2. FUNKCE

Průvodce studiem

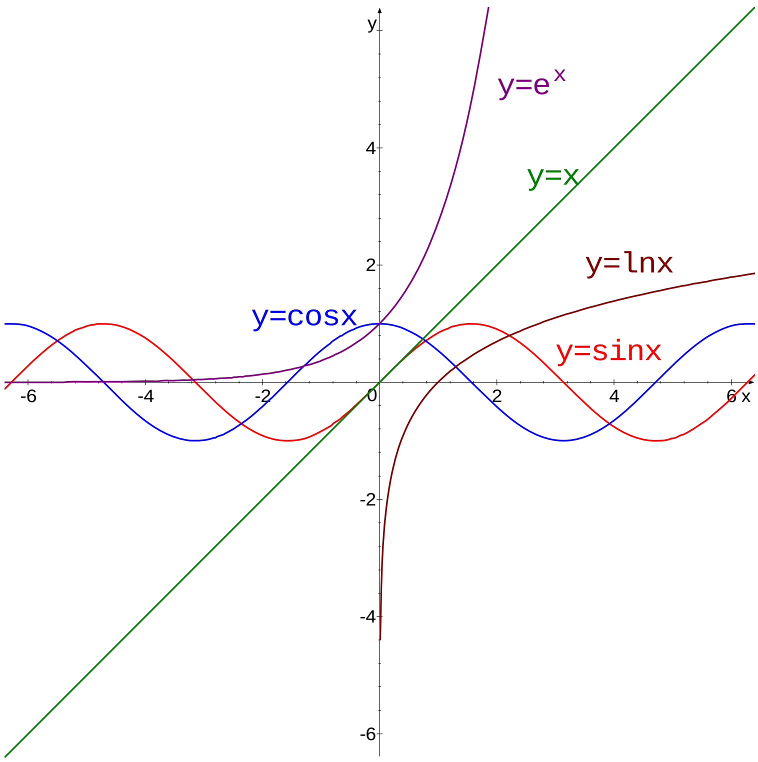
Kapitola *Funkce* je rozdělena do devíti menších celků a ty jsou ještě dále rozděleny na menší oddíly. V každém oddíle je nejdříve vysvětlena teorie, jsou zavedeny nové pojmy a vzorce. Pak následují *Řešené úlohy*. V *Úlohách k samostatnému řešení* si prověříte získané vědomosti. K těmto úlohám jsou na konci kapitoly uvedeny výsledky a pro ty, kteří by si s úlohami nevěděli rady, také nápověda. Na samý závěr se otestujete, jak jste zvládli tuto kapitolu.Grafy v textu byly vytvořeny pomocí programu Matematika. Hodně zdaru při studiu.

Cíle

Seznámíte se s elementárními funkcemi, poznáte jejich definiční obory a obory hodnot, budete umět nakreslit jejich grafy. Budete umět určit vlastnosti funkcí. Grafy elementárních funkcí, s nimiž budete pracovat, jsou vykresleny na úvodním obrázku.

Předpokládané znalosti

Umíte řešit nerovnice metodou nulových bodů, kterou si můžete zopakovat v 3. kapitole, a také umíte pracovat s kartézskou soustavou souřadnic Oxy v rovině.



2.1. Funkce

Výklad

Funkce f na množině $A \subset \mathbf{R}$ je předpis, který každému číslu z množiny A přiřadí právě jedno reálné číslo. Množina A se nazývá **definiční obor funkce**.

Označení $D(f), D_f$.

Obor hodnot funkce f je množina všech $y \in \mathbf{R}$, ke kterým existuje aspoň jedno x z definičního oboru funkce f tak, že $y = f(x)$.

Označení $H(f), H_f$.

$y = f(x)$ je **funkční předpis** vyjadřující závislost y na x.

x je **nezávisle** proměnná, nebo také používáme označení **argument**, vybíráme ji z $D(f)$.

y je **závisle** proměnná, $y \in H(f)$.

Hodnotu funkce f v bodě x_0 označíme $f(x_o) = y_o$ a nazývá se **funkční hodnota** funkce f v x_0.

Řešené úlohy

Příklad 2.1.1. Zapište funkci, která vyjadřuje závislost

a) obvodu rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku na délce a jeho odvěsny,

b) obvodu rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku na délce c jeho přepony.

Řešení:

a) přepona $c = a\sqrt{2}$,

obvod trojúhelníku $o = 2a + c = 2a + a\sqrt{2} = a(2+\sqrt{2})$,

$o = (2+\sqrt{2})a$, $a \in (0, \infty)$.

b) $c = a\sqrt{2} \Rightarrow a = \dfrac{c}{\sqrt{2}}$, $\quad o = 2a + c = 2\dfrac{c}{\sqrt{2}} + c = c(\sqrt{2}+1)$,

$o = (\sqrt{2}+1)c$, $c \in (0, \infty)$.

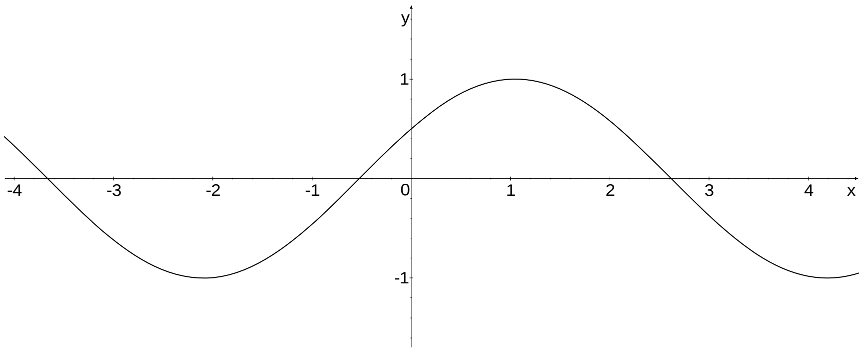
Výklad

Graf funkce *f* ve zvolené soustavě souřadnic Oxy je množina všech bodů $X[x, f(x)]$, kde x patří do definičního oboru funkce *f*. Ve skutečnosti nakreslíme (načrtneme) jen část grafu na zvoleném intervalu $I \subset D(f)$.

Řešené úlohy

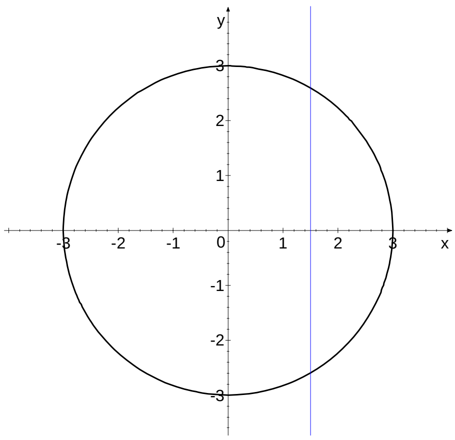
Příklad 2.1.2. Rozhodněte, která z množin bodů na uvedeném obrázku je grafem funkce. Svá tvrzení zdůvodněte

a)



Řešení: Toto je graf funkce, každému x přísluší jediné y. Každá přímka rovnoběžná s osou *y* danou množinu bodů protne nejvýše v jednom bodě.

b)



Řešení: V tomto případě se o graf funkce nejedná, pro $x = 1{,}5$ nacházíme dvě hodnoty. Tato situace je stejná pro všechna $x \in (-3, 3)$, každá přímka rovnoběžná s osou y protne danou množinu bodů ve dvou různých bodech.

2.2. Základní vlastnosti

2.2.1. Ohraničená a neohraničená funkce

Výklad

Funkce *f* se nazývá **ohraničená shora** na množině M**,** existuje-li takové číslo *h,* že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \le h$.

Funkce *f* se nazývá **ohraničená zdola** na množině M, existuje-li takové číslo *d*, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \ge d$.

Funkce *f* je **ohraničená** na množině M, je-li v ní ohraničená shora i zdola.

V opačném případě se funkce *f* nazývá **neohraničená** na množině M.

Geometrický význam ohraničenosti funkce.

Je-li funkce $y = f(x)$ na množině $M \subseteq D(f)$ ohraničená shora, leží její graf pro každé číslo $x \in M$ stále pod přímkou $y = h$ nebo na ní.

Je-li funkce $y = f(x)$ na množině $M \subseteq D(f)$ ohraničená zdola, leží její graf pro každé číslo $x \in M$ stále nad přímkou $y = d$ nebo na ní.

Je-li funkce $y = f(x)$ na množině $M \subseteq D(f)$ ohraničená, leží její graf pro každé číslo $x \in M$ stále mezi přímkami $y = h$ a $y = d$ nebo na nich.

Věta 2.2.1. Funkce *f* je na množině $M \subseteq R$ ohraničená, právě když existuje taková konstanta $K \ge 0$, že pro $\forall x \in M$ platí $|f(x)| \le K$.

Řešená úloha

Příklad 2.2.1. Dokažte, že funkce $y = \dfrac{x}{(1+x^2)}$ je pro všechna $x \in R$ ohraničená.

Řešení: Protože pro $\forall x \in R$ platí nerovnost $(x \pm 1)^2 \ge 0$ neboli $x^2 + 1 \ge 2|x|$,

dostáváme odtud $\dfrac{x^2+1}{|x|} \ge 2 \Rightarrow \dfrac{|x|}{x^2+1} \le \dfrac{1}{2}$. Platí tedy pro $\forall x \in R: \left|\dfrac{x}{x^2+1}\right| \le \dfrac{1}{2}$.

Podle věty 2.2.1. je daná funkce ohraničená, $K = \dfrac{1}{2}$.

2.2.2. Monotónnost funkce, funkce rostoucí a klesající

Výklad

Je dána funkce f a interval I, který je částí jejího definičního oboru $(I \subset D(f))$.

