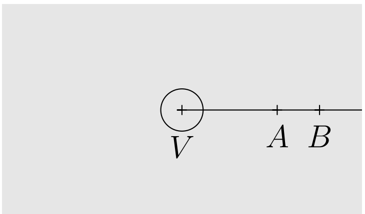
Stupňová a oblouková míra

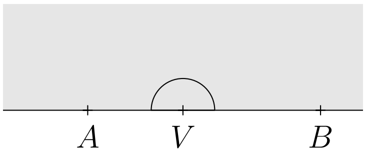
Stupňová míra

Připomeňme si nejdříve, co je plný, přímý a pravý úhel. Máme dány tři navzájem různé body A, V, B.

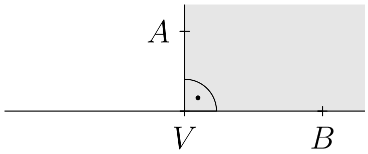
- *Plný úhel* AVB dostáváme, jestliže polopřímka VA splývá s polopřímkou VB, přitom v plného úhlu leží každý bod roviny AVB.[1]
- *Přímý úhel* AVB dostáváme, jestliže je polopřímka VA opačná k polopřímce VB. Za přímý úhel pak považujeme libovolnou polorovinu s hraniční přímkou AB.
- *Pravý úhel* je úhel, který je shodný s úhlem k němu vedlejším.



plný úhel



přímý úhel



pravý úhel

Všimněte si, že definice nejsou vysloveny pomocí velikosti ve stupních, např.: „pravý úhel je úhel o velikosti 90°“. Měli bychom totiž problém s definicí jednoho stupně. Půjdeme na to proto obráceně – stupeň definujeme právě pomocí jednoho z tří výše zmíněných úhlů.

Definice. *Stupněm* rozumíme $\frac{1}{360}$ velikosti plného úhlu. Dále pak definujeme *úhlovou minutu* jako $\frac{1}{60}$ stupně a *úhlovou vteřinu* jako $\frac{1}{60}$ úhlové minuty.

Poznámky.

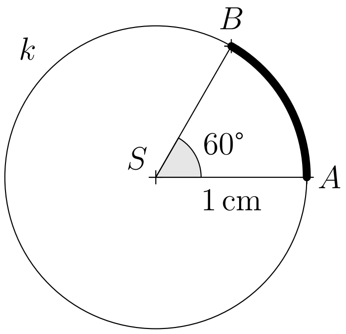
1. Ekvivalentně lze definovat: stupněm rozumíme $\frac{1}{180}$ velikosti přímého úhlu, popř. stupněm rozumíme $\frac{1}{90}$ velikosti pravého úhlu.
2. V definici používáme pojem *velikost úhlu*, který nemáme definován. Dá se říct, že se jedná o obdobu velikosti úsečky, přesněji definovat ji však nebudeme.
3. Proč dělíme plný úhel na 360 stupňů, není dodnes jisté. Víme, že tento způsob vychází z babylonské matematiky, která pracuje s šedesátkovou soustavou. Jedna z hypotéz zmiňuje vliv astronomie a přibližný počet dní v roce. Svou roli mohlo hrát také to, že číslo 360 je vhodné pro dělení na poloviny, třetiny, čtvrtiny atd.

[1]Druhou podmínkou rozlišíme mezi plným a nulovým úhlem AVB.

Výhoda stupňové míry je zřejmá – měření úhlů se „v praktickém životě“ téměř výhradně odehrává ve stupních. Má však také pár nevýhod.

Především je zde poznat dědictví babylonské matematiky – systém je založen na práci v šedesátkové soustavě (podobně jako třeba měření času v minutách a sekundách), a proto s naší desítkovou soustavou není úplně kompatibilní. Dokázali byste třeba převést na vyjádření s minutami a vteřinami velikost úhlu 38,125°? Nebo naopak do vyjádření s desetinnou čárkou velikost úhlu $20°35'20''$?

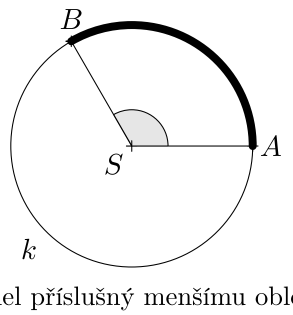
Další nevýhodu uvedeme úlohou, se kterou si určitě hravě poradíte – určete délku oblouku AB kružnice k na obrázku níže.[2]



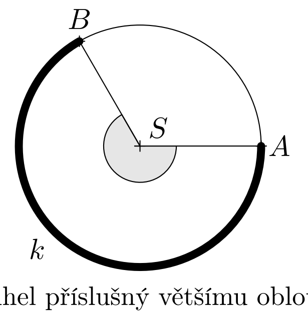
Jestliže jste počítali správně, délka oblouku vám vyšla $\frac{\pi}{3}$ cm, což není příliš hezké číslo. Skutečně platí, že jestliže je velikost úhlu rovna „hezké“ (přesněji racionální[3]) hodnotě ve stupních, délka oblouku příslušná takovému úhlu „hezká“ není. Platí to však i naopak. Má-li délka oblouku racionální hodnotu, velikost příslušného úhlu ve stupních racionální není.

