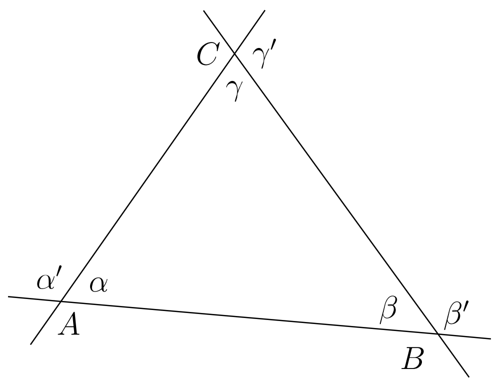
4.3 Trojúhelník, vztahy mezi stranami a úhly trojúhelníka, příčky trojúhelníka

Trojúhelník jsme definovali v předcházející části textu definicemi **??** a **??**. Nyní si připomeneme některé vlastnosti týkající se jeho stran, úhlů a příček.

Věta 4.4 ***(Trojúhelníková nerovnost)***
Součet velikostí kterýchkoliv dvou stran trojúhelníka je větší než velikost strana třetí.

Věta 4.4 je jednou ze základních vět elementární geometrie. Je možno ji formulovat také užitím pojmů grafický součet stran trojúhelníka. Také věta o součtu velikostí (resp. o grafickém součtu) všech vnitřních úhlů trojúhelníka patří mezi základní věty elementární geometrie – viz cvičení 4.2.

Definice 4.12 ***Vnějším úhlem trojúhelníka*** nazýváme úhel, který je vedlejší k jeho vnitřnímu úhlu.



Obr. 4.5

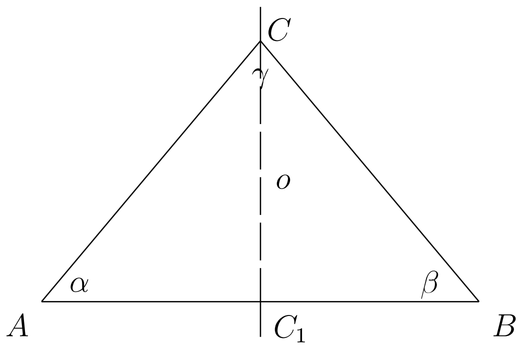
Věta 4.5 *Velikost vnějšího úhlu trojúhelníka je rovna součtu velikostí jeho vnitřních úhlů, k nimž tento úhel není vedlejší.*

Důsledek věty 4.5: Vnější úhel trojúhelníka při daném vrcholu je větší než kterýkoliv jeho vnitřní úhel při zbývajícím vrcholu.

Věta 4.6 ***(O stranách a protějších úhlech trojúhelníka)***
Proti shodným stranám trojúhelníka leží shodné vnitřní úhly. Proti větší ze dvou stran leží větší vnitřní úhel.

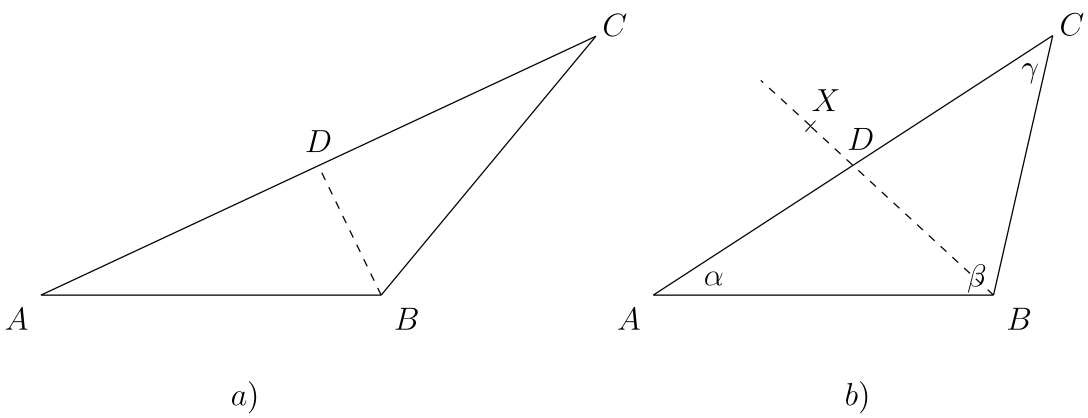
Platí též: *Proti shodným vnitřním úhlům trojúhelníka leží shodné strany, proti většímu ze dvou vnitřních úhlů leží větší strana.*

Důkaz: *a) Nejdříve dokážeme, že proti shodným stranám trojúhelníka leží shodné vnitřní úhly. Uvažujme trojúhelník ABC a nechť $AC \cong BC$ (obr. 4.6). Dokážeme, že $\alpha \cong \beta$. Sestrojme osu úhlu $\sphericalangle ACB$ a její průsečík se stranou AB označme C_1. Platí $AC \cong BC$, $CC_1 \cong CC_1$, $\sphericalangle ACC_1 \cong \sphericalangle BCC_1$, tj. $\triangle AC_1C \cong \triangle BC_1C$ podle věty sus. Platí tedy $\sphericalangle CAC_1 \cong \sphericalangle CBC_1$, tj. $\alpha \cong \beta$.*



