## 0.1 Axiomatická výstavba geometrie

Pravdivost jisté geometrické věty ověřujeme obvykle pomocí jiných platných vět. Podobně nové geometrické pojmy definujeme pomocí jiných, již dříve zavedených, pojmů. Je zřejmé, že takto není možno definovat všechny geometrické pojmy a také nelze všechny geometrické věty dokázat pomocí vět dříve dokázaných. Někde je třeba začít. Proto byly v geometrii vysloveny jisté základní věty, jejichž pravdivost nedokazujeme, ale uznáváme je za pravdivé na základě našich zkušeností. Tyto základní věty nazýváme **axiomy**. Podobně některé pojmy pokládáme v geometrii za zcela základní. Nedefinujeme je výše uvedeným způsobem, ale tyto zcela základní pojmy definujeme tak, že ve větách nazývaných axiomy je zavádíme současně s jejich vlastnostmi a vzájemnými vztahy. Za zcela základní pojmy v geometrii pokládáme pojmy **bod, přímka** a **rovina**. Pomocí základních pojmů pak definujeme pojmy další.

Axiomy jsou tedy nejen nejjednodušší věty, z nichž pak deduktivně odvozujeme věty další, ale slouží i k zavedení těch nejzákladnějších geometrických pojmů, jejich vlastností a vzájemných vztahů. Říkáme také, že jednotlivé axiomy jsou „částí definic“ těchto pojmů. Pojmy definované pomocí axiomů, včetně jejich vlastností a vztahů, nazýváme **axiomatické**. Pomocí těchto axiomatických pojmů pak definujeme další pojmy. Postupujeme-li tímto způsobem, říkáme, že geometrii budujeme axiomaticky.

**Příklad 0.1** Příkladem axiomu je věta: „*Dvěma navzájem různými body prochází jediná přímka.*“ Příkladem základních pojmů, které se v ní vyskytují jsou: *bod, přímka.*

Abychom hlouběji pochopili význam axiomatického budování geometrie, nahlédneme v následujících odstavcích, jak tento dnes běžně užívaný axiomatický systém vznikal během historického vývoje lidstva.

Shromažďování geometrických poznatků ve starověku iniciované potřebami praxe na jedné straně (stavby, vytyčování pozemků atd.) a mystickým zaujetím pro geometrii na straně druhé (malby v chrámech, pyramidy, obřadní místa atd.) zaznamenalo zlomový pokrok od 6. století před Kr. Tehdy se poprvé u ionských Řeků objevuje snaha podat nový výklad světa, spíše přírodovědecký než mystický. Významnou součástí tohoto výkladu byla také geometrie, která začala být pěstována jako věda. My si z tohoto období starověkého Řecka a Říma, které bývá souhrně označováno jako *antika*,[1] podrobněji povšimneme spisu Eukleida z Alexandrie[2] *Základy* (řecky *Stoicheia*, latinsky *Elementa*) ze 3. století před Kr. Eukleidův spis *Základy* byl přeložen téměř

[1] Historikové matematiky se všeobecně shodují na tom, že geometrické znalosti přišly do Řecka z Egypta a přinesl je Thalés. Rané období rozmachu řeckého myšlení začíná školou Milétskou - cca 600-550 před Kr. (Thalés, Anaximandros, Anaximenes) a vrcholí v době rozkvětu Athén (Sokratés, Platón, Aristoteles). Toto vrcholné období, nazývané v literatuře *hrdinským věkem*, končí Aristotelovou smrtí roku 322 před Kr. Na počátku 3. století před Kr. se centrem učenců tehdejšího světa stává Alexandrie, shromáždili se sem i tak významní matematici jako Eukleides, Eratostenos a Apollónios. Na základě souhrných prací, které v té době vznikaly, bývá toto období nazýváno historiky vědy *věkem učebnic*. Postupně docházelo ke změně zaměření matematiky od teoretické k aplikované. Kolem 3. století po Kr. pak nastává úpadek nejen geometrie, ale vědy vůbec, jako nutný důsledek úpadku zemí římského impéria. Podrobněji např. [5], [6].

[2] Eukleides z Alexandrie (cca 325 před Kr. – asi 260 před Kr.), řecký matematik a geometr - vedle

do všech kulturních jazyků světa a zcela zásadním způsobem ovlivňoval vývoj nejen geometrie, ale matematiky vůbec, dalších dva tisíce let. V Eukleidových *Základech* byla poprvé geometrie zpracována axiomatickou metodou a až do 19. století sloužily nejrůznější překlady spisu *Základy* jako jediná učebnice geometrie.

### Eukleidovy *Základy*

Rozsáhlý Eukleidův spis *Základy* je obsažen ve 13 knihách.[3] Eukleides v něm shrnul všechny důležité, do té doby získané geometrické poznatky, které utřídil. Ve spise jsou nejprve definovány pojmy, o nichž se mluví, poté následují postuláty (něco jako požadavky) a věty, Eukleidem nazývané axiomy. Eukleides v *Základech* zformuloval pět základních postulátů, ze kterých později odvozoval logickým uvažováním další geometrické věty. Správnost pěti postulátů vycházela z vlastních zkušeností a praxe, přímo je nedokazoval. Jednotlivé věty jsou nejdříve formulovány, potom se konstatuje, co je dáno a co je třeba dokázat. Na závěr následuje důkaz se všemi odkazy na předcházející věty, postuláty a axiomy.

---

základů geometrie se věnoval i teorii čísel, perspektivě, kuželosečkám a sférické geometrii. Mezi jeho žáky snad patřil také Archimédés.

[3]Obsahem první knihy jsou věty o vlastnostech trojúhelníku, podmínky shodnosti trojúhelníků, vlastnosti rovnoběžníků a mnohoúhelníků, věta Pythagorova. Druhá kniha pojednává o proměně mnohoúhelníku na čtverec stejného obsahu. Třetí kniha se zabývá vlastnostmi kružnice a vzájemnou polohou dvou kružnic, čtvrtá pojednává o mnohoúhelnících kružnici opsaných a vepsaných. Pátá kniha obsahuje nauku o poměrech a úměrnosti úseček. Šestá kniha je pojednáním o podobnosti mnohoúhelníků. Sedmá až devátá kniha objasňuje přirozená čísla a prvočísla, desátá pak nauku o souměřitelných a nesouměřitelných veličinách (v podstatě základ teorie iracionálních čísel). Poslední tři knihy obsahují základy stereometrie – poloha přímek a rovin v prostoru, teorie objemů, mnohostěnů a rotačních těles. Podrobněji viz např. český překlad základů [7] nebo studie [8].

**Eukleidovy definice**:

I. ***Bod*** *je to, co nemá části.*

II. ***Čára*** *je délka bez šířky.*

III. *Hranice čáry se nazývají body.*

IV. ***Přímkou*** *se nazývá čára, jenž je stejně položena ke všem svým bodům.*

V. ***Plocha*** *je to, co má délku a šířku.*

VI. *Hranicemi plochy jsou čáry.*

VII. ***Rovinou*** *se nazývá plocha, jež je stejně položená vzhledem je všem přímkám, které v ní leží.*

VIII. ***Úhlem*** *(rovinným) se nazývá vzájemná odchylka protínajících se čar, ležících v téže rovině, avšak neležících v téže přímce.*

Kniha první uvádí **pět postulátů**, kde se požaduje:

I. *Aby každý bod bylo možné spojit s každým bodem přímky,*[4]

II. *aby každou přímku bylo možno neomezeně prodloužit,*

III. *aby z libovolného středu bylo možno opsat kružnici libovolného poloměru,*

IV. *aby si všechny pravé úhly byly rovny,*

V. *aby přímka proťatá dvěma dalšími přímkami tvořící s nimi po jedné své straně přilehlé úhly o součtu menším než 2R, (R je pravý úhel), měla vždy průsečík oněch dalších přímek na této straně.*

Tento pátý postulát tvoří základ teorie o rovnoběžkách. Pomocí něho dokazuje Eukleides větu, že

**Věta 0.1** *K libovolné přímce existuje pouze jediná rovnoběžka, která prochází bodem neležícím na této přímce.*

Až do 19. století byl pátý postulát předmětem mnoha diskuzí, protože ve srovnání se čtyřmi předcházejícími se zdál velmi složitý. Mnozí matematikové se snažili tento postulát odvodit z ostatních Eukleidových postulátů a dokázat jeho nezávislost na předchozích čtyřech, ale jejich snahy byly marné. Teprve v polovině 19. století byla otázka pátého Eukleidova postulátu zodpovězana. Podrobněji se k tomuto problému ještě vrátíme.

[4] Jinak řečeno: I. Každými dvěma různými body lze vést jedinou přímku.

Obr. 1 Ukázka z řeckého přepisu Eukleidových *Základů* z 9. století

**Eukleidovy axiomy**:

*I.* *Veličiny rovné třetí veličině jsou si rovny navzájem.*

*II.* *Jestliže k rovným veličinám připočteme rovné veličiny, obdržíme opět rovné veličiny.*

*III.* *Jestliže od sobě rovných veličin odečteme sobě rovné veličiny, obdržíme opět sobě rovné veličiny.*

*IV.* *Jestliže k nerovným veličinám připočteme sobě rovné veličiny, obdržíme nerovné veličiny.*

*V.* *Jestliže zdvojnásobíme sobě rovné veličiny, získané sobě rovné veličiny.*

*VI.* *Poloviny sobě rovných veličin jsou si rovny.*

*VII.* *Splývající veličiny (obrazce) jsou si rovny.*

*VIII.* *Dvě přímky nemohou omezovat prostor.*

Eukleidovy axiomy jsou obecnější než jeho postuláty. Jak je již zmíněno z definic, postulátů a axiomů plynou pro Eukleida další poučky. Ostatní poučky, na rozdíl od postulátů a axiomů, už nevychází z přímých zkušeností a praxe, a proto je všechny precizně dokazuje. Každý nový pojem a termín definuje pomocí základních definic. Právě tady mají Eukleidovy Základy z matematického hlediska nemalé vady. Například některé základní definice nejsou vyhovující – vyskytují se v nich pojmy jako „část“,

„šířka“, „konec čáry“ atd., které jsou také novými avšak nedefinovanými pojmy. Např. definuje bod jako „to, co nemá částí“, aniž by dříve mluvil o tom, co znamená být částí něčeho. Avšak o části něčeho mluvit nemůžeme, protože ani netušíme, co je to bod. Z toho vyplývá, že nemůžeme definovat ani přímku a rovinu. Dále také výčet Eukleidových axiómů a postulátů není zcela úplný. Eukleidovy *Základy* byly však, i přes některé své vady a nedostatky, po dva tisíce let vzorem učebnice geometrie, kde starořecké abstraktní matematické myšlení dosáhlo svého vrcholu. Tímto matematika získala zvláštní postavení mezi ostatními přírodními vědami. Právě ona začala abstrahovat od vlastností specifických pro mnohé předměty a začala studovat prostorové formy a kvantitativní vztahy, které platí v nejrůznějších oblastech.

### Hilbertovy *Základy geometrie*

Eukleidovy *Základy* byly prvním příkladem použití axiomatického systému v matematice. Již od počátku se však objevovaly mnohé pokusy o vylepšení. Původní Eukleidovy poučky a pojmy byly později podrobně prozkoumány matematiky, podle nichž bylo výhodnější volit za axiomy jiné poučky, než které použil Eukleides. V 19. století především Lobačevskij, Bolyai a Gauss zaujali kritické stanovisko k *Základům* a budování jednotlivých matematických disciplín. Podstatně pomohli k vyjasnění otázky základních geometrických pojmů jako jsou bod, přímka a rovina.

Dále se jednalo o snahy dokázat pátý postulát z prvních čtyř, popř. alespoň o snahy nahradit jej jednodušeji formulovaným tvrzením. Mnohokrát se zdálo, že důkaz byl objeven, ale nakonec se vždy ukázalo, že důkaz se opíral o něco, co měl dokázat. Teprve Lobačevski, Bolyai a Gauss poprvé připustili nezávislost V. postulátu a začali uvažovat o „nové geometrii“, v níž místo V. postulátu platí jeho negace.[5] Tyto kroky vedly postupně k budování tzv. **neeukleidovských geometrií**. Podrobněji se k tématu pátého Eukleidova postulátu ještě vrátíme v kapitole 1.7.

Největší přínos zaznamenaly práce D. Hilberta[6] v díle *Grundlagen der Geometrie (Základy geometrie)* vydaném v roce 1899. V díle pojednává o základech elementární geometrie. Systematicky vybudoval disciplínu v současnosti nazývanou **eukleidovská geometrie**. Hilbert vytvořil tzv. **Systém axiomů eukleidovské geometrie**, které rozdělil do pěti skupin podle toho, jakých vlastností a vztahů mezi body, přímkami a rovinami se týkají.

Hilbertův axiomatický systém pro eukleidovskou geometrii je používán dodnes. I my budeme v textu budovat geometrii tímto způsobem[7] tak, abychom postupně došli ke všem pojmům a vztahům, se kterými se pracuje v geometrii na základní škole.

[5] Nikolaj Ivanovič Lobačevski (1792 – 1856), ruský matematik, dokázal nezávislost pátého postulátu na předchozích čtyřech, tedy dokázal, že se z ostatních Eukleidových základních vět odvodit nedá. K tomuto objevu dospěli nezávisle na něm i maďarský matematik János Bolyai (1802 – 1860) a německý matematik Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855).

[6] David Hilbert (1862 – 1943), německý matematik, vedoucí katedry Univerzity v Göttingenu, jeden z největších matematiků 20. století.

[7] Přičemž ale nebudeme vše důsledně dokazovat, k podrobnějšímu studiu odkazujeme na uvedenou literaturu.

Axiómy popisující eukleidovskou geometrii rozdělíme v souladu s Hilbertem do pěti skupin.

- Axiómy incidence (I)
- Axiómy uspořádání (U)
- Axiómy shodnosti (S)
- Axiómy spojitosti (D = A + C)
- Axióm rovnoběžnosti (R)

Jednotlivým skupinám axiomů se postupně budeme věnovat v odstavcích 1.2, 1.3, 1.7, 2.1 a **??**, přičemž k jejich označní budeme v souladu s literaturou užívat písmena uvedená v závorkách.

## 0.2 Axiomy incidence

Do skupiny axiomů incidence řadíme axiomy, které se týkají bodů, přímek, rovin a vztahů mezi nimi. Vyjadřujeme je např. slovy „bod leží na přímce“, „bod leží v rovině“, „přímka prochází bodem“, „přímka $p$ leží v rovině $\rho$“ (kterému lze rozumět tak, že rovina $\rho$ prochází přímkou $p$) a pod. Všechny uvedené vztahy vyjadřujeme stručně názvem **incidence** (nebo-li spojování).

Do skupiny axiomů incidence patří tyto axiomy:

$\boldsymbol{I_1}$ : **Každé dva navzájem různé body incidují jedinou přímkou.**[8]

$\boldsymbol{I_2}$ : **Každá přímka inciduje alespoň se dvěma různými body.**

$\boldsymbol{I_3}$ : **Existuje aspoň jedna trojice bodů, která neinciduje se žádnou přímkou.**

$\boldsymbol{I_4}$ : **Tři body, které neincidují se žádnou přímkou, incidují s jedinou rovinou.**

$\boldsymbol{I_5}$ : **Každá rovina inciduje aspoň s jedním bodem.**

$\boldsymbol{I_6}$ : **Jestliže dva navzájem různé body přímky incidují s rovinou, pak s touto rovinou incidují všechny body této přímky.**

$\boldsymbol{I_7}$ : **Incidují-li dvě různé roviny s týmž bodem, pak existuje alespoň jeden další bod, se kterým obě tyto roviny incidují.**

$\boldsymbol{I_8}$ : **Existuje aspoň jedna čtveřice bodů, která neinciduje v žádnou rovinou.**

Uvedené axiomy můžeme formulovat i takto:

$I_1$ : *Každými dvěma navzájem různými body prochází jediná přímka.*

[8]Všimněme si, že axiom $I_1$ je shodný s prvním postulátem v Eukleidových základech, viz str. 12.

$I_2$ : *Na každé přímce leží aspoň dva navzájem různé body.*

$I_3$ : *Existuje aspoň jedna trojice bodů, které neleží na žádné přímce.*

$I_4$ : *Třemi body, které neleží v žádné přímce, prochází jediná rovina.*

$I_5$ : *V každé rovině leží aspoň jeden bod.*

$I_6$ : *Jestliže dva navzájem různé body přímky leží v rovině, pak v této rovině leží všechny body této přímky.*

$I_7$ : *Mají-li dvě různé roviny společný bod, pak mají společný ještě aspoň jeden další bod.*

$I_8$ : *Existuje aspoň jedna čtveřice bodů, která neleží v žádné rovině.*

Užitím axiomů incidence můžeme dokázat některé jednoduché geometrické věty. Ukážeme dvě z nich:

**Věta 0.2** *Přímka a bod, který na ní neleží incidují právě s jednou rovinou.*

Uvědomme si, že znění věty 1.2 běžně vyjadřujeme a používáme na základní škole v této podobě: *Rovina je jednoznačně určena přímkou a bodem, který na ní neleží.*

**Důkaz:** *Označme danou přímku $p$ daný bod $A$. Podle $I_2$ existují na přímce $p$ dva různé body. Označme je $B$, $C$. Body $A$, $B$, $C$ neleží v přímce a podle $I_4$ jimi prochází jediná rovina, které podle $I_6$ obsahuje i přímku $p$. Tím je věta 1.2 dokázána na základě axiomů $I_2$, $I_4$ a $I_6$.* □

**Věta 0.3** *Mají-li dvě roviny společný bod, pak existuje přímka patřící oběma těmto rovinám.*

**Důkaz:** *Označme uvažované roviny $\alpha$, $\beta$. Mají-li tyto roviny společný bod, označme ho např. $A$, pak mají podle axiomu $I_7$ ještě další společný bod, označme ho např. $B$. Body $A$, $B$ jsou tedy různé a podle $I_1$ je jimi určena jediná přímka. Podle axiomu $I_6$ patří tato přímka jak rovině $\alpha$, tak rovině $\beta$. Tím je věta 1.3 dokázána.* □

Axiomy incidence zaručují existenci nejvýše dvou různých bodů na přímce. To že přímka obsahuje více než dva různé body, nelze dokázat pouze užitím těchto axiomů. K dokázání tohoto tvrzení je nutno užít axiomy další skupiny, axiomy uspořádání.

## 0.3 Axiomy uspořádání

Uspořádání bodů na přímce se zakládá na vztahu *bod leží mezi jinými dvěma body.* Vlastnosti tohoto vztahu vyjadřují následující axiomy uspořádíní:

$\boldsymbol{U_1}$ : **Leží-li bod $\boldsymbol{B}$ mezi body $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$, jsou $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, tři různé body přímky a platí též, že bod $\boldsymbol{B}$ leží mezi body $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{A}$.**

$\boldsymbol{U_2}$ : **Jsou-li $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ dva různé body, pak na přímce procházející body $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ existuje aspoň jeden bod $\boldsymbol{C}$ takový, že bod $\boldsymbol{B}$ leží mezi body $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$.**

$\boldsymbol{U_3}$ : **Ze tří různých bodů na přímce leží nejvýše jeden mezi zbývajícími dvěma.**

$\boldsymbol{U_4}$ : **(Paschův[9] axiom) Jsou-li $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ tři body, které neleží v přímce, a $\boldsymbol{p}$ přímka roviny určené body $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, která neprochází žádným z bodů $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ a která obsahuje jistý bod $\boldsymbol{D}$ ležící mezi body $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, potom obsahuje přímka $\boldsymbol{p}$ buď jistý bod $\boldsymbol{E}$ ležící mezi body $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ nebo jistý bod $\boldsymbol{F}$ ležící mezi body $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{A}$.**

Z formulace axiomů uspořádání je zřejmé, že se již předpokládá zavedení pojmu **incidence**. Axiomy $\boldsymbol{U_1} - \boldsymbol{U_3}$ se týkají uspořádání bodů na přímce. V axiomu $\boldsymbol{U_3}$ se netvrdí „právě jeden“, neboť toto tvrzení lze již odvodit.