Funkce f se nazývá **rostoucí na intervalu** I**,** právě když pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí:

Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkce f se nazývá **klesající na intervalu** I**,** právě když pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí:

Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkce f se nazývá **neklesající na intervalu** $\boldsymbol{I}$, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí:

Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Funkce f se nazývá **nerostoucí na intervalu** $\boldsymbol{I}$, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí:

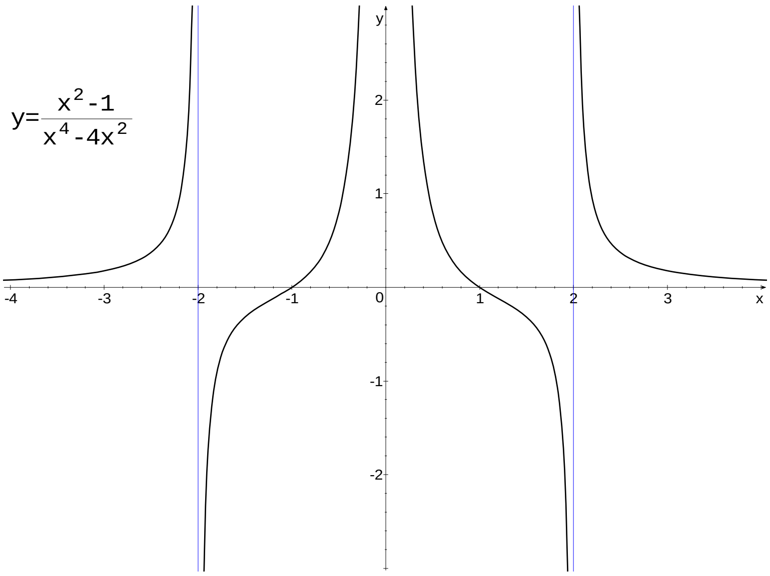
Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Tyto funkce na I se souhrnně nazývají **monotónní funkce** na $I \subset D(f)$, rostoucí a klesající funkce na I se souhrnně nazývají **ryze monotónní funkce** na $I \subset D(f)$.

Z definice je zřejmé, že každá rostoucí funkce je zároveň neklesající na I a každá klesající funkce je zároveň nerostoucí na I.

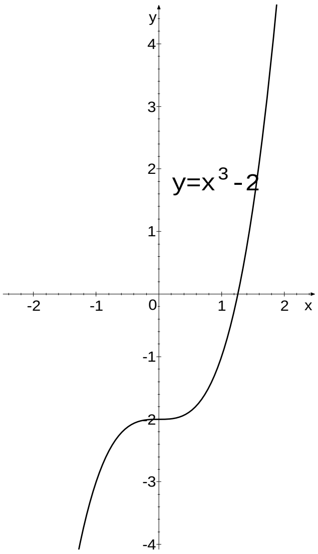
Řešené úlohy

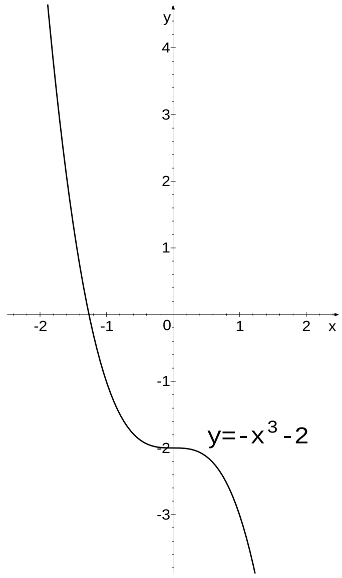
Příklad 2.2.1. Z grafu rozhodněte, kde je funkce rostoucí a kde klesající.



Řešení: Funkce je rostoucí na intervalech $(-\infty, -2)$ a $(-2, 0)$, na intervalech $(0, 2)$ a $(2, \infty)$ klesá.

Příklad 2.2.2. Která z funkcí f_1, f_2 je rostoucí a která klesající na $D(f)$?





Řešení:

Definiční obor obou funkcí $D(f) = R$.

Z grafů těchto funkcí lze vyčíst, že rostou-li hodnoty proměnné x, rostou hodnoty funkce f_1 a klesají hodnoty funkce f_2. Pro libovolná $x_1, x_2 \in R$, pro která platí $x_1 < x_2$ dostaneme:

$$x_1^3 - 2 < x_2^3 - 2, \qquad -x_1^3 - 2 > -x_2^3 - 2,$$

$$f_1(x_1) < f_1(x_2), \qquad f_2(x_1) > f_2(x_2).$$

Pro ilustraci zvolíme čísla $x_1 = -1, x_2 = 1$ a dosadíme do nerovnic funkčních hodnot

$$-3 < -1 \qquad 1 > -3$$

Funkce f_1 je příkladem rostoucí funkce a f_2 je příkladem klesající funkce na R.

2.2.3. Prostá funkce

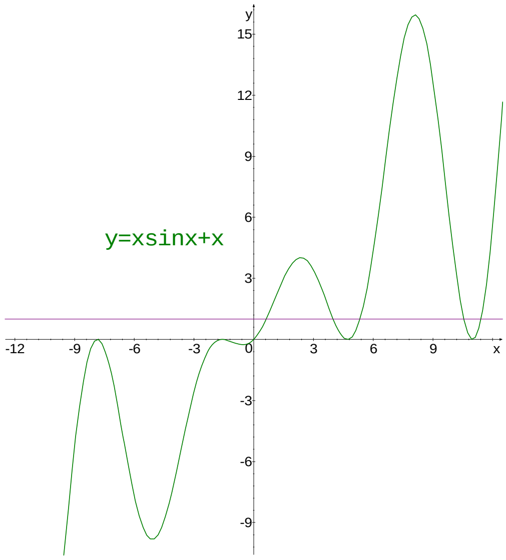
Výklad

Funkce se nazývá **prostá**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí:

Je-li $x_1 \neq x_2$, pak $f(x_1) \neq f(x_2)$.

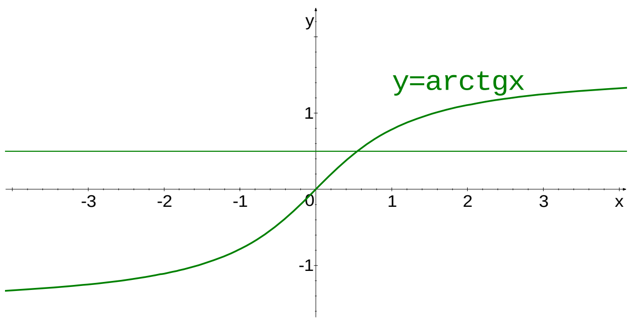
Řešené úlohy

Příklad 2.2.3. Z grafu rozhodněte, zda je funkce prostá.



Řešení: Funkce není prostá, pro různá x existují stejné funkční hodnoty.

Příklad 2.2.4. Z grafu rozhodněte, zda je funkce prostá.



Řešení: Funkce je prostá, platí podle definice, že pro $x_1 \neq x_2$ je $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Funkce rostoucí nebo klesající na celém definičním oboru je prostá.

2.2.4. Sudá a lichá funkce

Výklad

Funkce *f* se nazývá **sudá,** právě když zároveň platí:

1. Pro každé $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$.

2. Pro každé $x \in D(f)$ je $f(-x) = f(x)$.

Graf sudé funkce je souměrný podle osy y.

Funkce *f* se nazývá **lichá**, právě když zároveň platí:

1. Pro každé $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$.

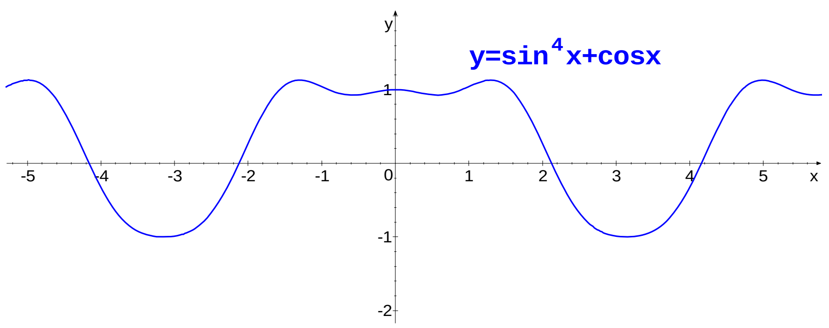
2. Pro každé $x \in D(f)$ je $f(-x) = -f(x)$.

Graf liché funkce je souměrný podle počátku soustavy souřadnic Oxy.

Není-li splněna ani jedna z uvedených podmínek, není funkce ani sudá ani lichá.

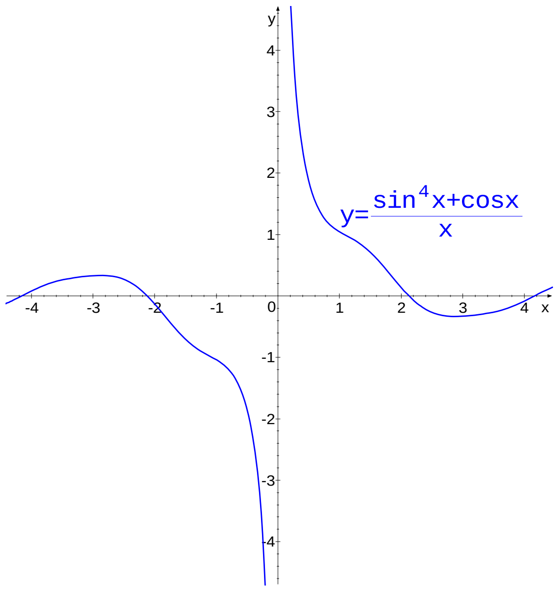
Řešené úlohy

Příklad 2.2.5. Z grafu určete, zda je funkce lichá nebo sudá na intervalu (-5, 5).



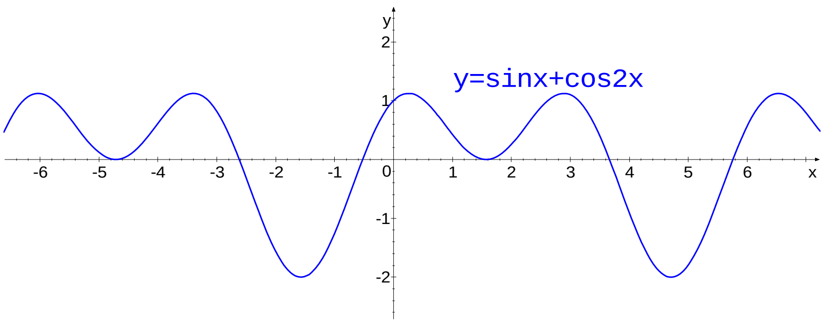
Řešení: Funkce je sudá, její graf je souměrný podle osy y.

Příklad 2.2.6. Z části grafu určete, zda je funkce lichá nebo sudá na $D(f) = R - \{0\}$.



Řešení: Funkce je na $D(f)$ lichá, její graf je souměrný podle počátku.

Příklad 2.2.7. Z grafu určete, zda je v intervalu (-6, 6) funkce lichá nebo sudá.



Řešení: Funkce není ani sudá ani lichá.

Příklad 2.2.8. Rozhodněte, zda je funkce sudá či lichá: $y = 3x^2 - \dfrac{x^4 - 5}{x^2}$.

Řešení: 1. $D(f) = R - \{0\}, \ \forall x \in D(f) \Rightarrow (-x) \in D(f)$.