Obr. 4.6

b) Nyní dokážeme tvrzení obrácené, tj. že proti shodným vnitřním úhlům trojúhelníka leží shodné strany. Uvažujme opět trojúhelník ABC a nechť je $\alpha \cong \beta$. Dokážeme, že $BC \cong AC$. Sestrojíme opět osu úhlu $\sphericalangle ACB$ a její průsečík se stranou AB označme C_1 (obr. 4.6). Platí $\sphericalangle ACC_1 \cong \sphericalangle BCC_1$ a $\alpha \cong \beta$. Trojúhelníky ACC_1 a BCC_1 se tedy shodují ve dvou úhlech, z čehož vyplývá, že se shodují ve všech třech úhlech a navíc mají stranu CC_1 společnou. Tj. podle věty usu platí $\triangle AC_1C \cong \triangle BC_1C$ a odtud již plyne $BC \cong AC$, což jsme měli dokázat.



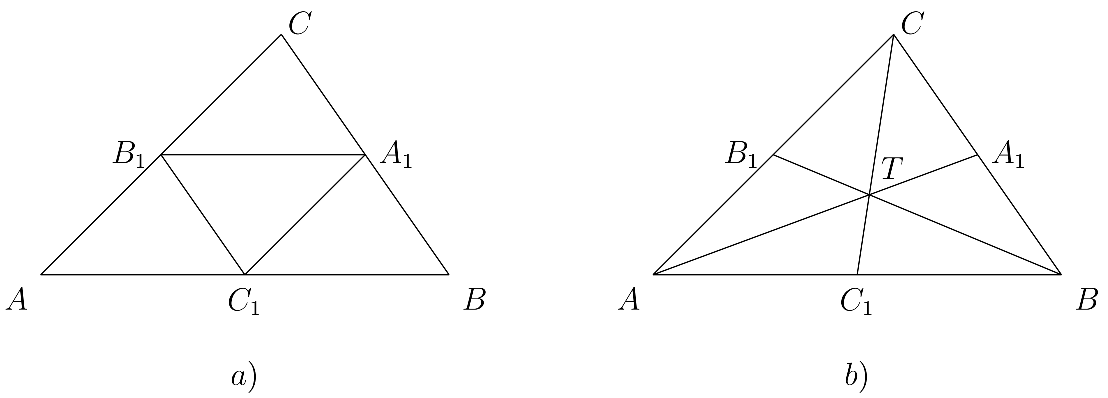
Obr. 4.7

Trojúhelník ABC je rovnoramenný s hlavním vrcholem C. Ze shodnosti $\triangle AC_1C \cong \triangle BC_1C$ plyne, že C_1 je střed strany AB a že úhly $\sphericalangle AC_1C$, $\sphericalangle BC_1C$ jsou pravé, neboť se jedná o shodné vedlejší úhly. Jako vedlejší výsledek tedy dostáváme, že osa vnitřního úhlu rovnoramenného trojúhelníka při jeho hlavním vrcholu je kolmá na jeho základnu a prochází jejím středem.

c) Nyní se zaměříme na důkaz tvrzení, že proti větší starně trojúhelníka leží větší vnitřní úhel. Nechť je dán trojúhelník ABC *a nechť* $AC > BC$ *(obr. 4.7 a)). Dokážeme, že* $\sphericalangle ABC > \sphericalangle CAB$*. Sestrojme bod* $D \in AC$ *tak, že je* $BC \cong DC$*. Podle části a) důkazu věty 4.6 platí, že* $\sphericalangle CDB \cong \sphericalangle CBD$*. Úhel* $\sphericalangle CDB$ *je vnějším úhlem trojúhelníka* ABD*, a je tedy větší než* $\sphericalangle CAB$*. Úhel* $\sphericalangle ABC$ *je však větší než* $\sphericalangle CBD$*, neboť je roven grafickému součtu úhlů* $\sphericalangle CBD$*,* $\sphericalangle ABD$ *a úhel* $\sphericalangle ABD$ *není nulový (podle předpokladu je* $AC > BC$*, a tedy* $A \neq D$*). Z uvedených vztahů plyne:* $\sphericalangle ABC > \sphericalangle DBC$*,* $\sphericalangle DBC \cong \sphericalangle CDB$*,* $\sphericalangle CDB > \sphericalangle CAB$ *a tedy* $\sphericalangle ABC > \sphericalangle CAB$*, což jsme měli dokázat.*

d) Zbývá dokázat, že proti většímu úhlu trojúhelníka leží větší strana. Nechť je dán trojúhelník ABC *a nechť* $\alpha < \beta$*. Dokážeme, že* $AC > BC$ *(obr. 4.7 b)). Sestrojme úhel* $\sphericalangle ABX$ *shodný s úhlem* α *tak, že polopřímka* BX *náleží polorovině* ABC*. Protože je* $\alpha < \beta$*, je* $\sphericalangle ABX < \beta$ *a* $\beta = \sphericalangle ABX + \sphericalangle XBC$*. Body* A*,* C *náležejí opačným polorovinám s hraniční přímkou* BX*, a tedy existuje bod* D *tak, že* $D \in \mapsto BX \cap AC$*. Podle části b) důkazu věty 4.6 je* $AD \cong BD$*. Z věty 4.4 plyne pro trojúhelník* BCD*, že* $BD + DC > BC$*. Platí* $AD \cong BD$*, a tedy* $AD + DC > BC$*, tj.* $AC > BC$*, což jsme měli dokázat.* □