Užitím axiomů incidence a uspořádání lze již dokázat např. tato tvrzení:

**Věta 0.4** *Mezi každými dvěma různými body leží alespoň jeden bod.*

**Důkaz:** *Nechť $A$, $B$ jsou dva různé body (obr. 1.2). Podle $I_3$ existuje bod $D$ tak, že body $A$, $B$, $D$ neleží v přímce. Podle $I_4$ prochází body $A$, $B$, $D$ jediná rovina $\alpha$. Body $A$, $D$ prochází podle $I_1$ jediná přímka, která podle $I_6$ leží v rovině $\alpha$. Přímky $AB$ a $AD$ jsou tedy různé a mají jediný společný bod $A$.*

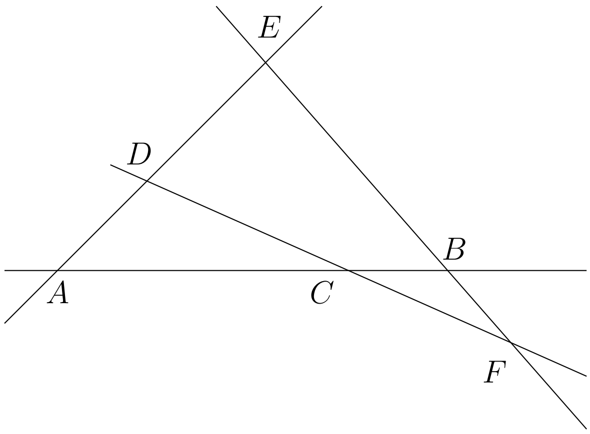
*Podle $U_2$ existuje na přímce $AD$ bod $E$ tak, že $D$ leží mezi body $A$, $E$. Bod $E$ leží v rovině $\alpha$. Není však bodem přímky $AB$, neboť přímky $AB$ a $AD$ mají společný pouze bod $A$. Body $E$, $B$ jsou tedy různé a podle $I_1$ je jim určena jediná přímka. Podle $I_6$ leží tato přímka v téže rovině $\alpha$. Na přímce $EB$ existuje bod $F$ tak, že bod $B$ leží mezi body $F$, $E$ (podle $I_2$). Bod $F$ leží v rovině $\alpha$, ale neleží na přímce $AB$. Snadno se přesvědčíme, že přímky $EB$, $AB$ jsou různé a mají jediný společný bod $B$. Na body $A$, $B$, $E$ a přímku $DF$ užijeme Paschův axiom. Odtud vyplývá: Protože bod $F$ přímky $DF$ neleží mezi body $E$, $B$ a bod $D$ leží mezi body $A$, $E$, existuje takový bod $C$ přímky $DF$, který leží mezi body $A$, $B$. Tím je věta 1.4 dokázána.* □

**Věta 0.5** *Na každé přímce leží nekonečně mnoho bodů.*

**Věta 0.6** *V každé rovině leží nekonečně mnoho bodů.*

**Důkaz:** *Viz cvičení 1.1.* □

[9] Moritz Pasch (1843 - 1930), německý matematik specializující se na základy geometrie. V Eukleidových *Základech* našel řadu skrytých předpokladů, kterých si nikdo předtím nevšiml.




Obr. 2

Základní pojmy *bod, přímka, rovina* jsou reprezentovány jednotlivými body, přímkami, rovinami, pod nimiž rozumíme objekty vyhovující jednotlivým axiomům. Tyto objekty jsou množinami bodů. Množinu všech bodů nazveme ***prostorem***.

***Geometrickým útvarem*** budeme dále rozumět každou neprázdnou množinu bodů prostoru. Přitom bude-li podmnožinou jisté roviny, budeme ho nazývat rovinný geometrický úrvar. Nebude-li podmnožinou žádné roviny, budeme ho nazývat prostorový geometrický útvar.

## 0.4 Úsečka, polopřímka, polorovina, poloprostor

Na základě axiomů incidence a uspořádání je nyní možno definovat úsečku, polopřímku, polorovinu a poloprostor. Pro stručné zápisy těchto definic užijeme geometrickou symboliku zavedenou na základní škole, množinovou symboliku a některé symboly matematické logiky – viz přehled užitých symbolů na straně 5. Nebude-li řečeno jinak, budeme základní množinou $Z$ rozumět prostor.

**Definice 0.1** ***Úsečka*** $AB$ je množina všech bodů prostoru, která obsahuje body $A$, $B$ a dále všechny body, které leží mezi body $A$, $B$.

$$AB = \{X \in Z; X = A \vee X = B \vee X\mu AB\}.$$

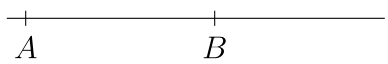
Zápis $X\mu AB$ čteme „bod $X$ leží mezi body $A$, $B$“.


Obr. 3

**Definice 0.2** ***Polopřímka*** $AB$ je množina všech bodů prostoru, která obsahuje všechny body úsečky $AB$ a dále všechny takové body $X$, pro které platí, že bod $B$ leží mezi body $A$, $X$.

$$\mapsto AB = \{X \in Z; X \in AB \vee B\mu AX\}.$$

Bod $A$ nazýváme počátek polopřímky $AB$.




Obr. 4

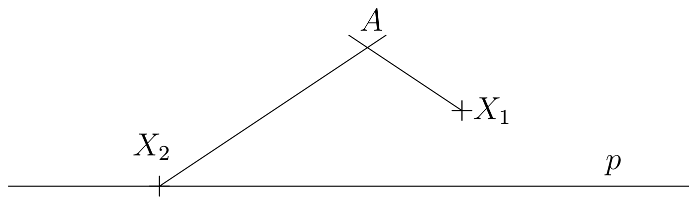
**Definice 0.3** ***Polopřímka opačná k polopřímce*** $AB$ je množina všech bodů prostoru, která obsahuje bod $A$ a dále všechny takové body $X$, pro které platí, že bod $A$ leží mezi body $X$, $B$.

$$\mapsto AB = \{X \in Z; X \in AB \vee A\mu XB\}.$$

Bod $A$ nazýváme počátek polopřímky opačné k polopřímce $AB$.

**Definice 0.4** Nechť $p$ je přímka a $A$ bod, který na ní neleží. ***Polorovinou*** $pA$ nazýváme množinu všech bodů $X$ roviny $pA$, pro které platí, že mezi body $A$, $X$ neleží žádný bod přímky $p$.
Přímku $p$ nazýváme *hraniční přímka poloroviny* $pA$, někdy též *počátek poloroviny* $pA$.

Je-li X bod poloroviny $pA$, je průnikem úsečky $AX$ a přímky $p$ buď množina prázdná nebo množina o jediném prvku $X$, který je bodem přímky $p$ (obr. 1.5). Této skutečnosti lze také užít k definici poloroviny $pA$. Zapíšeme ji symbolicky



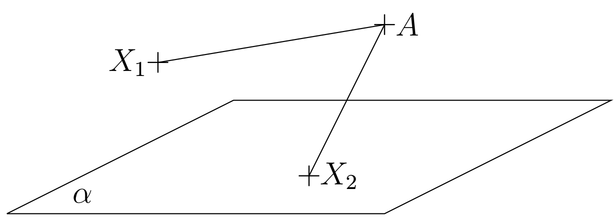

Obr. 5

$$\mapsto pA = \{X \in \leftrightarrow pA; AX \cap p = \emptyset \vee AX \cap p = \{X\}\}\,.$$

**Definice 0.5** Nechť $\alpha$ je rovina a $A$ bod, který v ní neleží. ***Poloprostorem*** $\alpha A$ nazýváme množinu všech bodů $X$ prostoru, pro které platí, že mezi body $A$, $X$ neleží žádný bod roviny $\alpha$.
Rovinu $\alpha$ nazýváme *hraniční rovinou poloprostoru* $\alpha A$.

Z definice 1.5 je zřejmé, že průnikem úsečky $AX$, kde $X \in \mapsto \alpha A$, s rovinou $\alpha$ je buď prázdná množina nebo množina $X \in \alpha$ (obr. 1.6).

Tuto skutečnost lze užít v definici poloprostoru $\alpha A$ ekvivalentní s definicí 1.5, kterou symbolicky zapíšeme




Obr. 6

$$\mapsto \alpha A = \{X \in \ Z; AX \cap \alpha = \emptyset \vee AX \cap \alpha = \{X\}\}\,.$$

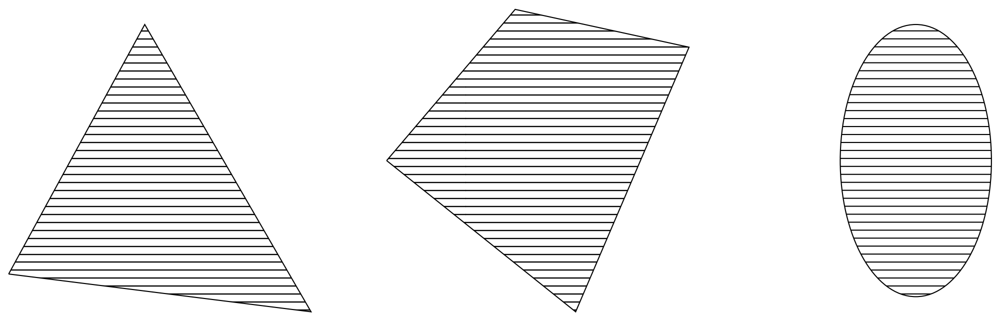
## 0.1 Konvexní a nekonvexní množiny bodů

**Definice 0.1** Množina bodů se nazývá ***konvexní***, jestliže pro každé dva její body $X$, $Y$ platí, že úsečka $XY$ je její podmnožinou. Prázdnou množinu a jednobodové množiny považujeme také za konvexní.
Symbolicky zapsáno:

$$M \text{ je konvexní množina} \Leftrightarrow (\forall X, Y \in M)[XY \subset M \vee M = \emptyset \vee M = \{X\}].$$

Množina bodů, která není konvexní se nazývá *nekonvexní*.

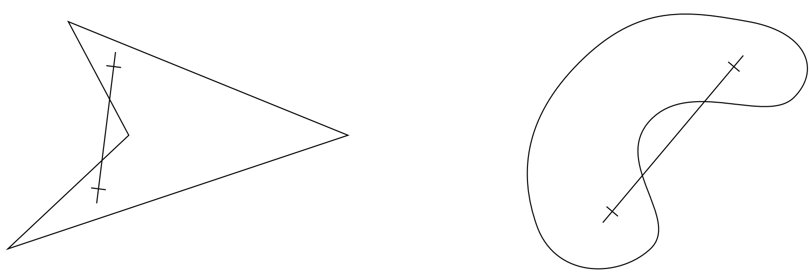
**Příklad 0.1** Příklady konvexních množin bodů jsou znázorněny na obrázku 1. Příkladem



*a*) *b*) *c*)

Obr. 1

konvexní množiny bodů je také přímka, rovina, úsečka, polopřímka, polorovina a poloprostor.
Příklady nekonvexních množin bodů jsou znázorněny na obrázku 2.



*a*) *b*)

Obr. 2

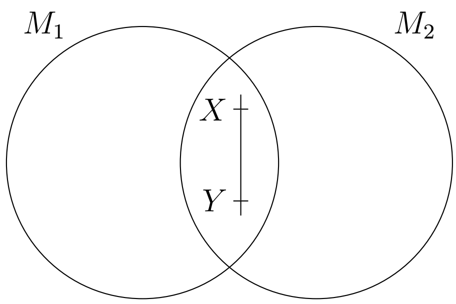
Abychom dokázali, že daný geometrický útvar $U$ je nekonvexní, stačí nalézt jedinou jeho dvojici bodů $X$, $Y$ takových, že úsečka $XY$ není podmnožinou útvaru $U$, tj. symbolicky zapsáno

$$U \text{ je nekonvexní množina bodů} \Leftrightarrow (\exists\ X, Y \in U)[XY \not\subseteq U].$$

Dokázat konvexnost útvaru bývá obtížnější. Někdy lze s výhodou užít následující větu:

**Věta 0.1** *Průnik dvou konvexních množin bodů je konvexní množina bodů.*

**Důkaz:** *Označme uvažované množiny $M_1$, $M_2$. Je-li $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ nebo je $M_1 \cap M_2$ jednoprvková množina, je zřejmé, že věta platí. Nechť tedy $M_1 \cap M_2$ obsahuje alespoň dva různé body (viz obr. 3). Pak pro každé dva různé body $X, Y \in M_1 \cap M_2$ platí: $X \in M_1$, $Y \in M_1$, $X \in M_2$, $Y \in M_2$. Množiny $M_1$, $M_2$ jsou konvexní a tedy $XY \subset M_1$ a $XY \subset M_2$. Odtud plyne, že úsečka $XY \subset M_1 \cap M_2$. Množina $M_1 \cap M_2$ je tedy konvexní.*




Obr. 3

Užitím věty 0.1 lze indukcí snadno dokázat, že průnik konečného počtu konvexních množin je konvexní množina bodů.

## 0.2 Úhel, trojúhelník, čtyřstěn

V souladu s axiomatickou výstavbou geometrie užijeme dosud zavedených pojmů k definicím konvexního a nekonvexního úhlu, trojúhelníku a čtyřštěnu.

Na střední škole jsme třídili úhly většinou podle jejich velikosti. Rozlišovali jsme např. úhly duté, jejichž velikost byla větší než 0° a menší než 180°, úhly přímé, úhly o velikosti větší než 180° a menší než 360°. Charakteristickými pojmy spojenými s úhlem byly vrchol úhlu a ramena úhlu, pomocí nichž se úhel obvykle intuitivně zavádí.

V další textu budeme definovat konvexní a nekonvexní úhel a poznáme, že všechny úhly patřící k některému dříve poznanému typu lze zařadit buď mezi konvexní nebo mezi nekonvexní úhly.

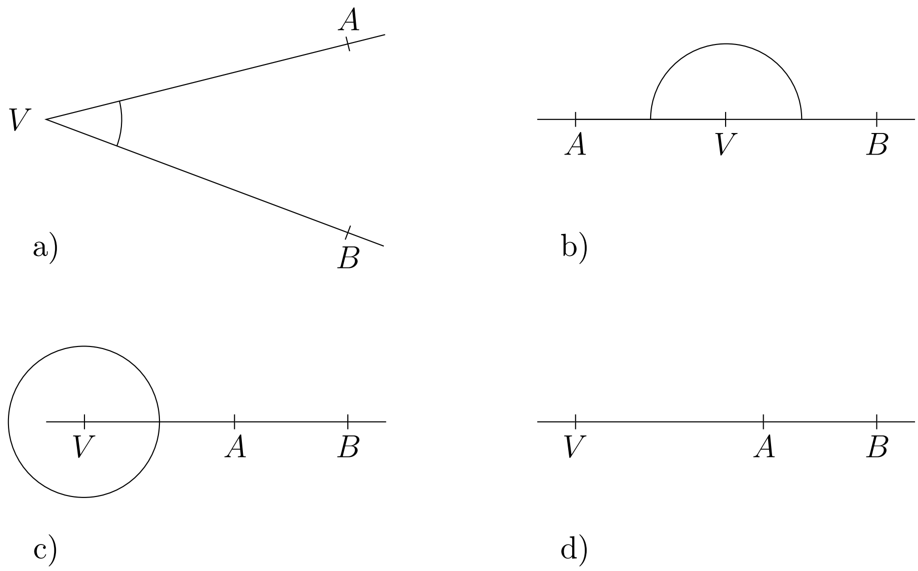
**Definice 0.2** Nechť $A, V, B$ jsou tři libovolné navzájem různé body. ***Konvexním úhlem AVB*** pak nazýváme:

a. Průnik polorovnin $AVB$ a $BVA$ v případě, že body $A$, $V$, $B$ neleží v přímce (viz obr. 4 a).[1]

b. Leží-li body $A$, $V$, $B$ v přímce a bod $V$ leží mezi body $A$, $B$, lze za množinu všech bodů konvexního úhlu $AVB$ považovat každou polorovinu s hraniční přímkou AB (viz obr. 4 b).[2]

c. Leží-li body $A$, $V$, $B$ v přímce a bod $V$ neleleží mezi body $A$, $B$, lze za množinu všech bodů konvexního úhlu $AVB$ považovat každou rovinu obsahující přímku $AB$ (viz obr. 4 c) i každou polopřímku $VA$ (viz obr. 4 d).

*Vrcholem* konvexního úhlu $AVB$ nazýváme ve všech případech bod V, *rameny* konvexního úhlu nazýváme ve všech případech polopřímky $VA$, $VB$.




Obr. 4

Pro konvexní úhel $AVB$ užíváme označení $\sphericalangle AVB$.

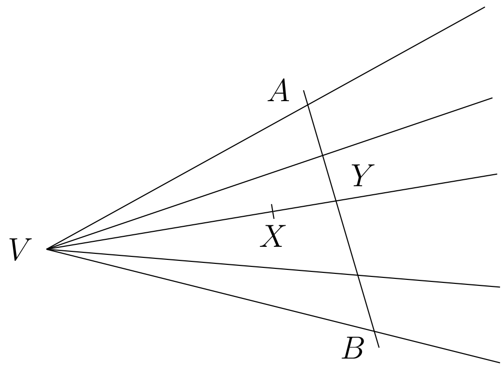
Konvexní úhly definované ve všech případech jsou konvexními množinami bodů, což plyne z konvexnosti roviny, poloroviny, polopřímky a věty 0.1. Název konvexní úhel tedy vyjadřuje, že se jedná o konvexní geometrický útvar.

**Poznámka 0.1** Uvědomíme si, že v definici konvexního úhlu je obsažen *úhel dutý* – viz případ a), *úhel přímý* – viz případ b), *úhel plný* – viz případ c) i úhel nulový – viz případ d).

[1] Je zřejmé, že takto lze definovat úhly ostré, pravé a tupé.

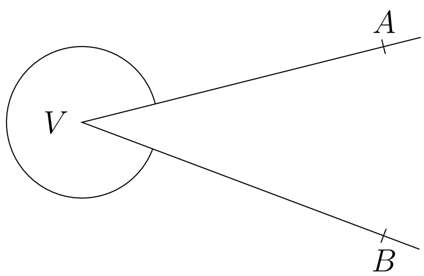
[2] Je zřejmé, že v tomto případě jde o přímý úhel s vrcholem $V$ a rameny $VA$, $VB$.

**Poznámka 0.2** Konvexní úhel $AVB$, který je definován v případě a) definice 0.2, tj. úhel dutý, jehož ramena leží v různoběžných přímkách, lze definovat také takto: Neleží-li body $A$, $V$, $B$ v přímce, nazýváme konvexním úhlem $AVB$ množinu všech bodů $X$ roviny $AVB$, k nimž existuje bod $Y$ úsečky $AB$ takový, že $X$ patří polopřímce $VY$ (viz obr. 5).




Obr. 5

**Definice 0.3** Nechť $A$, $V$, $B$ jsou tři body, které neleží v přímce. Potom sjednocení doplňku konvexního úhlu $AVB$ v rovině $AVB$ a polopřímek $VA$ a $VB$ nazýváme ***nekonvexním úhlem*** $AVB$ (viz obr. 6).




Obr. 6

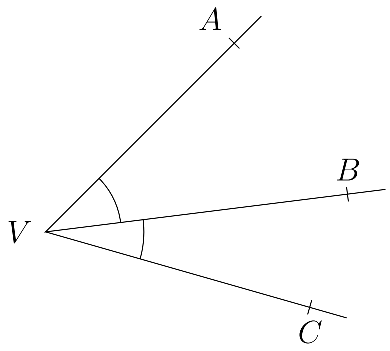
Pro nekonvexní úhel $AVB$ užíváme označení $\sphericalangle AVB$.

**Poznámka 0.3** Název ***nekonvexní*** úhel $AVB$ vyjadřuje, že jde o nekonvexní množinu bodů, což vyplývá např. z toho, že $A \in \sphericalangle AVB$, $B \in \sphericalangle AVB$ a $AB \not\subset \sphericalangle AVB$.

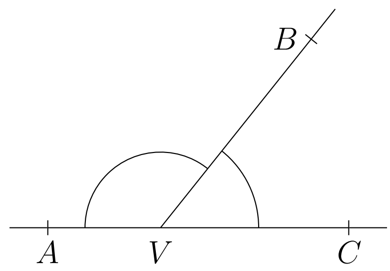
Sjednocením množiny všech konvexních a množiny všech nekonvexních úhlů je ***množina všech úhlů***.

**Definice 0.4** Úhly $AVB$, $BVC$ nazýváme ***styčné*** právě tehdy, když jejich průnikem je polopřímka $VB$ a zároveň leží oba v téže rovině (viz obr. 7).

**Definice 0.5** Dva styčné úhly, jejichž sjednocením je přímý úhel, nazýváme ***vedlejší*** úhly (viz obr. 8).



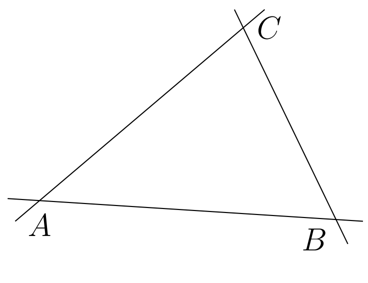

Obr. 7




Obr. 8

**Definice 0.6** Nechť $A$, $B$, $C$ jsou tři libovolné body neležící v přímce. ***Trojúhelníkem*** $ABC$ nazveme průnik polorovin $ABC$, $ACB$, $BCA$ (viz obr. 9).
Symbolicky zapsáno:

$$\triangle ABC = \mapsto ABC \cap \mapsto ACB \cap \mapsto BCA.$$




Obr. 9

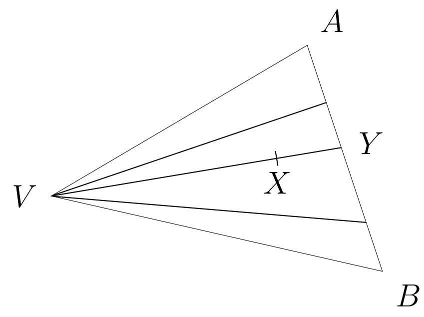
Body $A$, $B$, $C$ nazýváme *vrcholy* trojúhelníka $ABC$, úsečky $AB$, $BC$, $CA$ nazýváme *strany* trojúhelníka $ABC$ a úhly $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ACB$ nazýváme *vnitřní úhly* trojúhelníka $ABC$.

