

# IMAk13 a IMAp13 Matematika 3

Podzim 2023

Mgr. Jitka Panáčková, Ph.D., RNDr. Milena Vaňurová, CSc.

---

## Binární relace v množině, vlastnosti binárních relací, ekvivalence, uspořádání - OPAKOVÁNÍ

Binární relace v množině  $M$  je libovolná podmnožina kartézského součinu  $M \times M$ .

### Znázornění binárních relací

**Kartézský graf** relace  $R$  – sestrojíme dvě na sebe kolmé přímky  $x, y$  (vodorovnou a svislou). Na vodorovnou přímku (osu) znázorníme pomocí bodů všechny prvky množiny, z níž vybíráme první složky dvojic, na svislou přímku (osu) znázorníme pomocí bodů všechny prvky množiny, z níž vybíráme druhé složky dvojic. (Obvykle jsou sousední body na obou osách od sebe stejně vzdáleny.) Uspořádanou dvojici  $[a, b] \in R$  znázorníme bodem, který je průsečíkem dvou přímek procházejících body  $a, b$  a rovnoběžných po řadě se svislou a vodorovnou osou.

**Uzlový graf** relace  $R$  v množině  $M$  - v rovině znázorníme pomocí bodů (tzv. uzlů) všechny prvky množiny  $M$  (pokud bychom znázorňovali relaci z množiny  $A$  do množiny  $B$ , pak znázorníme všechny prvky sjednocení množiny  $A$  a  $B$ ). Uspořádanou dvojici  $[a, b] \in R$  znázorníme pomocí šipky (tzv. orientované hrany), která vychází z uzlu  $a$  a směřuje do uzlu  $b$ . V případě, že  $a = b$ , nazýváme šipku smyčkou. Pokud jsou v relaci  $R$  dvojice  $[a, b]$  a  $[b, a]$ , znázorníme je “dvojšipkou” (tzv. neorientovanou hranou).

## Vlastnosti relací v množině $M$

Binární relace  $R$  v množině  $M$  je **reflexivní** právě tehdy, když  $(\forall x \in M) ([x, x] \in R)$ , tzn. obsahuje všechny uspořádané dvojice  $[x, x]$ , kde  $x \in M$ .

Binární relace  $R$  v množině  $M$  je **antireflexivní** právě tehdy, když  $(\forall x \in M) ([x, x] \notin R)$ , tzn. neobsahuje žádnou uspořádanou dvojici typu  $[x, x]$ , kde  $x \in M$ .

Binární relace  $R$  v množině  $M$  je **symetrická** právě tehdy, když  $(\forall x, y \in M) ([x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R)$ , tzn. s každou uspořádanou dvojicí  $[x, y]$  obsahuje i dvojici  $[y, x]$ .

Binární relace  $R$  v množině  $M$  je **antisymetrická**, právě tehdy, když  $(\forall x, y \in M) ((x \neq y \wedge [x, y] \in R) \Rightarrow [y, x] \notin R)$ , tzn. s žádnou dvojicí  $[x, y]$  různých prvků neobsahuje dvojici  $[y, x]$ .

Binární relace  $R$  v množině  $M$  je **tranzitivní** právě tehdy, když  $(\forall x, y, z \in M) (([x, y] \in R \wedge [y, z] \in R) \Rightarrow [x, z] \in R)$ , tzn. jestliže se v relaci vyskytují „na sebe navazující dvojice“ (tj. druhá složka první dvojice je první složkou druhé dvojice), pak musí relace obsahovat i dvojici, jejíž první složkou je 1. složka z první dvojice a druhou složkou je 2. složka z druhé dvojice.

Binární relace  $R$  v množině  $M$  je **souvislá** právě tehdy, když  $(\forall x, y \in M) (x \neq y \Rightarrow ([x, y] \in R \vee [y, x] \in R))$ , tzn. každé dva různé prvky z množiny  $M$  musí být „spolu v relaci“.

# IMAk13 a IMAp13 Matematika 3

Podzim 2023

Mgr. Jitka Panáčková, Ph.D., RNDr. Milena Vaňurová, CSc.

---

Binární relaci  $U$  v množině  $M$  nazýváme

- **(částečné) uspořádání v  $M$** , právě když je relace antisymetrická a tranzitivní;
- **lineární uspořádání v  $M$** , právě když je relace antisymetrická, tranzitivní a souvislá;
- **ostré lineární uspořádání v  $M$** , právě když je antisymetrická, tranzitivní, souvislá a antireflexivní.

Binární relaci  $R$  v množině  $M$  nazýváme **relací ekvivalence** na  $M$ , právě když je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Každá relace ekvivalence na množině  $M$  vytváří **rozklad** této množiny, což je systém neprázdných podmnožin (tzv. tříd rozkladu) množiny  $M$  takových, že průnik každých dvou tříd je prázdná množina a sjednocení všech tříd rozkladu tvoří množinu  $M$ .

Jinak lze také říci, že říci, že **rozklad** množiny  $M$  je systém neprázdných podmnožin (tzv. tříd rozkladu) množiny  $M$  takových, že každý prvek množiny  $M$  patří právě do jedné z těchto tříd.

## Úkoly k procvičení

1. Rozhodněte, jaké vlastnosti mají následující binární relace v množině  $M = \{a, b, c, d\}$

$$R_1 = \{[c,b], [b,c], [a,a], [b,b], [c,c], [d,d]\}$$

$$R_2 = \{[a,b], [c,d], [a,a], [b,b]\}$$

$$R_3 = \{[a,b], [d,c], [b,d], [a,c], [a,d], [b,c]\}$$

$$R_4 = \{[c,b], [b,c], [b,a]\}$$

$$R_5 = \{[a,a], [b,b], [c,c], [c,b], [b,c], [b,a], [a,b], [a,c], [c,a], [d,d]\}$$

$$R_6 = \{[c,a], [d,b]\}$$

$$R_7 = \{[a,a]\}$$

2. Zapište aspoň jednu neprázdnou binární relaci v množině  $A = \{1, 2, 3\}$ , která je

- a) reflexivní                      b) symetrická                      c) tranzitivní                      d) antireflexivní  
e) antisymetrická                      f) souvislá                      g) symetrická a není tranzitivní

V každém případě určete, jaké další vlastnosti má zvolená relace.

3. Rozhodněte (jen na základě úvahy) o vlastnostech alespoň pěti z následujících relací zadaných charakteristickou vlastností:

a) rovnost v množině přirozených čísel  $R = \{[x,y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; x = y\}$

b) relace „být menší“ v množině přirozených čísel tj.  $R = \{[x,y] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; x < y\}$

c) relace „být podmnožinou“ na systému množin

d) kolmost přímek v množině všech přímek roviny

e) rovnoběžnost přímek v množině všech přímek roviny

f) shodnost úseček v množině všech úseček roviny

g) relace „být sourozencem“ v množině lidí

h) relace „být otcem“ ve vaší rodině

i) relace „narodit se ve stejném měsíci“ v množině lidí v této místnosti

j) relace „dávat stejný zbytek při dělení číslem 3“ v množině přirozených čísel.

Pokud je některá z výše uvedených relací relace ekvivalence, určete příslušný rozklad množiny.

Uvažujte další relace a určujte jejich vlastnosti.