2. $f(-x) = 3(-x)^2 - \dfrac{(-x)^4 - 5}{(-x)^2} = 3x^2 - \dfrac{x^4 - 5}{x^2} = f(x)$

Funkce $y = 3x^2 - \dfrac{x^4 - 5}{x^2}$ je sudá.

2.2.5. Periodická funkce

Výklad

Funkce se nazývá **periodická**, právě když existuje takové číslo $p > 0$, že pro každé $k \in \mathbf{Z}$ platí následující podmínky:

Je-li $x \in D(f)$, pak $x + kp \in D(f)$ a platí $f(x + kp) = f(x)$.

Číslo p se nazývá **perioda funkce** f.

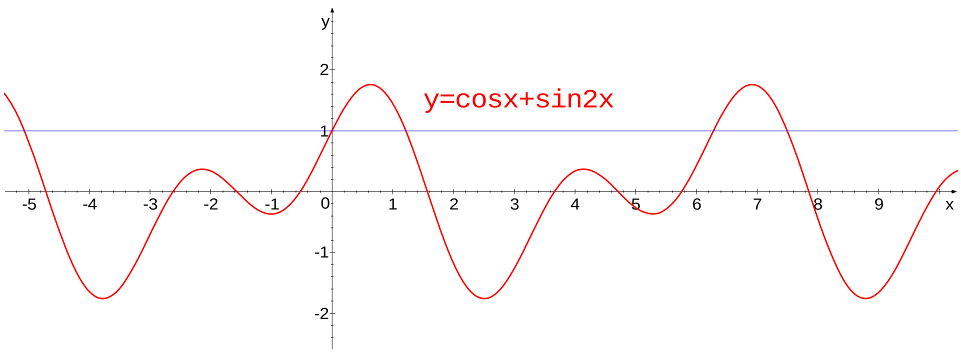
Pokud v množině čísel p existuje nejmenší kladné číslo, pak tuto periodu $p > 0$ nazýváme základní (primitivní) periodou funkce f.

Graf periodické funkce se pravidelně (periodicky) opakuje po intervalech, jejichž délka je rovna základní periodě p.

Nejvýznamnější periodické funkce jsou goniometrické funkce (kap. **2.11.**)

Řešené úlohy

Příklad 2.2.9. Z grafu periodické funkce odhadněte její primitivní periodu.



Řešení: Primitivní perioda je zřejmě $p = 2\pi$.

2.2.6. Inverzní funkce

Výklad

Inverzní funkce k prosté funkci $f(x)$ je f^{-1}, která každému $y \in H(f)$ přiřadí právě to $x \in D(f)$, pro které je $f(x) = y$.

Označení proměnných můžeme volit libovolně, a protože je obvyklé značit závisle proměnnou *x* a nezávisle proměnnou *y*, zaměňujeme označení proměnných. Důsledkem toho je, že $D(f^{-1}) = H(f)$ (a $H(f^{-1}) = D(f)$). Proto grafy obou funkcí jsou souměrné podle osy I. a III. kvadrantu $y = x$.

Platí také, že inverzní funkce k rostoucí funkci je také rostoucí a inverzní funkce ke klesající funkci je klesající.

Řešené úlohy

Příklad 2.2.10. Dokažte, že funkce $f: y = 2x + 1,\ x \in R$, je rostoucí (a tedy prostá).

Určete funkci k ní inverzní f^{-1}.

Řešení: Je zřejmé, že oborem hodnot $H(f) = R$

Funkce *f* je rostoucí, neboť pro $\forall x_1, x_2 \in R$ platí:

je-li $x_1 < x_2$, pak je $2x_1 + 1 < 2x_2 + 1$, takže $f(x_1) < f(x_2)$.

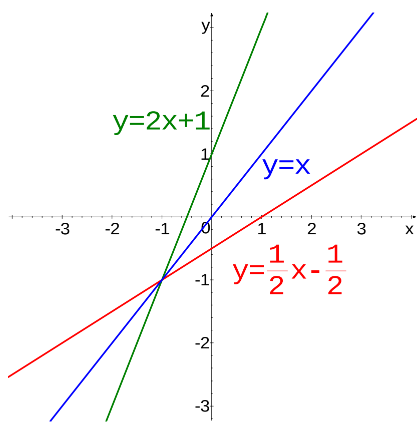
Funkce je rostoucí, tedy prostá, a proto k ní existuje funkce inverzní f^{-1}, která je také rostoucí. Její funkční předpis určíme tak, že z rovnice $y = 2x + 1$ vyjádříme x:

$$x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2},\quad y \in R$$

a po záměně proměnných máme

funkční předpis pro funkci inverzní

$$f^{-1}: y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2},\ D(f^{-1}) = H(f) = R.$$



Příklad 2.2.11. Dokažte, že funkce $f: y=\sqrt{x}+2,\ x\in<0,\infty)$, je rostoucí (a tedy prostá).

Určete funkci k ní inverzní f^{-1}.

Řešení: Je zřejmé, že oborem hodnot $H(f)=<2,\infty)$

Funkce *f* je rostoucí, neboť pro $\forall x_1,x_2\in R$ platí:

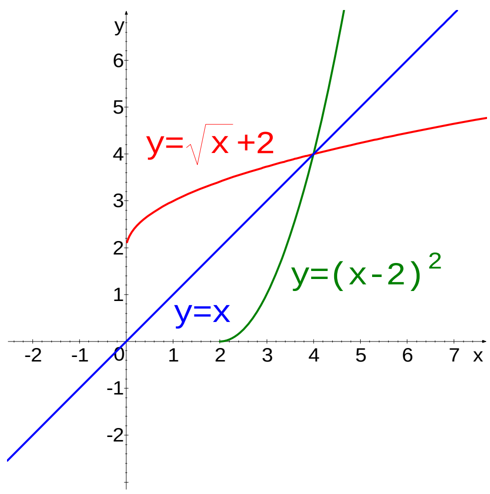
je-li $x_1<x_2$, pak je $\sqrt{x_1}+2<\sqrt{x_2}+2$, takže $f(x_1)<f(x_2)$.

Funkce je rostoucí, tedy prostá, a proto k ní existuje funkce inverzní f^{-1}, která je také rostoucí. Její funkční předpis určíme tak, že z rovnice $y=\sqrt{x}+2$ vyjádříme x:

$$x=(y-2)^2,\qquad y\in<2,\infty).$$

Po záměně proměnných máme funkční předpis pro inverzní funkci

$f^{-1}:\ y=(x-2)^2,\quad D(f^{-1})=<2,\infty),\ \ H(f^{-1})=<0,\infty)$.



Úlohy k samostatnému řešení

1. Rozhodněte, zda je funkce sudá či lichá:

a) $y=3x^3-\dfrac{x^4+2x-5}{x-2}$, b) $y=-\dfrac{x-5x^3}{x^2}$, c) $y=x(\cos x-x\sin x)$,

d) $y=x\ln 2^x$, e) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, f) $y=x(x^3-x^2\sin x)$,

g) $y=x^2+2x-5$.

2.3. Definiční obory

Výklad

Funkci f považujeme za definovanou, je-li známo pravidlo, kterým je každému číslu $x \in D$ přiřazena příslušná jediná hodnota $f(x) \in H$, tj. je-li dán předpis, kterým je toto přiřazení jednoznačně určeno. Tento předpis může být vyjádřen tabelárně (příslušnou tabulkou), graficky nebo analyticky..

Tabelární způsob definování funkce se vyskytuje v technických vědách velmi často, zvláště hledáme-li experimentálně funkční závislost mezi dvěma uvažovanými veličinami. Výhodou tohoto vyjádření je to, že z něho můžeme vyčíst hodnoty funkce v tabelovaných hodnotách argumentu. Jeho velkou nevýhodou však je , že obvykle neobsahuje hodnoty funkce ve všech potřebných hodnotách argumentu. Dalším nedostatkem tabelárního vyjádření je i to, že si při něm nemůžeme učinit bližší představu o povaze funkční závislosti mezi argumentem a závisle proměnnou. Proto se obvykle snažíme vyjádřit tuto závislost graficky nebo (přibližným) analytickým vzorcem.

Výhodou grafického způsobu zadání funkce je názornost, neboť podle grafu funkce si obvykle uděláme jasnou představu o povaze funkční závislosti. Jeho nevýhodou je, že vyjadřuje funkční hodnoty jen přibližně a nedovoluje vyšetřovat vlastnosti funkcí metodami matematické analýzy.

Analytický způsob definování funkce (funkčním předpisem) je nejvýznamnějším způsobem vyjádření funkce. Jeho předností je, že použitím metod matematické analýzy můžeme zkoumat vlastnosti uvažované funkce. Určitým nedostatkem analytického vyjádření je, že postrádá názornost grafického vyjádření. Proto často používáme k snadnějšímu a názornějšímu výkladu vlastností uvažované funkce i jejího grafického, popř. tabelárního vyjádření.

Je-li funkce zadaná funkčním předpisem $y = f(x)$ a není-li zároveň uveden definiční obor funkce, pak se jim rozumí nejširší možný obor, v němž má výraz $f(x)$ smysl.

Ve funkčním předpisu nás budou zajímat následující možnosti:

- Je-li ve funkčním předpisu zlomek, jmenovatel musí být různý od nuly.
- Je-li ve funkčním předpisu odmocnina se sudým odmocnitelem, výraz pod odmocninou musí být větší nebo roven nule (nezáporný).
- Je-li ve funkčním předpisu logaritmus, jeho argument musí být větší než nula (kladný).

- Je-li ve funkčním předpisu tangens, $\left(\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}\right)$, musí být jmenovatel, tedy $\cos x$, nenulový.
- Je-li ve funkčním předpisu kotangens, $\left(\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}\right)$, musí být jmenovatel, tedy $\sin x$, nenulový.

Řešené úlohy

Příklad 2.3.1. Určete definiční obor funkce $y = \dfrac{x-1}{x^2-4}$.

Řešení:

$$x^2 - 4 \neq 0 \;\Rightarrow\; (x-2)(x+2) \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq 2, x \neq -2\,.$$

$D(f) = (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,\infty)$ nebo zápis $D(f) = R - \{-2, 2\}$.

Příklad 2.3.2. Určete definiční obor funkce $y = \sqrt{\dfrac{x+10}{x^2+2}}$.

Řešení:

$\dfrac{x+10}{x^2+2} \geq 0 \wedge x^2 + 2 \neq 0$ druhá podmínka platí vždy a také $x^2 + 2 > 0$ vždy platí.

Stačí tedy vyřešit nerovnici $x + 10 \geq 0 \;\Rightarrow\; x \geq -10$.

$D(f) = \langle -10, \infty)$.

Příklad 2.3.3. Určete definiční obor funkce $y = \log(3x-5)$.

