Kapitola 1

Shodnost

V této kapitole zavedeme další axiomatický pojem – shodnost úseček. Tento pojem je zaveden axiomy shodnosti a jeho užitím dále definujeme shodnost úhlů, shodnost trojúhelníků i pojem shodného zobrazení v rovině a v prostoru. Shodná zobrazení, pak umožní definovat pojem shodných geometrických útvarů.

1.1 Shodnost úseček a axiomy shodnosti

Jak již bylo řečeno, zavádějí axiomy shodnosti do geometrie vztah shodnosti úseček. Jsou-li AB, CD úsečky, budeme jejich shodnost zapisovat $AB \cong CD$.

$\boldsymbol{S_1}$: Je-li $AB \cong CD$, je $A \neq B$ a $C \neq D$. Pro každé dva různé body A, B platí $AB \cong BA$.

$\boldsymbol{S_2}$: Nechť AB je úsečka, CD polopřímka. Pak existuje jediný bod E polopřímky CD, pro který platí $AB \cong CE$.

$\boldsymbol{S_3}$: Je-li $AB \cong CD$ a $CD \cong EF$, pak je $AB \cong EF$.

$\boldsymbol{S_4}$: Leží-li bod C mezi body A, B, bod C' mezi body A', B' a platí-li $AC \cong A'C'$, $BC \cong B'C'$, pak platí $AB \cong A'B'$.

$\boldsymbol{S_5}$: Nechť A, B, C a A', B', K jsou dvě trojice bodů neležících v přímce a nechť $AB \cong A'B'$. Pak existuje jediný bod C' poloroviny $A'B'K$, pro který platí $AC \cong A'C'$ a $BC \cong B'C'$.

$\boldsymbol{S_6}$: Nechť A, B, C a A', B', C' jsou dvě trojice bodů neležících v přímce a nechť platí $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ a $CA \cong C'A'$. Leží-li bod P mezi body A, B, bod P' mezi body A', B' a platí-li, že $AP \cong A'P'$, je $CP \cong C'P'$.

Axiom S_1 vyjadřuje, že shodnost se týká jen dvojic různých bodů. Pro úplnost našich úvah zavedme ještě tzv. *nulovou úsečku*, což bude úsečka, jejíž krajní body splývají. Tato úsečka vyhovuje definici **??** v případě, že $A = B$. Každé dvě nulové úsečky budeme také považovat za shodné.

Užitím axiomů shodnosti se dá vcelku snadno dokázat, že relace ***shodnost dvou úseček*** je reflexivní a symetrická v množině všech úseček. Protože z axiomu S_3 je zřejmá tranzitivnost tohoto vztahu, je relace shodnost dvou úseček relací ekvivalence na množině všech úseček.

Axiomu S_2 využíváme při nanášení úsečky na danou polopřímku. Axiom S_4 je východiskem k zavedené pojmů grafický součet a grafický rozdíl úseček a násobek úsečky. Jednoznačnost přenesení trojúhelníka k dané polopřímce do dané poloroviny vyjadřuje axiom S_5 a axiom S_6 pak vyjadřuje základní vlastnost přeneseného trojúhelníka.

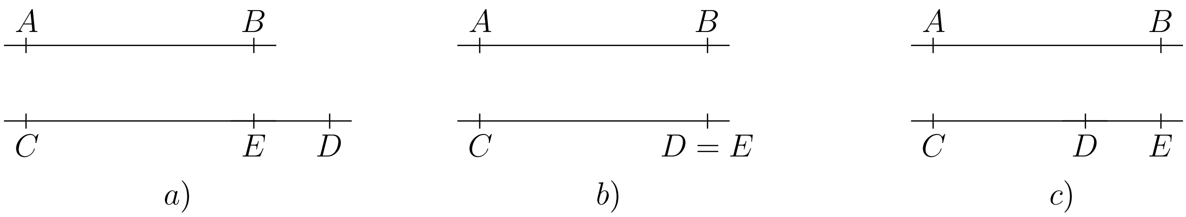
1.2 Porovnávání úseček, grafický součet a rozdíl dvou úseček, násobek úsečky

Axiomy shodnosti nám umožňují zavést porovnávání úseček a pojmy grafický součet, grafický rozdíl a grafický násobek úsečky. Tyto pojmy patří mezi základní pojmy elementární geometrie a jsou též zařazeny do učiva matematiky na 1. stupni základní školy.