**Poznámka 0.4** Z definice 0.6 a věty 0.1 vyplývá, že trojúhelník je konvexní útvar, neboť je definován jako průnik polorovin, což jsou konvexní množiny.

Uvedeme nyní ještě jinou možnost, jak definovat trojúhelník pomocí pojmů dříve zavedených:

**Definice 0.7** Nechť $A$, $B$, $C$ jsou tři libovolné navzájem různé body neležící v přímce. ***Trojúhelníkem*** $ABC$ nazveme množinu všech bodů $X$ prostoru, které patří všem úsečkám $AY$, kde $Y$ patří úsečce $BC$ (viz obr. 10).
Symbolicky zapsáno:

$$\triangle ABC = \{X \in Z;\ X \in AY \wedge Y \in BC\}.$$




Obr. 10

Definice 0.6 a 0.7 jsou příklady ekvivalentních definic jednoho a téhož pojmu. Při zavedení trojúhelníku definicí 0.7 je užito pouze pojmů bod, úsečka a vztahu bod patřící úsečce. Tento princip určení bodů náležících trojúhelníku může být užit k prohloubení intuitivního chápání trojúhelníku na 1. stupni základních škol.

Trojúhelník je rovinný mnohoúhelník s nejmenším počtem vrcholů. V prostoru je mnohostěn s nejmenším počtem vrcholů čtyřstěn. Jde tu o jistou analogii mezi těmito dvěma útvary, která je patrná i při porovnání následujících dvou definic s definicemi 0.6 a 0.7 trojúhelníka.

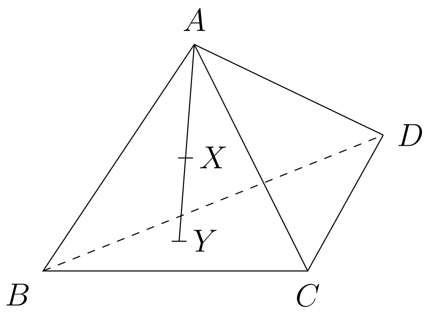
**Definice 0.8** Nechť $A$, $B$, $C$, $D$ jsou čtyři body neležící v jedné rovině. ***Čtyřstěnem*** $ABCD$ nazveme průnik poloprostorů $ABCD$, $ABDC$, $ACDB$, $CDBA$.
Symbolicky zapsáno:

$$\text{čtyřstěn } ABCD = \mapsto ABCD \cap \mapsto ABDC \cap \mapsto ACDB \cap \mapsto CDBA.$$

Body $A$, $B$, $C$, $D$ nazýváme *vrcholy* čtyřstěnu $ABCD$, úsečky $AB$, $BC$, $CA$, $AD$, $BD$, $CD$ nazýváme *hrany* čtyřstěnu $ABCD$ a trojúhelníky $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$, $\triangle ABD$ nazýváme *stěny* čtyřstěnu $ABCD$.

**Definice 0.9** Nechť $A$, $B$, $C$, $D$ jsou čtyři body neležící v jedné rovině. ***Čtyřstěnem*** $ABCD$ nazveme množinu všech bodů $X$ prostoru, které patří všem úsečkám $AY$, kde $Y$ patří trojúhelníku $BCD$ (viz obr. 11).
Symbolicky zapsáno:

$$\text{čtyřstěn } ABCD = \{X \in Z;\ X \in AY \wedge Y \in \triangle BCD\}.$$




Obr. 11

**Poznámka 0.5** Z definice 0.8 a věty 0.1 vyplývá, že čtyřstěn je konvexní množina bodů, neboť je definován jako průnik poloprostorů, což jsou konvexní množiny.

Princip určení bodů náležejících čtyřstěnu v definici 0.9 může být užit k prohloubení intuitivního chápání čtyřstěnu na 1. stupni základních škol (podobně jako definice 0.7 k intuitivnímu chápání pojmu trojúhelník). Neznamená to však, že by se žáci seznamovali s těmito definicemi právě v této podobě.

## Cvičení:

■ **0.1** Srovnejte zavedenou definici úhlu s definicí úhlu z Eukleidových základů na straně **??**, definice VIII. V čem se tyto definice liší?

■ **0.2** Načrtněte dva konvexní rovinné útvary takové, že jejich
a) sjednocení je množina konvexní,
b) sjednocení je množina nekonvexní,
c) průnik je množina konvexní,
d) průnik je množina nekonvexní.
Totéž zadání a) – d) proveďte pro dva nekonvexní rovinné útvary.

■ **0.3** Načrtněte a rozhodněte, zda se jedná o konvexní bodovou množinu:
a) trojúhelník $ABC$ bez svých vrcholů,
b) trojúhelník $KLM$ bez jednoho vnitřního bodu jedné své strany,
c) sjednocení vnitřku libovolného trojúhelníka a dvou různých bodů jeho obvodu,
d) rozdíl konvexního úhlu $AVB$ a jeho ramene $VA$,
e) rozdíl čtverce $ABCD$ a sjednocení dvou jeho stran,
f) sjednocení vnitřku čtverce $ABCD$ a dvou jeho stran,
g) kružnice,
h) kruh.

■ **0.4** Vyšetřete všechny geometrické útvary, které mohou vzniknout jako průnik dvou trojúhelníků. Znázorněte a popište.

■ **0.5** Volte dvojice konvexních úhlů (nikoliv úhly plné nebo nulové). Vyšetřete, které geometrické útvary mohou vzniknout jako průnik těchto úhlů? všechny případy znázorněte a popište.

■ **0.6** Zopakujte si definici nekonvexního úhlu $AVB$ a nekonvexní úhel $AVB$ definujte ještě jiným způsobem (ekvivalentní definicí). Lze definovat nekonvexní úhel jako sjednocení nebo průnik dvou polorovin? Odpověď zdůvodněte.

■ **0.7** Definujte trojúhelník $KLM$ jako a) průnik tří polorovin,
b) průnik konvexního úhlu a poloroviny.
Znázorněte a definice symbolicky zapište.

■ **0.8** V trojúhelníku $ABC$ vyznačte vnitřní úhly. Ke každému z vnitřních úhlů určete úhel vedlejší, tzv. *vnější úhel trojúhelníku.* Kolik existuje v každém trojúhelníku jeho vnějších úhlů?

■ **0.9** Zvolte různoběžné přímky $p$, $q$, jejich průsečík označte $V$. Na přímce $p$ zvolte bod $P$, na přmce $q$, bod $Q$. Každou z dvojic vrcholových a vedlejších úhlů určených různoběžkami $p$, $q$ definujte pomocí polorovin $pQ$, $qP$ nebo polorovin k nim opačných. Zapište symbolickým zápisem.

■ **0.10** Na základě znalostí ze střední školy zobrazte: a) rovnoramenný trojúhelník, b) rovnostranný trojúhelník, c) čtverec, d) pravidelný šestiúhelník, e) pravidelný pětiúhelník.

■ **0.11** Načrtněte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ se středem $S$ a na obrázku vyznačte dvojice úhlů a) styčných (nikoliv vedlejších), b) vedlejších, c) vrcholových, d) souhlasných, e) střídavých, f) přilehlých.

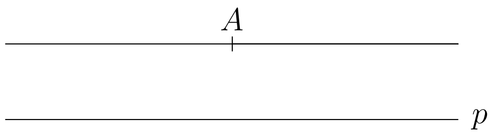
■ **0.12** Zobrazte čtyřstěn $ABCD$ a určete jeho průnik s poloprostorem $EFGH$, jestliže bod $A$ leží mezi body $E$, $C$, bod $B$ mezi body $F$, $C$ a bod $G$ mezi body $D$, $C$.

## 0.1 Axiom rovnoběžnosti a neeukleidovské geometrie

Uvažujeme-li rovinu určenou přímkou $p$ a bodem $A \notin p$, víme, že v této rovině existuje jediná přímka procházející bodem $A$, která nemá s přímkou $p$ žádný společný bod.

Tuto nám zřejmou skutečnost není možné odvodit z dosud zavedených axiomů incidence a uspořádání, a to ani tehdy, když knim přidáme další dvě skupiny axiomů – axiomy shodnosti a axiomy spojitosti, se kterými se seznámíme v dalším textu. Tuto skutečnost je třeba také zavést axiomaticky a vyjadřuje ji tzv. **axiom rovnoběžnosti** (známý také jako **pátý Eukleidův postulát**), který označíme R.

***R***: **Nechť $p$ je přímka a $A$ bod, který na ní neleží. Pak v rovině určené přímkou $p$ a bodem $A$ existuje právě jedna přímka procházející bodem $A$, která nemá s přímkou $p$ žádný společný bod.**




Obr. 1

Přímka procházející bodem $A$, o níž se hovoří v axiomu R, se nazývá *rovnoběžka* s přímkou $p$. Axiom R zavádí do geometrie vztah rovnoběžnosti přímek.

**Definice 0.1** *Rovnoběžnými* nazýváme takové dvě přímky, které leží v jedné rovině a nemají společný bod, nebo dvě splývající přímky.

Vztah rovnoběžnosti přímek je zřejmě reflexivní a symetrický a též tranzitivní.

**Věta 0.1** *Nechť $p$, $q$, $r$ jsou tři libovolné přímky. Platí-li že $p \parallel q$ a $q \parallel r$, pak je též $p \parallel r$.*

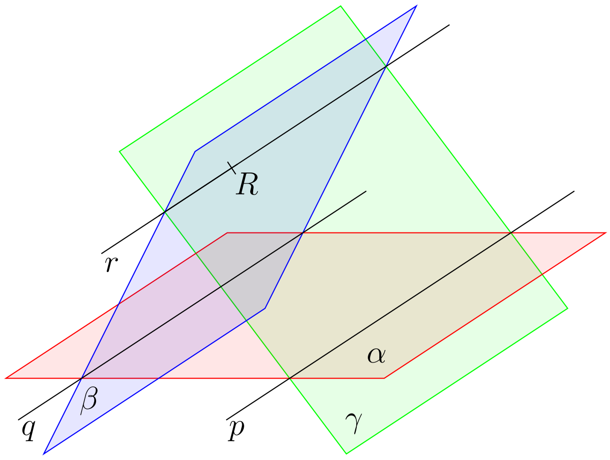
**Důkaz:** *Věta zřejmě platí, je-li $q = r$ nebo $p = q$ nebo $p = r$. Předpokládejme tedy, že přímky $p$, $q$, $r$ jsou po dvou různé a uvažujme dvě možnosti:*

*1) $p$, $q$, $r$ leží v jedné rovině,*

*2) $p$, $q$, $r$ neleží v jedné rovině.*

*Ad 1) Přímky $p$, $r$ nemohou mít společný bod, neboť pak by tímto bodem procházely dvě různé rovnoběžky s přímkou $q$. Je tedy $p \parallel q$.*

*Ad 2) Rovinu, v níž leží přímky $p$, $q$ označme $\alpha$ a rovinu, v níž leží přímky $q$, $r$, označme $\beta$. Protože $q \cap r = \emptyset$ a $\alpha \cap \beta = q$, je $\alpha \cap r = \emptyset$. Protože $p \cap q = \emptyset$, $p \subset \alpha$ a*




Obr. 2

*$\alpha \cap \beta = q$, je také $\beta \cap p = \emptyset$. Zvolme na přímce $r$ bod $R$ a rovinu určenou přímkou $p$ a bodem $R$ označme $\gamma$ (viz obr. 1.19).*

*Protože $R \notin \alpha$, je $\gamma \cap \alpha = p$. Vzhledem k tomu, že $\beta \cap \alpha = q$, $\gamma \cap \alpha = p$ a $p \cap q = \emptyset$, je $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \emptyset$. Protože $p \not\subset \beta$, je $\beta \neq \gamma$, ale bod $R \in \beta \cap \gamma$. To znamená, že existuje přímka $k = \beta \cap \gamma$. Protože platí $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \emptyset$, je $k \cap \alpha = \emptyset$ a též $k \cap q = \emptyset$. Protože $R \in k$, je $r = k$. Je tedy $r \subset \gamma$ a platí $r \cap \alpha = \emptyset$. Protože $p \subset \alpha$, je též $r \cap p = \emptyset$.*

*Celkem tedy dostáváme: $r \subset \gamma$, $p \subset \gamma$ a $r \cap p = \emptyset$. Odtud plyne, že $p \parallel r$, což jsme měli dokázat.* □

Geometrie vybudovaná jen z uvedených čtyř skupin axiomů (incidence, uspořádání, shodnosti a spojitosti) se nazývá geometrie absolutní.[1] Přidáme-li k těmto axiomům ještě axiom rovnoběžnosti, formulovaný původně jako V. Eukleidův postulát, dostáváme tzv. **eukleidovskou geometrii**.[2] Eukleidovská geometrie je právě ta geometrie, kterou jsme intuitivně zavedli na základní a střední škole, v níž tvrzení axiomu rovnoběžnosti bereme jako zřejmou skutečnost. Jak již bylo naznačeno v historických souvislostech na straně 16, právě fakt, že tvrzení axiomu rovnoběžnosti není možno odvodit z výše uvedených axiomů, patří v matematice k objevům zásadního významu.

Dlouhá staletí se jej matematici bezúspěšně snažili dokázat z předchozích čtyř, což nakonec vedlo v 19. století[3] k objevu **neeukleidovské geometrie**. Neeukleidovská geometrie – někdy také nazývaná Lobačevského geometrie – je tedy taková geometrie, která k prvním čtyřem skupinám axiomů přidává negaci axiomu rovnoběžnosti. (Tj. v axiomu rovnoběžnosti nahradí tvrzení „existuje právě jedna“, buď tvrzením „neexistuje žádná“ nebo „existují alespoň dvě“.)

[1]V absolutní geometrii lze dokázat, že existuje v rovině určené přímkou $p$ a bodem $A$ *alespoň jedna přímka*, která prochází bodem A a nemá s přímkou p žádný společný bod. Pak bychom axiom rovnoběžnosti mohli vyslovit se silnějším tvrzením *právě jedna* na místo *nejvýše jedna*.

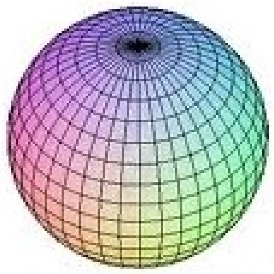
[2]Pátý postulát formulovaný Eukleidem ve spise *Základy*, viz strana 14, postulát V., obsahuje tvrzení ekvivalentní uvedenému axiomu R.

[3]Více historických poznámek k objevu neeukleidovské geometrie na straně 16.

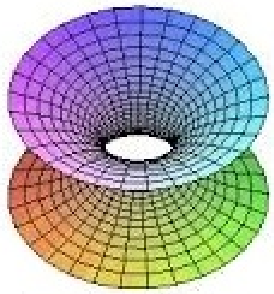
Podle toho, jakým způsobem pátý axiom popřeme, rozlišujeme dva základní typy neeukleidovské geometrie – sférickou geometrii a hyperbolickou geometrii.

**Sférický axiom:** Nechť $p$ je přímka a $A$ bod, který na ní neleží. Pak v rovině určené přímkou $p$ a bodem $A$ neexistuje žádná přímka vedená bodem $A$, která neprotíná $p$.

**Hyperbolický axiom:** Nechť $p$ je přímka a $A$ bod, který na ní neleží. Pak v rovině určené přímkou $p$ a bodem $A$ existují nejméně dvě různé přímky vedené bodem $A$, které neprotínají $p$.



Obr. 3 Sféra



Obr. 4 Pseudosféra

Tyto geometrie si nelze snadno představit v rovině, ale mnoho vztahů a souvislostí neeukleidovských geometrií je možné pochopit na modelech geometrií, kdy místo roviny uvažujeme tzv. Lobačevského rovinu[4] nebo plochy, které jsou nějakým způsobem zakřivené. Názvy eliptická geometrie (resp. sférická) a hyperbolická geometrie vychází právě z toho, jaký mají tyto geometrie model. Nejjednodušším modelem eliptické geometrie je povrch koule (sféra), kde přímky jsou „velké“ kružnice (průniky sféry s rovinami, které procházejí jejím středem), viz obr. 1.20. Hyperbolickou geometrii lze kreslit například na tzv. pseudosféru, viz obr. 1.21.

**Poznámka 0.1** V neeukleidovských geometriích platí některá tvrzení zcela odlišná od tvrzení, která známe v eukleidovské geometrii. Např. uvedeme souvislost axiomu rovnoběžnosti, případně jeho negace, se součtem úhlů v trojúhelníku. Jednou ze základních vět eukleidovské geometrie je ta, která říká, že součet velikostí všech vnitřních

[4]Model Lobačevského roviny pochází od matematiků E. Beltramiho (1835 – 1900) a F. Kleina (1849 – 1925). Uvažujeme rovinu ve smyslu eukleidovské geometrie a nechť je v této rovině dán kruh. Lobačevského rovinou (tj. L-rovinou) rozumíme množinu všech vnitřních bodů tohoto kruhu. Tyto body jsou body Lobačevského roviny, tj. L-body. L-přímkami rozumíme všechny tětivy uvažovaného kruhu, ale bez jejích krajních bodů. Např. vztah L-bod leží mezi jinými dvěma L-body je stejný jako pro tyto body v eukleidovské rovině a podobně v tomto modelu není obtížné prověřit, že platí axiomy incidence a uspořádání. Shodnost je však definovaná jinak než v eukleidovské geometrii. Z tohoto modelu je zřejmé, že bodem $A$ prochází dokonce nekonečně mnoho přímek, které nemají s přímkou $p$ společný bod.

úhlů v trojúhelníku je roven 180°. Tato věta je ekvivalentní axiomu rovnoběžnosti. V neeukleidovské geometrii se tedy součet úhlů v trojúhelníku liší od 180°:[5]

- Ve sférické geometrii je součet velikostí všech vnitřních úhlů v trojúhelníku větší než 180°.
- V hyperbolické geometrii je součet velikostí všech vnitřních úhlů v trojúhelníku menší než 180°.

Pro představivost poslouží modely na obrázcích 1.20, 1.21. Důkazy přesahují rámec tohoto textu a lze je nalézt např. v [**?**].

Fakt, že existuje více geometrií, vede přirozeně k otázkám, zda jsou všechny tyto geometrie odrazem určité oblasti objektivní reality, jaké je jejich využití a jaká je geometrie našeho vesmírného prostoru, neboť rozvíjet tyto geometrie jen na modelech by nemělo hlubšího smyslu. Tyto otázky již značně přesahují vymezený rámec tohoto textu. Poznamenejme tedy jen stručně, že neeukleidovská geometrie má skutečně odraz i v naší objektivní realitě – např. v Einsteinově obecné teorii relativity je časoprostor zakřivený v důsledku přítomnosti hmoty a hybnosti, tj. má neeukleidovskou geometrii. V současnosti se geometrie pořád vyvíjí a to jak geometrie praktická (například výpočetní geometrie a počítačová grafika), tak teoretická, která má úzkou souvislost s teoretickou fyzikou.

[5]Tzv. úhlovou výchylku trojúhelníka nezávisle studovali v obou zmiňovaných geometriích matematici C. F. Gauss a J. H. Lambert.

## 0.2 Polohové vlatnosti bodů, přímek a rovin

Vlastnosti bodů, přímek a rovin, které jsou založeny na vztazích incidence, uspořádání a rovnoběžnosti nazýváme *polohové vlastnosti.* Základní polohové vlastnosti bodů, přímek a rovin jsou vysloveny v axiomech incidence, uspořádání a rovnoběžnosti. Z nich se pak odvozují další vlastnosti a vztahy (např. věty 1.2, 1.3, 1.4, 1.8). V následujícím textu uvedeme ve větách 1.9 až 1.15 další polohové vlastnosti týkající se vzájemných poloh přímek a rovin.

**Věta 0.2** ***(O vzájemné poloze dvou přímek)***
*Dvě přímky v prostoru mají právě jednu z těchto čtyř vzájemných poloh:*

*A. přímky splývají,*

*B. přímky mají jeden společný bod,*

*C. přímky nemají společný bod a leží v téže rovině,*

*D. přímky nemají společný bod a neleží v žádné rovině.*

Přímky z případů A. a C. nazýváme *rovnoběžné*, z případu B. *různoběžné* a z případu D. *mimoběžné*.

