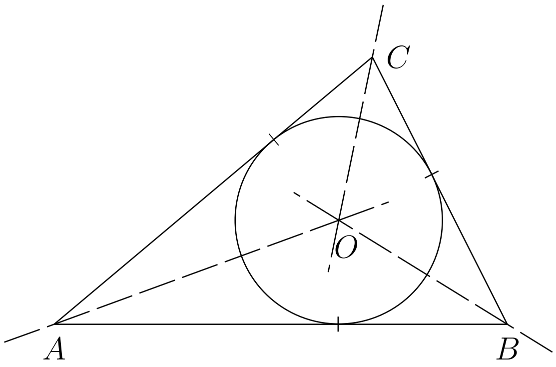
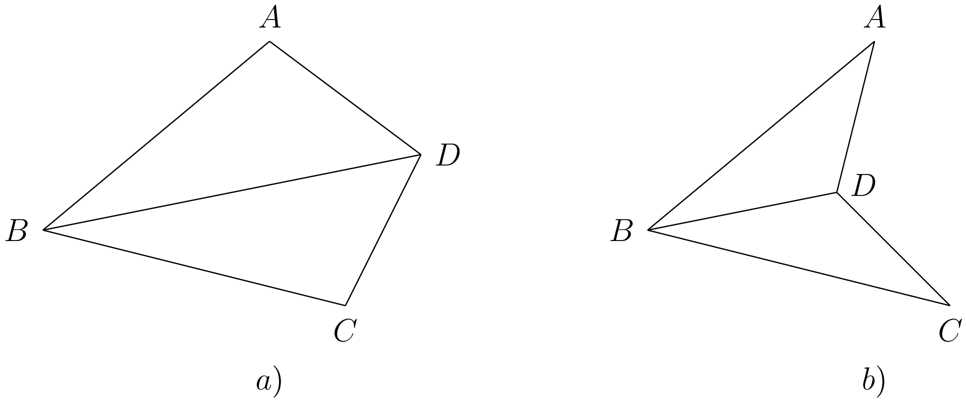


Obr. 4.10

4.4 Čtyřúhelník, třídění čtyřúhelníků

Definice 4.16 Nechť A, B, C, D jsou čtyři body v téže rovině, z nichž žádné tři neleží v přímce. Sjednocení trojúhelníků ABD a BDC nazveme ***čtyřúhelníkem*** $ABCD$ právě tehdy, když průnikem těchto trojúhelníků je úsečka BD (obr. 4.4).



Obr. 4.11

Čtyřúhelník na obrázku a) je konvexní, na obrázku b) je nekonvexní. Konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je možno definovat také jako průnik polorovin:
Konvexní čtyřúhelník $ABCD = \mapsto ABC \cap \mapsto BCD \cap \mapsto CDB \cap \mapsto ADB$, přičemž ovšem předpokládáme, že body A, B, C, D leží v téže rovině a žádné tři z nich neleží v přímce.

Body A, B, C, D nazýváme *vrcholy čtyřúhelníka* $ABCD$, úsečky AB, BC, CD, DA jeho *strany* a úsečky AC, BD jeho *úhlopříčky*. *Vnitřními úhly* čtyřúhelníka z definice 4.16 nazýváme tyto úhly: $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD \cup \sphericalangle DBC$ a $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ADB \cup \sphericalangle BDC$. Pro součet vnitřních úhlů čtyřúhelníka platí věta 4.12.

Věta 4.12 *Součet velikostí všech vnitřních úhlů čtyřúhelníka je roven* 360°.

Čtyřúhelníky můžeme třídit podle různých hledisek, např. podle toho, zda mají některé dvojice stran rovnoběžné, případně shodné, zda jsou některé strany na sebe kolmé apod. Pro zopakování uvádíme následující třídění čtyřúhelníků:

$$\textbf{Čtyřúhelníky}\begin{cases}\text{různoběžníky}\\[2ex] \text{čtyřúhelníky s rovno-}\\ \text{běžnými stranami}\end{cases}\begin{cases}\text{lichoběžníky}\\[2ex] \text{rovnoběžníky}\begin{cases}\text{pravoúhelníky}\begin{cases}\text{obdélníky}\\ \text{čtverce}\end{cases}\\ \text{kosodélníky}\begin{cases}\text{kosodélníky}\\ \text{kosočtverce}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

Jiné třídění čtyřúhelníků lze provádět např. vzhledem k vlastnostem uhlopříček čtyřúhelníka:

