Kapitola 4

Některé další geometrické pojmy

V následujícím textu uvedeme definice a základní vlastnosti některých dalších geometrických pojmů. U vybraných vlastností předkládáme i důkazy, další důkazy necháváme na čtenáři. Uvedené pojmy a jejich vlastnosti jsou využity ve cvičení při řešení důkazových a konstrukčních úloh.

4.1 Kruh, kružnice, kulová plocha, koule

Seznámíme se s definicí kružnice, kruhu, kulové plochy a koule pomocí shodnosti úseček. Tento způsob odpovídá zavedení těchto pojmů v učivu geometrie na 1. stupni základní školy. Současně si připomeneme definici těchto pojmů pomocí vzdálenosti bodů, které jsme poznali také již na základní škole.

Definice 4.1 Nechť je dán bod S ležící v rovině ρ a úsečka r. ***Kružnicí*** k o středu S a poloměru r se nazývá množina všech takových bodů X roviny ρ, pro které platí, že úsečka SX je shodná s úsečkou r.
Symbolicky:

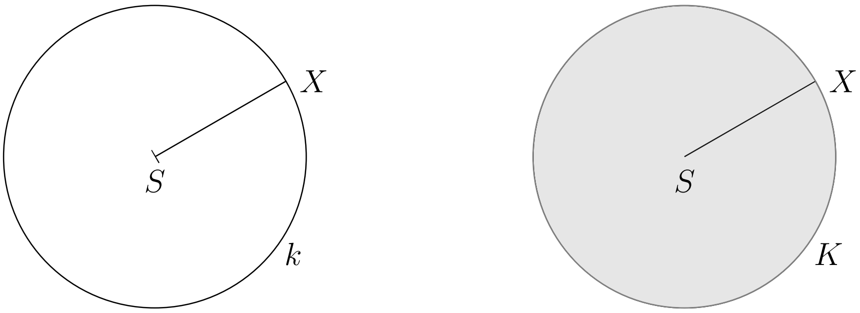
$$k(S,r) = \{X \in \rho\,;\ SX \cong r\}.$$

Definice 4.2 Nechť je dán bod S ležící v rovině ρ a reálné číslo $r > 0$. ***Kružnicí*** k o středu S a poloměru r se nazývá množina všech takových bodů X roviny ρ, které mají od středu S vzdálenost r.
Symbolicky:

$$k(S,r) = \{X \in \rho\,;\ |SX| = r\},\ r \in \mathbb{R}^+.$$

Poznámka 4.1 Je třeba si uvědomit, že v definici 4.1 je r úsečka, zatímco v definici 4.2 je r kladné reálné číslo. Z toho je patrný dvojí význam pojmu poloměr kružnice - jednak jím rozumíme úsečku, jednak kladné reálné číslo.

Definice 4.3 Nechť je dán bod S ležící v rovině ρ a úsečka r. ***Kruhem*** K o středu S a poloměru r se nazýváme sjednocení všech úseček SX, pro které platí $SX \cong r$ a $SX \subset \rho$.
Označujeme: kruh $K(S, r)$.



a) kružnice $k(S, r)$ b) kruh $K(S, r)$

Obr. 4.1

Definice 4.4 Nechť je dán bod S ležící v rovině ρ a reálné číslo $r > 0$. ***Kruhem*** K o středu S a poloměru r se nazývá množina všech takových bodů X roviny ρ, jejichž vzdálenost od středu S je nejvýše rovna r.
Symbolicky:

$$\text{kruh } K(S, r) = \{X \in \rho\, ;\ |SX| \leqq r\},\ r \in \mathbb{R}^+.$$

Poznámka 4.2 Podobně jako poloměr kružnice má i poloměr kruhu dvojí význam, jak je patrno z definic 4.3 a 4.4. Rovněž termín poloměr koule nebo kulové plochy má tentýž dvojí význam, jak poznáme v následujících definicích. Navíc si uvědomme analogii definic kružnice a kulové plochy, kruhu a koule.

Definice 4.5 Nechť je dán bod S a úsečka r. Množina všech bodů X prostoru, pro které platí, že úsečka SX je shodná s úsečkou r, se nazývá ***kulová plocha*** κ se středem S a poloměrem r.
Symbolicky:

$$\kappa(S, r) = \{X \in Z\, ;\ SX \cong r\}.$$

Definice 4.6 Nechť je dán bod S a reálné číslo $r > 0$. Množina všech bodů X prostoru, jejichž vzdálenost od středu S je rovna r, se nazývá ***kulová plocha*** κ se středem S a poloměrem r.
Symbolicky:

$$\kappa(S, r) = \{X \in Z\,;\ |SX| = r\},\ r \in \mathbb{R}^{+}.$$

Definice 4.7 Nechť je dán bod S a úsečka r. ***Koulí*** κ o středu S a poloměru r se nazýváme sjednocení všech úseček SX v prostoru, které jsou shodné s úsečkou SX.
Označujeme: koule $\kappa(S, r)$.

