IMAk13 Matematika 3

1. konzultace

Binární relace z A do B

Kartézský součin množin A x B

je množina všech uspořádaných dvojic, kde 1. složka je z množiny A a 2. složka z množiny B.

Binární relace z množiny A do množiny B

je kterákoliv množina R, která je podmnožinou kartézského součinu A x B.

První obor relace $O_1(R)$

je množina všech prvních složek uspořádaných dvojic z relace R.

Druhý obor relace $O_2(R)$

je množina všech prvních složek uspořádaných dvojic z relace R.

Zobrazení z A do B

Relace R z množiny A do množiny B se nazývá **zobrazením z A do B**, právě když ke každému prvku *a* z množiny A existuje nejvýše jeden prvek *b* z množiny B, takový, že platí $[a,b] \in R$.

(Tedy každý prvek z množiny A se může vyskytnout jako první složka uspořádané dvojice v relaci R nejvýše jednou.)

Jestliže $[a,b] \in R$, pak prvek ***a*** nazýváme **vzorem** prvku *b* a prvek ***b*** **obrazem** prvku *a* v zobrazení R (nebo že zobrazení R přiřazuje prvku *a* prvek *b*).

Příklad:

Jsou dány množiny A, B: $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$. Rozhodněte, které z binárních relací R_1 - R_5 jsou zobrazení z A do B.

$R_1 = \{[a,1], [b,2], [d,3]\}$

$R_2 = \{[a,2], [c,1], [a,3], [b,3]\}$

$R_3 = \{[a,1], [b,2],[c, 3] [d,1]\}$

$R_4 = \{[b,3]\}$

$R_5 = \{[a,2], [c,1], [d,2], [b,3]\}$

Zobrazením jsou relace R_1, $R_{3,}$ $R_{4,}$ R_5

R_1 - prosté zobrazení z A na B

R_3 - zobrazení A na B, které není prosté

R_4 - prosté zobrazení z A do B

R_5 - zobrazení A na B, které není prosté

Vzájemně jednoznačné zobrazení (bijekce)

je prosté zobrazení celé množiny na celou množinu

Množina A je ekvivalentní s množinou B $(A \sim B)$,

právě když existuje vzájemně jednoznačné zobrazení množiny A na množinu B

Úkol:

1. Uveďte několik množin, které jsou ekvivalentní s množinou $A = \{a, b, c, d\}$.

2. Zdůvodněte, že množina $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ všech přirozených čísel je ekvivalentní s množinou $S = \{2, 4, 6, \dots\}$ všech sudých čísel.

Binární relace v množině, vlastnosti

Binární relace v množině M.

je kterákoliv podmnožina kartézského součinu M x M.

Znároznění binárních relací

Uzlový graf

Kartézský graf

Binární relace v množině, vlastnosti

Binární relace R v množině M je **reflexivní** právě tehdy, když
$(\forall x \in M)([x,x] \in R)$,
tzn. obsahuje všechny uspořádané dvojice [x,x], kde $x \in M$

Binární relace R v množině M je **antireflexivní** právě tehdy, když
$(\forall x \in M)([x,x] \notin R)$
tzn. neobsahuje žádnou uspořádanou dvojici typu [x,x], kde $x \in M$.

Binární relace R v množině M je **symetrická** právě tehdy, když
$(\forall x,y \in M)([x,y] \in R \Rightarrow [y,x] \in R)$,
tzn. s každou uspořádanou dvojicí [x,y] obsahuje i dvojici [y,x].

Binární relace R v množině M je **antisymetrická**, právě tehdy, když
$(\forall x,y \in M)((x \neq y \wedge [x,y] \in R) \Rightarrow [y,x] \notin R)$
tzn. s žádnou dvojicí [x,y] různých prvků neobsahuje dvojici [y,x].

Binární relace v množině, vlastnosti

Binární relace R v množině M je **tranzitivní** právě tehdy, když
$(\forall x,y,z \in M)\ (([x,y] \in R\ \wedge\ [y,z] \in R) \Rightarrow [x,z] \in R)$,

tzn. jestliže se v relaci vyskytují „na sebe navazující dvojice“ (tj. druhá složka první dvojice je první složkou druhé dvojice), pak musí relace obsahovat i dvojici, jejíž první složkou je 1. složka z první dvojice a druhou složkou je 2. složka z druhé dvojice.