Porovnávání úseček

Při porovnávání úseček AB a CD postupujeme takto: Na polopřímce CD sestrojíme bod E tak, že $CE = AB$. Leží-li bod E mezi body C, D, říkáme, že úsečka AB je menší než úsečka CD a píšeme $AB < CD$ (viz obr. 1.1a).

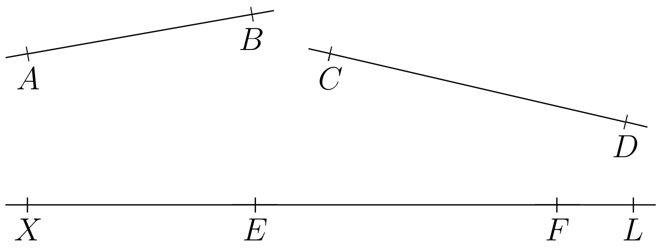
Je-li $E = D$, je $AB \cong CD$ (viz obr. 1.1b) a leží-li bod D mezi body C, E, říkáme, že úsečka AB je větší než úsečka CD a píšeme $AB > CD$ (viz obr. 1.1c).



Obr. 1.1

Grafický součet úseček

Nechť jsou dány úsečky AB a CD. Zvolme polopřímku KL a sestrojme na ní bod E tak, že $AB \cong KE$. Pak sestrojíme bod F na polopřímce opačné k polopřímce EK tak, aby $EF \cong CD$. Úsečka KF se nazývá grafický součet úseček AB a CD (viz obr. 1.2). Zapisujeme: $AB + CD = KF$.



Obr. 1.2

Grafický rozdíl úseček

Úsečku CD nazýváme grafický rozdíl úseček KF a AB právě tehdy, když úsečka KF je grafickým součtem úseček AB a CD (viz obr. 1.2).
Zapisujeme: $CD = KF - AB$.

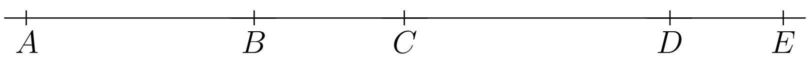
Grafický násobek úsečky

Platí-li, že $KL = AB + AB$, nazývá se úsečka KL dvojnásobkem úsečky AB, což zapisujeme $KL = 2AB$. Dále lze určit součet úseček $2AB + AB = PQ$, kde úsečku PQ nazýváme trojnásobkem úsečky AB. Je tedy:

$$\begin{aligned} AB + AB &= 2AB, \\ 2AB + AB &= 3AB, \\ 3AB + AB &= 4AB \text{ atd.} \end{aligned}$$

n-násobek úsečky AB se pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ definuje jako grafický součet $n-1$ násobku úsečky AB a úsečky AB. přitom jednonásobkem úsečky AB je úsečka AB, tj. $1AB = AB$.

Poznámka 1.1 Zavedený pojem grafického součtu dvou úseček lze snadno rozšířit na grafický součet více než dvou úseček. Např. na obrázku 1.3 je úsečka $AE = AB + BC + CD + DE$. Pak lze např. pětinásobek úsečky AB vyjádřit takto: $5AB = AB + AB + AB + AB + AB$, což odpovídá naší názorné představě.



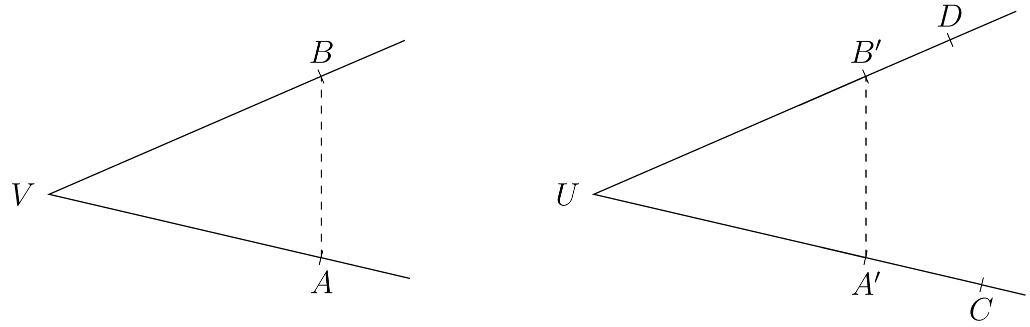
Obr. 1.3

1.3 Shodnost úhlů

Užitím shodnosti úseček budeme nyní definovat shodnost úhlů.

