1.5 Shodnost trojúhelníků

Shodnost úseček umožňuje též definovat shodnost trojúhelníků.

Definice 1.3 Trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ se nazývají ***shodné*** (v tomto pořadí vrcholů), jestliže platí $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $CA \cong C'A'$.

Shodnost trojúhelníků ABC, $A'B'C'$ zapisujeme $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Dvojice vrcholů A, A'; B, B'; C, C' nazýváme vrcholy *k sobě příslušné*. Termín *k sobě příslušné* používáme též pro strany, vnitřní úhly, příčky atd. obou trojúhelníků. Definice shodnosti dvou trojúhelníků vyžaduje shodnost všech dvojic k sobě příslušných stran.

Z definice 1.1 shodnosti konvexních úhlů plyne, že také dvojice k sobě příslušných vnitřních úhlů obou trojúhelníků jsou dvojice shodných úhlů, tj. $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$, $\sphericalangle BCA \cong \sphericalangle B'C'A'$ a $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$.

V učebnicích elementární geometrie se někdy v definici shodných trojúhelníků požaduje shodnost všech k sobě příslušných stran i vnitřních úhlů. Při našem postupu však je zřejmé, že by šlo o nadbytečnou definici.

Strany a vnitřní úhly trojúhelníka (případně jejich velikosti) nazýváme *základní prvky* trojúhelníka. Ze střední školy víme, že pro zjištění shodnosti trojúhelníků stačí zjistit shodnost jen některých základních prvků těchto trojúhelníků. Tyto postačující podmínky pro shodnost dvou trojúhelníků vyjadřují věty, které nazýváme **věty o shodnosti trojúhelníků**. Stručně se označují **sss**, **sus**, **usu**, **Ssu**, přičemž věta sss je vlastně definicí 1.3. V rámci cvičení 1.5 si všechny věty důsledně zopakujte.

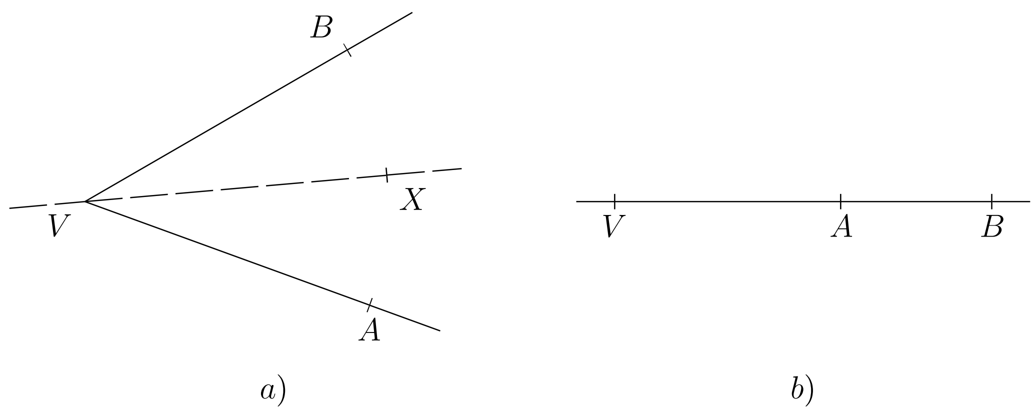
Věty o shodnosti trojúhelníků se v elementární geometrii velmi často využívají k důkazům a jsou základem pro většinu metrických vztahů elementární geometrie (viz např. důkazy vět 1.1, **??**, **??**).

1.6 Osa úhlu, pravý úhel, střed a osa úsečky

Užitím shodnosti úseček a úhlů budeme nyní definovat další geometrické pojmy: osu úhlu, pravý úhel, kolmost přímek a rovin, střed a osu úsečky. I když nejsou tyto pojmy pro absolventa střední školy nové, jde o to, abychom vyslovili a osvojili si jejich přesné definice. Tyto definice jsou také ukázkou systematického budování nových pojmů v geometrii užitím pojmů dříve zavedených.

Definice 1.4 Nechť AVB je úhel, který není plný ani nulový. Pak ***osou úhlu*** AVB nazýváme přímku VX právě tehdy, když bod X leží v téže rovině jako úhel AVB a platí, že konvexní úhel AVX je shodný s konvexním úhlem BVX (viz obr. 1.11a). Osou plného nebo nulového úhlu AVB rozumíme přímku VA, resp. VB (viz obr. 1.11b).

Definice 1.5 (1.4*) Nechť AVB je úhel, který není plný ani nulový. Pak ***osou úhlu*** AVB nazýváme polopřímku VX právě tehdy, když bod X je bodem úhlu AVB a platí, že konvexní úhel AVX je shodný s konvexním úhlem BVX. Osou nulového úhlu AVB je pak polo přímka VA, resp. VB, osou plného úhlu je polopřímka opačná k polopřímce VA, resp. VB (viz obr. 1.11b).



Obr. 1.11

Poznámka 1.4 Přímka VX v definici 1.4 je osou jak konvexního, tak i nekonvexního úhlu AVB.