Binární relace R v množině M je **souvislá** právě tehdy, když
$(\forall x,y \in M)\ (x \neq y \Rightarrow ([x,y] \in R\ \vee\ [y,x] \in R))$
tzn. každé dva různé prvky z množiny M musí být „spolu v relaci“.

Binární relace ekvivalence a rozklad množiny

Binární relaci R v množině M nazýváme **relací ekvivalence** na M, právě když

je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Každá relace ekvivalence na množině M vytváří **rozklad** této množiny, což je systém neprázdných podmnožin (tzv. tříd rozkladu) množiny M takových, že průnik každých dvou tříd je prázdná množina a sjednocení všech tříd rozkladu tvoří množinu M.

Jinak lze také říci, že říci, že **rozklad** množiny M je systém neprázdných podmnožin (tzv. tříd rozkladu) množiny M takových, že každý prvek množiny M patří právě do jedné z těchto tříd.

Uspořádání v M

Binární relace U v množině M je

uspořádání (částečné) v M, právě když je AS a T;

lineární uspořádání v M, právě když je AS a T a SO;

ostré lineární uspořádání v M, právě když je AS a T a SO a AR.

Úkol

Rozhodněte, jaké vlastnosti mají následující binární relace v množině M = {a, b, c, d}

R_1 = {[c,b], [b,c], [a,a], [b,b], [c,c], [d,d]}

R_2 = {[a,b], [c,d], [a,a], [b,b]}

R_3 = {[a,b], [d,c],[b,d],[a,c], [a,d], [b,c]}

R_4 = {[c,b], [b,c],[b,a]}

R_5 = {[a,a], [b,b], [c,c], [c,b], [b,c],[b,a],[a,b],[a,c], [c,a], [d,d]}

R_6 = {[c,a], [d,b]}

R_7 = {[a,a]}

Cvičení

3. Rozhodněte o vlastnostech následujících relací:

a) rovnost v množině přirozených čísel

b) relace „být menší“ v množině přirozených čísel

c) relace „být podmnožinou“ v libovolném systému množin

d) kolmost přímek v množině všech přímek roviny

e) rovnoběžnost přímek v množině všech přímek roviny

f) shodnost úseček v množině všech úseček roviny

g) relace „být sourozencem“ v množině lidí

h) relace „být otcem“ ve vaší rodině

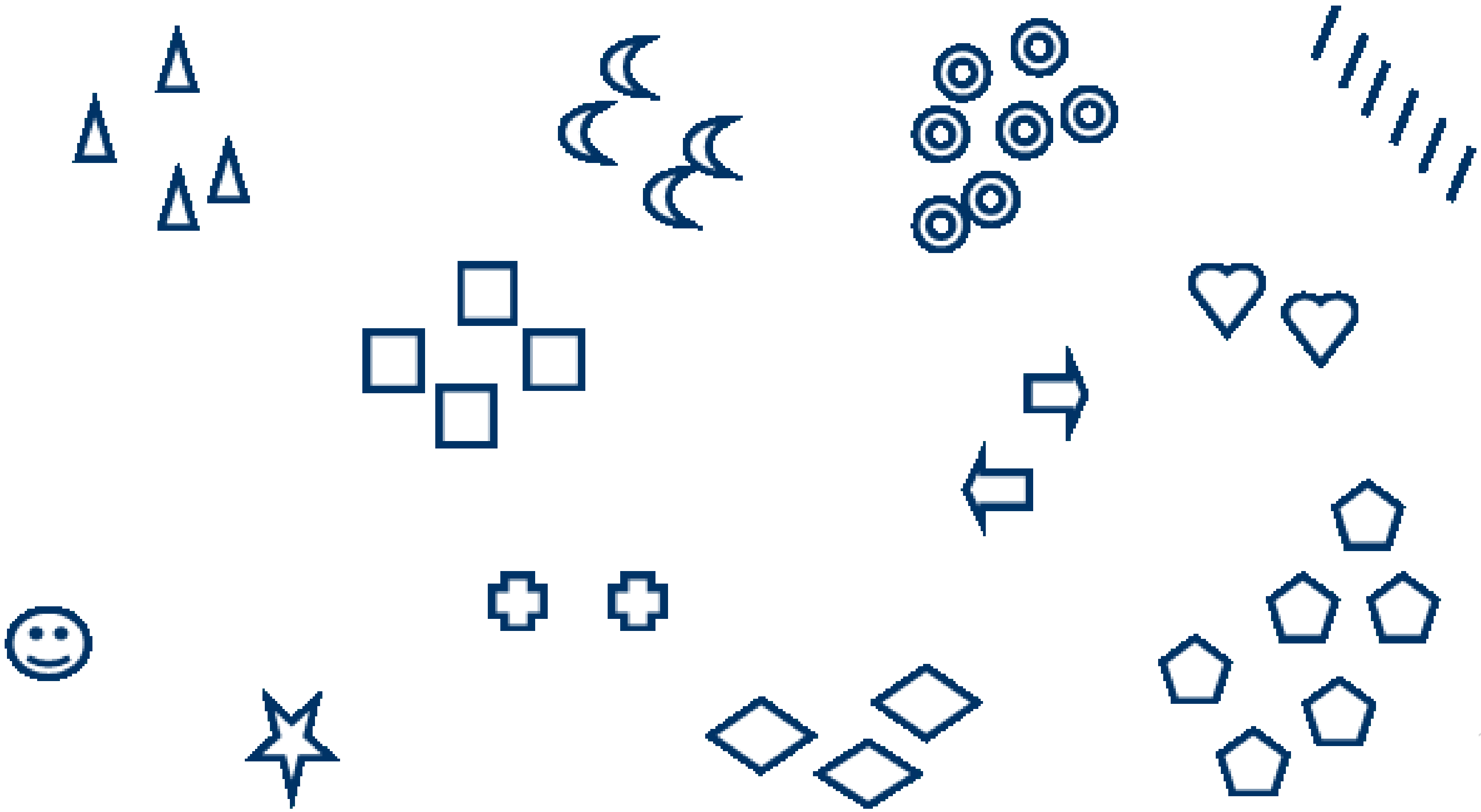
i) relace „narodit se ve stejném měsíci“ v množině lidí v této místnosti

j) relace „dávat stejný zbytek při dělení číslem 3“ v množině přirozených čísel.

Pokud je některá z výše uvedených relací relace ekvivalence, určete příslušný rozklad množiny.