**Důkaz:** *Při důkazu této věty je třeba ukázat, že možnosti A. - D. mohou nastat a že nemůže nastat žádný jiný případ vzájemné polohy dvou přímek.*
*Případ A. nastane tehdy, mají-li obě přímky společné dva různé body, neboť těmito bodu je podle axiomu $I_1$ určena jediná přímka.*
*Případ B. plyne z axiomu $I_3$ a $I_1$. Podle $I_3$ existují tři různé body, které neleží v téže přímce. Označme je $A$, $B$, $C$. Pak je podle axiomu $I_1$ určena body $A$, $B$ jediná přímka a body $A$, $C$ rovněž jediná přímka. Tyto přímky mají jediný společný bod $A$.*
*Případ C. plyne z axiomů $I_3$, $I_1$ a axiomu rovnoběžnosti. Podle $I_3$ existují tři různé body, které neleží v téže přímce. Označme je opět $A$, $B$, $C$. Body $A$, $B$ je podle $I_1$ určena jediná přímka a bod $C$ na ní neleží. Z axiomu rovnoběžnosti plyne, že bodem $C$ prochází právě jedna rovnoběžka s přímkou $AB$, tj. přímka, která nemá s přímkou $AB$ žádný společný bod a leží s ní v jedné rovině, což je rovina $ABC$.*
*Případ D.: Podle axiomu $I_8$ existují čtyři různé body, které neleží v téže rovině. Označme je $A$, $B$, $C$, $D$. Nechť body $A$, $B$ určují přímku $p$, body $C$, $D$ určují přímku $q$. Je zřejmé, že neexistuje rovina, v níž by ležely obě přímky $p$, $q$. Pokud by tyto přímky měly společný bod $P$, pak by rovina $APC$ obsahovala podle axiomu $I_6$ obě přímky a tedy i body $A$, $B$, $C$, $D$, což by byl spor s předpokledem, že body $A$, $B$, $C$, $D$ neleží v téže rovině. Přímky $p$, $q$ tedy nemají společný bod.*
*Tím je dokázáno, že případy A. – D. mohou nastat. Abychom ukázali, že žádný další případ již nastat nemůže, provedeme v následujícím schematu dichotomické třídění*

*dvojic přímek.*[6]

$$\textit{dvě přímky}\begin{cases} \textit{splývají, případ A. } \textbf{\textit{rovnoběžné}} \\ \textit{nesplývají}\begin{cases} \textit{mají společný bod, případ B. } \textbf{\textit{různoběžné}} \\ \textit{nemají společný bod}\begin{cases} \textit{leží v jedné rovině, C. } \textbf{\textit{rovnoběžné}} \\ \textit{neleží v jedné rovině, D. } \textbf{\textit{mimoběžné}} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

*Ze schematu je nyní zřejmé, že žádný další případ kromě případů A. – D. vzájemné polohy dvou přímek již nastat nemůže. Tím je věta dokázána.* □

Další věty o vzájemné poloze přímek a rovin uvádíme bez důkazů. Při jejich důkazech bychom postupovali obdobně jako v důkazy věty 1.9.

**Věta 0.3** ***(O vzájemné poloze přímky a roviny)***
*Přímka a rovina mají právě jednu z těchto tří vzájemných poloh:*

A. *přímka leží v rovině,*

B. *přímka má s rovinou jeden společný bod,*

C. *přímky nemá s rovinou žádný společný bod.*

V případě B. říkáme, že přímka je různoběžná s rovinou, resp. že rovina je různoběžná s přímkou, resp. že přímka a rovina jsou různoběžné. V případě C. říkáme, že přímka a rovina jsou rovnoběžné, resp. že přímka je rovnoběžná s rovinou, resp. že rovina je rovnoběžná s přímkou. Také v případě A. říkáme, že přímka a rovina jsou rovnoběžné.

**Věta 0.4** ***(O vzájemné poloze dvou rovin)***
*Dvě roviny mají právě jednu z těchto tří vzájemných poloh:*

A. *obě roviny splývají,*

B. *roviny mají společnou právě jednu přímku,*

C. *roviny nemají společný žádný bod.*

Dvě roviny v případech A. a C. nazýváme *rovnoběžné*, v případě B. *různoběžné*. Společná přímka v případě B. se nazývá *průsečnice* rovin.

**Věta 0.5** ***(O vzájemné poloze tří různých rovin)***
*Tři různé roviny mají právě jednu z následjících pěti možných vzájemných poloh:*

A. *každé dvě roviny z daných rovin jsou rovnoběžné,*

B. *dvě z daných rovin jsou rovnoběžné, třetí je protíná ve dvou rovnoběžných průsečnicích,*

[6] Pro úplnost ještě poznamenejme, že dvě různé přímky mají nejvýše jeden společný bod. Pokud by totiž měly víc než jeden společný bod, splynuly by.

*C. všechny tři roviny procházejí jednou přímkou,*

*D. každé dvě roviny se protínají, každé dvě průsečnice jsou různé rovnoběžky,*

*E. všechny tři roviny mají společný jediný bod.*

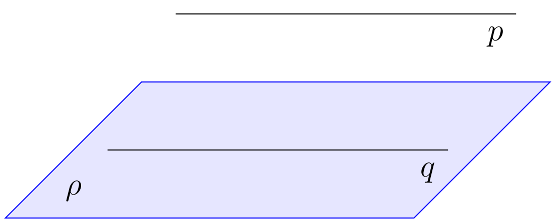
Pro stručné vyjadřování zavedeme následující názvy: v případě C. budeme hovořit o *svazku rovin*, v případě B. o *dvojsvazku rovin*, v případě D. o *trojsvazku* a v případě E. o *trsu rovin.*

■ **0.1** Jako cvičení si vzájemné polohy tří rovin uvedené ve větě 1.12 načrtněte a vymodelujte.

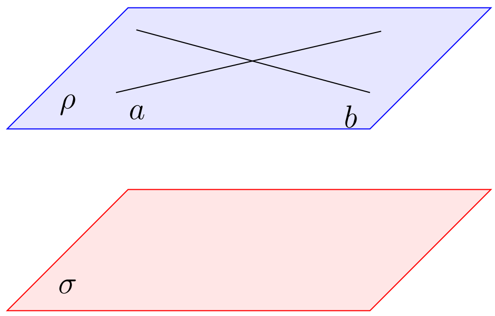
**Věta 0.6** ***(Kritétium rovnoběžnosti přímky a roviny)***
*Je-li přímka $p$ rovnoběžná alespoň s jednou přímkou roviny $\rho$, je přímka $p$ s rovinou $\rho$ rovnoběžná.*

Užijeme-li stejné označení jako v obr. 1.22, můžeme větu 1.13 zapsat symbolicky takto:

$$(p \parallel q \wedge q \subset \rho) \Rightarrow p \parallel \rho \ .$$




Obr. 5




Obr. 6

**Věta 0.7** ***(Kritétium rovnoběžnosti dvou rovin)***
*Obsahuje-li rovina $\rho$ dvě různoběžky, z nichž každá je rovnoběžná s rovinou $\sigma$, je rovina $\rho$ rovnoběžná s rovinou $\sigma$.*

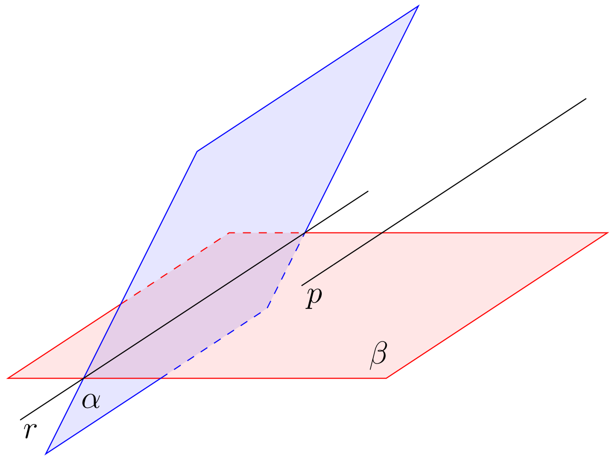
Užijeme-li stejné označení jako v obr. 1.23, můžeme větu 1.14 zapsat symbolicky takto:

$$(a \nparallel b \wedge a \subset \rho \wedge b \subset \rho \wedge a \parallel \sigma \wedge b \parallel \sigma) \Rightarrow \rho \parallel \sigma \ .$$

**Věta 0.8** *Přímka $p$ je rovnoběžná se dvěma různoběžnými rovinami právě tehdy, když je rovnoběžná s jejich průsečnicí.*

Také v tomto případě je možné užitím stejného označení jako v obr. 1.24 větu 1.15 zapsat symbolicky takto:

$$(\alpha \nparallel \beta \wedge p \parallel \alpha \wedge p \parallel \beta) \Leftrightarrow (\alpha \cap \beta = r \wedge p \parallel r) \ .$$




Obr. 7

## Cvičení:

■ **0.2** Ověřte, že relace „přímka $x$ je rovnoběžná s přímkou $y$“ v množině všech přímek prostoru je ekvivalence. Jak nazýváme třídy rozkladu příslušné této ekvivalenci?

■ **0.3** Jsou dány čtyři navzájem různé přímky $a$, $b$, $c$, $d$ téže roviny takové, že $a \parallel b$, $c \parallel d$. Jaký útvar může být průnikem rovinných pásů s hraničními přímkami $a$, $b$, resp. $c$, $d$.

■ **0.4** Zvolte bod $X$ uvnitř strany $AB$ a bod $Y$ uvnitř strany $BC$ trojúhelníku $ABS$. Úsečky $AY$, $CX$ mají společný bod. Zdůvodněte.

# Kapitola 1

# Shodnost

V této kapitole zavedeme další axiomatický pojem – shodnost úseček. Tento pojem je zaveden axiomy shodnosti a jeho užitím dále definujeme shodnost úhlů, shodnost trojúhelníků i pojem shodného zobrazení v rovině a v prostoru. Shodná zobrazení, pak umožní definovat pojem shodných geometrických útvarů.

## 1.1 Shodnost úseček a axiomy shodnosti

Jak již bylo řečeno, zavádějí axiomy shodnosti do geometrie vztah shodnosti úseček. Jsou-li $AB$, $CD$ úsečky, budeme jejich shodnost zapisovat $AB \cong CD$.

$\boldsymbol{S_1}$: Je-li $AB \cong CD$, je $A \neq B$ a $C \neq D$. Pro každé dva různé body $A$, $B$ platí $AB \cong BA$.

$\boldsymbol{S_2}$: Nechť AB je úsečka, CD polopřímka. Pak existuje jediný bod E polopřímky CD, pro který platí $AB \cong CE$.

$\boldsymbol{S_3}$: Je-li $AB \cong CD$ a $CD \cong EF$, pak je $AB \cong EF$.

$\boldsymbol{S_4}$: Leží-li bod $C$ mezi body $A$, $B$, bod $C'$ mezi body $A'$, $B'$ a platí-li $AC \cong A'C'$ , $BC \cong B'C'$, pak platí $AB \cong A'B'$.

$\boldsymbol{S_5}$: Nechť $A$, $B$, $C$ a $A'$, $B'$, $K$ jsou dvě trojice bodů neležících v přímce a nechť $AB \cong A'B'$. Pak existuje jediný bod $C'$ poloroviny $A'B'K$, pro který platí $AC \cong A'C'$ a $BC \cong B'C'$.

$\boldsymbol{S_6}$: Nechť $A$, $B$, $C$ a $A'$, $B'$, $C'$ jsou dvě trojice bodů neležících v přímce a nechť platí $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ a $CA \cong C'A'$. Leží-li bod $P$ mezi body $A$, $B$, bod $P'$ mezi body $A'$, $B'$ a platí-li, že $AP \cong A'P'$, je $CP \cong C'P'$.

Axiom $S_1$ vyjadřuje, že shodnost se týká jen dvojic různých bodů. Pro úplnost našich úvah zavedme ještě tzv. *nulovou úsečku*, což bude úsečka, jejíž krajní body splývají. Tato úsečka vyhovuje definici **??** v případě, že $A = B$. Každé dvě nulové úsečky budeme také považovat za shodné.

Užitím axiomů shodnosti se dá vcelku snadno dokázat, že relace ***shodnost dvou úseček*** je reflexivní a symetrická v množině všech úseček. Protože z axiomu $S_3$ je zřejmá tranzitivnost tohoto vztahu, je relace shodnost dvou úseček relací ekvivalence na množině všech úseček.

Axiomu $S_2$ využíváme při nanášení úsečky na danou polopřímku. Axiom $S_4$ je východiskem k zavedené pojmů grafický součet a grafický rozdíl úseček a násobek úsečky. Jednoznačnost přenesení trojúhelníka k dané polopřímce do dané poloroviny vyjadřuje axiom $S_5$ a axiom $S_6$ pak vyjadřuje základní vlastnost přeneseného trojúhelníka.

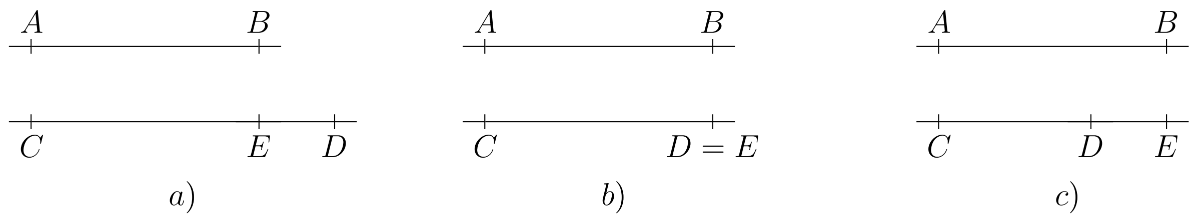
## 1.2 Porovnávání úseček, grafický součet a rozdíl dvou úseček, násobek úsečky

Axiomy shodnosti nám umožňují zavést porovnávání úseček a pojmy grafický součet, grafický rozdíl a grafický násobek úsečky. Tyto pojmy patří mezi základní pojmy elementární geometrie a jsou též zařazeny do učiva matematiky na 1. stupni základní školy.

### Porovnávání úseček

Při porovnávání úseček $AB$ a $CD$ postupujeme takto: Na polopřímce $CD$ sestrojíme bod $E$ tak, že $CE = AB$. Leží-li bod $E$ mezi body $C$, $D$, říkáme, že úsečka $AB$ je menší než úsečka $CD$ a píšeme $AB < CD$ (viz obr. 1.1a).

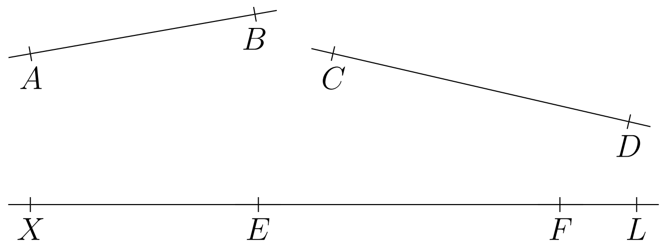
Je-li $E = D$, je $AB \cong CD$ (viz obr. 1.1b) a leží-li bod $D$ mezi body $C$, $E$, říkáme, že úsečka $AB$ je větší než úsečka $CD$ a píšeme $AB > CD$ (viz obr. 1.1c).




Obr. 1.1

#### Grafický součet úseček

Nechť jsou dány úsečky $AB$ a $CD$. Zvolme polopřímku $KL$ a sestrojme na ní bod $E$ tak, že $AB \cong KE$. Pak sestrojíme bod $F$ na polopřímce opačné k polopřímce $EK$ tak, aby $EF \cong CD$. Úsečka $KF$ se nazývá grafický součet úseček $AB$ a $CD$ (viz obr. 1.2). Zapisujeme: $AB + CD = KF$.




Obr. 1.2

**Grafický rozdíl úseček**

Úsečku $CD$ nazýváme grafický rozdíl úseček $KF$ a $AB$ právě tehdy, když úsečka $KF$ je grafickým součtem úseček $AB$ a $CD$ (viz obr. 1.2).
Zapisujeme: $CD = KF - AB$.

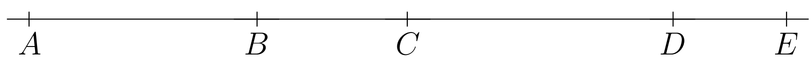
**Grafický násobek úsečky**

Platí-li, že $KL = AB + AB$, nazývá se úsečka $KL$ dvojnásobkem úsečky $AB$, což zapisujeme $KL = 2AB$. Dále lze určit součet úseček $2AB + AB = PQ$, kde úsečku $PQ$ nazýváme trojnásobkem úsečky $AB$. Je tedy:

$$\begin{aligned} AB + AB &= 2AB, \\ 2AB + AB &= 3AB, \\ 3AB + AB &= 4AB \text{ atd.} \end{aligned}$$

$n$-násobek úsečky $AB$ se pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ definuje jako grafický součet $n-1$ násobku úsečky $AB$ a úsečky $AB$. přitom jednonásobkem úsečky $AB$ je úsečka $AB$, tj. $1AB = AB$.

**Poznámka 1.1** Zavedený pojem grafického součtu dvou úseček lze snadno rozšířit na grafický součet více než dvou úseček. Např. na obrázku 1.3 je úsečka $AE = AB + BC + CD + DE$. Pak lze např. pětinásobek úsečky $AB$ vyjádřit takto: $5AB = AB + AB + AB + AB + AB$, což odpovídá naší názorné představě.



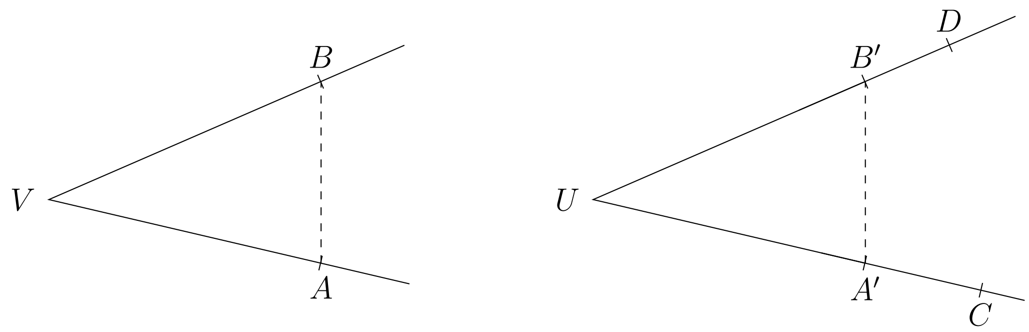

Obr. 1.3

## 1.3 Shodnost úhlů

Užitím shodnosti úseček budeme nyní definovat shodnost úhlů.

**Definice 1.1** Konvexní úhel $AVB$ je shodný s konvexním úhlem $CUD$ právě tehdy, když na polopřímkách $UC$, $UD$ existují takové body $A'$, $B'$, že platí

$$UA' \cong VA,\ UB' \cong VB \text{ a } A'B' \cong AB.$$




Obr. 1.4

Pro úplnost je třeba ještě dokázat, že shodnost konvexních úhlů $AVB$ a $CUD$ nezávisí na volbě bodů $A$, $B$ na ramenech $\sphericalangle AVB$. Tento důkaz však nebudeme provádět.

Z definice 1.1 a vlastností vztahu shodnosti úseček vyplývá, že každé dva přímé, každé dva plné a každé dva nulové úhly jsou shodné.

**Definice 1.2** Nekonvexní úhel $AVB$ je shodný s nekonvexním úhlem $CUD$ právě tehdy, jsou-li shodné konvexní úhly $AVB$ a $CUD$.

### Cvičení:

■ **1.1** Zdůvodněte, proč nelze v definici 1.1 vynechat přívlastek *konvexní* u úhlů $AVB$ a $CDU$.

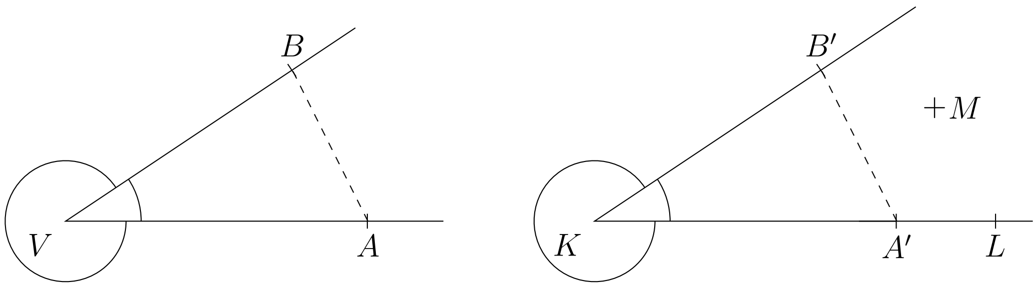
■ **1.2** Uvažujte o binární relaci *shodnost úhlů* v množině všech úhlů a určete její vlastnosti.

## 1.4 Porovnávání dvou úhlů, grafický součet a rozdíl dvou úhlů

Máme-li zaveden pojem shodných úhlů, můžeme definovat porovnávání, grafický součet a grafický rozdíl dvou úhlů. Tyto pojmy patří také k základním pojmům elementární geometrie a jsou zařazeny do geometrie 5. ročníku základní školy jako rozšiřující učivo.

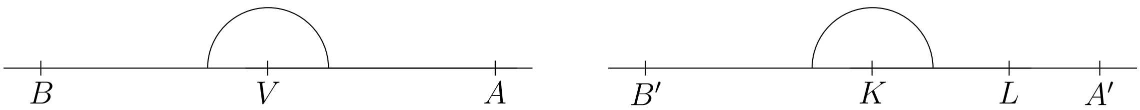
Při porovnávání dvou úhlů a při určení úhlu, který je grafickým součtem nebo rozdílem dvou úhlů, je základem úloha přenést daný úhel k dané polopřímce do dané poloroviny. Přitom jde o následující konstrukci úhlu shodného s daným konvexním úhlem:

Nechť je dán $\sphericalangle AVB$ a polorovina $KLM$. Na polopřímce $KL$ sestrojíme bod $A'$ tak, že $KA' \cong VA$. V polorovině $KLM$ sestrojíme bod $B'$ tak, že $KB' \cong VB$ a $AB \cong A'B'$ (viz obr. 1.5).