Definice 1.1 Konvexní úhel AVB je shodný s konvexním úhlem CUD právě tehdy, když na polopřímkách UC, UD existují takové body A', B', že platí

$$UA' \cong VA,\ UB' \cong VB \text{ a } A'B' \cong AB.$$



Obr. 1.4

Pro úplnost je třeba ještě dokázat, že shodnost konvexních úhlů AVB a CUD nezávisí na volbě bodů A, B na ramenech $\sphericalangle AVB$. Tento důkaz však nebudeme provádět.

Z definice 1.1 a vlastností vztahu shodnosti úseček vyplývá, že každé dva přímé, každé dva plné a každé dva nulové úhly jsou shodné.

Definice 1.2 Nekonvexní úhel AVB je shodný s nekonvexním úhlem CUD právě tehdy, jsou-li shodné konvexní úhly AVB a CUD.

Cvičení:

■ **1.1** Zdůvodněte, proč nelze v definici 1.1 vynechat přívlastek *konvexní* u úhlů AVB a CDU.

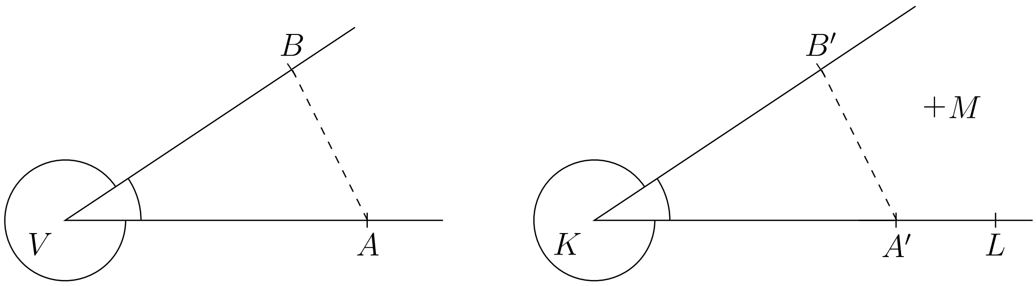
■ **1.2** Uvažujte o binární relaci *shodnost úhlů* v množině všech úhlů a určete její vlastnosti.

1.4 Porovnávání dvou úhlů, grafický součet a rozdíl dvou úhlů

Máme-li zaveden pojem shodných úhlů, můžeme definovat porovnávání, grafický součet a grafický rozdíl dvou úhlů. Tyto pojmy patří také k základním pojmům elementární geometrie a jsou zařazeny do geometrie 5. ročníku základní školy jako rozšiřující učivo.

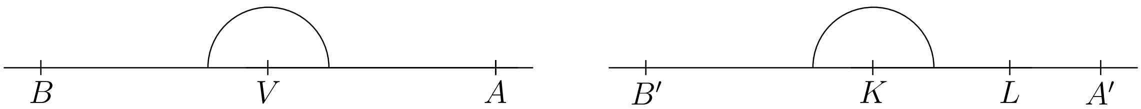
Při porovnávání dvou úhlů a při určení úhlu, který je grafickým součtem nebo rozdílem dvou úhlů, je základem úloha přenést daný úhel k dané polopřímce do dané poloroviny. Přitom jde o následující konstrukci úhlu shodného s daným konvexním úhlem:

Nechť je dán $\sphericalangle AVB$ a polorovina KLM. Na polopřímce KL sestrojíme bod A' tak, že $KA' \cong VA$. V polorovině KLM sestrojíme bod B' tak, že $KB' \cong VB$ a $AB \cong A'B'$ (viz obr. 1.5).