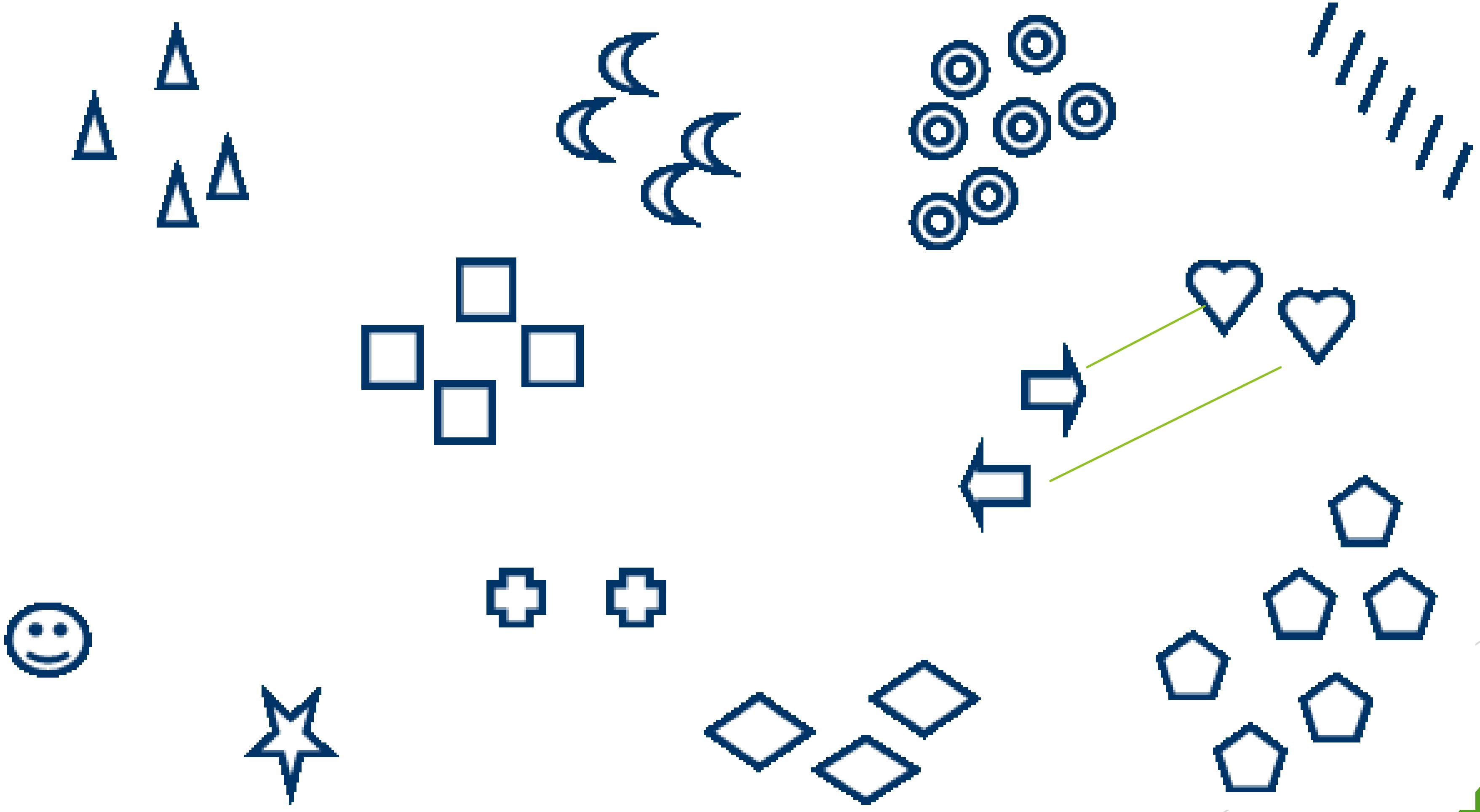
Kardinální čísla

Rozhodněte, které množiny tvarů jsou navzájem ekvivalentní.



Kardinální čísla

Rozhodněte, které množiny tvarů jsou navzájem ekvivalentní.