Obr. 1.5

Podle definice shodnosti dvou konvexních úhlů je $\sphericalangle A'KB' \cong \sphericalangle AVB$. Sestrojení $\sphericalangle A'KB'$ nazýváme *přenesením* $\sphericalangle AVB$ k polopřímce $KL$ do poloroviny $KLM$. Přitom, je-li úhel $AVB$ přímý, splývá $\sphericalangle A'KB'$ s polorovinou $KLM$ (viz obr. 1.6).



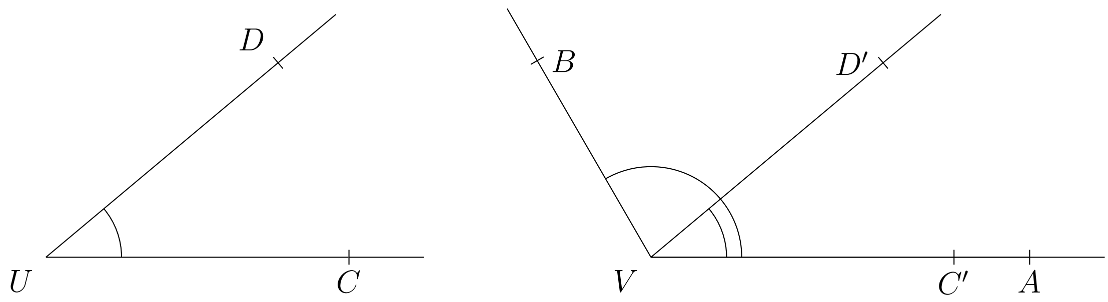

Obr. 1.6

Uvedená konstrukce nám umožňuje též přenesení nekonvexního úhlu. Na obrázku 1.5 je $\measuredangle A'KB' \cong \measuredangle AVB$. Konstrukce nekonvexního úhlu $A'KB'$ je shodná s konstrukcí konvexního úhlu $A'KB'$. Přenášíme-li však nekonvexní úhel, je třeba formulovat úlohu např. takto: Přenést daný úhel k dané polopřímce $KL$ tak, aby obě jeho ramena patřila dané polorovině $KLM$. Tato formulace úlohy vyhovuje i pro přenášení konvexních úhlů. Přitom je však třeba mít na zřeteli, že úhel daný a přenesený musejí být shodné. Přenést daný úhel tedy především znamená sestrojit úhel shodný s daným úhlem.

### Porovnávání úhlů

Při porovnávání dvou úhlů využíváme přenášení úhlů. Postupujeme při tom takto: Nechť jsou dány dva úhly $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle CUD$, které nejsou shodné. Je-li možné přenést daný úhel $CUD$ tak, že rameno $U'C'$ přeneseného úhlu $C'U'D'$ splývá s ramenem $VA$ úhlu $AVB$ a průnikem tohoto přeneseného úhlu s daným úhlem $AVB$ je tento přenesený úhel, je daný úhel $CUD$ menší než daný úhel $AVB$ (viz obr. 1.7). Je-li možné úhel $CUD$ přenést tak, že rameno $U'C'$ úhlu $C'U'D'$ splývá s ramenem $VA$

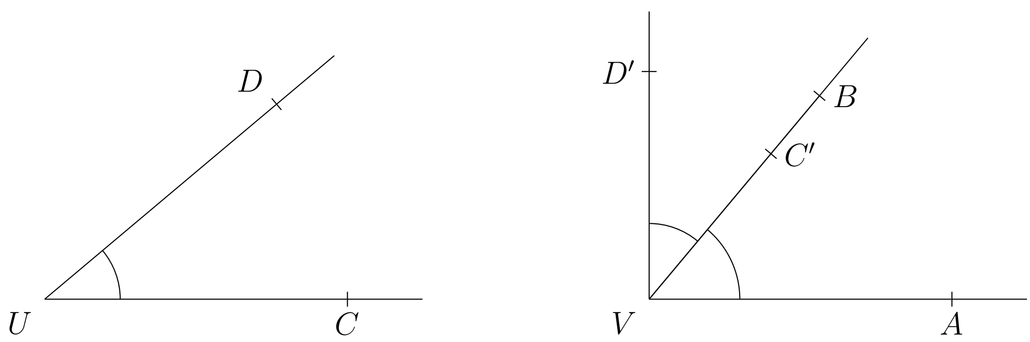
úhlu $AVB$ tak, že $\sphericalangle AVB \cap \sphericalangle C'U'D'$ je $\sphericalangle AVB$, je úhel $CUD$ větší než daný úhel $AVB$.




Obr. 1.7

**Grafický součet dvou konvexních úhlů**

Nechť jsou dány dva konvexní úhly $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle CUD$, z nichž žádný není plný. Sestrojíme úhel $\sphericalangle C'VD' \cong \sphericalangle CUD$ tak, že $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle C'VD'$ jsou úhly styčné. Úhel, který je sjednocením těchto dvou styčných úhlů nazýváme *grafický součet úhlů* $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle CUD$.




Obr. 1.8

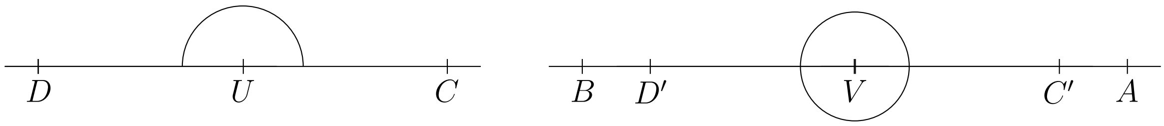
V obrázku 1.8 je úhel $\sphericalangle AVD'$ grafickým součtem $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle CUD$. Zapisujeme:

$$\sphericalangle AVD' = \sphericalangle AVB + \sphericalangle CUD.$$

**Poznámka 1.2** Uvědomme si, že při sestrojení $\sphericalangle C'VD'$ jde o přenesení $\sphericalangle CUD$ k polopřímce $VB$ do poloroviny opačné k polorovině, v níž leží $\sphericalangle AVB$.

Jsou-li oba úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle CUD$ přímé, je jejich grafickým součtem úhel plný. V obrázku 1.9 je součtem daných přímých úhlů $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle CUD$ plný úhel $\sphericalangle AVD'$.

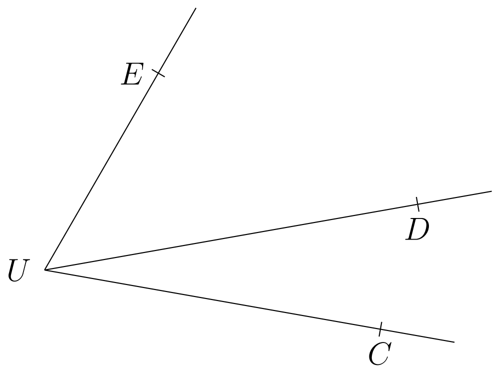
Je zřejmé, že grafickým součtem dvou konvexních úhlů nemusí být konvexní úhel.




Obr. 1.9

**Grafický rozdíl dvou konvexních úhlů**

Úhel $\sphericalangle DUE$ nazýváme *grafickým rozdílem* konvexních úhlů $\beta$, $\alpha$ právě tehdy, když $\alpha + \sphericalangle DUE = \beta$.
Zapisujeme: $\sphericalangle DUE = \beta - \alpha$ (viz obr. 1.10).




$\sphericalangle CUD \cong \alpha$
$\sphericalangle CUE \cong \beta$
$\sphericalangle DUD \cong \beta - \alpha$

Obr. 1.10

**Poznámka 1.3** Platí-li, že $\alpha + \alpha = \beta$, nazýváme úhel $\beta$ dvojnásobkem úhlu $\alpha$, což zapisujeme $\beta = 2\alpha$. Analogicky jako při násobku úsečky definujeme trojnásobek úhlu $\alpha$ jako grafický součet dvojnásobku úhlu $\alpha$ a úhlu $\alpha$, tj. $3\alpha = 2\alpha + \alpha$ atd.
Je zřejmé, že existence $n$-násobku daného úhlu není zaručena ani pro $n = 2$, $n \in \mathbb{N}$.

## Cvičení:

■ **1.3** Uvažujte o operaci grafické sčítání dvou úhlů v množině všech konvexních úhlů a určete její vlastnosti.

■ **1.4** Uvažujte o operaci grafické sčítání dvou úhlů v množině všech úhlů a určete zde její vlastnosti. Jak se budou lišit vzhledem k vlastnostem operace ze cvičení ?

## 1.5 Shodnost trojúhelníků

Shodnost úseček umožňuje též definovat shodnost trojúhelníků.

**Definice 1.3** Trojúhelníky $ABC$, $A'B'C'$ se nazývají ***shodné*** (v tomto pořadí vrcholů), jestliže platí $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $CA \cong C'A'$.

Shodnost trojúhelníků $ABC$, $A'B'C'$ zapisujeme $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Dvojice vrcholů $A$, $A'$; $B$, $B'$; $C$, $C'$ nazýváme vrcholy *k sobě příslušné*. Termín *k sobě příslušné* používáme též pro strany, vnitřní úhly, příčky atd. obou trojúhelníků. Definice shodnosti dvou trojúhelníků vyžaduje shodnost všech dvojic k sobě příslušných stran.

Z definice 1.1 shodnosti konvexních úhlů plyne, že také dvojice k sobě příslušných vnitřních úhlů obou trojúhelníků jsou dvojice shodných úhlů, tj. $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$, $\sphericalangle BCA \cong \sphericalangle B'C'A'$ a $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$.

V učebnicích elementární geometrie se někdy v definici shodných trojúhelníků požaduje shodnost všech k sobě příslušných stran i vnitřních úhlů. Při našem postupu však je zřejmé, že by šlo o nadbytečnou definici.

Strany a vnitřní úhly trojúhelníka (případně jejich velikosti) nazýváme *základní prvky* trojúhelníka. Ze střední školy víme, že pro zjištění shodnosti trojúhelníků stačí zjistit shodnost jen některých základních prvků těchto trojúhelníků. Tyto postačující podmínky pro shodnost dvou trojúhelníků vyjadřují věty, které nazýváme **věty o shodnosti trojúhelníků**. Stručně se označují **sss**, **sus**, **usu**, **Ssu**, přičemž věta sss je vlastně definicí 1.3. V rámci cvičení 1.5 si všechny věty důsledně zopakujte.

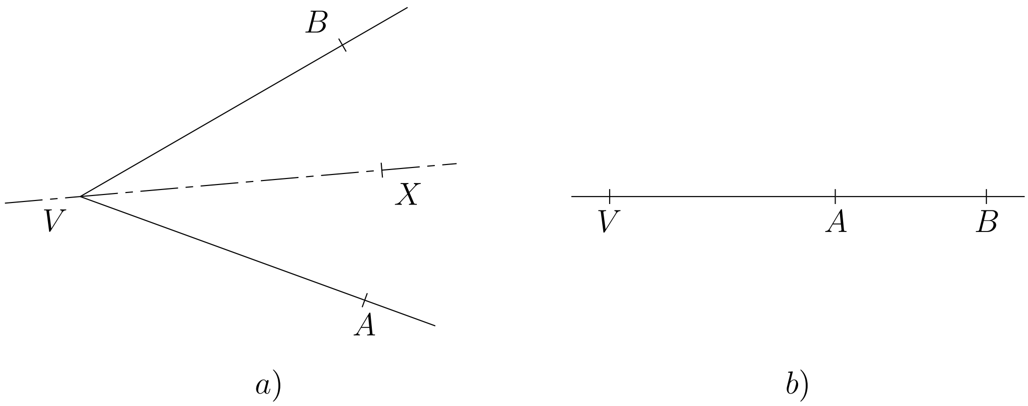
Věty o shodnosti trojúhelníků se v elementární geometrii velmi často využívají k důkazům a jsou základem pro většinu metrických vztahů elementární geometrie (viz např. důkazy vět 1.1, **??**, **??**).

## 1.6 Osa úhlu, pravý úhel, střed a osa úsečky

Užitím shodnosti úseček a úhlů budeme nyní definovat další geometrické pojmy: osu úhlu, pravý úhel, kolmost přímek a rovin, střed a osu úsečky. I když nejsou tyto pojmy pro absolventa střední školy nové, jde o to, abychom vyslovili a osvojili si jejich přesné definice. Tyto definice jsou také ukázkou systematického budování nových pojmů v geometrii užitím pojmů dříve zavedených.

**Definice 1.4** Nechť $AVB$ je úhel, který není plný ani nulový. Pak ***osou úhlu*** $AVB$ nazýváme přímku $VX$ právě tehdy, když bod $X$ leží v téže rovině jako úhel $AVB$ a platí, že konvexní úhel $AVX$ je shodný s konvexním úhlem $BVX$ (viz obr. 1.11a). Osou plného nebo nulového úhlu $AVB$ rozumíme přímku $VA$, resp. $VB$ (viz obr. 1.11b).

**Definice 1.5 (1.4*)** Nechť $AVB$ je úhel, který není plný ani nulový. Pak ***osou úhlu*** $AVB$ nazýváme polopřímku $VX$ právě tehdy, když bod $X$ je bodem úhlu $AVB$ a platí, že konvexní úhel $AVX$ je shodný s konvexním úhlem $BVX$. Osou nulového úhlu $AVB$ je pak polo přímka $VA$, resp. $VB$, osou plného úhlu je polopřímka opačná k polopřímce $VA$, resp. $VB$ (viz obr. 1.11b).




Obr. 1.11

**Poznámka 1.4** Přímka $VX$ v definici 1.4 je osou jak konvexního, tak i nekonvexního úhlu $AVB$.

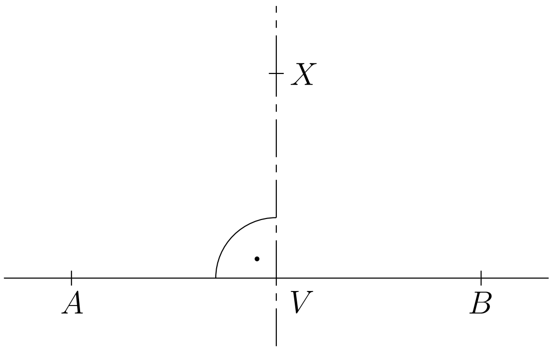
Osy konvexního a nekonvexního úhlu $AVB$ jsou dle 1.5 navzájem opačné polopřímky.

**Definice 1.6** Úhel, který je shodný s úhlem k němu vedlejším, nazýváme ***pravý úhel***.

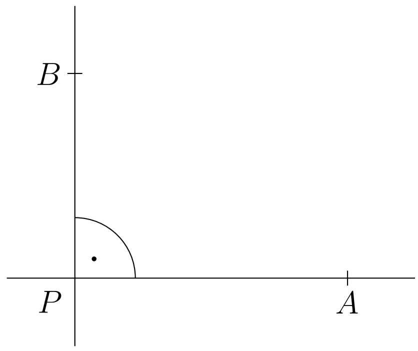
Uvědomme si, že k definici pravého úhlu není třeba užít jeho velikost. Je-li přímka $VX$ osou přímého úhlu $AVB$, jsou úhly $AVX$ a $XVB$ shodné vedlejší úhly a tedy jsou oba pravé (viz obr. 1.12). Tato skutečnost bývá často vyjadřována takto: ***Osa přímého úhlu dělí tento úhel na dva úhly pravé.***

**Definice 1.7** Dvě různoběžné přímky $AP$ a $BP$ nazýváme ***kolmé*** právě tehdy, když úhel $APB$ je pravý (viz obr. 1.13).

O dvou kolmých různoběžných přímkách říkáme, že svírají pravý úhel. Vztah kolmosti je definován i pro mimoběžné přímky.




Obr. 1.12




Obr. 1.13

**Definice 1.8** *Mimoběžné přímky* $a$, $b$ jsou *kolmé* právě tehdy, když existuje taková přímka $a'$, $a' \parallel a$, že přímky $a'$, $b$ jsou kolmé různoběžky.

Jsou-li $a$, $b$ kolmé přímky, říkáme též, že přímka $a$ je kolmá k přímce $b$ nebo že přímka $b$ je kolmá k přímce $a$. Jde o symetrický vztah, což je patrno i z obvyklého vyjádření: přímky $a$, $b$ jsou ***k sobě kolmé*** nebo ***navzájem kolmé***.

**Definice 1.9** ***Středem*** $S$ ***úsečky*** $AB$ nazýváme takový bod úsečky $AB$, pro který platí $AS \cong SB$.

**Definice 1.10** Přímku $o$ nazýváme ***osa úsečky*** $AB(A \neq B)$ právě tehdy, když jsou přímky $AB$ a $o$ navzájem kolmé a přímka $o$ prochází středem úsečky $AB$.
Symbolicky:

$$o \text{ je osa úsečky } AB \Leftrightarrow A \neq B \wedge o \perp AB \wedge o \cap AB = \{S\} \wedge SA \cong BS.$$

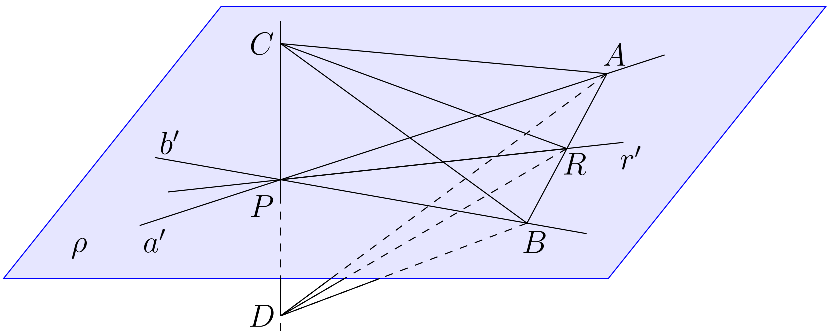
Z definice 1.10 je zřejmé, že osa úsečky je definována jen pro nenulové úsečky. (Zdůvodněte proč!) V definici 1.9 středu úsečky toto omezení není. Který bod je středem nulové úsečky?
Definicemi 1.7 a 1.8 jsme zavedli kolmost dvou přímek. Tento pojem je východiskem i k zavedení pojmu *kolmost přímky a roviny.*

**Definice 1.11** Přímka $p$ a rovina $\rho$ se nazývají ***navzájem kolmé***, jestliže je přímka $p$ kolmá ke všem přímkám roviny $\rho$.

Termín *navzájem kolmé* znamená, že přímka $p$ je kolmá k rovině $\rho$ a také, že rovina $\rho$ je kolmá k přímce $p$. Při zjišťování kolmosti přímky $p$ a roviny $\rho$ nelze prakticky prověřit kolmost přímky $p$ ke všem přímkám roviny $\rho$. Ke zjištění kolmosti přímky $p$ a roviny $\rho$, případně k určení roviny kolmé k přímce $p$, užíváme kritérium kolmosti přímky a roviny uvedené ve větě 1.1.

**Věta 1.1** ***(Kriterium kolmosti přímky a roviny)***
*Je-li přímka $p$ kolmá ke dvěma různoběžkám $a$, $b$ roviny $\rho$, pak je kolmá k rovině $\rho$.*

**Důkaz:** *Označme $P$ průsečík přímky $p$ s rovinou $\rho$. Bodem $P$ veďme přímky $a' \parallel a$, $b' \parallel b$. Přímky $a'$, $b'$ zřejmě leží v rovině $\rho$ a $p \perp a'$, $p \perp b'$. Zvolme dále libovolnou přímku $r \subset \rho$ a ukažme, že $p \perp r$. Sestrojíme přímku $r'$ tak, že $P \in r'$ a $r' \parallel r$ a nechť $r' \neq a'$, $r' \neq b'$ (viz obr. 1.14). Na přímce $p$ zvolme body $C$, $D$ tak, že $P$ je střed $CD$. Na přímce $a'$ zvolme bod $A$, na přímce $b'$ bod $B$ tak, aby body $A$, $B$ byly odděleny přímkou $r'$. Označme $R \in AB \cap r'$.*
*Platí: $CB \cong DB$, $CA \cong AD \Rightarrow \triangle CBA \cong \triangle DBA$ podle věty sss. Ze shodnosti těchto*




Obr. 1.14

*trojúhelníků plyne shodnost jejich příček $RD$, $RC$, tj. $RD \cong RC$. Vzhledem k tomu, že $CP \cong DP$, $RD \cong RC$ a $RP \cong RP$, je $\triangle PDR \cong \triangle PCR$ podle věty sss. Ze shodností těchto trojúhelníků plyne, že $\sphericalangle CPR \cong \sphericalangle DPR$. Protože se jedná o vedlejší úhly, jsou oba pravé. Z toho plyne, že přímka $p$ je kolmá k přímce $r'$, a tedy také k přímce $r$.* $\square$

Užitím vztahu kolmosti přímky a roviny je možné též definovat kolmost dvou rovin.

**Definice 1.12** Dvě roviny jsou ***k sobě kolmé*** právě tehdy, když v jedné z těchto dvou rovin existuje přímka, která je kolmá ke druhé z těchto rovin.

