovém grafu jsou mezi dvěma uzly buď dvě šipky nebo žádná)
- **antisymetrická**, právě tehdy, když $(\forall x,y \in A) [(x \neq y \wedge [x,y] \in R) \Rightarrow [y,x] \notin R]$,
(s žádnou dvojicí $[x,y]$ různých prvků neobsahuje dvojici $[y,x]$, tj. v uzlovém grafu je mezi dvěma různými uzly buď jedna šipka nebo žádná)
- **tranzitivní** právě tehdy, když $(\forall x,y,z \in A) ([x,y] \in R \wedge [y,z] \in R) \Rightarrow [x,z] \in R$,

IMAk13 Aritmetika 1 (podzim 2023)

Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.

(jestliže se v relaci vyskytnou „na sebe navazující dvojice“, pak musí relace obsahovat i dvojici, jejíž první složkou je 1. složka z první dvojice a druhou složkou je 2. složka z druhé dvojice).

- **souvislá** právě tehdy, když $(\forall x, y \in A) [x \neq y \Rightarrow ([x, y] \in R \vee [y, x] \in R)]$, (každé dva různé prvky z množiny A musí být „spolu v relaci“, tj. v uzlovém grafu jsou dva různé uzly spojeny alespoň jednou šipkou)

Binární relaci U v množině A nazýváme **uspořádání** v A, právě když U je **antisymetrická a tranzitivní**.

Binární relaci U v množině A nazýváme **uspořádání**

- **ostré** právě tehdy, když U je **antisymetrická, tranzitivní a antireflexivní**,
- **neostré** právě tehdy, když U je **antisymetrická, tranzitivní a reflexivní**.
- **lineární** právě tehdy, když U je **antisymetrická, tranzitivní a souvislá**.

Binární relaci R v množině M nazýváme **relací ekvivalence** na M, právě když je **reflexivní, symetrická a tranzitivní**.

Každá relace ekvivalence na množině M vytváří **rozklad** této množiny, což je systém neprázdných podmnožin (tzv. tříd rozkladu) množiny M takových, že průnik každých dvou tříd je prázdná množina a sjednocení všech tříd rozkladu tvoří množinu M.

Jinak lze také říci, že říci, že **rozklad** množiny M je systém neprázdných podmnožin (tzv. tříd rozkladu) množiny M takových, že každý prvek množiny M patří právě do jedné z těchto tříd.

Příklad 2. V množině $M = \{1, 2, 3\}$ je definována binární relace

- $R_1 = \{[x, y] \in M \times M; x < 3 \Rightarrow x + y = 3\}$,
- $R_2 = \{[x, y] \in M \times M; x = y \Rightarrow x = y\}$,
- $R_3 = \{[x, y] \in M \times M; x = y \Rightarrow x + y = 3\}$,
- $R_4 = \{[x, y] \in M \times M; x < y \Leftrightarrow x = y\}$,
- $R_5 = \{[x, y] \in M \times M; x = 2 \vee y > x + 2\}$,
- $R_6 = \{[x, y] \in M \times M; x < y \wedge x | y\}$.

Zapište tyto relace výčtem prvků, určete jejich kartézské a uzlové grafy, určete jejich vlastnosti.

Zobrazení z množiny do množiny, typy zobrazení

- Necht' **R** je relace z množiny A do množiny B splňující vlastnosti: Ke každému prvku $a \in A$ existuje nejvýše jeden prvek $b \in B$ takový, že $[a, b] \in R$. Tato relace se nazývá **zobrazení z množiny A do množiny B**. Značíme $R: A \rightarrow B$.

Necht' **R** je zobrazení z množiny A do množiny B.

IMAk13 Aritmetika 1 (podzim 2023)

Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.

- Jestliže $[a,b] \in \mathbf{R}$, pak prvek $a \in A$ nazýváme **vzorem** prvku $b \in B$ v zobrazení \mathbf{R} ; prvek $b \in B$ nazýváme **obrazem** prvku $a \in A$ v zobrazení \mathbf{R} .
- Množina $O_1(\mathbf{R}) = \{a \in A : \text{existuje } b \in B \text{ takové, že } [a,b] \in \mathbf{R}\}$ se nazývá **definiční obor** zobrazení \mathbf{R} . Platí $O_1(\mathbf{R}) \subset A$.
- Množina $O_2(\mathbf{R}) = \{b \in B : \text{existuje } a \in A \text{ takové, že } [a,b] \in \mathbf{R}\}$ se nazývá **obor hodnot** zobrazení \mathbf{R} . $O_2(\mathbf{R}) \subset B$.

