

$\pi$

# IMAk13 Matematika 3

2. setkání

## Binární operace a jejich vlastnosti - opakování

RNDr. Milena Vaňurová, CSc.

# Binární operace v množině a jejich vlastnosti

*Definice:* Necht'  $M$  je libovolná neprázdná množina. **Binární operací**  $\circ$  v množině  $M$  rozumíme zobrazení z množiny  $M \times M$  do množiny  $M$ .

Např. Sčítání v množině  $N_0$  všech přirozených čísel s nulou je zobrazení  $N_0 \times N_0$  do  $N_0$ .

Místo zápisu  $[[a,b],c] \square +$  obvykle píšeme  $a + b = c$  ,  
 $[[2,3],5] \square +$  píšeme  $2 + 3 = 5$

Operace zapisujeme do tzv. operační tabulky (v případě množiny s malým počtem prvků) nebo je definujeme předpisem (např. v nekonečných číselných množinách)

## Vlastnosti binárních operací v množině M

$$\text{ND} \quad (\forall x, y \in M)(\exists z \in M) [x \circ y = z]$$

$$\text{A} \quad (\forall x, y, z \in M) [(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)]$$

$$\text{K} \quad (\forall x, y \in M) [x \circ y = y \circ x]$$

$$\text{EN} \quad (\exists e \in M)(\forall x \in M) [x \circ e = e \circ x = x]$$

$$\text{EI} \quad (\forall x \in M)(\exists \bar{x} \in M) [x \circ \bar{x} = \bar{x} \circ x = e]$$

$$\text{ZR} \quad (\forall a, b \in M)(\exists x, y \in M) [a \circ x = b \wedge y \circ a = b]$$

Zjistěte vlastnosti binární operace  $\circ$  v množině všech celých čísel, která je zadána předpisem:  $a \circ b = a + b - 1$

ND  $(\forall x, y \in M)(\exists z \in M) [x \circ y = z]$

Pro libovolná celá čísla  $a, b$  vždy najdeme jejich součet zmenšený o 1 a bude to celé číslo

K  $(\forall x, y \in M) [x \circ y = y \circ x]$

Zjišťujeme, zda  $a \circ b = b \circ a$ , pro libovolná celá čísla  $a, b$ :

$$L: a \circ b = a + b - 1 \quad P: b \circ a = b + a - 1 \quad L = P$$

A  $(\forall x, y, z \in M) [(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)]$

Zjišťujeme, zda  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ , pro libovolná celá čísla  $a, b, c$ :

$$L: (a \circ b) \circ c = (a + b - 1) \circ c = (a + b - 1) + c - 1 = a + b + c - 2$$

$$P: a \circ (b \circ c) = a \circ (b + c - 1) = a + (b + c - 1) - 1 = a + b + c - 2 \quad L = P$$

EN  $(\exists e \in M)(\forall x \in M) [x \circ e = e \circ x = x]$

Zjišťujeme, zda existuje celé číslo  $e$  takové, že pro každé celé číslo  $a$  platí:  $a \circ e = a$  a  $e \circ a = a$ . Protože operace  $\circ$  je K, stačí řešit jen jednu část, např.  $a \circ e = a$  (řešíme rovnici s neznámou  $e$ )

$$a + e - 1 = a$$

$$e = 1 \quad \text{neutrálním prvkem je číslo 1}$$

**Zjistěte vlastnosti binární operace  $o$  v množině všech celých čísel, která je zadána předpisem:  $a o b = a + b - 1$**

---

EI  $(\forall x \in M)(\exists \bar{x} \in M) [x o \bar{x} = \bar{x} o x = e]$

Zjišťujeme, zda ke každému celému číslu  $a$  existuje k němu inverzní  $\bar{a}$  tak, že

$$a o \bar{a} = e$$

$$a + \bar{a} - 1 = 1 \quad (\text{řešíme rovnici s neznámou } \bar{a} )$$

$$\bar{a} = 2 - a \quad \text{v množině } \mathbb{C} \text{ existuje pro každé } a$$

ZR  $(\forall a, b \in M)(\exists x, y \in M) [a o x = b \wedge y o a = b]$

Zjišťujeme, zda pro libovolná celá čísla  $a, b$ , jsou řešitelné základní rovnice, tj., existují celá čísla  $x, y$ , pro která platí  $a o x = b$  a  $x o a = b$ .

Protože operace  $o$  je komutativní, je  $x = y$  a stačí řešit jednu rovnici:

$$a o x = b$$

$$a + x - 1 = b$$

$$x = b - a + 1 \quad \text{najdeme vždy k libovolným } a, b \text{ celým.}$$

Algebraická struktura  $(\mathbb{C}, o)$  je komutativní grupa.

Zjistěte vlastnosti binární operace  $*$  v množině všech celých čísel dané předpisem:  
 $a * b = 2.a.b$

---

ND Pro libovolná celá čísla  $a, b$  vždy najdeme součin  $2.a.b$  a bude to celé číslo

K Zjišťujeme, zda  $a * b = b * a$ , pro libovolná celá čísla  $a, b$ :

$$L: a * b = 2.a.b \quad P: b * a = 2.b.a \quad L = P$$

A Zjišťujeme, zda  $(a * b) * c = a * (b * c)$ , pro libovolná celá čísla  $a, b, c$ :

$$L: (a * b) * c = (2.a.b) * c = 2 . 2.a.b . c = 4.a.b.c$$

$$P: a * (b * c) = a * 2.b.c = 2.a . 2.b.c = 4.a.b.c \quad L = P$$

EN Zjišťujeme, zda existuje celé číslo  $e$  takové, že pro každé celé číslo  $a$  platí:

$a * e = a$  a také  $e * a = a$ . Protože operace  $*$  je K, stačí řešit jen jednu část,

např.  $a * e = a$  (vlastně řešíme rovnici s neznámou  $e$ )

$$2.a.e = a$$

$e = a/2a$ , což není celé číslo, proto  $\nexists \mathbb{N}$  - neutrální prvek v  $C$  neexistuje

EI neplatí, protože neex. neutrální prvek

**Zjistěte vlastnosti binární operace  $*$  v množině všech celých čísel  $a * b = 2.a.b$**

---

ZR Zjišťujeme, zda pro libovolná celá čísla  $a, b$ , jsou řešitelné základní rovnice, tj., existují celá čísla  $x, y$ , pro která platí  $a * x = b$  a  $x * a = b$ .

Protože operace  $*$  je komutativní, je  $x = y$  a stačí řešit jednu rovnici:

$$a * x = b$$

$$2.a.x = b$$

$$x = b/2a \quad \text{toto číslo není vždy z množiny celých čísel, proto } \mathbb{Z}\mathbb{R}$$

Algebraická struktura  $(\mathbb{C}, *)$  je komutativní polorupa, která není grupou.