## Cvičení:

■ **1.5** Zopakujte si věty o shodnosti trojúhelníků, důsledně je sformulujte a pokuste se je symbolicky zapsat.

■ **1.6** Uvažujte relaci *přímka $x$ je kolmá k přímce $y$* v množině všech přímek a určete vlastnosti této relace.

■ **1.7** Nad stranami ostroúhlého trojúhelníku $ABC$ jsou setrojeny rovnostranné trojúhelníky $ABH$ a $ACK$. Dokožte shodnost úseček $CH$ a $BK$.

■ **1.8** Je dán trojúhelník $ABC$. Nad jeho stranami $AB$, $AC$ jsou vně setrojeny čtverce $ABGF$ a $ACDE$. Dokožte shodnost úseček $EB$ a $CF$.

■ **1.9** Uvnitř trojúhelníku $ABC$ zvolte bod $S$. Dokažte, že součet úseček $SA$, $SB$, $SC$ je větší než poloviční součet stran daného trojúhelníku, tj. že

$$SA + SB + SC > \frac{1}{2}(AB + BC + CA).$$

■ **1.10** Dakažte, že součet úseček, které spojují vnitřní bod $P$ trojúhelníku s krajními body jedné jeho strany, je menší než součet zbývajících dvou stran daného trojúhelníku.

■ **1.11** Přímka $o$ je osou úsečky $AB$. Bod $X$ je libovolný vnitřní bod poloroviny $oA$. Dokažte, že platí: $AX < BX$.

■ **1.12** Bod $U$ je vnitřním bodem trojúhelníku $ABC$.
Dokažte, že platí: $\sphericalangle AUB > \sphericalangle ACB$, $\sphericalangle BUC > \sphericalangle BAC$ a $\sphericalangle AUC > \sphericalangle ABC$.

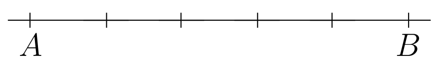
# Kapitola 1

# Délka úsečky, velikost úhlu

## 1.1 Délka úsečky a axiomy spojitosti

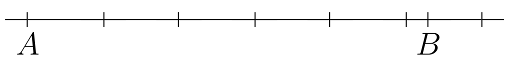
V předcházející kapitole jsme zavedli pojem shodnosti úseček a seznámili jsme se s tím, že tento pojem nám umožňuje porovnávat úsečky, definonovat grafický součet a rozdíl úseček a násobek úsečky. Tyto pojmy jsou východiskem pro měření úsečky. Cílem měření úsečky je určení její délky, tj. stanovení čísla, které vyjadřuje, kolikrát je daná úsečka větší (nebo menší) než jistá, pevně zvolená, tzv. ***jednotková úsečka***. Délkou jednotkové úsečky přitom rozumíme číslo 1. Při měření úsečky tedy zjišťujeme, jakým násobkem jednotkové úsečky je daná úsečka. Je zřejmé, že tento násobek nemusí být celočíselný.

Při měřené úsečky v praxi postupujeme zpravidla tak, že na měřenou úsečku nanášíme postupně od jednoho jejího krajního bodu úsečku jednotkovou. Může se stát, že měřená úsečka je celočíselným násobkem jednotkové úsečky.
Na obr. 1.1 je délka úsečky $AB = 5$cm při jednotkové úsečce o délce 1cm.




Obr. 1.1

Není-li měřená úsečka celočíselným násobkem úsečky jednotkové, můžeme její délku vyjádřit buď přibližně nebo postupovat dál tak, abychom její délku určili přesně nebo alespoň přesněji. Označme délu úsečky $AB$ symbolem $|AB|$.[1] Pak pro úsečku $AB$ na obr. 1.2 platí: $5 < |AB| < 6cm$. Délka 5cm se nazývá dolní mez, délka 6cm se nazývá




Obr. 1.2

horní mez délky úsečky AB. Délku úsečky $AB$ na obr. 1.2 můžeme vyjádřit přibližně takto $|AB| \doteq 5cm$.

[1] Ve starší literatuře se užívá pro označení délky úsečky zápis $d(AB)$.

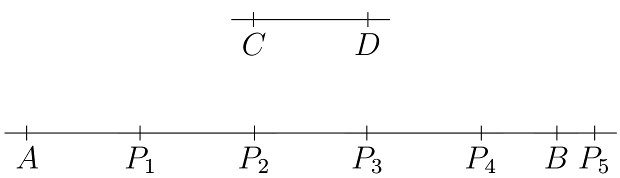
Chceme-li délku úsečky vyjádřit přesněji, užijeme místo jednotkové úsečky 1cm úsečku o délce rovné $\frac{1}{10}$ původní jednotkové úsečky, tj. 1mm. Zjistíme například, že $|AB| = 5,3$ nebo $5,3 < |AB| < 5,4cm$.

Nastane-li druhý případ, můžeme opět použít úsečku o délce rovné $\frac{1}{10}$ jednotkové úsečky 1mm, tj. $0,1mm$ a celý postup opakovat. Teoreticky je možné tento postup dále opakovat ve snaze docílit toho, aby bod $B$ splynul přesně s některým koncovým bodem nanášené jednotkové úsečky. Podaří-li se to, pak je úsečka $AB$ určitým $r$-násobkem jednotkové úsečky, přičemž $r$ je racionální číslo.

Jak víme, nemusí být délka úsečky $AB$ vyjádřena při dané jednotkové úsečce racionálním číslem. Například uhlopříčka čtverce s jednotkovou délkou $1cm$ má délku $\sqrt{2}cm$. V takovém případě nelze při určování délky úsečky $AB$ docílit toho, aby bod $B$ splynul při nanášení libovolně malého dílu jednotkové úsečky s některým jejím koncovým bodem. Říkáme, že úsečku $AB$ nelze beze zbytku ***pokrýt*** nanášením jednotkové úsečky a jejích dílů. V těchto případech je délka úsečky vyjádřena číslem iracionálním.

Je-li délka úsečky $AB$ vyjádřena při dané jednotkové úsečce racionálním číslem, říkáme, že úsečka $AB$ a daná jednotková úsečka jsou souměřitelné. Není-li délka úsečky $AB$ vyjádřena racionálním číslem, nazýváme tyto dvě úsečky nesouměřitelné. Z hlediska matematické teorie je důležitá odpověď na otázku, zda je možno při pevně zvolené jednotkové úsečce přiřadit každé úsečce jisté nezáporné číslo, které vyjadřuje její délku přesně, a naopak, zda je každé nezáporné reálné číslo délkou některé úsečky. Odpověď na tuto otázku je kladná. K důkazu tohoto tvrzení je však třeba zavést další skupinu axiomů ***axiomy spojitosti***. Axiomy spojitosti jsou dva, první se nazývá *Archimedův* axiom a druhý *Cantorův* axiom.

***A***: **(Archimedův axiom:) Nechť jsou dány dvě úsečky $AB$, $CD$. Na polopřímce $AB$ sestrojíme navzájem různé body $P_1, P_2, P_3, \ldots$ tak, že $AP \cong P_1P_2 \cong P_2P_3 \cong \ldots \cong CD$. Potom existuje takové přirozené číslo $n$, že bod $P_n$ už nepatří úsečce $AB$. Obr. 1.3.**



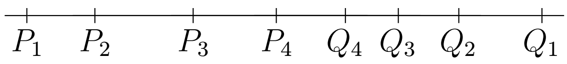

Obr. 1.3

Dříve než uvedeme druhý axiom spojitosti, je třeba se seznámit s pojmem ***posloupnost úseček do sebe zařazených***, který se v tomto axiomu vyskytuje.

Posloupnost úseček $P_nQ_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, z nichž každá následující je částí předcházející, se nazývá ***posloupnost úseček do sebe zařazených***.

Na obr. 1.4 je znázorněna posloupnost čtyř takový úseček $P_1Q_1$, $P_2Q_2$, $P_3Q_3$, $P_4Q_4$. Platí $P_4Q_4 \subset P_3Q_3 \subset P_2Q_2 \subset P_1Q_1$.

***C***: **(Cantorův axiom:) Průnik posloupnosti úseček do sebe zařazených je neprázdný.**




Obr. 1.4

Užitím Archimédova axiomu se dá dokážat, že každé úsečce se dá při dané jednotkové úsečce přiřadit jisté nezáporné reálné číslo jako její délka. A užitím Cantorova axiomu lze dokázat, že každé nezáporné reálné číslo je při dané jednotkové úsečce délkou některé úsečky. Důkazy těchto tvrzení pro svoji rozsáhlost přesahují rámec tohoto textu a nebudeme je zde uvádět, budeme však dále počítat s jejich platností. Zvolíme-li tedy pevně jednotkovou úsečku a každé úsečce přiřadíme jisté nezáporné číslo jako její délku, je toto přiřazení *zobrazením množiny všech úseček na množinu všech nezáporných reálných čísel.* Toto zobrazení je funkcí a nazývá se ***míra úsečky***. Oborem funkce míra úsečky je množina všech úseček, oborem hodnot této funkce je množina všech nezáporných reálných čísel.

Označme $M$ množinu všech úseček a $f$ funkci míra úsečky. Tato funkce má následující vlastnosti:

1. Pro každou úsečku $x \in M$ je $f(x) \geq 0$.
2. Jsou-li $x, y \in M$ shodné úsečky, je $f(x) = f(y)$.
3. Je-li $x + y$ grafický součet úseček $x$, $y$, kde $x, y \in M$, je $F(x + y) = f(x) + f(y)$.

Funkční hodnoty uvedené funkce nazýváme *délky* nebo též *velikosti* jednotlivých úseček a jak již bylo uvedeno místo $f(AB)$ píšeme $|AB|$ pro označení délky úsečky AB.

## 1.2 Vzdálenost bodů, přímek a rovin

Délka úsečky nám umožňuje definovat vzdálenost dvou bodů.

**Definice 1.1** ***Vzdáleností dvou bodů*** $X, Y$ nazýváme délku (velikost) úsečky $XY$.

Vzdálenost dvou bodů je základem pro určení vzdálenosti libovolných dvou geometrických útvarů. Následující definicí zavedeme pojem vzdálenosti bodu od přímky, pojem vzdálenosti bodu od roviny, vzdálenosti dvou přímek, vzdálenosti přímky a roviny a vzdálenosti dvou rovin. V definici 1.2 je zahrnuta j vzdálenost dvou bodů.

**Definice 1.2** ***Vzdáleností geometrických útvarů*** $U_1$, $U_2 \in M$ rozumíme délku (velikost) nejmenší úsečky $XY$, kde $X \in U_1$ a $Y \in U_2$. Značíme $|U_1U_2|$.

Z definice 1.2 je zřejmé, že vzdálenost dvou útvarů $U_1$, $U_2 \in M$, které mají neprázdný průnik, je rovna 0.

# Kapitola 4

# Některé další geometrické pojmy

V následujícím textu uvedeme definice a základní vlastnosti některých dalších geometrických pojmů. U vybraných vlastností předkládáme i důkazy, další důkazy necháváme na čtenáři. Uvedené pojmy a jejich vlastnosti jsou využity ve cvičení při řešení důkazových a konstrukčních úloh.

## 4.1 Kruh, kružnice, kulová plocha, koule

Seznámíme se s definicí kružnice, kruhu, kulové plochy a koule pomocí shodnosti úseček. Tento způsob odpovídá zavedení těchto pojmů v učivu geometrie na 1. stupni základní školy. Současně si připomeneme definici těchto pojmů pomocí vzdálenosti bodů, které jsme poznali také již na základní škole.

**Definice 4.1** Nechť je dán bod $S$ ležící v rovině $\rho$ a úsečka $r$. ***Kružnicí*** $k$ o středu $S$ a poloměru $r$ se nazývá množina všech takových bodů $X$ roviny $\rho$, pro které platí, že úsečka $SX$ je shodná s úsečkou $r$.
Symbolicky:

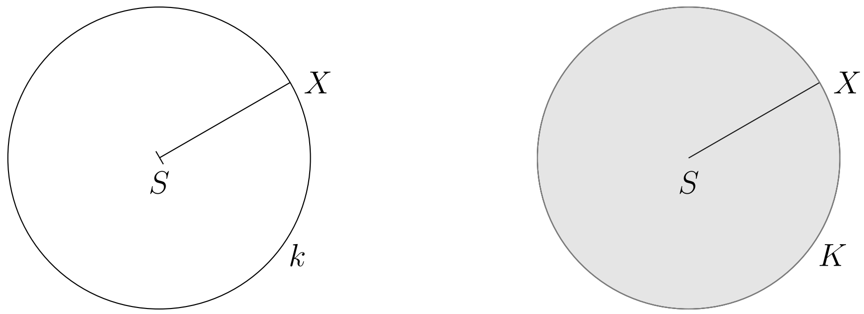
$$k(S, r) = \{X \in \rho\,;\ SX \cong r\}.$$

**Definice 4.2** Nechť je dán bod $S$ ležící v rovině $\rho$ a reálné číslo $r > 0$. ***Kružnicí*** $k$ o středu $S$ a poloměru $r$ se nazývá množina všech takových bodů $X$ roviny $\rho$, které mají od středu $S$ vzdálenost $r$.
Symbolicky:

$$k(S, r) = \{X \in \rho\,;\ |SX| = r\},\ r \in \mathbb{R}^+.$$

**Poznámka 4.1** Je třeba si uvědomit, že v definici 4.1 je $r$ úsečka, zatímco v definici 4.2 je $r$ kladné reálné číslo. Z toho je patrný dvojí význam pojmu poloměr kružnice - jednak jím rozumíme úsečku, jednak kladné reálné číslo.

**Definice 4.3** Nechť je dán bod $S$ ležící v rovině $\rho$ a úsečka $r$. ***Kruhem*** $K$ o středu $S$ a poloměru $r$ se nazýváme sjednocení všech úseček $SX$, pro které platí $SX \cong r$ a $SX \subset \rho$.
Označujeme: kruh $K(S, r)$.




$a)$ kružnice $k(S, r)$ $b)$ kruh $K(S, r)$

Obr. 4.1

**Definice 4.4** Nechť je dán bod $S$ ležící v rovině $\rho$ a reálné číslo $r > 0$. ***Kruhem*** $K$ o středu $S$ a poloměru $r$ se nazývá množina všech takových bodů $X$ roviny $\rho$, jejichž vzdálenost od středu $S$ je nejvýše rovna $r$.
Symbolicky:

$$\text{kruh } K(S, r) = \{X \in \rho\,;\ |SX| \leqq r\},\ r \in \mathbb{R}^+.$$

**Poznámka 4.2** Podobně jako poloměr kružnice má i poloměr kruhu dvojí význam, jak je patrno z definic 4.3 a 4.4. Rovněž termín poloměr koule nebo kulové plochy má tentýž dvojí význam, jak poznáme v následujících definicích. Navíc si uvědomme analogii definic kružnice a kulové plochy, kruhu a koule.

**Definice 4.5** Nechť je dán bod $S$ a úsečka $r$. Množina všech bodů $X$ prostoru, pro které platí, že úsečka $SX$ je shodná s úsečkou $r$, se nazývá ***kulová plocha*** $\kappa$ se středem $S$ a poloměrem $r$.
Symbolicky:

$$\kappa(S, r) = \{X \in Z\,;\ SX \cong r\}.$$

**Definice 4.6** Nechť je dán bod $S$ a reálné číslo $r > 0$. Množina všech bodů $X$ prostoru, jejichž vzdálenost od středu $S$ je rovna $r$, se nazývá ***kulová plocha*** $\kappa$ se středem $S$ a poloměrem $r$.
Symbolicky:

$$\kappa(S, r) = \{X \in Z\,;\ |SX| = r\},\ r \in \mathbb{R}^+.$$

**Definice 4.7** Nechť je dán bod $S$ a úsečka $r$. ***Koulí*** $\kappa$ o středu $S$ a poloměru $r$ se nazýváme sjednocení všech úseček $SX$ v prostoru, které jsou shodné s úsečkou $SX$. Označujeme: koule $\kappa(S, r)$.

**Definice 4.8** Nechť je dán bod $S$ a reálné číslo $r > 0$. ***Koulí*** $\kappa$ o středu $S$ a poloměru $r$ se nazývá množina všech bodů $X$ v prostoru, jejichž vzdálenost od středu $S$ je nejvýše rovna $r$.
Symbolicky:

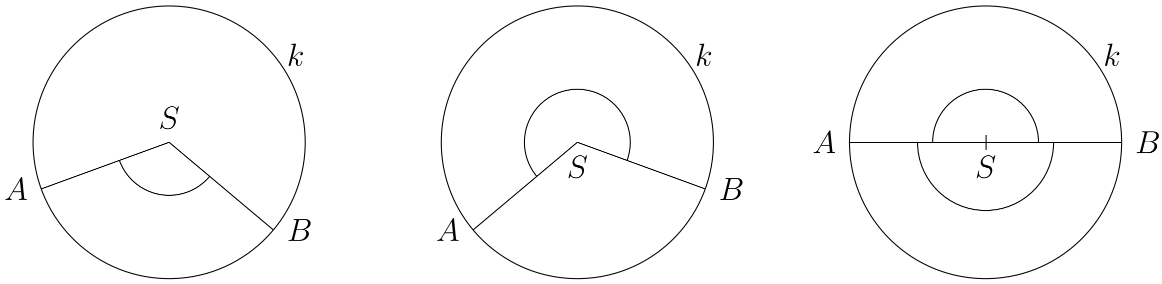
$$\text{koule } \kappa(S, r) = \{X \in Z\,;\ |SX| = r\},\ r \in \mathbb{R}^+.$$

## 4.2 Kružnice, úhly středové a obvodové

Kružnici jsme definovali definicemi 4.1 a 4.2. V tomto odstavci si připomeneme některé další pojmy vztahující se ke kružnici a vztahy mezi nimi. Tyto pojmy, jejich vlastnosti a vztahy pak využijeme při řešení konstrukčních úloh v závěru kapitoly 4.

Jsou-li $A$, $B$ dva různé body kružnice $k$, pak úsečka $AB$ se nazývá ***tětiva*** kružnice $k$. Jestliže tětiva $AB$ obsahuje střed kružnice $k$, nazýváme ji ***průměr*** kružnice $k$. Část kružnice $k$, která leží v jedné z polorovin s hraniční přímkou $AB$ se nazývá ***oblouk*** kružnice $k$, body $A$, $B$ jsou ***krajní body*** oblouku. Je-li $AB$ průměr, nazýváme oblouky s krajními body $A$, $B$ ***polokružnice***. Není-li $AB$ průměr, pak oblouk, který leží v polorovině $ABS$ nazýváme větší oblouk a oblouk v polorovině opačné k polorovině $ABS$ nazýváme menší oblouk s krajními body $A$, $B$.

**Definice 4.9** Nechť $S$ je střed kružnice $k$ a $AB$ její tětiva, která není průměrem. Pak úhel $\sphericalangle ASB$ nazýváme ***středový úhel příslušný menšímu oblouku*** kružnice $k$ s krajními body $A, B$ (obr. 4.2 a). Úhel $\otimes ASB$ nazýváme ***středový úhel příslušný většímu oblouku*** kružnice $k$ s krajními body $A, B$ (obr. 4.2 b). Je-li úsečka $AB$ průměrem kružnice $k$, vzniknou dva přímé úhly $ASB$, které též nazýváme úhly středové, z nichž každý přísluší té polokružnici s krajními body $A, B$, která je jeho podmnožinou (obr. 4.2 c).



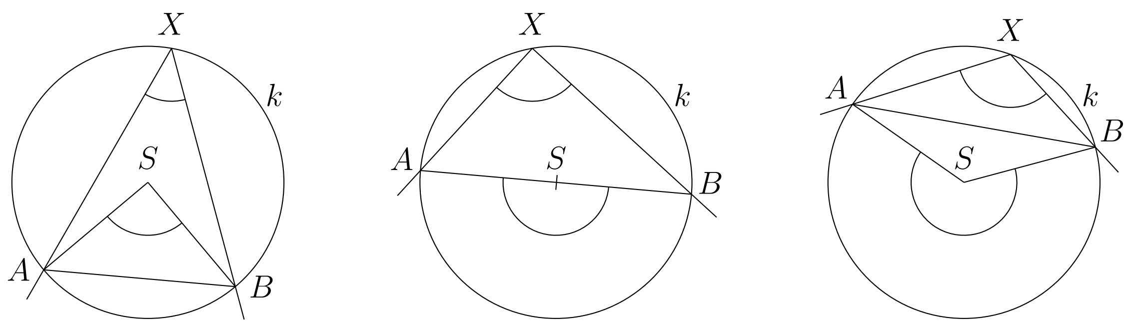

*a*) *b*) *c*)

Obr. 4.2

**Poznámka 4.3** Stručně je možno říci, že středový úhel $ASB$ přísluší vždy tomu oblouku kružnice s krajními body $A, B$, který je jeho podmnožinou. Zřejmě platí, že shodným obloukům příslušejí v téže kružnici shodné středové úhly a naopak.

**Definice 4.10** Nechť je dána kružnice $k$ a na ní tři různé body $A, B, X$. Konvexní úhel $\sphericalangle AXB$ se nazývá ***obvodový úhel*** příslušný tomu oblouku kružnice $k$, který leží v polorovině opačné k polorovině $ABX$. Středový úhel $ASB$, který přísluší k tomuto oblouku $AB$ se nazývá ***středový úhel příslušný k obvodovému úhlu*** $\sphericalangle AXB$.