Obr. 1.5

Podle definice shodnosti dvou konvexních úhlů je $\sphericalangle A'KB' \cong \sphericalangle AVB$. Sestrojení $\sphericalangle A'KB'$ nazýváme *přenesením* $\sphericalangle AVB$ k polopřímce KL do poloroviny KLM. Přitom, je-li úhel AVB přímý, splývá $\sphericalangle A'KB'$ s polorovinou KLM (viz obr. 1.6).



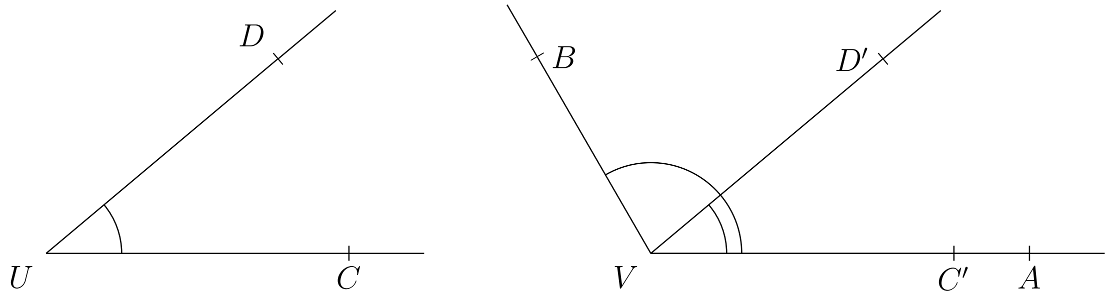
Obr. 1.6

Uvedená konstrukce nám umožňuje též přenesení nekonvexního úhlu. Na obrázku 1.5 je $\not\sphericalangle A'KB' \cong \not\sphericalangle AVB$. Konstrukce nekonvexního úhlu $A'KB'$ je shodná s konstrukcí konvexního úhlu $A'KB'$. Přenášíme-li však nekonvexní úhel, je třeba formulovat úlohu např. takto: Přenést daný úhel k dané polopřímce KL tak, aby obě jeho ramena patřila dané polorovině KLM. Tato formulace úlohy vyhovuje i pro přenášení konvexních úhlů. Přitom je však třeba mít na zřeteli, že úhel daný a přenesený musejí být shodné. Přenést daný úhel tedy především znamená sestrojit úhel shodný s daným úhlem.

Porovnávání úhlů

Při porovnávání dvou úhlů využíváme přenášení úhlů. Postupujeme při tom takto: Nechť jsou dány dva úhly $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle CUD$, které nejsou shodné. Je-li možné přenést daný úhel CUD tak, že rameno $U'C'$ přeneseného úhlu $C'U'D'$ splývá s ramenem VA úhlu AVB a průnikem tohoto přeneseného úhlu s daným úhlem AVB je tento přenesený úhel, je daný úhel CUD menší než daný úhel AVB (viz obr. 1.7). Je-li možné úhel CUD přenést tak, že rameno $U'C'$ úhlu $C'U'D'$ splývá s ramenem VA

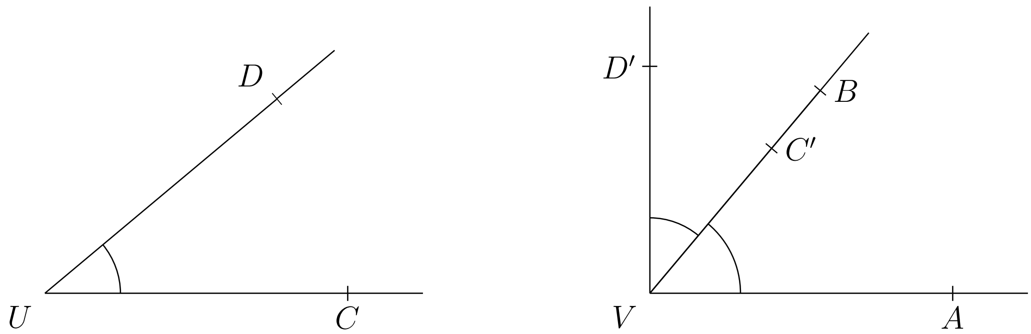
úhlu AVB tak, že $\sphericalangle AVB \cap \sphericalangle C'U'D'$ je $\sphericalangle AVB$, je úhel CUD větší než daný úhel AVB.