Kardinální čísla

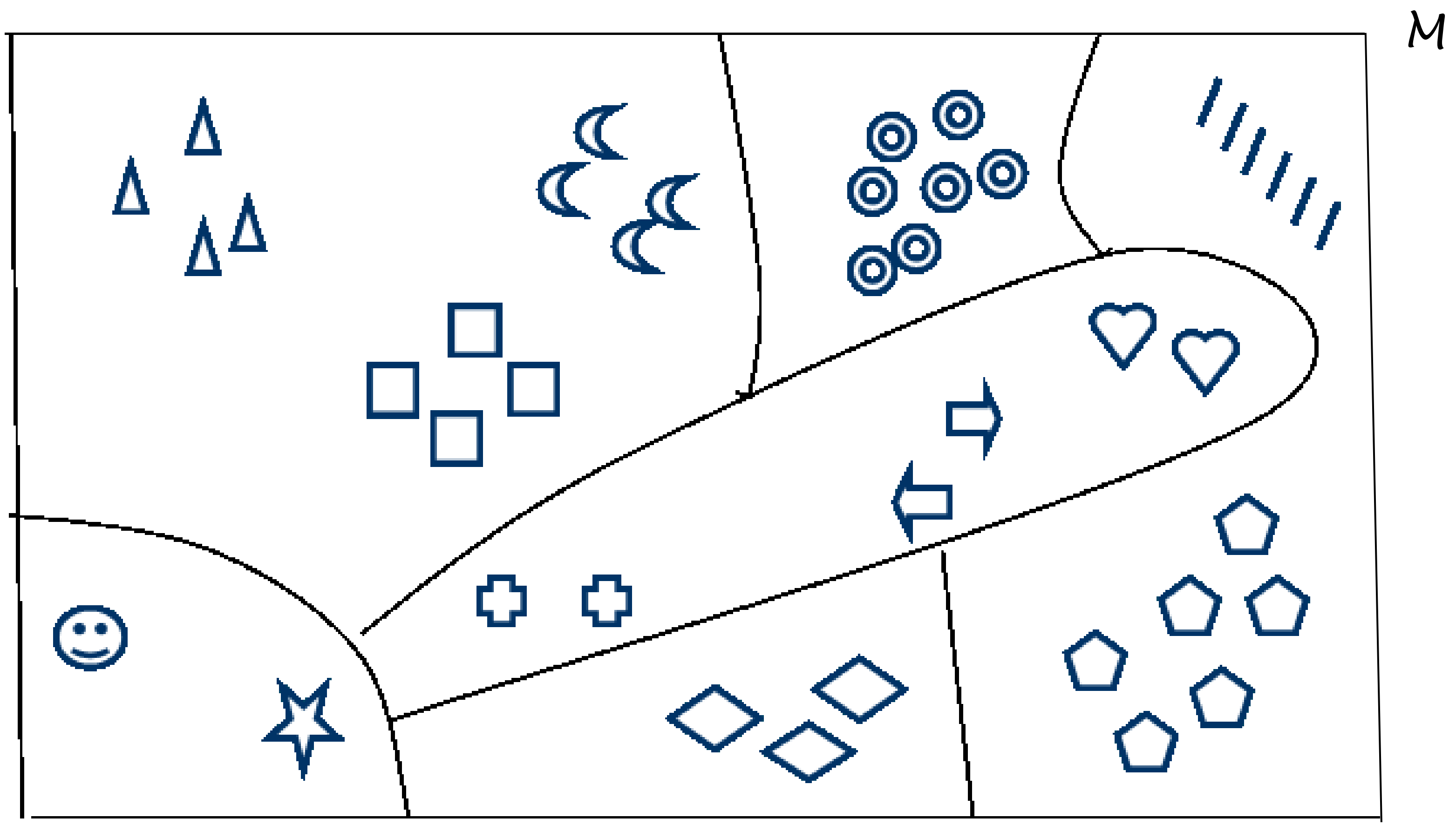
Ekvivalence množin je binární relace na systému množin, je reflexivní, symetrická a tranzitivní, je to tedy ***relace ekvivalence***.

Vytváří rozklad zadaného systému množin na třídy (podmnožiny) navzájem ekvivalentních množin.

(Vyznačte v obrázku tento rozklad.)

Třídy rozkladu se nazývají **kardinální čísla**.