**Poznámka 4.4** Stručně je možno říci, že obvodový úhel $\sphericalangle AXB$ přísluší tomu oblouku kružnice s krajními body $A, B$, který je jeho podmnožinou. Obvodový a k němu příslušný středový úhel příslušejí témuž oblouku (obr. 4.3 a – c).




*a*) *b*) *c*)

Obr. 4.3

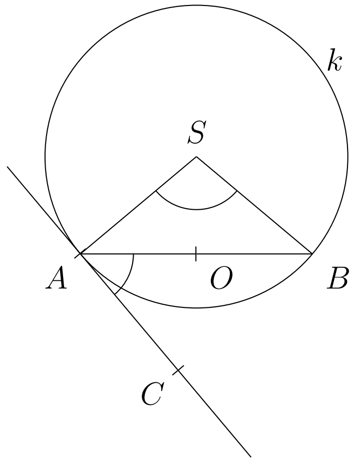
Vztah mezi obvodovým a k němu příslušným středovým úhlem vyjadřuje následující věta:

**Věta 4.1** *Velikost středového úhlu v kružnici k je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku kružnice k jako daný středový úhel.*

Důkaz věty 4.1 přesahuje rámec tohoto textu a lze jej najít v uvedené literatuře. Užitím věty 4.1 lze dokázat větu 4.2:

**Věta 4.2** *Všechny obvodové úhly příslušné k témuž oblouku kružnice jsou navzájem shodné.*

**Definice 4.11** Nechť je dána kružnice $k(S, r)$ a dva její různé body $A$, $B$. V bodě $A$ je sestrojena tečna $AC$ kružnice $k$. Potom úhel $\sphericalangle BAC$ nazýváme ***úsekový úhel*** příslušný k tomu oblouku $AB$ kružnice $k$, který v tomto úhlu leží. Středový úhel $\sphericalangle ASB$, který k tomuto oblouku přísluší, se nazývá středový úhel příslušný k úsekovému úhlu $\sphericalangle BAC$ (obr. 4.4).




Obr. 4.4

**Věta 4.3** *Velikost úsekového úhlu v kružnici k je rovna polovině velikosti k němu příslušného středového úhlu.*

■ **4.1** Důkaz věty 4.3 proveďte jako cvičení. Využijte při tom trojúhelníka $AOS$, kde $O$ je střed tětivy $AB$ (obr. 4.4).

Úsekový úhel $\sphericalangle BAC$ znázorněný na obrázku 4.4 přísluší menžímu z oblouků s krajními body $A$, $B$. Uvažujte i o úsekových úhlech příslušných k polokružnici a k většímu z oblouků s krajními body $A$, $B$ a dokažte větu i pro tyto případy.

Z předcházejících vět je zřejmé, že úsekový úhel a obvodový úhel, které příslušejí k témuž oblouku kružnice, mají stejné velikosti. Toho využíváme při řešení úlohy určit množinu vrcholů všech konvexních úhlů o dané velikosti $\alpha$, které procházejí danými různými body $A$, $B$ (viz cvičení 4.4).

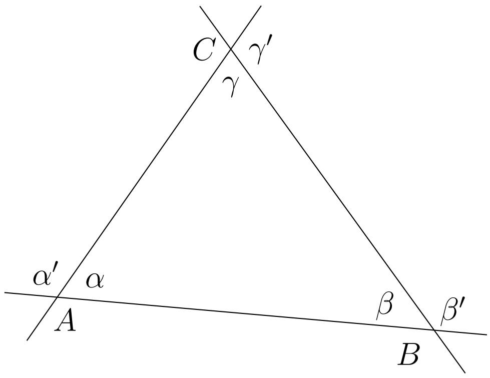
## 4.3 Trojúhelník, vztahy mezi stranami a úhly trojúhelníka, příčky trojúhelníka

Trojúhelník jsme definovali v předcházející části textu definicemi **??** a **??**. Nyní si připomeneme některé vlastnosti týkající se jeho stran, úhlů a příček.

**Věta 4.4** ***(Trojúhelníková nerovnost)***
*Součet velikostí kterýchkoliv dvou stran trojúhelníka je větší než velikost strana třetí.*

Věta 4.4 je jednou ze základních vět elementární geometrie. Je možno ji formulovat také užitím pojmů grafický součet stran trojúhelníka. Také věta o součtu velikostí (resp. o grafickém součtu) všech vnitřních úhlů trojúhelníka patří mezi základní věty elementární geometrie – viz cvičení 4.2.

**Definice 4.12** ***Vnějším úhlem trojúhelníka*** nazýváme úhel, který je vedlejší k jeho vnitřnímu úhlu.




Obr. 4.5

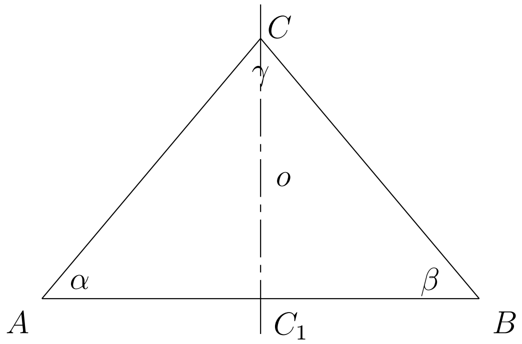
**Věta 4.5** *Velikost vnějšího úhlu trojúhelníka je rovna součtu velikostí jeho vnitřních úhlů, k nimž tento úhel není vedlejší.*

**Důsledek věty 4.5:** Vnější úhel trojúhelníka při daném vrcholu je větší než kterýkoliv jeho vnitřní úhel při zbývajícím vrcholu.

**Věta 4.6** ***(O stranách a protějších úhlech trojúhelníka)***
*Proti shodným stranám trojúhelníka leží shodné vnitřní úhly. Proti větší ze dvou stran leží větší vnitřní úhel.*

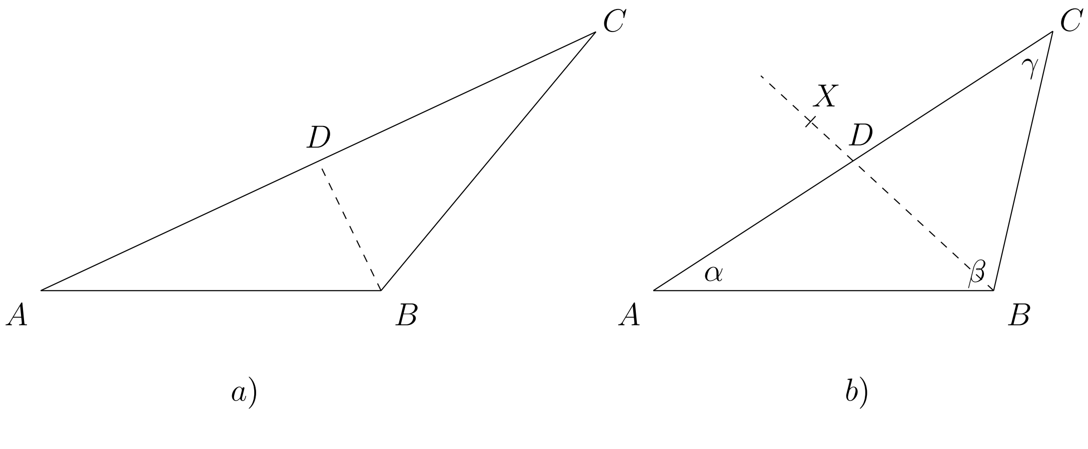
Platí též: *Proti shodným vnitřním úhlům trojúhelníka leží shodné strany, proti většímu ze dvou vnitřních úhlů leží větší strana.*

**Důkaz:** *a) Nejdříve dokážeme, že proti shodným stranám trojúhelníka leží shodné vnitřní úhly. Uvažujme trojúhelník* $ABC$ *a nechť* $AC \cong BC$ *(obr. 4.6). Dokážeme, že* $\alpha \cong \beta$. *Sestrojme osu úhlu* $\sphericalangle ACB$ *a její průsečík se stranou* $AB$ *označme* $C_1$. *Platí* $AC \cong BC$, $CC_1 \cong CC_1$, $\sphericalangle ACC_1 \cong \sphericalangle BCC_1$, *tj.* $\triangle AC_1C \cong \triangle BC_1C$ *podle věty sus. Platí tedy* $\sphericalangle CAC_1 \cong \sphericalangle CBC_1$, *tj.* $\alpha \cong \beta$.




Obr. 4.6

*b) Nyní dokážeme tvrzení obrácené, tj. že proti shodným vnitřním úhlům trojúhelníka leží shodné strany. Uvažujme opět trojúhelník* $ABC$ *a nechť je* $\alpha \cong \beta$. *Dokážeme, že* $BC \cong AC$. *Sestrojíme opět osu úhlu* $\sphericalangle ACB$ *a její průsečík se stranou* $AB$ *označme* $C_1$ *(obr. 4.6). Platí* $\sphericalangle ACC_1 \cong \sphericalangle BCC_1$ *a* $\alpha \cong \beta$. *Trojúhelníky* $ACC_1$ *a* $BCC_1$ *se tedy shodují ve dvou úhlech, z čehož vyplývá, že se shodují ve všech třech úhlech a navíc mají stranu* $CC_1$ *společnou. Tj. podle věty usu platí* $\triangle AC_1C \cong \triangle BC_1C$ *a odtud již plyne* $BC \cong AC$, *což jsme měli dokázat.*



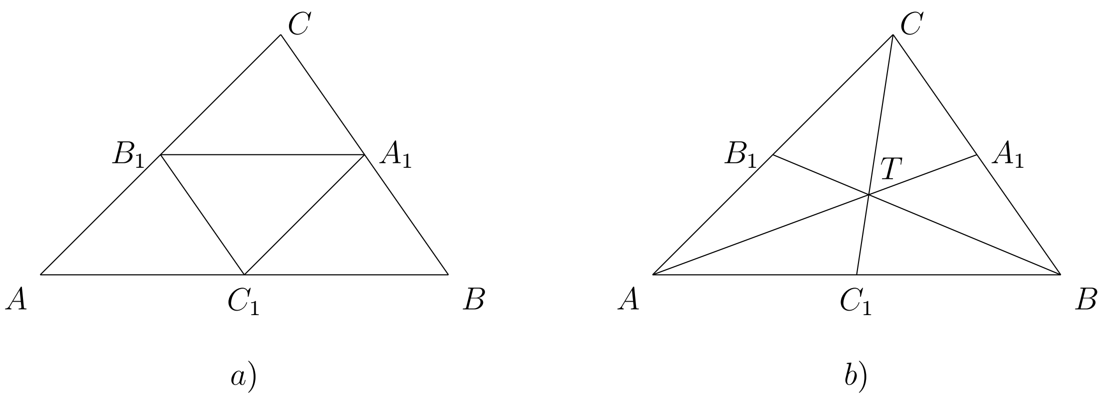

Obr. 4.7

*Trojúhelník* $ABC$ *je rovnoramenný s hlavním vrcholem* $C$. *Ze shodnosti* $\triangle AC_1C \cong \triangle BC_1C$ *plyne, že* $C_1$ *je střed strany* $AB$ *a že úhly* $\sphericalangle AC_1C$, $\sphericalangle BC_1C$ *jsou pravé, neboť se jedná o shodné vedlejší úhly. Jako vedlejší výsledek tedy dostáváme, že osa vnitřního úhlu rovnoramenného trojúhelníka při jeho hlavním vrcholu je kolmá na jeho základnu a prochází jejím středem.*

*c) Nyní se zaměříme na důkaz tvrzení, že proti větší starně trojúhelníka leží větší vnitřní úhel. Nechť je dán trojúhelník $ABC$ a nechť $AC > BC$ (obr. 4.7 a) ). Dokážeme, že $\sphericalangle ABC > \sphericalangle CAB$. Sestrojme bod $D \in AC$ tak, že je $BC \cong DC$. Podle části a) důkazu věty 4.6 platí, že $\sphericalangle CDB \cong \sphericalangle CBD$. Úhel $\sphericalangle CDB$ je vnějším úhlem trojúhelníka $ABD$, a je tedy větší než $\sphericalangle CAB$. Úhel $\sphericalangle ABC$ je však větší než $\sphericalangle CBD$, neboť je roven grafickému součtu úhlů $\sphericalangle CBD$, $\sphericalangle ABD$ a úhel $\sphericalangle ABD$ není nulový (podle předpokladu je $AC > BC$, a tedy $A \neq D$). Z uvedených vztahů plyne: $\sphericalangle ABC > \sphericalangle DBC$, $\sphericalangle DBC \cong \sphericalangle CDB$, $\sphericalangle CDB > \sphericalangle CAB$ a tedy $\sphericalangle ABC > \sphericalangle CAB$, což jsme měli dokázat.*

*d) Zbývá dokázat, že proti většímu úhlu trojúhelníka leží větší strana. Nechť je dán trojúhelník $ABC$ a nechť $\alpha < \beta$. Dokážeme, že $AC > BC$ (obr. 4.7 b) ). Sestrojme úhel $\sphericalangle ABX$ shodný s úhlem $\alpha$ tak, že polopřímka $BX$ náleží polorovině $ABC$. Protože je $\alpha < \beta$, je $\sphericalangle ABX < \beta$ a $\beta = \sphericalangle ABX + \sphericalangle XBC$. Body $A$, $C$ náležejí opačným polorovinám s hraniční přímkou $BX$, a tedy existuje bod $D$ tak, že $D \in \mapsto BX \cap AC$. Podle části b) důkazu věty 4.6 je $AD \cong BD$. Z věty 4.4 plyne pro trojúhelník $BCD$, že $BD + DC > BC$. Platí $AD \cong BD$, a tedy $AD + DC > BC$, tj. $AC > BC$, což jsme měli dokázat.* □

**Definice 4.13** V trojúhelníku $ABC$ označme po řadě $A_1$, $B_1$, $C_1$ středy stran $a$, $b$, $c$. Úsečky $A_1B_1$, $B_1C_1$, $C_1A_1$ se nazývají ***střední příčky trojúhelníka*** $ABC$ příslušné po řadě ke stranám $c$, $a$, $b$ (obr. 4.8 a). Úsečky $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ se nazývají ***těžnice trojúhelníka*** $ABC$ (obr. 4.8 b).

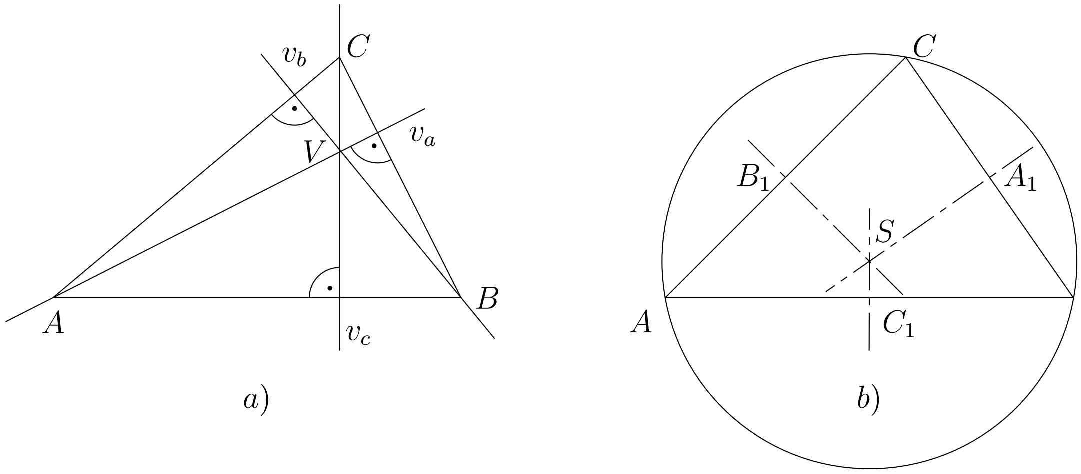



Obr. 4.8

**Věta 4.7** *Střední příčka trojúhelníka je rovnoběžná se stranou tohoto trojúhelníka, jejíž střed neobsahuje, a její velikost se rovná polovině velikosti této strany.*

**Věta 4.8** *Těžnice trojúhelníka $ABC$ procházejí týmž bodem $T$, zvaným těžiště trojúhelníka. Těžiště $T$ dělí každou těžnici na dvě úsečky, z nichž ta část, která obsahuje vrchol trojúhelníka, je dvojnásobkem druhé části (obr. 4.8 b).*

**Definice 4.14** V trojúhelníku $ABC$ označme po řadě $v_a$, $v_b$, $v_c$ kolmice vedené vrcholy $A$, $B$, $C$ trojúhelníka $ABC$ k přímkám $BC$, $AC$, $AB$. Přímky $v_a$, $v_b$, $v_c$ se nazývají ***výšky trojúhelníka*** $ABC$ (obr. 4.9).




Obr. 4.9

**Poznámka 4.5** Výškou též nazýváme úsečku, jejímiž krajními body jsou vrchol trojúhelníka a průsečík kolmice vedené tímto vrcholem k přímce, v níž leží protější strana, s touto přímkou. Také velikost této úsečky se nazývá výška. Pojem *výška trojúhelníka* má tedy trojí význam. Proto je třeba, aby bylo vždy alespoň z kontextu zřejmé, o který z významů jde. Ve větě 4.9 je výška chápána ve smyslu definice 4.14.

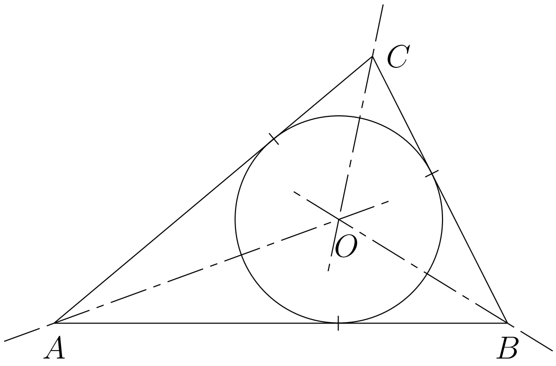
**Věta 4.9** *Výšky trojúhelníka $ABC$ procházejí týmž bodem $V$, zvaným průsečík výšek nebo též ortocentrum trojúhelníka $ABC$ (obr. 4.9 a) ).*

**Definice 4.15** ***Osami stran*** trojúhelníka $ABC$ nazýváme osy úseček $AB$, $BC$ a $AC$.

**Věta 4.10** *Osy stran trojúhelníka se protínají v jediném bodě, který je středem kružnice trojúhelníku opsané (obr. 4.9 b) ).*

Mezi příčky trojúhelníka řadíme též osy jeho vnitřních úhlů. Pro jejich vzájemnou polohu platí věta 4.11.

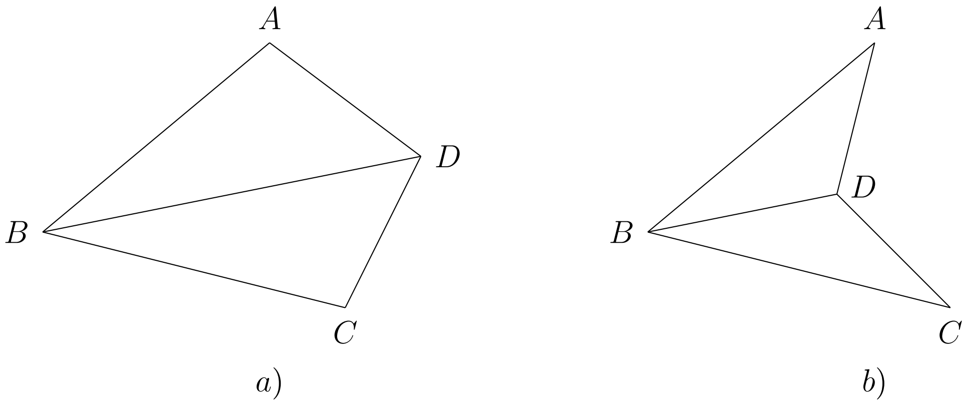
**Věta 4.11** *Osy vnitřních úhlů trojúhelníka se protínají v jediném bodě, který je středem kružnice trojúhelníku vepsané (obr. 4.10).*




Obr. 4.10

## 4.4 Čtyřúhelník, třídění čtyřúhelníků

**Definice 4.16** Nechť $A$, $B$, $C$, $D$ jsou čtyři body v téže rovině, z nichž žádné tři neleží v přímce. Sjednocení trojúhelníků $ABD$ a $BDC$ nazveme ***čtyřúhelníkem*** $ABCD$ právě tehdy, když průnikem těchto trojúhelníků je úsečka $BD$ (obr. 4.4).




Obr. 4.11

Čtyřúhelník na obrázku a) je konvexní, na obrázku b) je nekonvexní. Konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je možno definovat také jako průnik polorovin:
*Konvexní čtyřúhelník* $ABCD = \mapsto ABC \cap \mapsto BCD \cap \mapsto CDB \cap \mapsto ADB$, přičemž ovšem předpokládáme, že body $A$, $B$, $C$, $D$ leží v téže rovině a žádné tři z nich neleží v přímce.