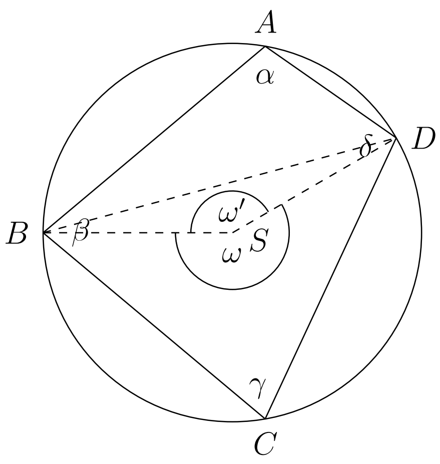
$$\text{Uhlopříčky čtyřúhelníka}\begin{cases}\text{kolmé}\begin{cases}\text{shodné}\begin{cases}\text{půlí se – }\textbf{čtverce}\\ \text{nepůlí se}\end{cases}\\ \text{neshodné}\begin{cases}\text{půlí se – }\textbf{kosočtverce}\\ \text{nepůlí se}\end{cases}\end{cases}\\[4ex] \text{kosé}\begin{cases}\text{shodné}\begin{cases}\text{půlí se – }\textbf{obdélníky}\\ \text{nepůlí se}\end{cases}\\ \text{neshodné}\begin{cases}\text{půlí se – }\textbf{kosodélníky}\\ \text{nepůlí se}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

V závěru odstavce o čtyřúhelnících zavedeme ještě dva nové pojmy, a to pojem tětivového a pojem tečnového čtyřúhelníka.

Definice 4.17 Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník. Existuje-li kružnice, která prochází body A, B, C, D nazýváme tento čtyřúhelník ***tětivový***.

Věta 4.13 *Součet velikostí každých dvou protějších vnitřních úhlů tětivového čtyřúhelníka je roven* 180°.

Důkaz: *Vyjdeme-li z označení v obrázku 4.12, je třeba dokázat, že* $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$. *Platí* $\omega + \omega' = 360°$. *Podle věty 4.1 platí, že* $\omega = 2\alpha$, $\omega' = 2\gamma$. *Tedy* $2\alpha + 2\gamma = \omega + \omega' = 360°$ *toho bezprostředně plyne, že* $\alpha + \gamma = 180°$. *Odtud z věty 4.12 pak plyne též, že* $\beta + \delta = 180°$.



Obr. 4.12

Definice 4.18 Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník. Existuje-li kružnice, která se dotýká všech jeho stran, nazýváme tento čtyřúhelník ***tečnový***.

Věta 4.14 *Součty velikostí protějších stran tečnového čtyřúhelníka jsou si rovny.*

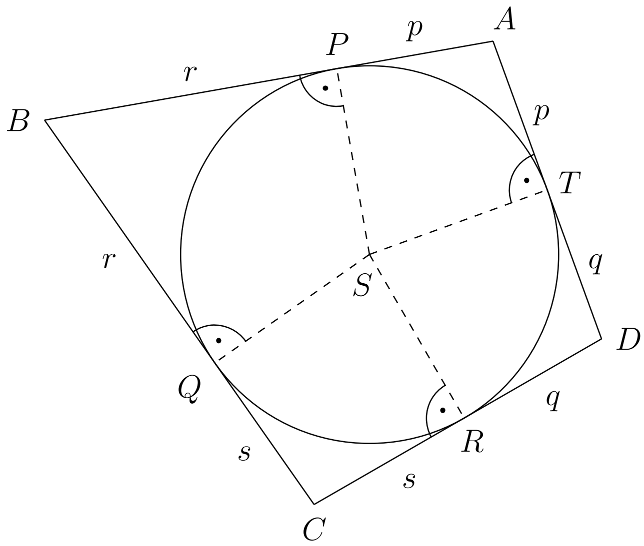
Důkaz: *Vyjdeme-li z označení v obrázku 4.13, je třeba dokázat, že* $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$*. Trojúhelníky* SBP *a* SBQ *jsou shodné podle věty Ssu (*SB *je společná strana ,* $SP \cong SQ$*,* $\sphericalangle SPB = \sphericalangle SQB$*). Ze shodnosti těchto trojúhelníků vyplývá, že* $BP \cong BQ$*. Podobně se ukáže, že* $CQ \cong CR$*,* $DR \cong DT$ *a* $AT \cong AP$*. Nechť* $|AP| = p$*,* $|BP| = r$*,* $|CQ| = s$ *a* $|DR| = q$*. Pak je*

$$|AD| + |BC| = p + q + r + s,$$

$$|AB| + |DC| = p + r + s + q.$$

Platí tedy $|AD| + |BC| = |AB| + |CD|$*, což jsme měli dokázat.*

Definice 4.19 Čtyřúhelník, jemuž lze opsat i vepsat kružnici, se nazývá čtyřúhelník ***dvojstředový***.