Definice 4.13 V trojúhelníku ABC označme po řadě A_1, B_1, C_1 středy stran a, b, c. Úsečky A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 se nazývají ***střední příčky trojúhelníka*** ABC příslušné po řadě ke stranám c, a, b (obr. 4.8 a). Úsečky AA_1, BB_1, CC_1 se nazývají ***těžnice trojúhelníka*** ABC (obr. 4.8 b).

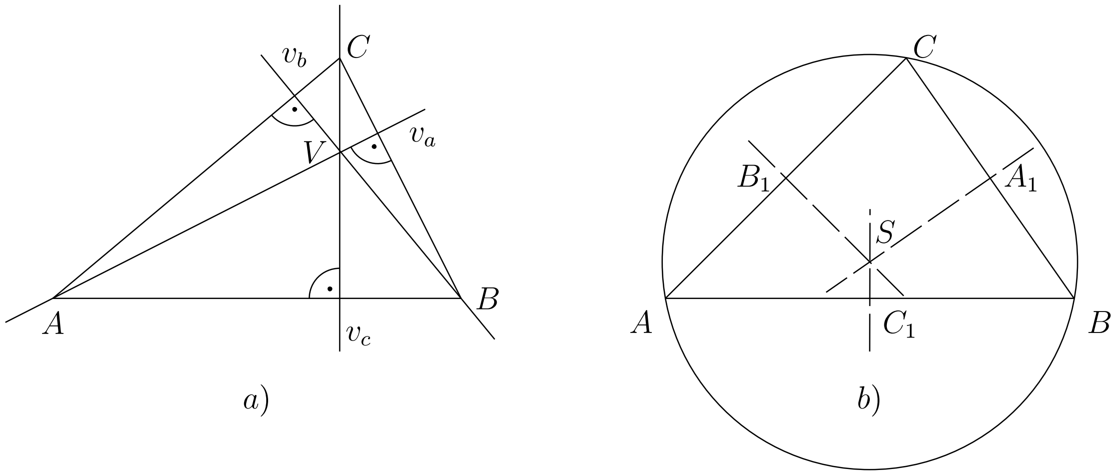


Obr. 4.8

Věta 4.7 *Střední příčka trojúhelníka je rovnoběžná se stranou tohoto trojúhelníka, jejíž střed neobsahuje, a její velikost se rovná polovině velikosti této strany.*

Věta 4.8 *Těžnice trojúhelníka* ABC *procházejí týmž bodem* T*, zvaným těžiště trojúhelníka. Těžiště* T *dělí každou těžnici na dvě úsečky, z nichž ta část, která obsahuje vrchol trojúhelníka, je dvojnásobkem druhé části (obr. 4.8 b).*

Definice 4.14 V trojúhelníku ABC označme po řadě v_a, v_b, v_c kolmice vedené vrcholy A, B, C trojúhelníka ABC k přímkám BC, AC, AB. Přímky v_a, v_b, v_c se nazývají ***výšky trojúhelníka*** ABC (obr. 4.9).



Obr. 4.9

Poznámka 4.5 Výškou též nazýváme úsečku, jejímiž krajními body jsou vrchol trojúhelníka a průsečík kolmice vedené tímto vrcholem k přímce, v níž leží protější strana, s touto přímkou. Také velikost této úsečky se nazývá výška. Pojem *výška trojúhelníka* má tedy trojí význam. Proto je třeba, aby bylo vždy alespoň z kontextu zřejmé, o který z významů jde. Ve větě 4.9 je výška chápána ve smyslu definice 4.14.

Věta 4.9 *Výšky trojúhelníka ABC procházejí týmž bodem V, zvaným průsečík výšek nebo též ortocentrum trojúhelníka ABC (obr. 4.9 a)).*

Definice 4.15 ***Osami stran*** trojúhelníka ABC nazýváme osy úseček AB, BC a AC.

Věta 4.10 *Osy stran trojúhelníka se protínají v jediném bodě, který je středem kružnice trojúhelníku opsané (obr. 4.9 b)).*

Mezi příčky trojúhelníka řadíme též osy jeho vnitřních úhlů. Pro jejich vzájemnou polohu platí věta 4.11.

Věta 4.11 *Osy vnitřních úhlů trojúhelníka se protínají v jediném bodě, který je středem kružnice trojúhelníku vepsané (obr. 4.10).*