Definice 4.8 Nechť je dán bod S a reálné číslo $r > 0$. ***Koulí*** κ o středu S a poloměru r se nazývá množina všech bodů X v prostoru, jejichž vzdálenost od středu S je nejvýše rovna r.
Symbolicky:

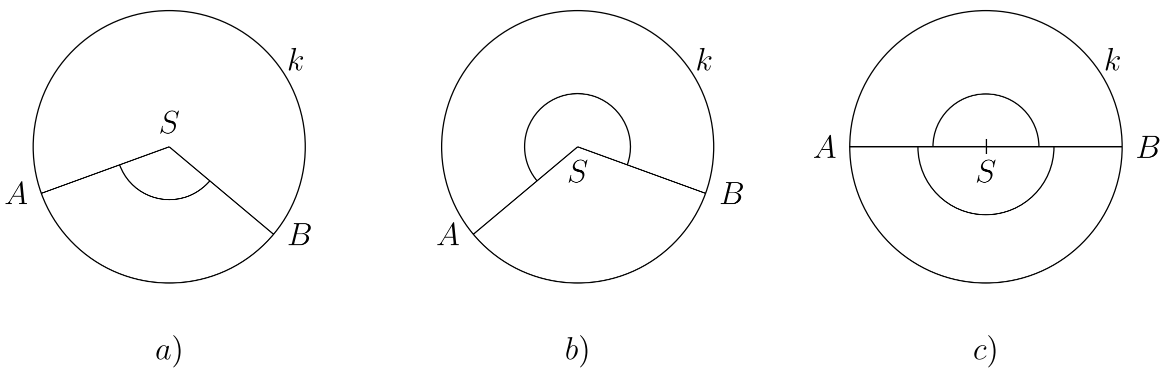
$$\text{koule } \kappa(S, r) = \{X \in Z\,;\ |SX| = r\},\ r \in \mathbb{R}^{+}.$$

4.2 Kružnice, úhly středové a obvodové

Kružnici jsme definovali definicemi 4.1 a 4.2. V tomto odstavci si připomeneme některé další pojmy vztahující se ke kružnici a vztahy mezi nimi. Tyto pojmy, jejich vlastnosti a vztahy pak využijeme při řešení konstrukčních úloh v závěru kapitoly 4.

Jsou-li A, B dva různé body kružnice k, pak úsečka AB se nazývá ***tětiva*** kružnice k. Jestliže tětiva AB obsahuje střed kružnice k, nazýváme ji ***průměr*** kružnice k. Část kružnice k, která leží v jedné z polorovin s hraniční přímkou AB se nazývá ***oblouk*** kružnice k, body A, B jsou ***krajní body*** oblouku. Je-li AB průměr, nazýváme oblouky s krajními body A, B ***polokružnice***. Není-li AB průměr, pak oblouk, který leží v polorovině ABS nazýváme větší oblouk a oblouk v polorovině opačné k polorovině ABS nazýváme menší oblouk s krajními body A, B.

Definice 4.9 Nechť S je střed kružnice k a AB její tětiva, která není průměrem. Pak úhel $\sphericalangle ASB$ nazýváme ***středový úhel příslušný menšímu oblouku*** kružnice k s krajními body A, B (obr. 4.2 a). Úhel $\otimes ASB$ nazýváme ***středový úhel příslušný většímu oblouku*** kružnice k s krajními body A, B (obr. 4.2 b). Je-li úsečka AB průměrem kružnice k, vzniknou dva přímé úhly ASB, které též nazýváme úhly středové, z nichž každý přísluší té polokružnici s krajními body A, B, která je jeho podmnožinou (obr. 4.2 c).