Příklad 3. Jsou dány množiny $A = \{x, y, z\}$, $B = \{a, b\}$. Rozhodněte, zda dané relace z množiny A do množiny B jsou zobrazení z A do B , případně určete definiční obor a obor hodnot zobrazení.

- $\mathbf{R}_1 = \{[x,a], [y,b], [z,a], [z,b]\}$,
- $\mathbf{R}_2 = \{[x,a], [z,b]\}$,
- $\mathbf{R}_3 = \{[x,a], [y,a], [z,a]\}$.

Rozlišujeme následující typy zobrazení \mathbf{R} :

I) Je – li $O_1(\mathbf{R}) = A \wedge O_2(\mathbf{R}) \subset B \wedge O_2(\mathbf{R}) \neq B$, nazývá se \mathbf{R} **zobrazení množiny A do množiny B**.

II) Je – li $O_1(\mathbf{R}) \subset A \wedge O_1(\mathbf{R}) \neq A \wedge O_2(\mathbf{R}) = B$, nazývá se \mathbf{R} **zobrazení z množiny A na množinu B**.

III) Je – li $O_1(\mathbf{R}) = A \wedge O_2(\mathbf{R}) = B$, nazývá se \mathbf{R} **zobrazení množiny A na množinu B**.

IV) Je – li $O_1(\mathbf{R}) \subset A \wedge O_1(\mathbf{R}) \neq A \wedge O_2(\mathbf{R}) \subset B \wedge O_2(\mathbf{R}) \neq B$, nazývá se \mathbf{R} **zobrazení z množiny A do množiny B**.

- Zobrazení \mathbf{R} z množiny A do množiny B se nazývá **prosté** právě tehdy, když relace \mathbf{R}^{-1} je zobrazení z množiny B do množiny A .
- Prosté zobrazení množiny A na množinu B nazýváme **bijektivní zobrazení** nebo také **vzájemně jednoznačné zobrazení**.

Příklad 4. Jsou dány množiny $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$. Rozhodněte, o jaký typ zobrazení se jedná a zda je toto zobrazení prosté:

- $\mathbf{R}_1 = \{[1,a], [2,c], [3,d]\}$,
- $\mathbf{R}_2 = \{[1,a], [2,c], [3,d], [4,a]\}$,
- $\mathbf{R}_3 = \{[2,a], [1,c], [3,b], [4,d]\}$.

Ekvivalence množin, konečné a nekonečné množiny

- Říkáme, že dvě množiny A, B jsou **ekvivalentní** právě tehdy, když existuje prosté zobrazení množiny A na množinu B . Zapisujeme $A \sim B$.

IMAk13 Aritmetika 1 (podzim 2023)

Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.

Příklad 5. Jsou dány množiny $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y, z\}$, $C = \{x, y\}$. Rozhodněte, které dvojice zadaných množin jsou ekvivalentní.

Poznámka. Relace \sim dvou množin definovaná v libovolném systému množin \mathcal{M} má vlastnosti: reflexivní, symetrická, tranzitivní. Relace \sim je tedy relací ekvivalence. Relace ekvivalence dvou množin v libovolném systému množin \mathcal{M} vytváří rozklad systému \mathcal{M} na třídy ekvivalentních množin.

Příklad 6. Je dán systém množin $\mathcal{M} = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$, kde $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{x, y\}$, $D = \{\circ, \circ, \circ, \circ\}$, $E = \{\Delta, \Delta, \Delta\}$, $F = \{*, *\}$, $G = \{\square\}$, $H = \{\odot, \odot, \odot, \odot\}$. Rozhodněte, které množiny ze systému \mathcal{M} jsou ekvivalentní.

- Množina A je **konečná** právě tehdy, když žádná vlastní podmnožina množiny A není ekvivalentní s množinou A.
- Množina B je **nekonečná** právě tehdy, když existuje alespoň jedna vlastní podmnožina množiny B, která je ekvivalentní s množinou B.