Obr. 4.13

Cvičení:

■ **4.2** Analogicky k větě 4.4 vyslovte větu o součtu velikostí (resp. o grafickém součtu) všech vnitřních úhlů trojúhelníka a dokažte ji.

■ **4.3** Zdůvodněte větu 4.12.

■ **4.4** Je dána úsečka AB.
a) Sestrojte množinu všech vrcholů konvexního úhlu $\sphericalangle ACB = \gamma$, jehož ramena procházejí krajními body úsečky AB.
b) Sestrojte $\triangle ABC$, je-li $|AB| = 6$, $\gamma = 60°$, $v_C = 4$.

■ **4.5** Je-li v rovnoramenném trojúhelníku ABC úhel při základně AB roven trojnásobku úhlu při vrcholu C a rozdělí-li se úhel $\sphericalangle BAC$ při základně na tři shodné úhly (tak, že M, N jsou takové body strany BC, pro něž platí $\sphericalangle NAB \cong \sphericalangle MAN \cong \sphericalangle CAM$), pak platí $AB \cong AN \cong BM$, $AM \cong CM$. Dokažte.

■ **4.6** Bodem A ležícím vně kružnice $k(S, r)$ je vedena sečna CD tak, že $AC < AD$ a $|AC| = r$. Dokažte, že

$$\sphericalangle ASC = \frac{1}{3} \sphericalangle BSD,$$

4.6 Mnohoúhelník

Definice 4.26 ***Lomenou čárou*** $A_0A_1A_2\dots A_n$, $(n > 1)$, rozumíme sjednocení všech úseček $A_0A_1,\ A_1A_2,\ \dots,\ A_{n-1}A_n$ konečné posloupnosti úseček, z nichž žádná neleží v přímce, která obsahuje předcházející (následující) úsečku této posloupnosti (obr. 4.18).

Obr. 4.18

Lomenou čárou tedy rozumíme sjednocení konečného počtu úseček $A_0A_1,\ A_1A_2,\ \dots,\ A_{n-1}A_n$, z nichž každé dvě sousedící mají společný pouze jeden (krajní) bod a neleží v téže přímce.

Body $A_0A_1A_2\dots$ nazýváme vrcholy lomené čáry, úsečky $A_0A_1,\ A_1A_2,\ \dots$ nazýváme strany lomené čáry, strany úseček $A_{k-1}A_k,\ A_kA_{k+1}$, $k = 1,\dots,n-1$, nazýváme sousední strany lomené čáry.

Definice 4.27 ***Jednoduchou lomenou čárou*** rozumíme lomenou čáru, jejíž každé dvě nesousedící strany jsou disjunktní – tzn. žádné dvě nesousedící strany nemají společný bod (obr. 4.19).

Obr. 4.19

Definice 4.28 ***Jednoduchou uzavřenou lomenou čárou***rozumíme jednoduchou lomenou čáru $A_0A_1A_2\dots A_n$, kde $A_0 = A_n$ (obr. 4.20).

Obr. 4.20

Jednoduchá uzavřená lomená čára má důležité vlastnosti. Rozděluje totiž všechny body roviny, které jí nepatří, do dvou neprázdných podmnožin takových, že mezi každými dvěma body patřícími různým podmnožinám leží alespoň jeden bod lomené čáry. Pro každé dva různé body téže podmnožiny pak platí, že je lze spojit úsečkou nebo jednoduchou lomenou čarou, přičemž tyto útvary leží v této podmnožině. Tyto dvě podmnožiny nazveme ***vnitřní*** a ***vnější oblast*** jednoduché lomené čáry.

Přesněji: Nechť L je jednoduchá uzavřená lomená čára $A_0A_1A_2\dots A_n$, $(A_0 = A_n)$. Označme M množinu všech bodů roviny, které nepatří jednoduché čáře L a dále označme R relaci definovanou takto: X, Y jsou v relaci R, právě tehdy, když existuje taková lomená čára obsahující body X, Y, která nemá s jednoduchou uzavřenou lomenou čárou L žádný společný bod.