Kardinální čísla

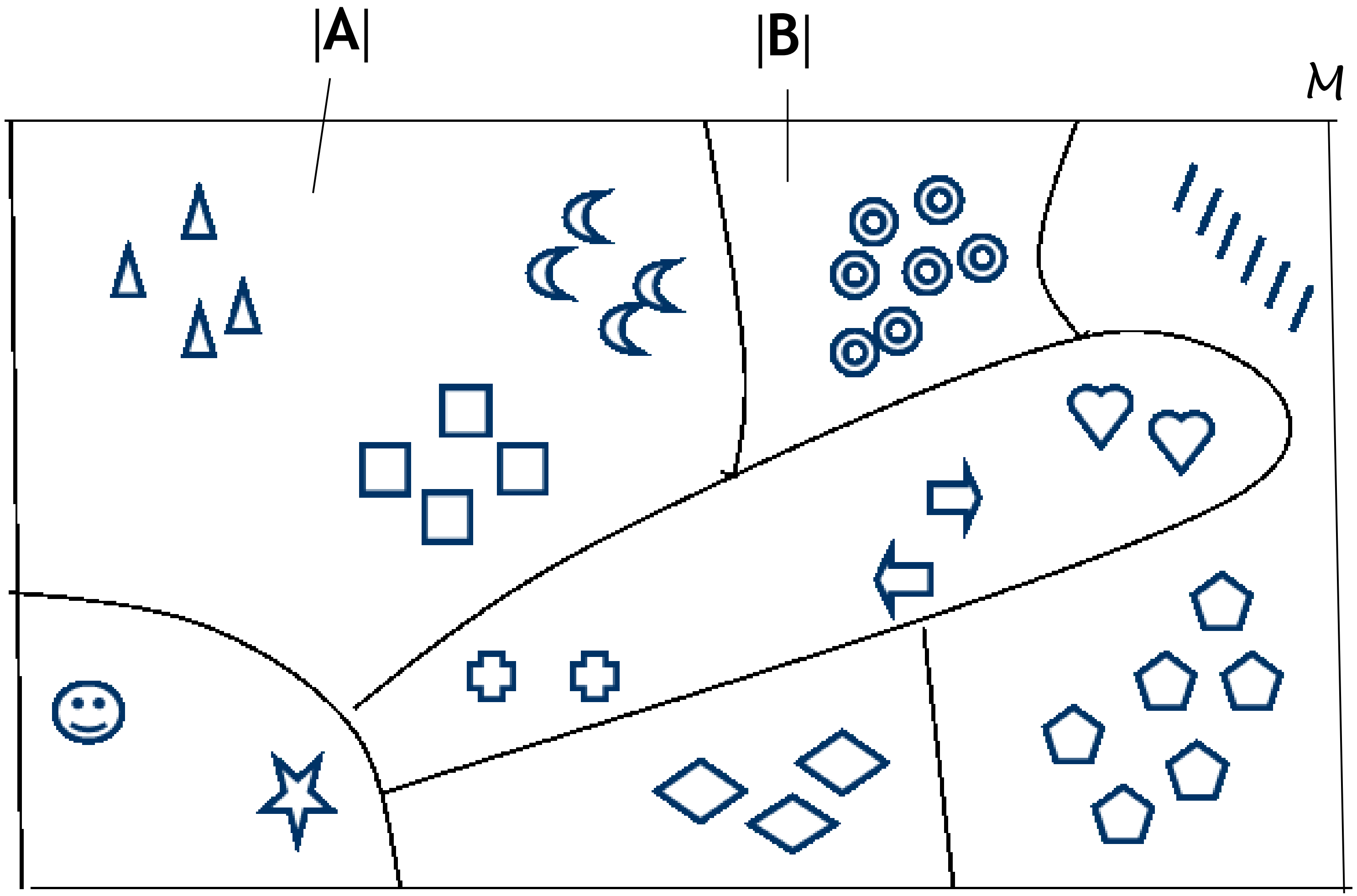


Kardinální čísla

Kardinální číslo množiny A (ozn. $|A|$) z neprázdného systému množin M je třída, do které patří množina A a všechny množiny ze systému množin M, které jsou s množinou A ekvivalentní.