Řešení:

$$3x - 5 > 0 \;\Rightarrow x > \frac{5}{3} \;\Rightarrow\; D(f) = \left(\frac{5}{3}, \infty\right).$$

Příklad 2.3.4. Určete definiční obor funkce $y = \mathrm{tg}(2x - \frac{\pi}{3})$.

Řešení: $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) \neq 0 \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Big| + \frac{\pi}{3}$

$2x \neq \frac{5\pi}{6} + k\pi \quad \Big| :2$, takže $x \neq \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$

$$D(f) = R - \{\frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}\} \text{ pro } \forall k \in Z.$$

Příklad 2.3.5. Určete definiční obor funkce $y = \mathrm{cotg}(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})$.

Řešení: $\sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \neq k\pi \quad \Big| + \frac{\pi}{4}$

$\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \Big| \cdot 2$, takže $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

$$D(f) = R - \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\} \text{ pro } \forall k \in Z.$$

Úlohy k samostatnému řešení

2. Určete definiční obor funkce:

a) $y = \ln \frac{2-x}{2+x}$, b) $y = \ln \ln x$, c) $y = \sqrt[4]{\frac{9-x^2}{2+x}}$,

d) $y = \mathrm{cotg}\, 3x$, e) $y = 2^{\frac{2+x}{3-x}}$, f) $y = \ln(x^2 - 2x)$.

2.4. Konstantní funkce

Výklad

Konstantní funkce je každá funkce na množině $\mathbf{R}$, která je dána předpisem $y = c$.

Definičním oborem jsou všechna reálná čísla, obor hodnot je roven konstantě c.

Grafem je přímka rovnoběžná s osou x procházející bodem $[0, c]$, funkce není prostá.

2.5. Lineární funkce

Výklad

Lineární funkce je každá funkce na množině $\mathbf{R}$, která je dána předpisem $y = ax + b$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbf{R}$, a, b konstanty.

Definičním oborem a oborem hodnot jsou všechna reálná čísla.

Grafem lineární funkce je přímka různoběžná s osou y. Každá přímka, která není rovnoběžná s osami *x, y* je grafem nějaké lineární funkce. K sestrojení grafu nám tedy stačí 2 různé body.

- $a > 0$ funkce je rostoucí na $\mathbf{R}$, je prostá
- $a < 0$ funkce je klesající na $\mathbf{R}$, je prostá
- $b = 0$, $y = ax$ přímá úměrnost – graf funkce prochází počátkem soustavy souřadnic

Příklad užití lineární funkce ve fyzice:

Přímá úměrnost mezi zrychlením *a* hmotného bodu o konstantní hmotnosti *m* a velikosti působící síly *F*, $F = ma$.

Řešená úloha

Příklad 2.5.1. Nakreslete graf funkce $y = \frac{4}{3}x - 1$.

Řešení: Nejprve najdeme dva různé body grafu funkce:

Všimněte si, v zadání funkce je $b = -1$,

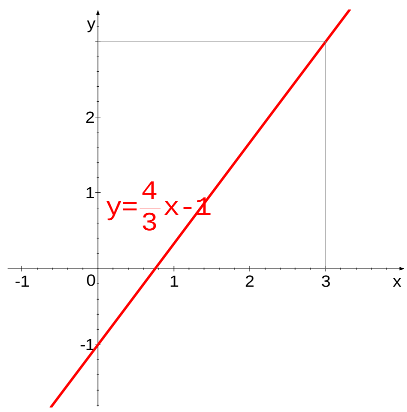
tzn. graf protíná osu y v bodě $[0, -1]$.

Další bod grafu zjistíme dosazením $x = 3$,

pak $y = 3$.

Body $[0, -1]$ a $[3, 3]$ spojíme

a výsledná přímka je grafem dané funkce.



Úlohy k samostatnému řešení

3. Nakreslete graf lineární funkce: a) $y = ax + 2$ pro $a = 1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$,

b) $y = 2x + b$ pro $b = 1, -3, 4, -2, \frac{1}{2}, -1$.

2.6. Kvadratické funkce

Výklad

Kvadratickou funkcí rozumíme každou funkci na množině R , která je dána předpisem $y = ax^2 + bx + c$, kde $a \in \mathrm{R} - \{0\}; b, c \in \mathrm{R}$.

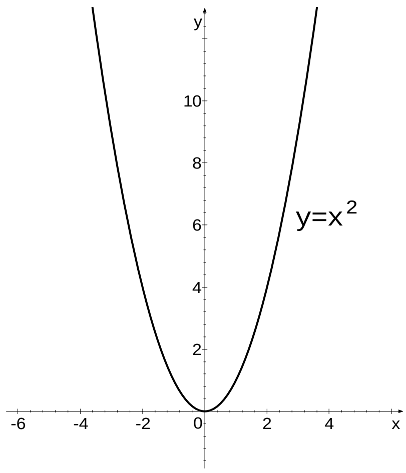
Definičním oborem jsou všechna reálná čísla. Obor hodnot se liší podle zadání.

Grafem kvadratické funkce je parabola, jejíž osa je rovnoběžná s osou *y*.

Řešené úlohy

Příklad 2.6.1. Nakreslete graf funkce $y = x^2$.

Řešení: Vrchol paraboly je bod $V[0,0]$, osa paraboly je v ose *y* a vrcholová tečna paraboly je osa *x*. Další body si můžeme určit tabulkou.



Výklad

Všechny paraboly, které mají $a = 1$, mají stejný tvar, liší se pouze umístěním vzhledem k souřadnicovým osám.

Grafy funkcí a) $y = x^2 + c$, b) $y = (x-k)^2$ se nakreslí na základě posunutí grafu funkce $y = x^2$ (výchozí parabola) ve směru

a) osy *y* tak, že vrchol V$[0, 0]$ přejde do vrcholu $V'[0, c]$,

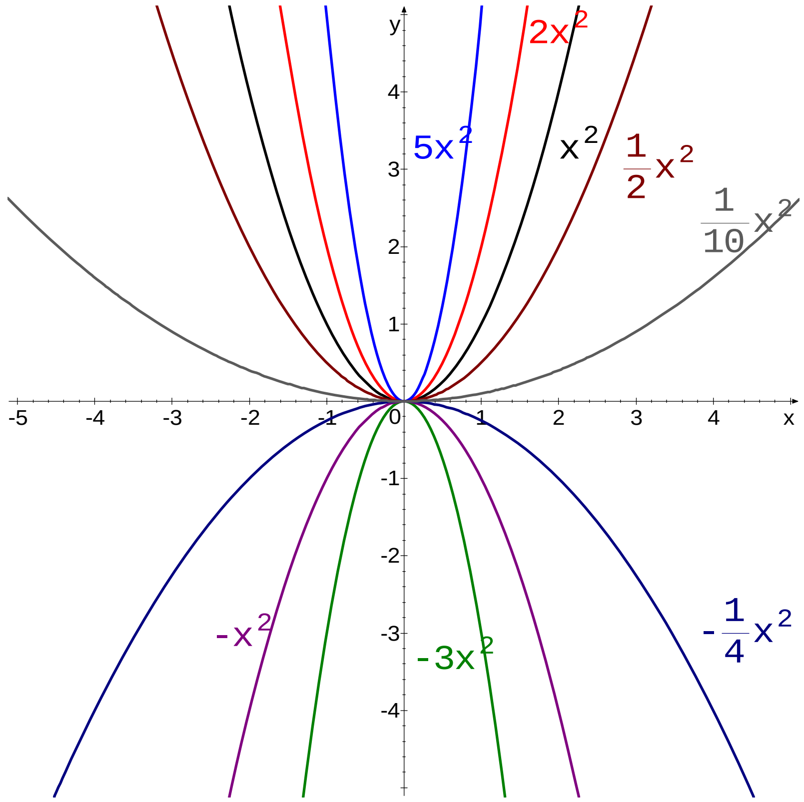
b) osy *x* tak, že vrchol V$[0, 0]$ přejde do vrcholu $V'[k, 0]$.

Podívejme se nyní na grafy funkcí, které mají různé hodnoty a.

a) $y = x^2$, b) $y = -3x^2$, c) $y = -x^2$, d) $y = -\frac{1}{4}x^2$,

e) $y = 2x^2$, e) $y = 5x^2$, g) $y = \frac{1}{2}x^2$, h) $y = \frac{1}{10}x^2$.

Pokud je $a > 0$, je parabola „otevřená“ ve směru kladné poloosy y, pokud je $a < 0$, je parabola „otevřená“ ve směru záporné poloosy y. Je-li $|a| > 1$, pak se parabola „zúží“ vzhledem k parabole $y = x^2$. Je-li $|a| < 1$, pak se parabola „rozšíří“. Tyto skutečnosti můžeme pozorovat na následujícím ilustračním obrázku



Funkce $y = ax^2 + bx + c$ není prostá na svém definičním oboru $D(f) = R$. Je-li $a > 0$, pak funkce na intervalu $(-\infty, x_V)$ klesá a na (x_V, ∞) roste. Ve vrcholu $V[x_V, y_V]$ má funkce minimum. Je-li $a < 0$, pak funkce na intervalu $(-\infty, x_V)$ roste a na (x_V, ∞) klesá. Ve vrcholu $V[x_V, y_V]$ má funkce maximum.

Při kreslení grafů kvadratických funkcí můžeme nejprve upravit výraz $ax^2 + bx + c$ doplněním na druhou mocninu dvojčlenu a přepsat funkční předpis do tvaru

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0.$$

Z tohoto zápisu kvadratické funkce určíme snadno souřadnice vrcholu $V[x_0, y_0]$.

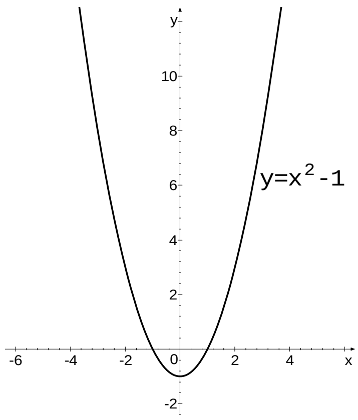
Řešené úlohy

Příklad 2.6.2. Nakreslete graf funkce $y = x^2 - 1$.

Řešení:

Ze zápisu funkce vyčteme souřadnice vrcholu $V[0,-1]$. Protože je $a = 1$, posuneme graf funkce $y = x^2$ o 1 jednotku ve směru záporné poloosy y.

Průsečíky grafu s osou x vypočítáme z rovnice $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1$.



Příklad 2.6.3. Nakreslete graf funkce $y = x^2 + 4x$.