Obr. 1.7

Grafický součet dvou konvexních úhlů

Nechť jsou dány dva konvexní úhly $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle CUD$, z nichž žádný není plný. Sestrojíme úhel $\sphericalangle C'VD' \cong \sphericalangle CUD$ tak, že $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle C'VD'$ jsou úhly styčné. Úhel, který je sjednocením těchto dvou styčných úhlů nazýváme *grafický součet úhlů* $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle CUD$.



Obr. 1.8

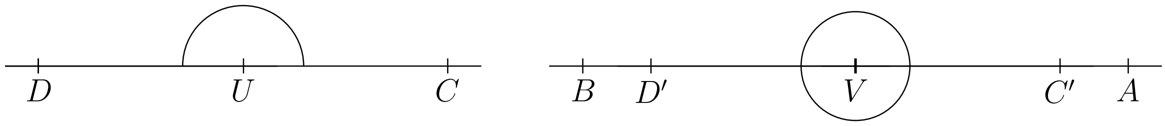
V obrázku 1.8 je úhel $\sphericalangle AVD'$ grafickým součtem $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle CUD$. Zapisujeme:

$$\sphericalangle AVD' = \sphericalangle AVB + \sphericalangle CUD.$$

Poznámka 1.2 Uvědomme si, že při sestrojení $\sphericalangle C'VD'$ jde o přenesení $\sphericalangle CUD$ k polopřímce VB do poloroviny opačné k polorovině, v níž leží $\sphericalangle AVB$.

Jsou-li oba úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle CUD$ přímé, je jejich grafickým součtem úhel plný. V obrázku 1.9 je součtem daných přímých úhlů $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle CUD$ plný úhel $\sphericalangle AVD'$.

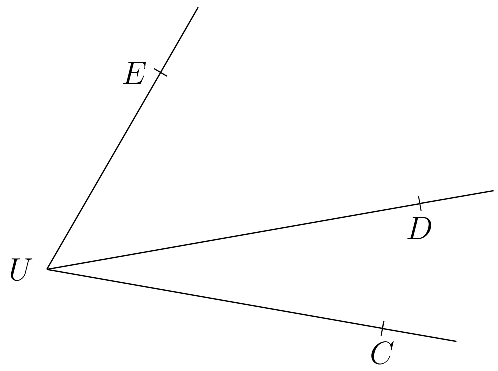
Je zřejmé, že grafickým součtem dvou konvexních úhlů nemusí být konvexní úhel.



Obr. 1.9

Grafický rozdíl dvou konvexních úhlů

Úhel $\sphericalangle DUE$ nazýváme *grafickým rozdílem* konvexních úhlů β, α právě tehdy, když $\alpha + \sphericalangle DUE = \beta$.
Zapisujeme: $\sphericalangle DUE = \beta - \alpha$ (viz obr. 1.10).



$$\sphericalangle CUD \cong \alpha$$
$$\sphericalangle CUE \cong \beta$$
$$\sphericalangle DUD \cong \beta - \alpha$$

Obr. 1.10

Poznámka 1.3 Platí-li, že $\alpha + \alpha = \beta$, nazýváme úhel β dvojnásobkem úhlu α, což zapisujeme $\beta = 2\alpha$. Analogicky jako při násobku úsečky definujeme trojnásobek úhlu α jako grafický součet dvojnásobku úhlu α a úhlu α, tj. $3\alpha = 2\alpha + \alpha$ atd.
Je zřejmé, že existence n-násobku daného úhlu není zaručena ani pro $n = 2$, $n \in \mathbb{N}$.

Cvičení:

■ **1.3** Uvažujte o operaci grafické sčítání dvou úhlů v množině všech konvexních úhlů a určete její vlastnosti.

■ **1.4** Uvažujte o operaci grafické sčítání dvou úhlů v množině všech úhlů a určete zde její vlastnosti. Jak se budou lišit vzhledem k vlastnostem operace ze cvičení ?