IMAk13 Matematika 3

3. konzultace

Celá čísla

Konstrukce (C, +, .)

Na kartézském součinu NxN definujeme binární relaci $\sim$ (tzv.„ekvivalenci uspořádaných dvojic přirozených čísel“):

$$[a,b] \sim [c,d] \quad \Leftrightarrow \quad a + d = b + c$$

Tato relace je reflexivní, symetrická a tranzitivní na množině NxN (dokažte).
Je tedy relací ekvivalence na NxN a vytváří rozklad množiny NxN na třídy navzájem ekvivalentních dvojic přirozených čísel.

Rozklad množiny NxN vytvořený relací $\sim$ nazýváme **množinou všech celých čísel**, ozn. **C**.
Třídy rozkladu nazýváme **celá čísla**.

Celá čísla jsou tedy třídy navzájem ekvivalentních dvojic přirozených čísel.

- N x N = {[0,0], [0,1], [0,2], [0,3], ………, [0,25], …………….. ,

  [1,0], [1,1], [1,2], [1,3], ………,

  [2,0], [2,1], [2,2], ………….. ,

  [3,0], [3,1], [3,2], ……………. ,

  ……. }

  [a,b] ~ [c,d] ⇔ a + d = b + c

  [2,0] ~ [3,1] ~ [19,17] ~

  A = {[2,0] , [3,1], [4,2], [5,3], … [19,17] …….. } **= [2,0]** = **[3,1]**

  B = {[0,4] , [1,5], [2,6], …, [101,105] …….. } **= [0,4]** = **[3,7]**

Sčítání a násobení celých čísel:

Nechť celá čísla A, B jsou reprezentována uspořádanými dvojicemi [a,b], [c,d], tj.

A = $[a,b]$ a B = $[c,d]$. Pak

A + B = $[a,b] + [c,d] = [a+c, b+d]$

A · B = $[a,b] \cdot [c,d] = [ac+bd, ad+bc]$

Součet ani součin celých čísel nezávisí na volbě reprezentantů.

A = {[2,0] , [3,1], [4,2], [5,3], … [19,17] …….. } **= [2,0]** = **[3,1]**

B = {[0,4] , [1,5], [2,6], …, [101,105] …….. } **= [0,4]** = **[5,9]**

A + B = [3,1] + [5,9] = [3+5,1+9] = [8,10] = [2,4] = [0,2] [8,10] ~ [2,4] ~ [0,2]

A . B = **[3,1] . [5,9] = [3.5+1.9 , 3.9+1.5] = [24,32]**
= [2,0] . [0,4] = [2.0+0.4 , 2.4+0.0] = [0,8] [24,32] ~ [0,8]

Algebraická struktura **(C, +, .) je obor integrity s jednotkovým prvkem.**

Vlastnosti (C, + , .) :
\+ : ND, A, K, ZR, EN, EI
. : ND, A, K, EN
. D +
neexistují vlastní dělitelé nulového prvku

Nulový prvek: $\mathbf{O} = [x \dot{,} x] = [0 \dot{,} 0] = \{[0,0], [1,1], [2,2], \ldots \}$

Jednotkový prvek: $\mathbf{J} = [x+1 \dot{,} x] = [1 \dot{,} 0] = \{[1,0], [2,1], [3,2], \ldots \}$

Opačné číslo k celému číslu $A = [a \dot{,} b]$: $-A = [b \dot{,} a]$

Rozdíl A – B dvou celých čísel A, B je celé číslo X, pro které platí A = B + X.
Je-li $A = [a \dot{,} b]$, $B = [c \dot{,} d]$, je $X = [a + d \dot{,} b + c]$.

Př. Vypočítejte **X** = **[x,y]** z rovnice A = B . X, je-li **A** = **[9,1], B = [5,7]**

A = B . X

[9,1] = [5,7] . [x,y]

[9,1] = [5.x + 7.y, 5.y + 7.x] *na L a P straně je totéž celé číslo, tzn. příslušné dvojice jsou ekvivalentní*

[9,1] ~ [5.x + 7.y, 5.y + 7.x]

9 + 5.y + 7.x = 1 + 5.x + 7.y

8 + 2.x = 2.y

4 + x = y *X je reprezentováno usp. dvojicemi, kde druhá složka je o 4 větší než první složka*

X = **[0,4] = [1,5] = [x,x+4]**

Zk.: L = **[9,1]**

P = **[5,7] . [0,4] = [5.0 + 7.4, 5.4 + 7.0] = [28, 20]**

L = P protože [9,1] ~ [28,20] *9 + 20 = 1 + 28*

Př. Vypočítejte $\mathbf{X} = [\mathbf{x},\mathbf{y}]$ z rovnice $A = B \,.\, X$, je-li $\mathbf{A} = [\mathbf{9},\mathbf{0}]$, $\mathbf{B} = [\mathbf{5},\mathbf{7}]$

$\mathbf{A} = \mathbf{B} \,.\, \mathbf{X}$

$\mathbf{[9,0] = [5,7] \,.\, [x,y]}$

$\mathbf{[9,0] = [5.x + 7.y,\ 5.y + 7.x]}$ *na L a P straně je totéž celé číslo, tzn. příslušné dvojice jsou ekvivalentní*

$[9,0] \sim [5.x + 7.y,\ 5.y + 7.x]$

$9 + 5.y + 7.x = 0 + 5.x + 7.y$

$9 + 2.x = 2.y$ *taková přirozená čísla x, y nenajdeme*

liché $\neq$ sudé **X** neexistuje

Def. Celé číslo **A = [a,b] je**

- **kladné,** právě když $a > b$ A je z C^+
- **záporné,** právě když $a < b$ A je z C^-
- **nulové**, právě když $a = b$ $A = 0$

Na základě izomorfismu algebraických struktur $(C_0^+, +, .)$ a $(N_0, +, .)$ - viz konzultace AR1

budeme dále celá čísla zapisovat takto: **[x + n, x] = n** **např. [5, 1] = 4**

[x, x + n] = -n **[1, 5] = - 4**

[x , x] = 0 **[5, 5] = 0**

Def. Celé číslo **A** je větší než celé číslo **B**, právě když **A – B** je kladné.

$$\mathbf{A > B \Leftrightarrow A - B \in C^+}$$

Absolutní hodnota celého čísla

- Absolutní hodnota celého čísla **a** je celé číslo |a|, pro které platí:

  je-li a > 0, je |a| = a ,

  je-li a = 0, je |a| = 0

  je-li a < 0, je |a| = - a *(číslo **opačné** k a)*

Dělení se zbytkem v C

Dělení se zbytkem množině celých čísel je zobrazení, které každé dvojici celých čísel a, b, $b \neq 0$ přiřazuje celá čísla q a r tak, že

$$a = b.q + r \quad , \quad \text{kde} \quad 0 \leq r < |b|$$