Poznámka. Množina M je **vlastní podmnožinou** množiny N právě tehdy, když $M \subset N \wedge M \neq N$.

IMAk13 Aritmetika 1 (podzim 2023)

Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.

Binární operace v množině (nová látka)

- Necht' M je libovolná neprázdná množina. **Binární operaci** \circ v množině M rozumíme zobrazení z množiny kartézského součinu $M \times M$ do množiny M .
- Jestliže v binární operaci je vzoru $[x,y] \in M \times M$ přiřazen obraz $z \in M$, píšeme:
 $x \circ y = z$; prvek $z \in M$ se nazývá **výsledek operace** \circ .

Poznámka. Označení binárních operací: $+$, $*$, \circ , \cdot , \square , ..

Příklady binárních operací ve školské matematice:

- 1) Sčítání ($+$), odčítání ($-$), násobení ($*$), dělení ($:$), umocňování, ... (pracujeme s nimi v číselných množinách).
- 2) Sjednocení (\cup), průnik (\cap), rozdíl ($-$), symetrický rozdíl (Δ) množin, ... (pracujeme s nimi v systémech množin).

Vlastnosti binárních operací:

Označení:

- \mathbb{N} - $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ - množina všech přirozených čísel
- \mathbb{N}_0 - $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ - množina všech přirozených čísel s nulou (množina všech nezáporných celých čísel)
- \mathbb{Z} - $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ - množina všech celých čísel
- \mathbb{Q} - množina všech racionálních čísel (zlomky)
- \mathbb{R} - množina všech reálných čísel

-
- Binární operace \circ v množině M , která má vlastnost, že je definována pro každou uspořádanou dvojici $[x,y] \in M \times M$, se nazývá operace **neomezeně definovaná** v množině M (zkráceně operace **definovaná na množině M**). Značíme **ND**.

Symbolicky: $(\forall x, y \in M)(\exists z \in M)[x \circ y = z]$.

-
- Binární operace \circ definovaná na množině M (je ND), se nazývá **komutativní** právě tehdy, když platí:

$$(\forall x, y \in M)[x \circ y = y \circ x].$$

Značíme **K**.

-
- Binární operace \circ definovaná na množině M , se nazývá **asociativní** právě tehdy, když platí:

$$(\forall x, y, z \in M)[(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)].$$

Značíme **A**.

-
- Necht' v množině M je definována binární operace \circ . Existuje-li prvek $e \in M$, pro který platí:

IMAk13 Aritmetika 1 (podzim 2023)

Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.

$$(\forall x \in M)[x \circ e = e \circ x = x].$$

Pak se prvek $e \in M$ nazývá **neutrálním prvkem** množiny M vzhledem k operaci \circ .
Značíme **EN**.

-
- Necht' v množině M je definována binární operace \circ a necht' e je neutrální prvek množiny M vzhledem k operaci \circ . Prvek $\bar{a} \in M$ nazýváme **inverzním prvkem** k prvku $a \in M$ v operaci \circ v množině M právě tehdy, když platí:

$$\bar{a} \circ a = a \circ \bar{a} = e.$$

Jestliže $(\forall a \in M)(\exists \bar{a} \in M)[\bar{a} \circ a = a \circ \bar{a} = e]$, řekneme, že ke každému prvku množiny M existuje prvek inverzní vzhledem k operaci \circ . Značíme **EI**.

-
- Říkáme, že binární operace \circ definovaná na množině M má vlastnost **řešitelnost základních rovnic** právě tehdy, když platí:

$$(\forall a, b \in M)(\exists x, y \in M)[a \circ x = b \wedge y \circ a = b].$$

Značíme **ZR**.

Algebraické struktury s jednou operací

- Uspořádaná dvojice (M, \circ) , kde M je neprázdná množina, ve které je definována binární operace \circ , se nazývá **algebraická struktura s jednou operací**.
- I. Algebraická struktura (M, \circ) se nazývá **grupoid** právě tehdy, když operace \circ je neomezeně definovaná v množině M (ND).
- II. Grupoid (M, \circ) , jehož operace \circ je asociativní, se nazývá **podgrupa** (ND, A).
- III. Pologrupa (M, \circ) taková, že v M existuje neutrální prvek vzhledem k operaci (M, \circ) a ke každému prvku $a \in M$ existuje prvek inverzní $\bar{a} \in M$, se nazývá **grupa** (ND, A, EN, EI).