Řešení:

<u>Pomocí průsečíků s osou x</u>

Vyřešíme tedy rovnici $0 = x^2 + 4x$. Kořeny jsou $x_1 = 0, x_2 = -4$.

Protože parabola je souměrná podle své osy, která je kolmá k ose x, jsou body $x_1 = 0, x_2 = -4$ také podle této osy souměrné a osa paraboly je osa úsečky x_1x_2. Její rovnice je $x = -2$. Vrchol paraboly na této ose leží a jeho první souřadnice je tedy $x_V = -2$. Druhou souřadnici vypočteme dosazením $x_V = -2$ do rovnice paraboly $y = x^2 + 4x$, $y_V = -4$. Vrchol má souřadnice $V[-2,-4]$. Protože $a = 1$, posuneme graf paraboly $y = x^2$ tak, aby na ose x procházel body $x_1 = 0, x_2 = -4$ a měl vrchol v bodě $V[-2,-4]$.

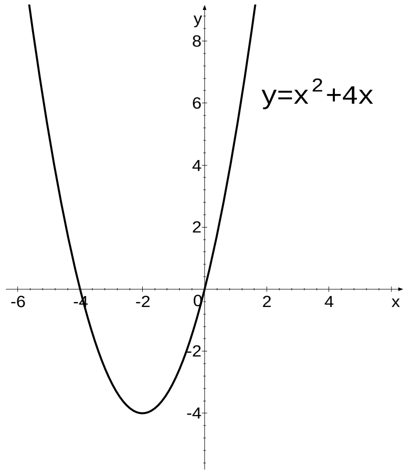
Doplněním na druhou mocninu dvojčlenu získáme souřadnice vrcholu paraboly.

Funkční předpis převedeme na tvar $y = x^2 + 4x + 4 - 4 \Rightarrow y = (x+2)^2 - 4$,

souřadnice vrcholu jsou $V[-2,-4]$. Protože je $a = 1$, posuneme graf funkce $y = x^2$

o 4 jednotky ve směru záporné poloosy y a o 2 jednotky ve směru záporné

poloosy x .



Příklad 2.6.4. Nakreslete graf funkce $y = 2x^2 - 4x - 6$.

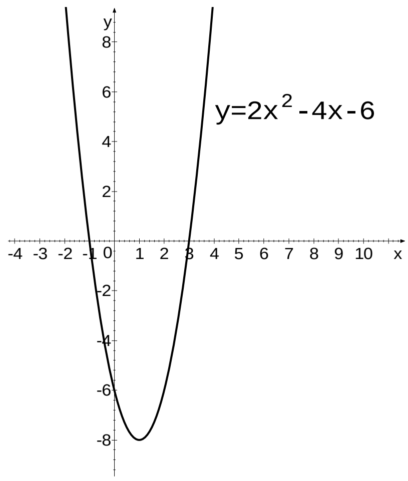
Řešení:

Zápis funkce upravíme na tvar $y = 2(x^2 - 2x + 1 - 1) - 6 \Rightarrow y = 2(x-1)^2 - 2 - 6$,

ze zápisu kvadratické funkce $y = 2(x-1)^2 - 8$ určíme souřadnice vrcholu, $V[1,-8]$.

Průsečíky s osou x zjistíme vyřešením rovnice $0 = 2x^2 - 4x - 6$, její kořeny jsou $x_1 = 3, x_2 = -1$. Průsečík s osou y je $[0,-6]$.

Protože je $a = 2$, posuneme graf funkce $y = 2x^2$ o 8 jednotek ve směru záporné poloosy y a o 1 jednotku ve směru kladné poloosy x .



Příklad 2.6.5. Nakreslete graf funkce $y=-x^2+3x$.

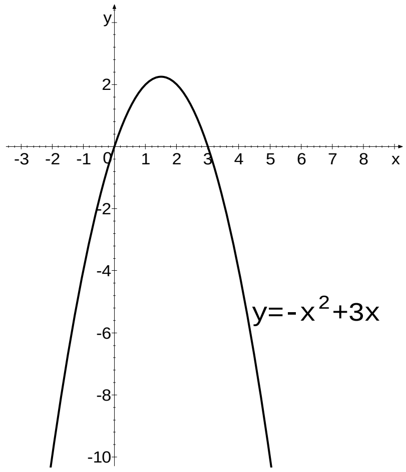
Řešení:

Zápis kvadratické funkce upravíme na tvar

$$y=-(x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4})\Rightarrow y=-(x-\frac{3}{2})^2+\frac{9}{4},\qquad \text{vrchol } V[\frac{3}{2},\frac{9}{4}].$$

Protože je $a=-1$, posuneme graf funkce $y=-x^2$ o $2{,}25$ jednotek ve směru kladné poloosy y a o $1{,}5$ jednotky ve směru kladné poloosy x.

Vyřešením rovnice $0=-x^2+3x$ zjistíme průsečíky s osou x, kořeny jsou $x_1=3, x_2=0$.



Úlohy k samostatnému řešení

4. Nakreslete graf funkce.

a) $y=x^2-4x+3$, b) $y=x^2-2x+2$, c) $y=x^2+6x+9$.

5. Nakreslete graf funkce.

a) $y=\frac{1}{2}x^2+2x$, b) $y=3x^2-6x-4$.

6. Nakreslete graf funkce.

a) $y=-x^2-x+2$, b) $y=-2x^2+8x-9$.

2.7. Lineární lomená funkce

Výklad

Dříve, než se začneme zabývat lineární lomenou funkcí v obecném tvaru, zmíníme se krátce o funkci, která je jejím speciálním případem – nepřímou úměrností.

2.7.1. Nepřímá úměrnost

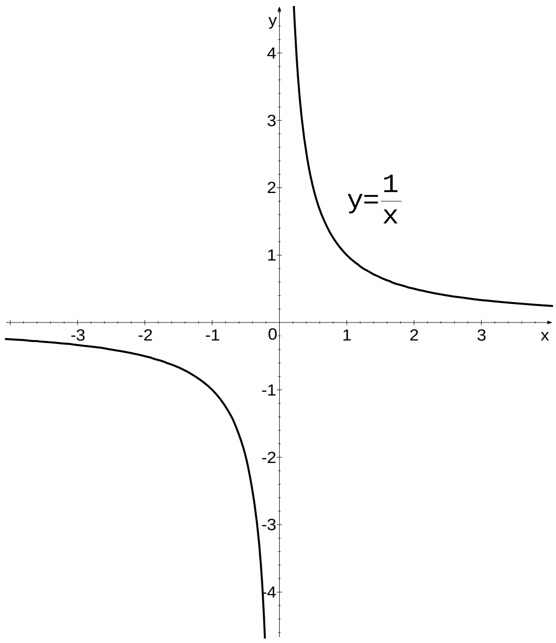
Výklad

Nepřímá úměrnost je každá funkce na množině $\mathbf{R}-\{0\}$ daná ve tvaru $y=\dfrac{k}{x}$,

kde $k\in\mathbf{R}-\{0\}$.

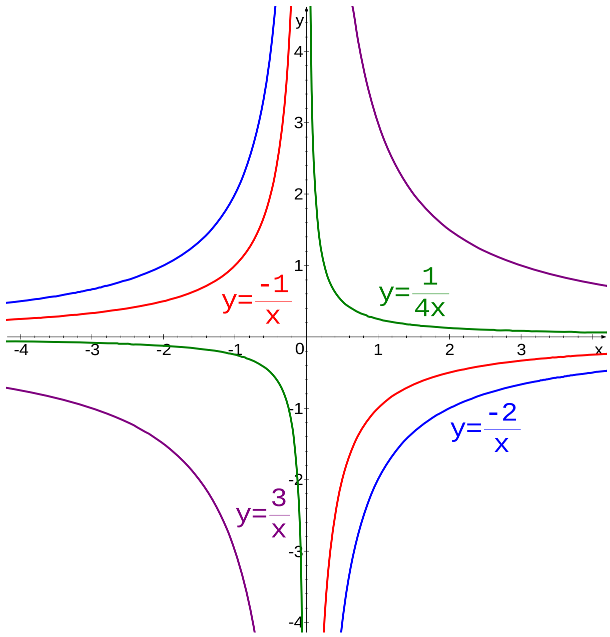
Podíváme se podrobně na graf nepřímé úměrnosti pro $k=1$.

x	1	2	0,5	4	0,1	-1	-2	-0,5	-4	-0,1
$y=\dfrac{1}{x}$	1	0,5	2	0,25	10	-1	$-0,5$	-2	$-0,25$	-10



Grafem je rovnoosá hyperbola o středu $S[0,0]$, osy souřadnicového systému jsou její asymptoty (hyperbola se k těmto přímkám přibližuje, ale neprotne je ani se jich nedotkne).
Graf nepřímé úměrnosti je souměrný podle počátku souřadnicového systému a funkce je tedy lichá.

Jak se mění průběh grafu funkce v závislosti na konstantě *k*, je zachycen na následujícím obrázku. Zvolíme pro *k* postupně hodnoty: -1, -2, 3, $\frac{1}{4}$ a odpovídající grafy nakreslíme do jednoho souřadnicového systému.



Je-li $k > 0$, pak funkce na intervalu $(-\infty, 0)$ klesá a klesá také na intervalu $(0, \infty)$. Větve hyperboly se nacházejí v I. a III. kvadrantu.

Je-li $k < 0$, pak funkce na intervalu $(-\infty, 0)$ roste a roste také na intervalu $(0, \infty)$. Větve hyperboly se nacházejí v II. a IV. kvadrantu.

Nemůžeme však říci, že funkce je rostoucí nebo klesající na celém definičním oboru!

Funkce je prostá. Existuje k ní funkce inverzní, která má stejný zápis.

$$f^{-1}: \ y = \frac{k}{x}, \quad D(f^{-1}) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) = H(f)$$

Příklad užití nepřímé úměrnosti v matematice a ve fyzice:

1. Délka y je nepřímo úměrná šířce x obdélníka při konstantním obsahu *S*.

$$y = \frac{S}{x}.$$

2. Zákon Boylův-Marriottův pro izometrický děj s ideálním plynem

$$p = \frac{c}{V}, \text{ kde } c \text{ je konstanta,}$$

tlak p ideálního plynu je nepřímo úměrný jeho objemu V při konstantní teplotě *T*.

2.7.2. Lineární lomená funkce

Výklad

Lineární lomená funkce je každá funkce na množině $\mathbf{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$, daná předpisem

$y=\frac{ax+b}{cx+d}$, kde $a,b,d\in \mathrm{R}$; $c\in \mathrm{R}-\{0\}$ a $ad-bc\neq 0$.