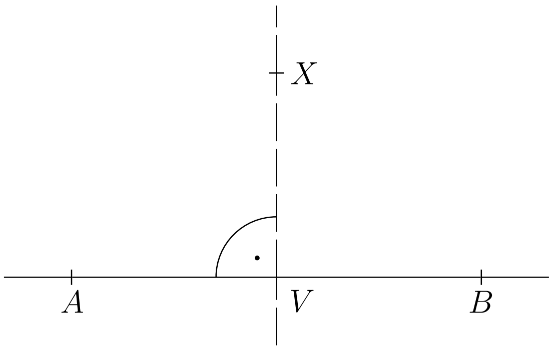
Osy konvexního a nekonvexního úhlu AVB jsou dle 1.5 navzájem opačné polopřímky.

Definice 1.6 Úhel, který je shodný s úhlem k němu vedlejším, nazýváme ***pravý úhel***.

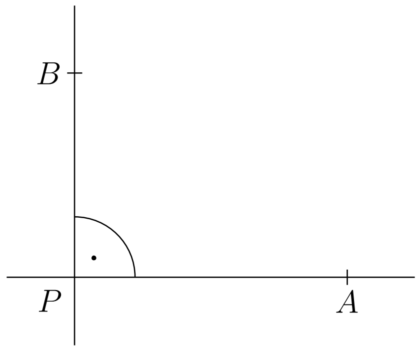
Uvědomme si, že k definici pravého úhlu není třeba užít jeho velikost. Je-li přímka VX osou přímého úhlu AVB, jsou úhly AVX a XVB shodné vedlejší úhly a tedy jsou oba pravé (viz obr. 1.12). Tato skutečnost bývá často vyjadřována takto: ***Osa přímého úhlu dělí tento úhel na dva úhly pravé.***

Definice 1.7 Dvě různoběžné přímky AP a BP nazýváme ***kolmé*** právě tehdy, když úhel APB je pravý (viz obr. 1.13).

O dvou kolmých různoběžných přímkách říkáme, že svírají pravý úhel. Vztah kolmosti je definován i pro mimoběžné přímky.



Obr. 1.12



Obr. 1.13

Definice 1.8 *Mimoběžné přímky* a, b jsou *kolmé* právě tehdy, když existuje taková přímka a', $a' \parallel a$, že přímky a', b jsou kolmé různoběžky.

Jsou-li a, b kolmé přímky, říkáme též, že přímka a je kolmá k přímce b nebo že přímka b je kolmá k přímce a. Jde o symetrický vztah, což je patrno i z obvyklého vyjádření: přímky a, b jsou ***k sobě kolmé*** nebo ***navzájem kolmé***.

Definice 1.9 ***Středem*** S ***úsečky*** AB nazýváme takový bod úsečky AB, pro který platí $AS \cong SB$.

Definice 1.10 Přímku o nazýváme ***osa úsečky*** $AB(A \neq B)$ právě tehdy, když jsou přímky AB a o navzájem kolmé a přímka o prochází středem úsečky AB.
Symbolicky:

$$o \text{ je osa úsečky } AB \Leftrightarrow A \neq B \wedge o \perp AB \wedge o \cap AB = \{S\} \wedge SA \cong BS.$$

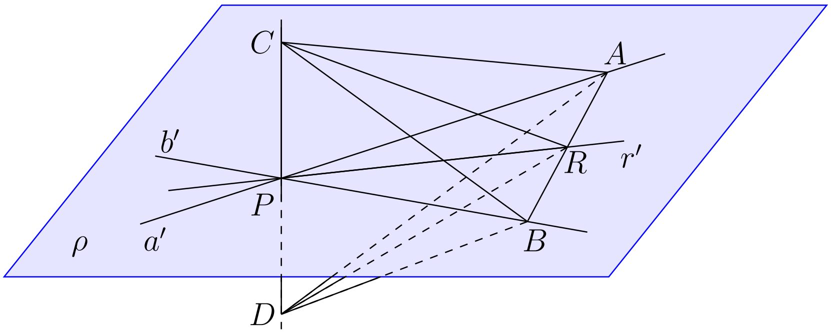
Z definice 1.10 je zřejmé, že osa úsečky je definována jen pro nenulové úsečky. (Zdůvodněte proč!) V definici 1.9 středu úsečky toto omezení není. Který bod je středem nulové úsečky?
Definicemi 1.7 a 1.8 jsme zavedli kolmost dvou přímek. Tento pojem je východiskem i k zavedení pojmu *kolmost přímky a roviny.*

Definice 1.11 Přímka p a rovina ρ se nazývají ***navzájem kolmé***, jestliže je přímka p kolmá ke všem přímkám roviny ρ.

Termín *navzájem kolmé* znamená, že přímka p je kolmá k rovině ρ a také, že rovina ρ je kolmá k přímce p. Při zjišťování kolmosti přímky p a roviny ρ nelze prakticky prověřit kolmost přímky p ke všem přímkám roviny ρ. Ke zjištění kolmosti přímky p a roviny ρ, případně k určení roviny kolmé k přímce p, užíváme kritérium kolmosti přímky a roviny uvedené ve větě 1.1.