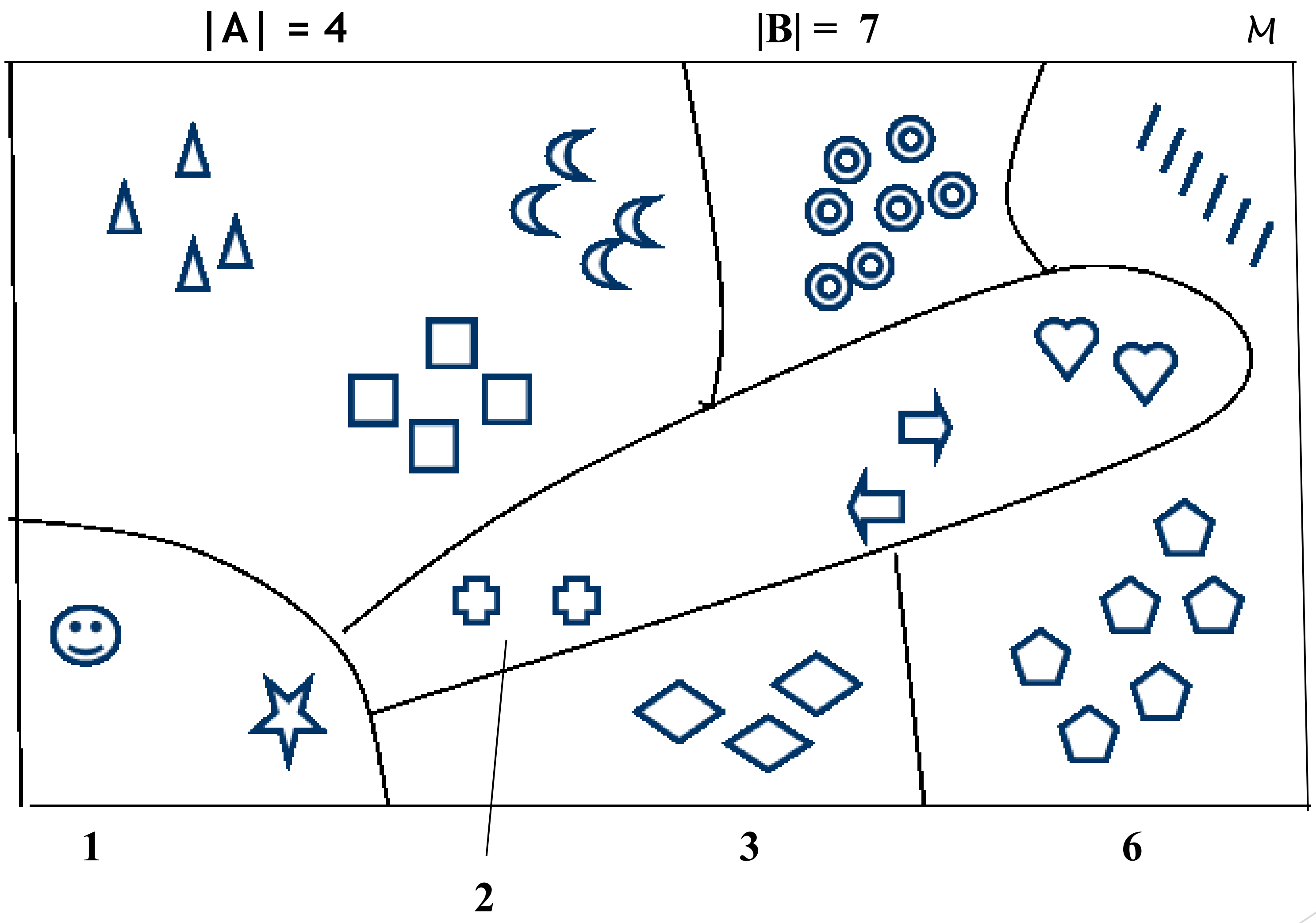
Kardinální čísla jsou tedy třídy navzájem ekvivalentních množin. Místo pojmu „kardinální číslo“ se též užívá pojem „mohutnost množiny“, což vystihuje společnou vlastnost navzájem ekvivalentních množin.

Kardinální čísla



Přirozená čísla jako kardinální čísla

Kardinální čísla konečných množin jsou **přirozená čísla.**



Nerovnost mezi kardinálními čísly

Kardinální číslo množiny A **je menší než** kardinální číslo množiny B, píšeme $|\mathbf{A}| < |\mathbf{B}|$ právě když množina A je ekvivalentní s vlastní podmnožinou množiny B a $|A| \neq |B|$.

Připomeňte si, jak se učí děti v 1. roč. ZŠ porovnávat přirozená čísla:

O ———— ×
O ———— ×
O ———— ×
O O ———— ×

5 > 4

Sčítání kardinálních čísel

Jestliže pro množiny A, B ze systému množin M platí $A \cap B = \emptyset$, pak **součtem kardinálních čísel |A|, |B|** rozumíme kardinální číslo sjednocení množin A, B,

tj. $|\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| = |\mathbf{A} \cup \mathbf{B}|$

Sčítání v 1. ročníku ZŠ:

o o   o o o

$$\mathbf{2} + \mathbf{3} = \mathbf{5}$$

Vlastnosti sčítání kardinálních čísel: ND, A, K, EN

Kardinální číslo prázdné množiny |{}|

Násobení kardinálních čísel

Součinem kardinálních čísel $|\mathbf{A}|, |\mathbf{B}|$ rozumíme kardinální číslo kartézského součinu množin A, B, tj. $|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$.

Vlastnosti násobení kardinálních čísel: ND, A, K, EN

Kardinální číslo jednoprvkové množiny - $|\{o\}|$

Úkoly

1. Jsou dány množiny A = { a, b, c } , B = {1, 2, 3, 4, 5} a C = { c, d } .

a) Porovnejte kardinální čísla množin A a B a své tvrzení zdůvodněte podle definice nerovnosti mezi kardinálními čísly.

b) Sečtěte kardinální čísla množin A a B.

c) Sečtěte kardinální čísla množin A a C.

d) Vynásobte kardinální čísla množin A a B.