Grafem každé lineární lomené funkce je rovnoosá hyperbola, kterou získáme z grafu funkce $y=\frac{k}{x}$ pomocí posunutí tak, že nejprve funkční předpis lineární lomené funkce f převedeme na tvar f: $y=\frac{k}{x-x_0}+y_0$, bod $[0, 0]$ se posune do bodu $[x_0, y_0]$, asymptoty procházejí středem $S[x_0, y_0]$ rovnoběžně se souřadnicovými osami.

Řešená úloha

Příklad 2.7.1. Nakreslete graf funkce $y=\frac{2x+1}{x+1}$.

Řešení: $\mathrm{D(f)}=\mathrm{R}-\{-1\}$.

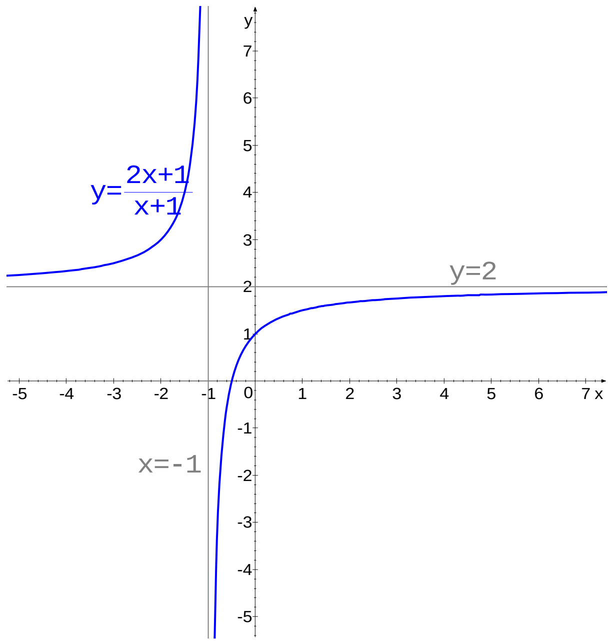
Zadanou funkci upravíme na požadovaný tvar vydělením čitatele jmenovatelem,

dostaneme $y=\frac{-1}{x+1}+2$.

Střed má souřadnice $S[-1, 2]$,

rovnice asymptot jsou $x=-1$, $y=2$

a $k=-1$.



Úlohy k samostatnému řešení

7. Nakreslete graf funkce:

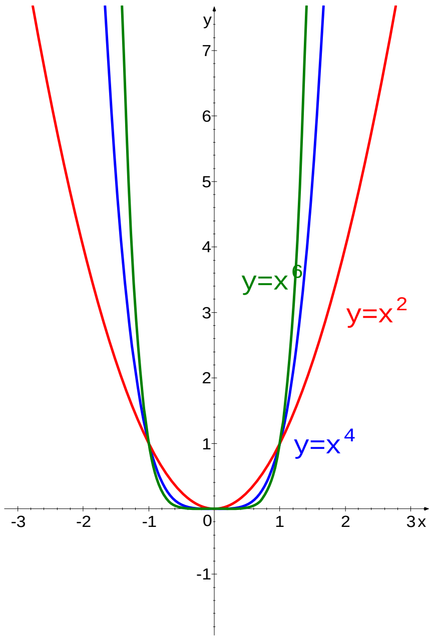
a) $y=\frac{2x}{x-1}$, b) $y=\frac{x}{x+1}$, c) $y=\frac{x+1}{x}$, d) $y=\frac{3}{x-2}$.

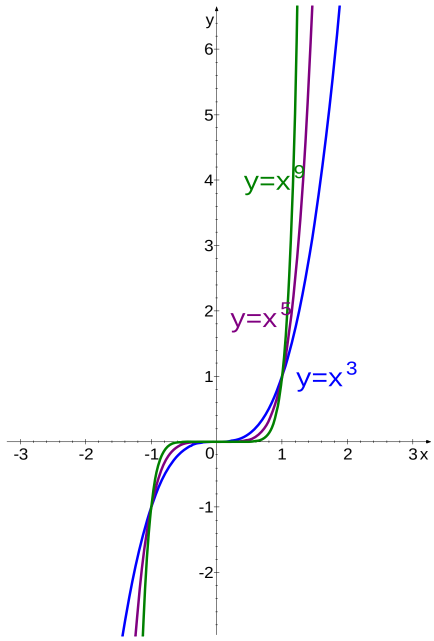
2.8. Mocninné funkce

Výklad

Mocninné funkce jsou definovány předpisem $y = x^n, n \in \mathbf{N}$ a $y = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbf{N}$. Jiný zápis pro druhou variantu $y = x^n, n \in \mathbf{Z}^-$. ($\mathbf{Z}^-$ značí celá záporná čísla).

$y = x^n, n \in N$, n sudé n liché





Definiční obor:	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
Obor hodnot:	$\langle 0, \infty)$	$\mathbf{R}$
Funkce	sudá	lichá
Klesající na	$(-\infty, 0\rangle$	-----
Rostoucí na	$\langle 0, \infty)$	$\mathbf{R}$
Minimum:	$[0,0]$	nemá
Maximum:	nemá	nemá

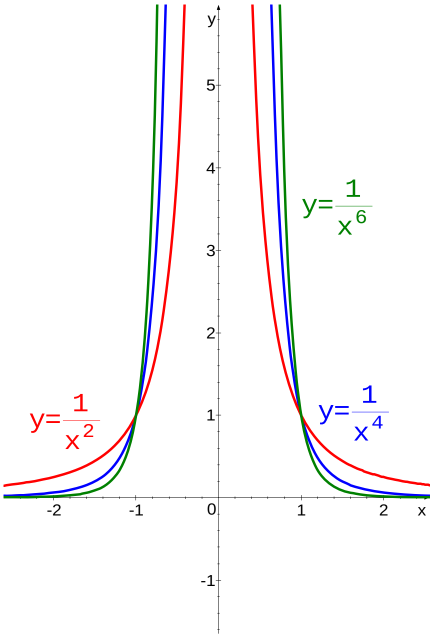
Uvedené grafy využijte k náčrtku grafů: a) $y = x^3 - 1$, b) $y = x^4 + 3$, c) $y = (x-1)^5$.

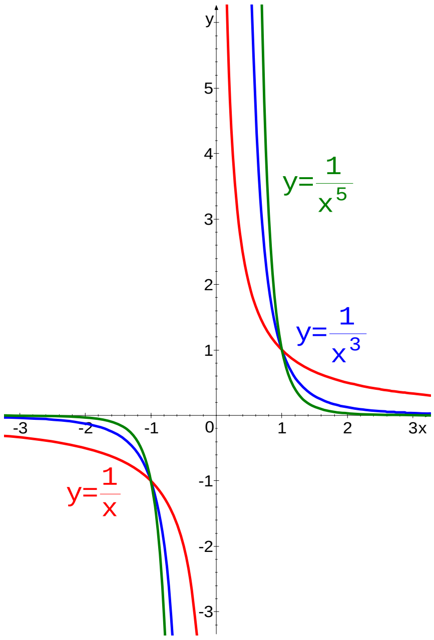
V úloze a) se graf funkce $y = x^3$ posune o 1 jednotku ve směru záporné poloosy y,

b) graf funkce $y = x^4$ se posune o 3 jednotky ve směru kladné poloosy y,

c) graf funkce $y = x^5$ se posune o 1 jednotku ve směru kladné poloosy x.

$y = \dfrac{1}{x^n},\ n \in N$, $\quad n$ sudé $\qquad\qquad\qquad n$ liché





Definiční obor:	$\mathbf{R}-\{0\}$	$\mathbf{R}-\{0\}$
Obor hodnot:	$(0,\infty)$	$\mathbf{R}-\{0\}$
Funkce	sudá	lichá
Klesající na	$(0,\infty)$	$(-\infty,0),(0,\infty)$
Rostoucí na	$(-\infty,0)$	----
Minimum:	nemá	nemá
Maximum:	nemá	nemá

Uvedené grafy využijte k náčrtku grafů těchto funkcí:

a) $y = \dfrac{1}{x^3} - 1$, $\qquad$ b) $y = (x-2)^{-2}$, $\qquad$ c) $y = (x+1)^{-3}$.

V úloze a) graf funkce $y = \dfrac{1}{x^3}$ se posune o 1 jednotku ve směru záporné poloosy y.

b) graf funkce $y = \dfrac{1}{x^2}$ se posune o 2 jednotky ve směru kladné poloosy x.

c) graf funkce $y = \dfrac{1}{x^3}$ se posune o 1 jednotku ve směru záporné poloosy x.

Poznámka

Obecně se definují mocninné funkce předpisem $y = x^r$ *pro* $r \in R - \{0\}$.

2.9. Exponenciální funkce

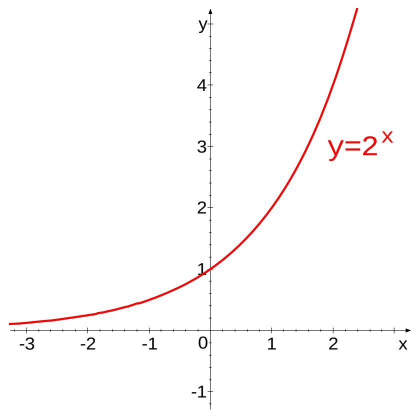
Výklad

Exponenciální funkce o základu a je funkce na množině R daná předpisem $y = a^x$, kde $a > 0, a \neq 1$.

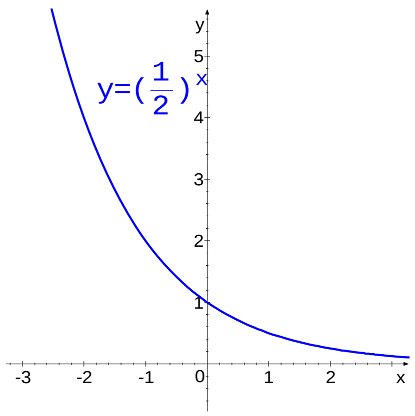
Exponenciální funkce o základu $a = e$ je velmi důležitou funkcí matematické analýzy.
Grafem exponenciální funkce je tzv. **exponenciální křivka** (krátce exponenciála).
Každý graf exponenciální funkce o libovolném základě prochází bodem $[0, 1]$, protože platí pro všechna $a \neq 0$: $a^0 = 1$, osa x je asymptotou.

Exponenciální křivky $y = a^x$, $y = \dfrac{1}{a^x}$ pro totéž a jsou souměrně sdružené podle osy y, viz následující obrázky.