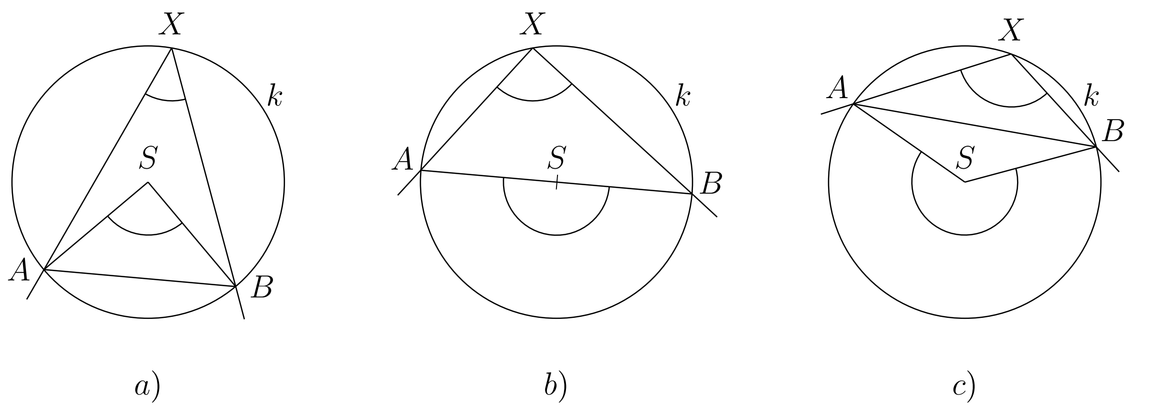


Obr. 4.2

Poznámka 4.3 Stručně je možno říci, že středový úhel ASB přísluší vždy tomu oblouku kružnice s krajními body A, B, který je jeho podmnožinou. Zřejmě platí, že shodným obloukům příslušejí v téže kružnici shodné středové úhly a naopak.

Definice 4.10 Nechť je dána kružnice k a na ní tři různé body A, B, X. Konvexní úhel $\sphericalangle AXB$ se nazývá ***obvodový úhel*** příslušný tomu oblouku kružnice k, který leží v polorovině opačné k polorovině ABX. Středový úhel ASB, který přísluší k tomuto oblouku AB se nazývá ***středový úhel příslušný k obvodovému úhlu*** $\sphericalangle AXB$.

Poznámka 4.4 Stručně je možno říci, že obvodový úhel $\sphericalangle AXB$ přísluší tomu oblouku kružnice s krajními body A, B, který je jeho podmnožinou. Obvodový a k němu příslušný středový úhel příslušejí témuž oblouku (obr. 4.3 a – c).



Obr. 4.3

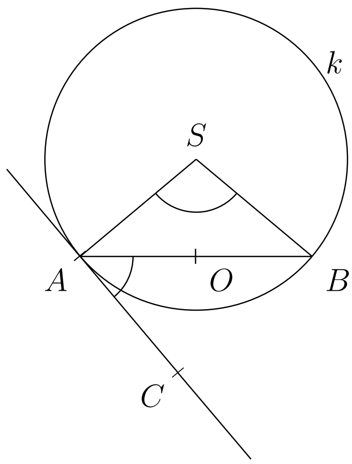
Vztah mezi obvodovým a k němu příslušným středovým úhlem vyjadřuje následující věta:

Věta 4.1 *Velikost středového úhlu v kružnici k je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku kružnice k jako daný středový úhel.*

Důkaz věty 4.1 přesahuje rámec tohoto textu a lze jej najít v uvedené literatuře. Užitím věty 4.1 lze dokázat větu 4.2:

Věta 4.2 *Všechny obvodové úhly příslušné k témuž oblouku kružnice jsou navzájem shodné.*

Definice 4.11 Nechť je dána kružnice $k(S, r)$ a dva její různé body A, B. V bodě A je sestrojena tečna AC kružnice k. Potom úhel $\sphericalangle BAC$ nazýváme ***úsekový úhel*** příslušný k tomu oblouku AB kružnice k, který v tomto úhlu leží. Středový úhel $\sphericalangle ASB$, který k tomuto oblouku přísluší, se nazývá středový úhel příslušný k úsekovému úhlu $\sphericalangle BAC$ (obr. 4.4).



Obr. 4.4

Věta 4.3 *Velikost úsekového úhlu v kružnici k je rovna polovině velikosti k němu příslušného středového úhlu.*

■ **4.1** Důkaz věty 4.3 proveďte jako cvičení. Využijte při tom trojúhelníka AOS, kde O je střed tětivy AB (obr. 4.4).

Úsekový úhel $\sphericalangle BAC$ znázorněný na obrázku 4.4 přísluší menšímu z oblouků s krajními body A, B. Uvažujte i o úsekových úhlech příslušných k polokružnici a k většímu z oblouků s krajními body A, B a dokažte větu i pro tyto případy.

Z předcházejících vět je zřejmé, že úsekový úhel a obvodový úhel, které příslušejí k témuž oblouku kružnice, mají stejné velikosti. Toho využíváme při řešení úlohy určit množinu vrcholů všech konvexních úhlů o dané velikosti α, které procházejí danými různými body A, B (viz cvičení 4.4).