Věta 1.1 ***(Kriterium kolmosti přímky a roviny)***
Je-li přímka p kolmá ke dvěma různoběžkám a, b roviny ρ, pak je kolmá k rovině ρ.

Důkaz: *Označme P průsečík přímky p s rovinou ρ. Bodem P veďme přímky $a' \parallel a$, $b' \parallel b$. Přímky a', b' zřejmě leží v rovině ρ a $p \perp a'$, $p \perp b'$. Zvolme dále libovolnou přímku $r \subset \rho$ a ukažme, že $p \perp r$. Sestrojíme přímku r' tak, že $P \in r'$ a $r' \parallel r$ a nechť $r' \neq a'$, $r' \neq b'$ (viz obr. 1.14). Na přímce p zvolme body C, D tak, že P je střed CD. Na přímce a' zvolme bod A, na přímce b' bod B tak, aby body A, B byly odděleny přímkou r'. Označme $R \in AB \cap r'$.*
Platí: $CB \cong DB$, $CA \cong AD \Rightarrow \triangle CBA \cong \triangle DBA$ podle věty sss. Ze shodnosti těchto



Obr. 1.14

trojúhelníků plyne shodnost jejich příček RD, RC, tj. $RD \cong RC$. Vzhledem k tomu, že $CP \cong DP$, $RD \cong RC$ a $RP \cong RP$, je $\triangle PDR \cong \triangle PCR$ podle věty sss. Ze shodností těchto trojúhelníků plyne, že $\sphericalangle CPR \cong \sphericalangle DPR$. Protože se jedná o vedlejší úhly, jsou oba pravé. Z toho plyne, že přímka p je kolmá k přímce r', a tedy také k přímce r. $\square$

Užitím vztahu kolmosti přímky a roviny je možné též definovat kolmost dvou rovin.

Definice 1.12 Dvě roviny jsou ***k sobě kolmé*** právě tehdy, když v jedné z těchto dvou rovin existuje přímka, která je kolmá ke druhé z těchto rovin.

Cvičení:

■ **1.5** Zopakujte si věty o shodnosti trojúhelníků, důsledně je sformulujte a pokuste se je symbolicky zapsat.

■ **1.6** Uvažujte relaci *přímka x je kolmá k přímce y* v množině všech přímek a určete vlastnosti této relace.

■ **1.7** Nad stranami ostroúhlého trojúhelníku ABC jsou setrojeny rovnostranné trojúhelníky ABH a ACK. Dokožte shodnost úseček CH a BK.

■ **1.8** Je dán trojúhelník ABC. Nad jeho stranami AB, AC jsou vně setrojeny čtverce $ABGF$ a $ACDE$. Dokožte shodnost úseček EB a CF.

■ **1.9** Uvnitř trojúhelníku ABC zvolte bod S. Dokažte, že součet úseček SA, SB, SC je větší než poloviční součet stran daného trojúhelníku, tj. že

$$SA + SB + SC > \frac{1}{2}(AB + BC + CA).$$

■ **1.10** Dakažte, že součet úseček, které spojují vnitřní bod P trojúhelníku s krajními body jedné jeho strany, je menší než součet zbývajících dvou stran daného trojúhelníku.

■ **1.11** Přímka o je osou úsečky AB. Bod X je libovolný vnitřní bod poloroviny oA. Dokažte, že platí: $AX < BX$.

■ **1.12** Bod U je vnitřním bodem trojúhelníku ABC.
Dokažte, že platí: $\sphericalangle AUB > \sphericalangle ACB$, $\sphericalangle BUC > \sphericalangle BAC$ a $\sphericalangle AUC > \sphericalangle ABC$.

Literatura

[1] Francová, M., Matoušková, K., Vaňurová, M. *Texty k základům elementární geometrie pro studium učitelství 1. stupně základní školy*, skriptum UJEP, Brno 1985.

[2] Francová, M., Matoušková, K., Vaňurová, M. *Sbírka úloh z elementární geometrie*, skriptum MU, Brno 1996.

[3] Lomtatidze, L. *Historický vývoj pojmu křivka*, Scintilla Svazek 3, Brno 2007

[4] Vopěnka, P. *Rozpravy s geometrií*, Academia, Praha 1989

[5] Struik, D. J. *Dějiny matematiky*, Praha 1963. (z angl. originálu *A concise History of Mathematics*, G. Bell and Sons Ltd., London 1956, přeložili Nový, L. - Folta, J.)

[6] Katz, V. J. *A history of mathematics: an introduction*, Addison-Wesley Educational Publishers, Inc., 2. vydání, 1998.

[7] Servít, F. *Eukleidovy Základy (Elementa).* Nákladem Jednoty českých matematiků a fyziků, Praha, 1907.

[8] Bečvářová M., *Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady* Dějiny matematiky, svazek 20. Prometheus, Praha, 2001.