Poznámka 6. Jestliže v případech I., II., III. je operace \circ komutativní, pak hovoříme o

- I. Komutativním grupoidu
- II. Komutativní pologrupě
- III. Komutativní grupě

IMAk13 Aritmetika 1 (podzim 2023)

Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.

Schéma k Algebraickým strukturám s jednou operací:

	Vlastnost operace \circ	Algebraická struktura
(M, \circ)	ND	Grupoid
	ND \wedge K	Komutativní grupoid
	ND \wedge A	Pologrupa
	ND \wedge A \wedge K	Komutativní pologrupa
	ND \wedge A \wedge EN \wedge EI	Grupa
	ND \wedge A \wedge EN \wedge EI \wedge K	Komutativní grupa

Určení vlastností binárních operací podle tvaru operační tabulky

Uvažujme binární operaci \circ v množině M zapsané pomocí operační tabulky, viz příklad:

Příklad 1: Je dána množina $M = \{a, b, c\}$ a operace \circ v množině M daná tabulkou. Určete vlastnosti operace \circ . Pokud existuje neutrální nebo agresivní prvek, určete je. K jednotlivým prvkům stanovte prvky inverzní, pokud existují.

\circ	a	b	c
a	b	c	a
b	c	c	b
c	a	b	c

Vysvětlivky k tabulce: $a \circ a = b$

$$b \circ c = b$$

$$c \circ a = a$$

Řešení: ND \wedge K \wedge ~~A~~ \wedge EN \wedge EI \wedge ~~ZR~~

IMAk13 Aritmetika 1 (podzim 2023)

Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.

Pravidla pro určování vlastností operace v množině dané tabulkou:

ND: Tabulka je celá vyplněná prvky množiny M

K: Prvky tabulky, která je celá vyplněná prvky množiny M , jsou souměrně rozloženy podle hlavní diagonály

A: Z tabulky obvykle nepoznáme - určujeme z definice nebo ze vztahu $\mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{ZR} \Leftrightarrow \mathbf{EI})$

EN: Alespoň jeden řádek a jeden sloupec jsou stejné jako záhlaví tabulky

EI: Každý řádek i sloupec tabulky obsahuje neutrální prvky tak, že ve všech řádcích a sloupcích existují takové, že jsou souměrně rozloženy podle hlavní diagonály.

ZR: Každý řádek i sloupec obsahuje všechny prvky množiny M

Agresivní prvek $g \in M$ poznáme tak, že v celém jemu příslušejícím řádku i sloupci se vyskytuje pouze prvek g .

Problém asociativity operace \circ

Vyjdeme ze vztahu $\mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{ZR} \Leftrightarrow \mathbf{EI})$:

1. Pokud nastane situace, že $\mathbf{EI} \wedge \mathbf{ZR}$ nebo $\mathbf{EI} \wedge \mathbf{ZR}$, pak platí, že operace \circ není asociativní, tj. \mathbf{A}
2. Pokud nastane situace, že $\mathbf{EI} \wedge \mathbf{ZR}$ nebo $\mathbf{EI} \wedge \mathbf{ZR}$, pak asociativitu operace \circ nelze určit přímo, ale je potřeba využít *Definici 4* ověřením všech možných trojic prvků z dané množiny (zdlouhavé)

Příklad 2: Je dána množina $M = \{a, b, c\}$ a operace \circ v množině M daná tabulkou. Určete vlastnosti operace \circ . Pokud existuje neutrální nebo agresivní prvek, určete je. K jednotlivým prvkům stanovte prvky inverzní, pokud existují. Určete typ algebraické struktury (M, \circ) .

1.

\circ	a	b	c
a	b	a	c
b	c	b	a
c	a	c	b

2.

\circ	a	b	c
a	c	a	a
b	a	c	b
c	a	b	c

IMAk13 Aritmetika 1 (podzim 2023)

Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.

3.