$a > 1$



$0 < a < 1$



$$D(f) = \mathrm{R},\ H(f) = \mathrm{R}^+$$

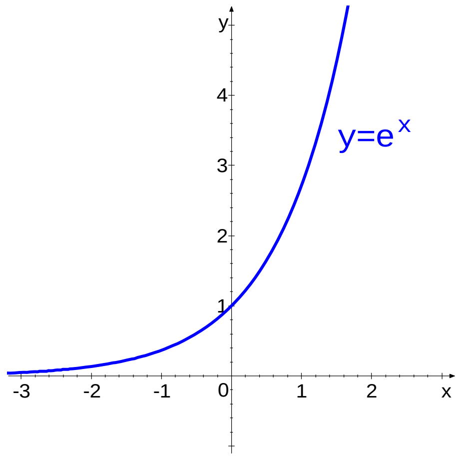
Je zdola ohraničená, shora není ohraničená.

Nemá v žádném bodě ani maximum ani minimum.

Funkční hodnota v bodě 0 je rovna 1.

Funkce je rostoucí, tedy prostá. Funkce je klesající, tedy prostá.

Je-li základem exponenciální funkce **Eulerovo číslo** $e \doteq 2{,}718281828\ldots$, mluvíme o **přirozené exponenciální funkci,** $y = e^x$.



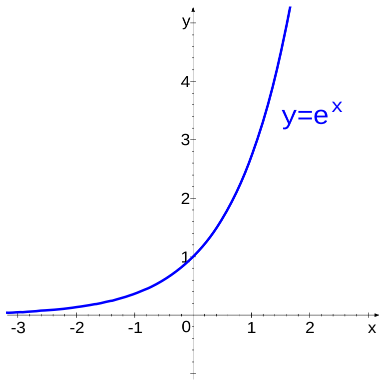
Řešené úlohy

Příklad 2.9.1. Nakreslete graf exponenciální funkce:

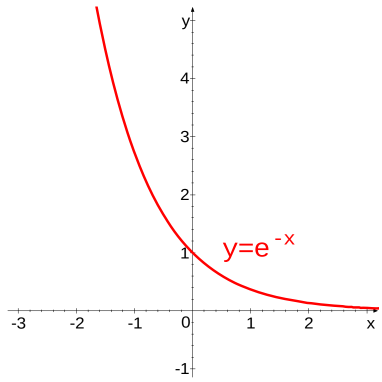
a) $y = e^x$, b) $y = e^{-x}$, c) $y = 3e^x$,

d) $y = e^{x+2}$, e) $y = e^x - 1$, f) $y = e^{-x} - 1$.

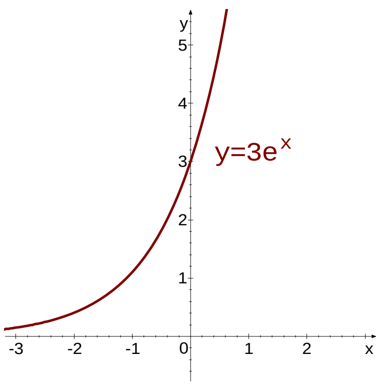
Řešení: a)



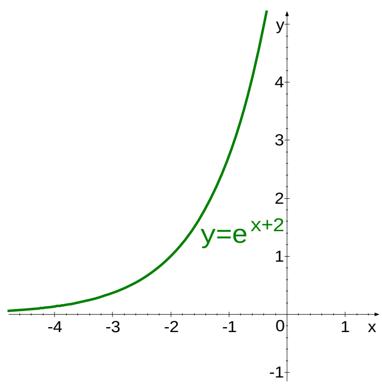
b)



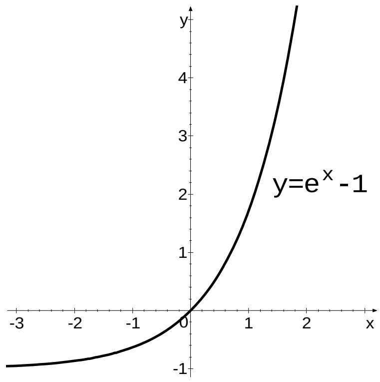
c)



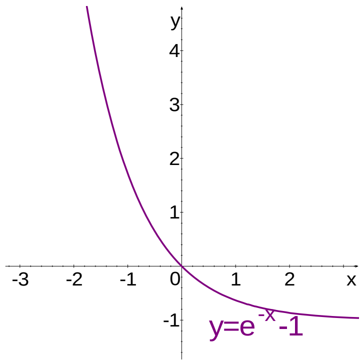
d)



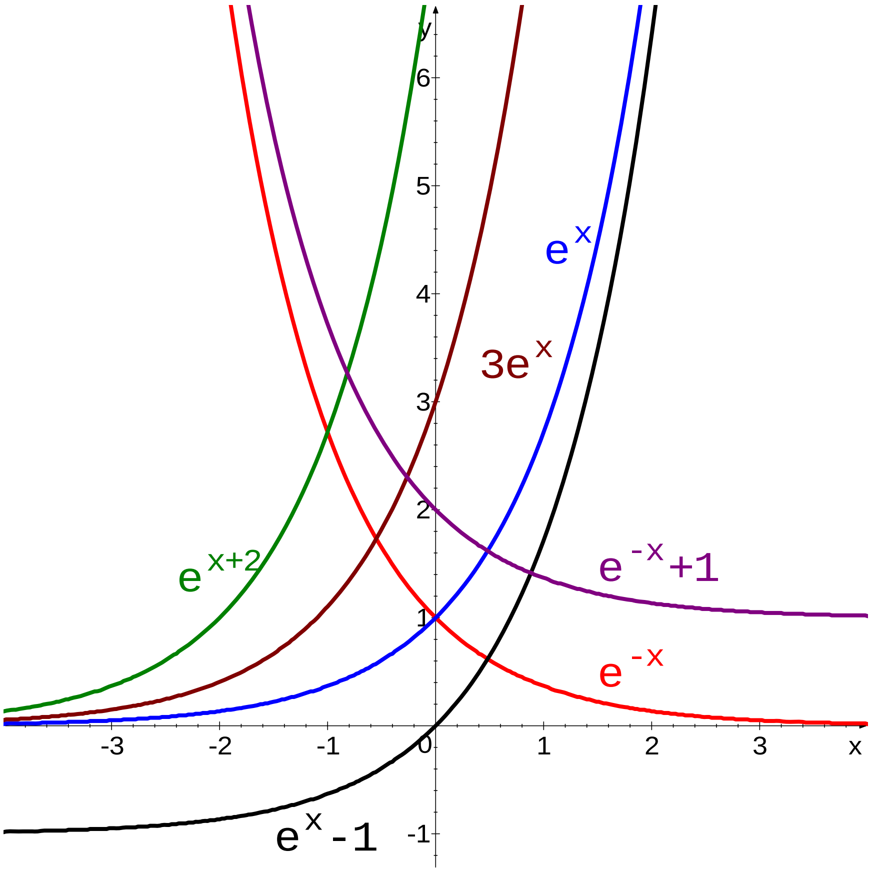
e)



f)



Na ilustračním obrázku máte pro srovnání průběh všech funkcí z úlohy.Všimněte si posunutí základních grafů funkcí $y = e^x$, $y = e^{-x}$



Úlohy k samostatnému řešení

8. Nakreslete graf funkce:

a) $y = 10^x$, b) $y = 5^x$, c) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

2.10. Logaritmická funkce

Výklad

Logaritmická funkce o základu a je funkce inverzní k exponenciální funkci $y = a^x$, kde a je libovolné kladné číslo různé od jedné, $a \in \mathrm{R}^+ - \{1\}$ a $x \in R$ resp. $D(f) = R$.

Logaritmus čísla *x* při základu *a* je takové číslo y, pro které platí $a^y = x$, tedy

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y .$$

Nejčastěji používáme funkce:

o základu $a = 10$, pak se logaritmus nazývá **dekadický** a značí se $y = \log x$,

o základu $a = e$, pak se logaritmus nazývá **přirozený** a značí se $y = \ln x$.

Pravidla pro počítání s logaritmy:

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y ,$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y ,$$

$$\log_a x^n = n.\log_a x ,$$

$$\log_a a = 1, \qquad \log 10 = 1, \qquad \ln e = 1,$$

$$\log_a 1 = 0, \qquad \log 1 = 0, \qquad \ln 1 = 0 .$$

Řešené úlohy

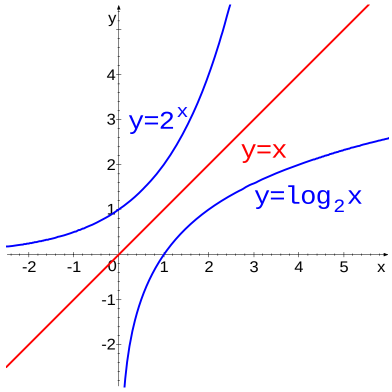
Příklad 2.10.1. Nakreslete graf funkce:

a) $y = \log_2 x$, b) $y = \log x$, c) $y = \ln x$,

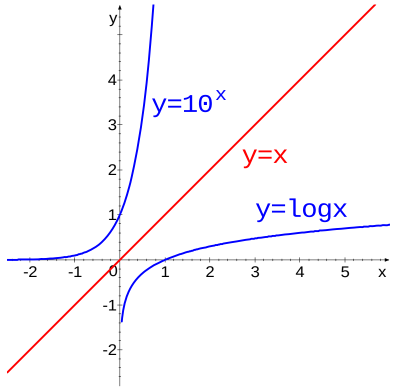
d) $y = \log_{1/2} x$, e) $y = \log_{0,1} x$.

Řešení: Graf sestrojíme souměrně podle osy I. a III. kvadrantu ke grafu funkce $y = a^x$.