Oblouková míra

Libovolné dva různé body A, B kružnice k dělí kružnici na dva oblouky. Jestliže není úsečka AB průměrem kružnice, rozlišujeme mezi *menším* a *větším* obloukem AB, kde větší oblouk leží vždy v polorovině ABS, kdežto menší oblouk leží v polorovině opačné. Ten ze dvou úhlů ASB, ve kterém leží oblouk AB, nazveme *středovým úhlem příslušným oblouku* AB.



středový úhel příslušný menšímu oblouku AB



středový úhel příslušný většímu oblouku AB

---

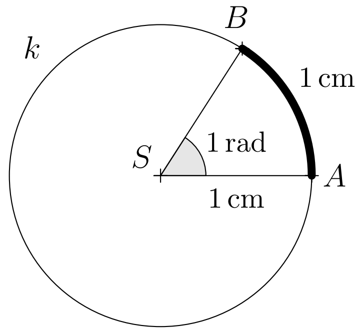
[2]Nápověda – délku celé kružnice d určíme pomocí známého vzorečku $d = 2\pi r$.

[3]Připomenutí: *racionální číslo* je číslo vyjádřitelné podílem celých čísel, tj. jeho desetinný rozvoj je buď konečný nebo periodický.

Poznamenejme, že dva různé oblouky na téže kružnici mají stejnou délku právě tehdy, když jsou středové úhly jim příslušící shodné. Nyní definujme jednotku obloukové míry, jeden radián.

Definice. Buď k kružnice o jednotkovém poloměru. *Radiánem* rozumíme velikost středového úhlu, který přísluší oblouku jednotkové délky.

Ilustrujme na příkladu. Na obrázku níže vidíme kružnici o poloměru 1 cm. Jestliže na ní vyznačíme oblouk AB, který bude mít délku 1 cm, středový úhel příslušící tomuto oblouku bude mít velikost 1 radián (značíme 1 rad nebo někdy jen 1 bez jednotky).



Poznámky.

1. Budeme-li mít kružnici o libovolném poloměru r a vyznačíme na ní oblouk délky r, středový úhel příslušící tomuto oblouku bude mít rovněž velikost 1 radián (za jednotkovou délku z definice jsme zvolili délku r).

2. Alternativně lze velikost středového úhlu v radiánech definovat jako poměr délky příslušného oblouku a poloměru kružnice. Středový úhel o velikosti 1 rad odpovídá poměru $1:1$, tedy délka příslušného oblouku a poloměr jsou stejné.

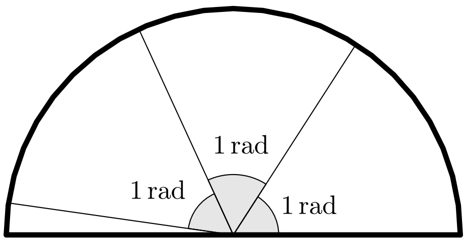
3. Můžeme také definovat díly radiánu – užívají se předpony známé z fyziky, např. *miliradián* je tisícina radiánu.

Definice radiánu zaručuje, že oblouková míra netrpí řečenými neduhy stupňové míry – zejména pak nemusíme myslet na šedesátkovou soustavu. Také středové úhly, které mají v radiánech racionální hodnoty, přísluší vždy obloukům racionálních délek (za předpokladu, že uvažovaná kružnice má racionální poloměr). Např. v kružnici o poloměru 5 cm přísluší středovému úhlu o velikosti 3 radiány oblouk délky 15 cm, středovému úhlu o velikosti 0,2 radiánu oblouk délky 1 cm atd.

Už ve středoškolské matematice bývá zvykem upouštět od stupňové míry a postupně si zvykat na vyjádření úhlů v míře obloukové (zejména v goniometrii). Ve fyzikálních výpočtech se pak téměř výhradně pracuje s radiány.

Převod mezi stupňovou a obloukovou mírou

Pojďme určit velikost přímého úhlu v radiánech – pro jednoduchost uvažujme kružnici o poloměru 1 cm. Oblouk příslušný přímému úhlu je půlkružnicí a jeho délka je proto rovna π cm. Jak bylo řečeno v předešlém textu, velikost středového úhlu v radiánech je poměrem délky příslušného oblouku a poloměru kružnice. Tento poměr je v našem případě $\pi\,\mathrm{cm} : 1\,\mathrm{cm} = \pi$, tedy přímý úhel má velikost π radiánů. Z obrázku níže jde vidět, že přímý úhel můžeme opravdu rozdělit na tři celé radiány a jeden malý „zbytek“.



Protože je velikost přímého úhlu ve stupňové míře 180°, dostáváme základní převodní vztah mezi stupni a radiány:

$$180^\circ \sim \pi\,\mathrm{rad}$$

Užitím vztahu dostáváme, že velikost plného úhlu je rovna 2π rad a velikost pravého úhlu je rovna $\frac{\pi}{2}$ rad. Obecně pro racionální hodnoty velikosti úhlu ve stupních dostáváme v obloukové míře racionální násobky π rad.

Trojčlenkou můžeme např. určit velikost 1 rad ve stupních:

$$\begin{array}{l}\uparrow \quad 180^\circ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \pi\,\mathrm{rad} \quad \uparrow \\ \quad x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1\,\mathrm{rad} \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{x}{180^\circ} = \frac{1\,\mathrm{rad}}{\pi\,\mathrm{rad}} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{180^\circ}{\pi} \doteq 57^\circ 17' 45'',$$

nebo velikost 1° v radiánech:

$$\begin{array}{l}\uparrow \quad 180^\circ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \pi\,\mathrm{rad} \quad \uparrow \\ \quad 1^\circ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{x}{\pi\,\mathrm{rad}} = \frac{1^\circ}{180^\circ} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{\pi\,\mathrm{rad}}{180} \doteq 0{,}01745\,\mathrm{rad}.$$