○	a	b	c
a	c	a	a
b		c	b
c	a	b	c

Algebraické struktury se dvěma operacemi

- Na množině M jsou definovány dvě binární operace \oplus a \odot . Operace \odot je **distributivní vzhledem k operaci \oplus** právě tehdy, když platí
 $(\forall x, y, z \in M)[(x \oplus y) \odot z = (x \odot z) \oplus (y \odot z)]$... pravý distributivní zákon (PDZ)
 $[z \odot (x \oplus y)] = (z \odot x) \oplus (z \odot y)$... levý distributivní zákon (LDZ).

Značíme $\odot \text{ D } \oplus$.

Nechť M je neprázdná množina, ve které jsou definovány dvě operace \oplus a \odot .

- Algebraická struktura (M, \oplus, \odot) se nazývá **polookruh** právě tehdy, když:
 - Operace \oplus je $\text{ND} \wedge \text{A} \wedge \text{K}$
 - Operace \odot je $\text{ND} \wedge \text{A}$
 - Platí $\odot \text{ D } \oplus$
- Je-li operace \oplus navíc K , pak polookruh (M, \oplus, \odot) nazýváme **komutativní polookruh**.
- Pologrupu (M, \oplus) nazýváme **aditivní pologrupa**.
- Pologrupu (M, \odot) nazýváme **multiplikativní pologrupa**.
- Polookruh (M, \oplus, \odot) , jehož aditivní pologrupa (M, \oplus) je komutativní grupou, se nazývá **okruh**.
- Je-li operace \odot navíc K , pak okruh (M, \oplus, \odot) , nazýváme **komutativní okruh**.
- Nechť (M, \oplus, \odot) je okruh. Prvky $a \neq 0, b \neq 0, a, b \in M$, pro které platí $a \odot b = 0$, se nazývají **dělitelé nuly** okruhu (M, \oplus, \odot) .
- Komutativní okruh (M, \oplus, \odot) , ve kterém neexistují dělitelé nuly, se nazývá **obor integrity**.
- Okruh (M, \oplus, \odot) , pro který platí, že $(M - \{0\}, \odot)$ je grupa, se nazývá **těleso**.
- Je-li operace \cdot navíc K , pak těleso (M, \oplus, \odot) nazýváme **komutativní těleso**.

Poznámka: Uvažujeme polookruh (M, \oplus, \odot) :

- Operace \oplus se nazývá **sčítání**. V zápise

$$a \oplus b = c$$

nazýváme prvky a, b **sčítanci**, prvek c nazýváme **součet** prvků a, b .

Neutrální prvek nazýváme **nulový prvek**, značíme 0 . Pokud k prvku a existuje prvek inverzní, nazýváme jej **opačný prvek** k prvku a , značíme $-a$. Existuje-li prvek x , pro který platí

IMAk13 Aritmetika 1 (podzim 2023)

Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.

$b \oplus x = a$, nazýváme jej **rozdíl** prvků a, b a zapisujeme

$$x = a \ominus b.$$

V tomto zápise prvek a nazýváme **menšeneč**, prvek b nazýváme **menšitel**. Pokud existuje prvek $\ominus b$, pak platí $x = a \ominus b = a \oplus (\ominus b)$. Operace \ominus se nazývá **odčítání**.

- Operace \odot se nazývá **násobení**. V zápise

$$a \odot b = c$$

nazýváme prvek a , resp. b **1. činitel**, resp. **2. činitel**, prvek c nazýváme **součin** prvků a, b . Neutrální prvek nazýváme **jednotkový prvek**, značíme 1. Pokud k prvku a existuje prvek inverzní, nazýváme jej **převrácený prvek** k prvku a , značíme $\frac{1}{a}$ nebo též a^{-1} . Existuje-li pro prvky $a, b \neq 0$ prvek x , pro který platí $b \odot x = a$, nazýváme jej **podíl** prvků a, b a zapisujeme

$$x = a \oslash b \text{ nebo taky } x = \frac{a}{b}.$$

V tomto zápise prvek a nazýváme **dělenec (čítatel)**, prvek b nazýváme **menšitel (jmenovatel)**. Pokud existuje prvek $\frac{1}{b}$, resp. b^{-1} , pak platí

$$x = a \oslash b = \frac{a}{b} = a \odot \frac{1}{b} = a \odot b^{-1}. \text{ Operace } \oslash \text{ se nazývá } \mathbf{d\acute{e}lení}.$$

Podíl prvků pro $b = 0$ nedefinujeme, neboť:

- v případě, že $a = 0$, je řešením rovnice $0 \odot x = 0$ každý prvek množiny M .
- v případě, že $a \neq 0$, rovnice $0 \odot x = a$ nemá řešení v množině M .