Body $A$, $B$, $C$, $D$ nazýváme *vrcholy čtyřúhelníka* $ABCD$, úsečky $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ jeho *strany* a úsečky $AC$, $BD$ jeho *úhlopříčky*. *Vnitřními úhly* čtyřúhelníka z definice 4.16 nazýváme tyto úhly: $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD \cup \sphericalangle DBC$ a $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ADB \cup \sphericalangle BDC$. Pro součet vnitřních úhlů čtyřúhelníka platí věta 4.12.

**Věta 4.12** *Součet velikostí všech vnitřních úhlů čtyřúhelníka je roven* $360°$*.*

Čtyřúhelníky můžeme třídit podle různých hledisek, např. podle toho, zda mají některé dvojice stran rovnoběžné, případně shodné, zda jsou některé strany na sebe kolmé apod. Pro zopakování uvádíme následující třídění čtyřúhelníků:

$$\textbf{Čtyřúhelníky}\begin{cases}\text{různoběžníky}\\[2ex] \begin{array}{l}\text{čtyřúhelníky s rovno-}\\ \text{běžnými stranami}\end{array} \begin{cases}\text{lichoběžníky}\\[2ex] \text{rovnoběžníky}\begin{cases}\text{pravoúhelníky}\begin{cases}\text{obdélníky}\\ \text{čtverce}\end{cases}\\ \text{kosodélníky}\begin{cases}\text{kosodélníky}\\ \text{kosočtverce}\end{cases}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

Jiné třídění čtyřúhelníků lze provádět např. vzhledem k vlastnostem uhlopříček čtyřúhelníka:

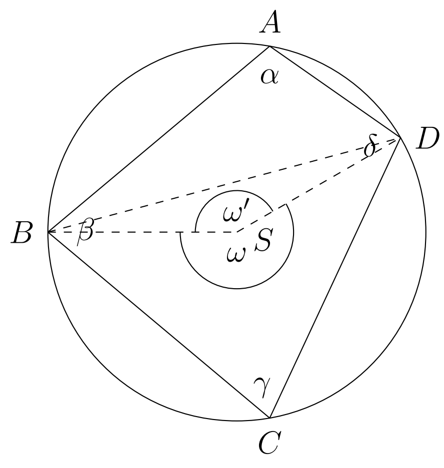
$$\text{Uhlopříčky čtyřúhelníka}\begin{cases}\text{kolmé}\begin{cases}\text{shodné}\begin{cases}\text{půlí se – }\textbf{čtverce}\\ \text{nepůlí se}\end{cases}\\ \text{neshodné}\begin{cases}\text{půlí se – }\textbf{kosočtverce}\\ \text{nepůlí se}\end{cases}\end{cases}\\[4ex] \text{kosé}\begin{cases}\text{shodné}\begin{cases}\text{půlí se – }\textbf{obdélníky}\\ \text{nepůlí se}\end{cases}\\ \text{neshodné}\begin{cases}\text{půlí se – }\textbf{kosodélníky}\\ \text{nepůlí se}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

V závěru odstavce o čtyřúhelnících zavedeme ještě dva nové pojmy, a to pojem tětivového a pojem tečnového čtyřúhelníka.

**Definice 4.17** Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník. Existuje-li kružnice, která prochází body $A$, $B$, $C$, $D$ nazýváme tento čtyřúhelník ***tětivový***.

**Věta 4.13** *Součet velikostí každých dvou protějších vnitřních úhlů tětivového čtyřúhelníka je roven* $180°$*.*

**Důkaz:** *Vyjdeme-li z označení v obrázku 4.12, je třeba dokázat, že* $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$*. Platí* $\omega + \omega' = 360°$*. Podle věty 4.1 platí, že* $\omega = 2\alpha$*,* $\omega' = 2\gamma$*. Tedy* $2\alpha + 2\gamma = \omega + \omega' = 360°$ *toho bezprostředně plyne, že* $\alpha + \gamma = 180°$*. Odtud z věty 4.12 pak plyne též, že* $\beta + \delta = 180°$*.*




Obr. 4.12

**Definice 4.18** Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník. Existuje-li kružnice, která se dotýká všech jeho stran, nazýváme tento čtyřúhelník ***tečnový***.

**Věta 4.14** *Součty velikostí protějších stran tečnového čtyřúhelníka jsou si rovny.*

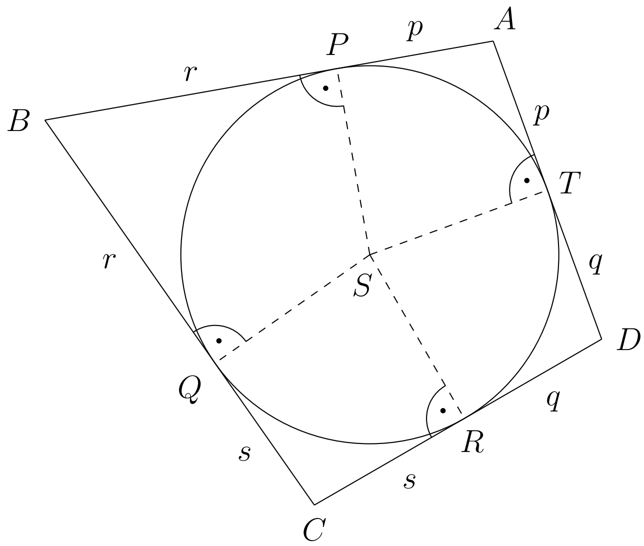
**Důkaz:** *Vyjdeme-li z označení v obrázku 4.13, je třeba dokázat, že* $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$. *Trojúhelníky* $SBP$ *a* $SBQ$ *jsou shodné podle věty Ssu (*$SB$ *je společná strana ,* $SP \cong SQ$, $\sphericalangle SPB = \sphericalangle SQB$*). Ze shodnosti těchto trojúhelníků vyplývá, že* $BP \cong BQ$. *Podobně se ukáže, že* $CQ \cong CR$, $DR \cong DT$ *a* $AT \cong AP$. *Nechť* $|AP| = p$, $|BP| = r$, $|CQ| = s$ *a* $|DR| = q$. *Pak je*

$$|AD| + |BC| = p + q + r + s,$$

$$|AB| + |DC| = p + r + s + q.$$

*Platí tedy* $|AD| + |BC| = |AB| + |CD|$, *což jsme měli dokázat.*

**Definice 4.19** Čtyřúhelník, jemuž lze opsat i vepsat kružnici, se nazývá čtyřúhelník ***dvojstředový***.




Obr. 4.13

## Cvičení:

■ **4.2** Analogicky k větě 4.4 vyslovte větu o součtu velikostí (resp. o grafickém součtu) všech vnitřních úhlů trojúhelníka a dokažte ji.

■ **4.3** Zdůvodněte větu 4.12.

■ **4.4** Je dána úsečka $AB$.
a) Sestrojte množinu všech vrcholů konvexního úhlu $\sphericalangle ACB = \gamma$, jehož ramena procházejí krajními body úsečky $AB$.
b) Sestrojte $\triangle ABC$, je-li $|AB| = 6$, $\gamma = 60°$, $v_C = 4$.

■ **4.5** Je-li v rovnoramenném trojúhelníku $ABC$ úhel při základně $AB$ roven trojnásobku úhlu při vrcholu $C$ a rozdělí-li se úhel $\triangleleft BAC$ při základně na tři shodné úhly (tak, že $M$, $N$ jsou takové body strany $BC$, pro něž platí $\triangleleft NAB \cong \triangleleft MAN \cong \triangleleft CAM$), pak platí $AB \cong AN \cong BM$, $AM \cong CM$. Dokažte.

■ **4.6** Bodem $A$ ležícím vně kružnice $k(S, r)$ je vedena sečna $CD$ tak, že $AC < AD$ a $|AC| = r$. Dokažte, že

$$\triangleleft ASC = \frac{1}{3} \triangleleft BSD,$$

kde bod $B$ je průsečík přímky $AS$ s kružnicí $k$ takový, že $S$ leží mezi body $A$, $B$.

■ **4.7** Uvnitř trojúhelníku $ABC$ zvolte bod $S$. Dokažte, že součet úseček $SA$, $SB$, $SC$ je větší než poloviční součet stran daného trojúhelníku, tj. že

$$SA + SB + SC > \frac{1}{2}(AB + BC + CA).$$

■ **4.8** Dakažte, že součet úseček, které spojují vnitřní bod $P$ trojúhelníku s krajními body jedné jeho strany, je menší než součet zbývajících dvou stran daného trojúhelníku.

■ **4.9** Přímka $o$ je osou úsečky $AB$. Bod $X$ je libovolný vnitřní bod poloroviny $oA$. Dokažte, že platí: $AX < BX$.

■ **4.10** Bod $U$ je vnitřním bodem trojúhelníku $ABC$.
Dokažte, že platí: $\sphericalangle AUB > \sphericalangle ACB$, $\sphericalangle BUC > \sphericalangle BAC$ a $\sphericalangle AUC > \sphericalangle ABC$.

■ **4.11** Leží-li bod $X$ na ose daného konvexního úhlu $AVB$, pak má od jeho ramen stejné vzdálenosti. Dokažte.

■ **4.12** Splývá-li těžnice trojúhelníka s jeho výškou, je tento trojúhelník rovnoramenný. Dokažte.

■ **4.13** V trojúhelníku $ABC$ je $\sphericalangle BAC = \alpha = 50°$, $\sphericalangle ABC = \beta = 60°$, osa $\sphericalangle ABC$ protíná stranu $AC$ v bodě $D$. Seřaďte úsečky $AB$, $BC$, $CD$, $AD$, $AC$, $BD$ podle velikosti.

■ **4.14** Určete velikost vnitřních úhlů trojúhelníka $A_1B_1C_1$, jehož vrcholy jsou průsečíky os vnějších úhlů daného trojúhelníka $ABC$.

■ **4.15** Je dán rovnoramenný trojúhelník $ABC$ a bod $D$, který je středem jeho základny $AB$. Bodem $D$ jsou vedeny kolmice k ramenům $AC$, $BC$ trojúhelníka $ABC$. Jejich paty jsou označeny $M$, $N$. Dokažte, že $\triangle DMC \cong \triangle DNC$.

■ **4.16** Sestrojte trojúhelník $ABC$ je-li dáno:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a) | $c, b, t_c$ | b) | $\alpha, c, t_c$ | c) | $a, v_a, b$ |
| d) | $a, \alpha, v_b$ | e) | $b, c, v_a$ | f) | $\alpha, v_b, r_v$ |
| g) | $b, \gamma, v_c$ | h) | $\gamma, v_a, v_b$ | i) | $c, v_a, v_b$ |
| j) | $a, v_a, v_b$ | k) | $\gamma, v_a, v_c$ | l) | $r_o, v_c, t_c$ |
| m) | $a, b, t_c$ | n) | $\alpha, \beta, r_v$ | o) | $\alpha, \beta, r_o$ |
| p) | $b, \beta, v_b$ | q) | $a, \beta, r_v$ | r) | $c, t_a, t_b$ |
| s) | $b, \beta, t_a$ | t) | $a, t_a, t_b$ | u) | $a, v_a, t_b$ |
| v) | $t_a, t_b, t_c$ | w) | $t_a, t_b, \gamma$ | z) | $t_a, v_a, v_b$ |

kde $r_o$ je poloměr kružnice opsané a $r_v$ je poloměr kružnice vepsané trojúhelníku $ABC$.

■ **4.17** Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, jsou-li dány velikosti uhlopříček $e$, $f$ a velikost výšky $v_a$.

■ **4.18** Sestrojte lichoběžník $ABCD$, $AB \parallel CD$, jsou-li dány velikosti uhlopříček $e$, $f$, velikost úhlu $DAB = \alpha$ a velikost úhlu $AEB = \omega$, kde $E$ je průsečík uhlopříček.

■ **4.19** Sestrojte trojúhelník $ABC$ je-li dáno:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a) | $c, b, t_c$ | b) | $\alpha, c, t_c$ | c) | $a, v_a, b$ |
| d) | $a, \alpha, v_b$ | e) | $b, c, v_a$ | f) | $\alpha, v_b, r_v$ |
| g) | $b, \gamma, v_c$ | h) | $\gamma, v_a, v_b$ | i) | $c, v_a, v_b$ |

■ **4.20** Sestrojte různoběžník $ABCD$, je-li dáno: velikost strany $AB$, velikost strany $BC$, velikosti obou uhlopříček $AC$, $BD$ a velikost úhlu $AEB = \omega$, kde $E$ je průsečík uhlopříček.

■ **4.21** Sestrojte kružnici $k$, je-li dána její tečna $t$ s bodem dotyku $T$ a další její tečna $q$.

■ **4.22** Největší strana konvexního čtyřúhelníka $ABCD$ je $AB$, nejmenší $CD$. Dokažte, že $\sphericalangle ABC < \sphericalangle ADC$.

■ **4.23** Uvažujte množinu všech čtyřúhelníků a čtyři její podmnožiny $A$, $B$, $C$, $D$. Přitom:

$A$ je množina všech čtyřúhelníků s alespoň jednou dvojicí rovnoběžných stran,

$B$ je množina všech čtyřúhelníků, jejichž uhlopříčky se půlí,

$C$ je množina všech čtyřúhelníků, jejichž uhlopříčky jsou shodné,

$D$ je množina všech čtyřúhelníků, jejichž uhlopříčky jsou kolmé.

Nakreslete Vennův diagram pro tyto množiny a určete vlastnosti čtyřúhelníků, které by byly znázorněny v jednotlivých elentárních polích diagramu. Pro každé pole znázorněte alespoň jeden čtyřúhelník příslušných vlastností.

■ **4.24** Čtyřúhelník, jemuž lze opsat i vepsat kružnici, tj. čtyřúhelník, který je současně tětivový i tečnový (viz definice 4.17 a 4.18), se nazývá ***dvojstředový***. Dovedete určit alespoň jeden dvojstředový čtyřúhelník, který není čtvercem?

## 4.5 Okolí bodu

**Definice 4.20** Nechť $M$ je bodová množina (rovina, prostor, popř. jiná bodová množina), $A$ je bod, $A \in M$, $\delta \in \mathbb{R}^+$. Množina bodů $O_M(A, \delta) = \{X \in M : |AX| < \delta\}$ se nazývá ***sférické okolí bodu*** $A$ ***v množině*** $M$.

**Příklad 4.1** Množina $M$, ve které definujeme okolí daného bodu je podstatná, neboť v různých množinách potom může okolí stejného bodu vypadat naprosto odlišně. Na obrázku 4.14 je znázorněno sférické okolí bodu $A$ v množině:

a) $M_1 = \rho$, kde $\rho$ je rovina, $O_\rho(A, \delta) = \{X \in \rho : |AX| < \delta\}$,

b) $M_2 = Z$, kde $Z$ je prostor, $O_Z(A, \delta) = \{X \in Z : |AX| < \delta\}$.

Zatímco v případě a) je sférickým okolím bodu $A$ vnitřní oblast kružnice o poloměru $\delta$, tak v případě b) se jedná o vnitřní oblast kulové plochy o poloměru $\delta$.

Obr. 4.14

**Definice 4.21** Útvar $U$ se nazývá ***omezený v množině*** $M$ právě tehdy, když existuje takový bod $A$, $A \in M$ a takové okolí $O_M(A, \delta)$, že útvar $U$ je podmnožinou tohoto okolí.
Útvar, který není omezený se nazývá ***neomezený***.

**Definice 4.22**
Bod $A$ se nazývá ***vnitřní bod*** útvaru $U$ v množině $M$ právě tehdy, když existuje alespoň jedno jeho okolí v množině $M$, jehož každý bod je bodem útvaru $U$.
Bod $B$ se nazývá ***vnější bod*** útvaru $U$ v množině $M$ právě tehdy, když existuje alespoň jedno jeho okolí v množině $M$, jehož žádný bod nepatří útvaru $U$.
Bod $C$ se nazývá ***hraniční bod*** útvaru $U$ v množině $M$ právě tehdy, když každé jeho okolí v množině $M$ obsahuje jak body, které patří útvaru $U$, tak body, které nepatří útvaru $U$.

Obr. 4.15

**Definice 4.23** Množina všech hraničních bodů útvaru $U$ se nazývá ***hranice*** útvaru $U$. Množina všech vnitřních bodů útvaru $U$ se nazývá ***vnitřek*** útvaru $U$. Množina všech vnějších bodů útvaru $U$ se nazývá ***vnějšek*** útvaru $U$.

**Příklad 4.2** Nechť množinou $M$ je roviina $\rho$ a útvarem $U$ je úsečka $AB$ (obr. 4.16). Pak každý bod úsečky $AB$ je hraničním bodem této úsečky vzhledem k rovině $\rho$. V rovině $\rho$ je tedy hranicí útvaru, kterým je úsečka $AB$, právě tato úsečka. Bod $C$ je vnější bod úsečky $AB$ vzhledem k rovině $\rho$. Vnějšek uvažovaného útvaru, úsečky $AB$, je tedy množina $M = \rho - AB$.

Obr. 4.16

**Poznámka 4.6** Často se setkáváme s nesprávným užitím termínu „vnitřek krufnice“. Chápeme-li kružnici jako podmnožinu roviny. Každý bod kružnice vzhledem k rovině, v níž kružnice leží, je totiž hraničním bodem kružnice a vnitřek kružnice je prázdná množina. Terminologicky správné je užívat pojmy *vnitřní oblast kružnice* a *vnější oblast kružnice.*

**Definice 4.24** Útvar $U$ se nazývá ***uzavřený*** v množině $M$ právě tehdy, když obsahuje všechny své hraniční body (vzhledem k množině $M$).
Útvar $U$ se nazývá ***otevřený*** v množině $M$ právě tehdy, když neobsahuje žádný svůj hraniční bod.

**Definice 4.25** Říkáme, že útvary $U_1$, $U_2$ se nepřekrývají v množině $M$ právě tehdy, když průnik útvarů $U_1$, $U_2$ je podmnožinou průniku jejich hranic.
Jinak: Útvary $U_1$, $U_2$ se nepřekrývají v množině $M$ právě tehdy, když jejich průnik neobsahuje žádný bod, který je vnitřním bodem alespoň jednoho z útvarů $U_1$, $U_2$ (vzhledem k množině $M$).

**Příklad 4.3** Jsou dány trojúhelníky $ABC$ a $KLM$, které leží v rovině $\rho$. Trojúhelníky $ABC$ a $KLM$ na obrázku 4.17 a), b), c) se nepřekrývají v rovině $\rho$, trojúhelníky $ABC$ a $KLM$ na obrázku 4.17 d), e) se v rovině $\rho$ překrývají.

Obr. 4.17

## 4.6 Mnohoúhelník

**Definice 4.26** ***Lomenou čárou*** $A_0A_1A_2\ldots A_n$, $(n>1)$, rozumíme sjednocení všech úseček $A_0A_1,\ A_1A_2,\ \ldots,\ A_{n-1}A_n$ konečné posloupnosti úseček, z nichž žádná neleží v přímce, která obsahuje předcházející (následující) úsečku této posloupnosti (obr. 4.18).

Obr. 4.18

Lomenou čárou tedy rozumíme sjednocení konečného počtu úseček $A_0A_1,\ A_1A_2,\ \ldots,\ A_{n-1}A_n$, z nichž každé dvě sousedící mají společný pouze jeden (krajní) bod a neleží v téže přímce.

Body $A_0A_1A_2\ldots$ nazýváme vrcholy lomené čáry, úsečky $A_0A_1,\ A_1A_2,\ \ldots$ nazýváme strany lomené čáry, strany úseček $A_{k-1}A_k,\ A_kA_{k+1}$, $k=1,\ldots,n-1$, nazýváme sousední strany lomené čáry.

**Definice 4.27** ***Jednoduchou lomenou čárou*** rozumíme lomenou čáru, jejíž každé dvě nesousedící strany jsou disjunktní – tzn. žádné dvě nesousedící strany nemají společný bod (obr. 4.19).

Obr. 4.19

**Definice 4.28** ***Jednoduchou uzavřenou lomenou čárou***rozumíme jednoduchou lomenou čáru $A_0A_1A_2\ldots A_n$, kde $A_0=A_n$ (obr. 4.20).

Obr. 4.20

Jednoduchá uzavřená lomená čára má důležité vlastnosti. Rozděluje totiž všechny body roviny, které jí nepatří, do dvou neprázdných podmnožin takových, že mezi každými dvěma body patřícími různým podmnožinám leží alespoň jeden bod lomené čáry. Pro každé dva různé body téže podmnožiny pak platí, že je lze spojit úsečkou nebo jednoduchou lomenou čarou, přičemž tyto útvary leží v této podmnožině. Tyto dvě podmnožiny nazveme ***vnitřní*** a ***vnější oblast*** jednoduché lomené čáry.

Přesněji: Nechť $L$ je jednoduchá uzavřená lomená čára $A_0A_1A_2\ldots A_n$, $(A_0=A_n)$. Označme $M$ množinu všech bodů roviny, které nepatří jednoduché čáře $L$ a dále označme $R$ relaci definovanou takto: $X$, $Y$ jsou v relaci $R$, právě tehdy, když existuje taková lomená čára obsahující body $X$, $Y$, která nemá s jednoduchou uzavřenou lomenou čárou $L$ žádný společný bod.