Případ 1. vede k tomu, že by dělení nebylo operací!

IMAk13 Aritmetika 1 (podzim 2023)

Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.

Schéma k Algebraickým strukturám se dvěma operacemi:

	operace a vlastnosti	algebraická struktura
(M, \oplus , \odot)	\oplus ND \wedge K \wedge A	Polookruh (komutativní)
	\odot ND \wedge (K) \wedge A	
	\odot D \oplus	
	\oplus ND \wedge K \wedge A \wedge EN \wedge EI	Okruh (komutativní)
	\odot ND \wedge (K) \wedge A	
	\odot D \oplus	
	\oplus ND \wedge K \wedge A \wedge EN \wedge EI	Komutativní okruh bez dělitelů nuly = Obor integrity
	\odot ND \wedge K \wedge A	
	\odot D \oplus	
	Neexistují $a \neq 0, b \neq 0, a, b \in M$, pro které platí $a \odot b = 0$.	
	\oplus ND \wedge K \wedge A \wedge EN \wedge EI	Těleso (komutativní)
	\odot ND \wedge (K) \wedge A	
\odot D \oplus		
(M - {0}, \odot) je grupa, tj. na množině M - {0} je operace		
\odot ND \wedge A \wedge EN \wedge EI		

Příklady algebraických struktur číselných množin se dvěma operacemi

Příklad: Uvažujme binární operace obyčejné sčítání $+$ a obyčejné násobení \cdot v číselných množinách:

1. $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ **komutativní polookruh s jednotkovým prvkem**

$$+ \quad \dots \underline{ND} \wedge \underline{K} \wedge \underline{A} \wedge \underline{EN} \wedge \underline{EI}$$

$$\cdot \quad \dots \underline{ND} \wedge \underline{K} \wedge \underline{A} \wedge \underline{EN} \wedge \underline{EI}$$

$$e = 1$$

$$\cdot \text{ D } +$$

IMAk13 Aritmetika 1 (podzim 2023)

Mgr. Jitka Panáčková, Ph.D.

2. $(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$ **komutativní polookruh s nulovým ($e = 0$) a jednotkovým prvkem ($e = 1$)**

$$+ \quad \dots \underline{ND} \wedge \underline{K} \wedge \underline{A} \wedge \underline{EN} \wedge \underline{EI}$$

$$e = 0$$

$$\cdot \quad \dots \underline{ND} \wedge \underline{K} \wedge \underline{A} \wedge \underline{EN} \wedge \underline{EI}$$

$$e = 1$$

$$\cdot D +$$

3. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ **komutativní okruh bez dělitelů nuly = obor integrity**

$$+ \quad \dots \underline{ND} \wedge \underline{K} \wedge \underline{A} \wedge \underline{EN} \wedge \underline{EI}$$

$$e = 0$$

$$\cdot \quad \dots \underline{ND} \wedge \underline{K} \wedge \underline{A} \wedge \underline{EN} \wedge \underline{EI}$$

$$e = 1$$

$$\cdot D +$$

V množině \mathbb{C} neexistují dělitelé nuly.

4. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ **komutativní těleso**

$$+ \quad \dots \underline{ND} \wedge \underline{K} \wedge \underline{A} \wedge \underline{EN} \wedge \underline{EI}$$

$$e = 0$$

$$\cdot \quad \dots \underline{ND} \wedge \underline{K} \wedge \underline{A} \wedge \underline{EN} \wedge \underline{EI}$$

$$e = 1$$

$$\cdot D +$$

$(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ komutativní grupa, tzn. na množině $\mathbb{Q} - \{0\}$ a na množině $\mathbb{R} - \{0\}$ má operace \cdot vlastnosti: $\underline{ND} \wedge \underline{K} \wedge \underline{A} \wedge \underline{EN} \wedge \underline{EI}$