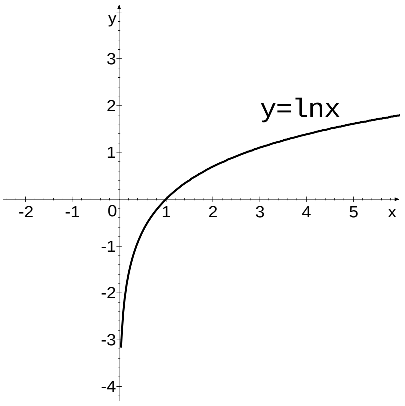
a)



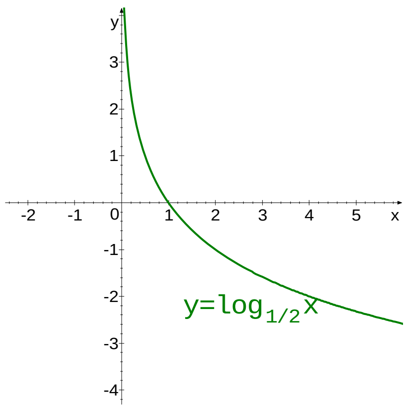
b)



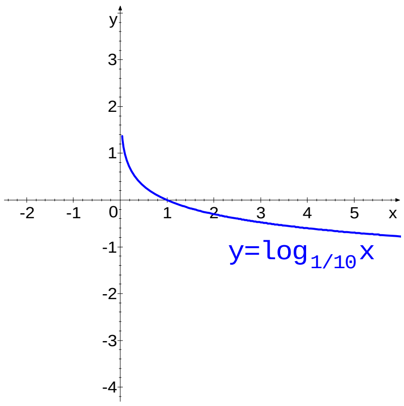
c)



d)



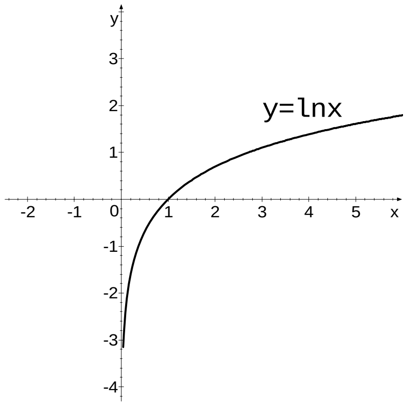
e)



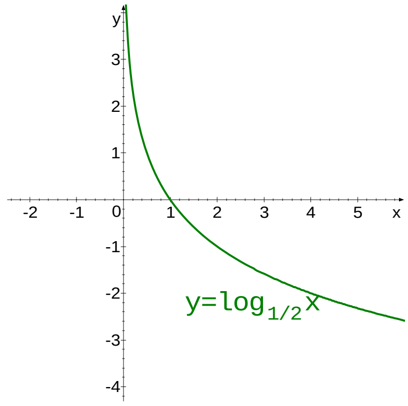
Výklad

Srovnáme průběhy funkcí $y = \log_a x$, pro různá $a \in R^+ - \{1\}$, $x \in R^+$.

$a > 1$



$0 < a < 1$



$$D(f) = (0, \infty),\ H(f) = R$$

Je zdola i shora neohraničená.

Nemá v žádném bodě ani maximum ani minimum.

Funkční hodnota v bodě 1 je rovna 0.

Funkce je rostoucí, tedy prostá.

Funkce je klesající, tedy prostá.

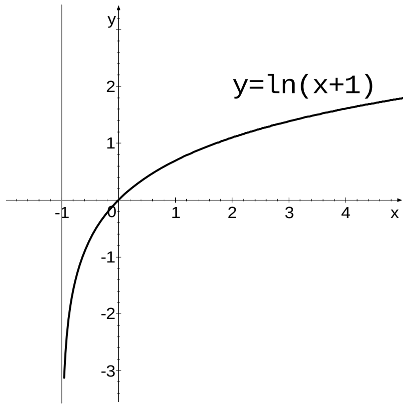
Řešené úlohy

Příklad 2.10.2. Nakreslete graf funkce:

a) $y = \ln(x+1)$, b) $y = \log 2x$, c) $y = 3\log_{\frac{1}{2}} x$, d) $y = \log_{0,1} x - 2$.

Řešení: a) Argument logaritmické funkce musí být kladný, proto $x > -1$ a $D(f) = (-1, \infty)$.

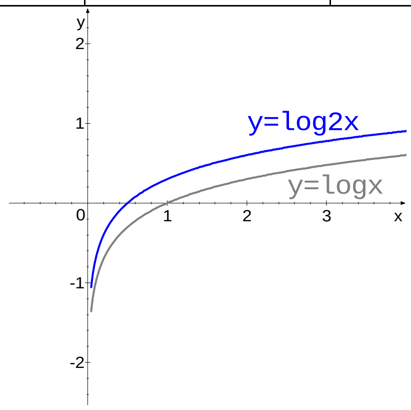
Posuneme graf funkce $y = \ln x$ o 1 jednotku ve směru záporné poloosy x.



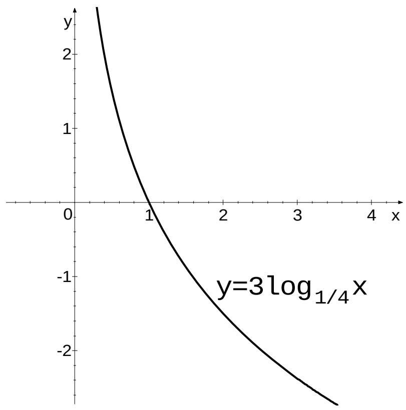
V ostatních příkladech budeme postupovat obdobně:

b) dvojnásobný argument „zrychlí" průběh funkce

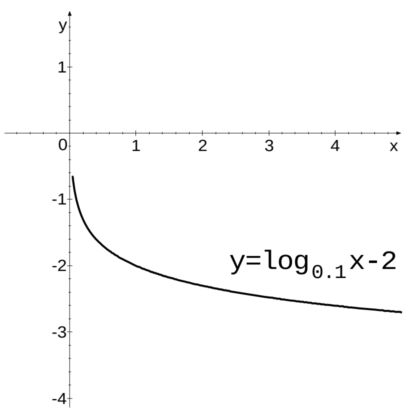
x	0,5	1	2	4
$\log x$	-0,301	0	0,301	0,602
$\log 2x$	0	0,301	0,602	0,903



c) funkční hodnota se ztrojnásobí



d) graf funkce $y = \log_{0,1} x$ se posune o 2 jednotky ve směru záporné poloosy y.



2.11. Goniometrické funkce

Výklad

Goniometrické funkce ostrého úhlu jste poznali již na základní škole, zavedli jste je jako poměry stran v pravoúhlém trojúhelníku. Následující definice jsou speciálními případy obecné definice těchto funkcí.

Mějme tedy pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami a,b a přeponou c. Pak definujeme:

Sinus α je poměr délky odvěsny protilehlé k úhlu α a délky přepony pravoúhlého trojúhelníku.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

Kosinus α je poměr délky odvěsny přilehlé k úhlu α a délky přepony pravoúhlého trojúhelníku.

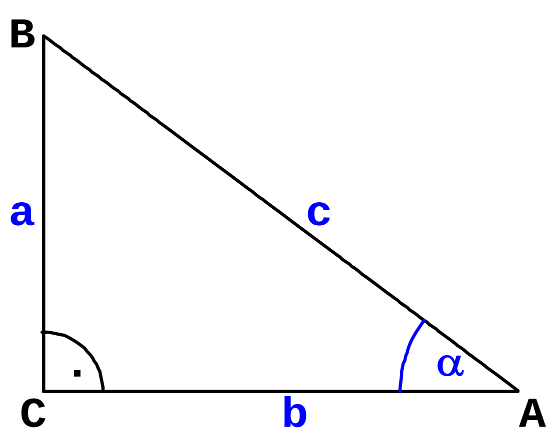
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Tangens α je poměr délek odvěsny protilehlé k úhlu α a odvěsny přilehlé k úhlu α pravoúhlého trojúhelníku.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$$

Kotangens α je poměr délek odvěsny přilehlé k úhlu α a odvěsny protilehlé k úhlu α pravoúhlého trojúhelníku

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}.$$



2.11.1. Velikost úhlu – oblouková a stupňová míra

Středoškolská definice goniometrických funkcí se opírá především o pojem velikost úhlu, kterou udáváme buď v míře obloukové, nebo v míře stupňové.

Mějme libovolný orientovaný úhel AVB, který umístíme do kartézské soustavy souřadnic tak, že vrchol V umístíme do jejího počátku O, počáteční rameno AV do osy x.

Sestrojme jednotkovou kružnici k se středem V, tj. kružnici o poloměru 1. Délka této kružnice je 2π. Obloukovou míru úhlu AVB definujeme jako délku oblouku jednotkové kružnice mezi průsečíky ramen VA, VB a jednotkové kružnice. Pokud délka tohoto oblouku má velikost 1, je velikost úhlu AVB rovna 1 rad (radián).

Na střední škole se většinou dávala přednost vyjádření velikosti úhlu ve stupňové míře.

Jednotka stupňové míry zvaná úhlový stupeň je úhel rovnající se $\frac{1}{90}$ pravého úhlu. Kromě jednotky 1 stupeň, značíme $1°$, používáme i menší jednotky: 1 minuta (značíme 1') pro šedesátinu stupně a 1 vteřina (značíme 1'') pro jednu šedesátinu minuty. Protože celé kružnici odpovídá úhel 360°, přísluší oblouku délky 2π úhel velikosti 360°, takže jednomu radiánu přísluší úhel $\frac{360^0}{2\pi} \doteq 57^0 17' 45''$.

Převodní vztah mezi stupni a radiány dostaneme z přímé úměrnosti

2π rad……………….. 360 stupňů

x rad………………... α stupňů

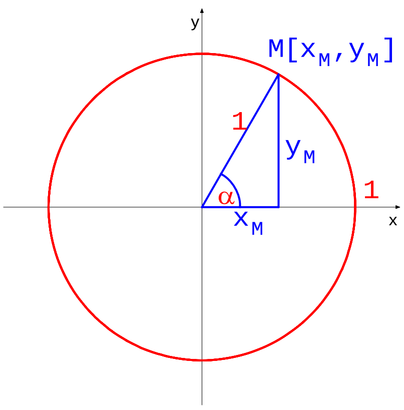
$$x = \frac{\alpha\pi}{180}, \qquad \alpha = \frac{180\, x}{\pi}.$$

2.11.2. Funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens

Goniometrické funkce reálné proměnné x definujeme pomocí jednotkové kružnice. V kartézské soustavě souřadnic sestrojíme kružnici se středem v počátku a o poloměru jedna. Každému reálnému číslu můžeme přiřadit orientovaný úhel velikosti x (v obloukové míře), jehož počáteční rameno je kladná poloosa x a vrchol je v počátku soustavy souřadnic. Průsečík koncového ramene s kružnicí označme $M[x_M, y_M]$.

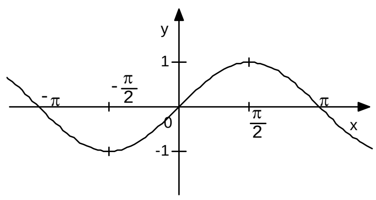
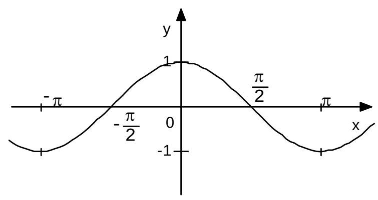
Nepřehlédněme podstatný fakt, že definičním oborem každé z goniometrických funkcí je podmnožina reálných čísel; ani jednou nebude řeč o stupních!!

Funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens definujeme takto:

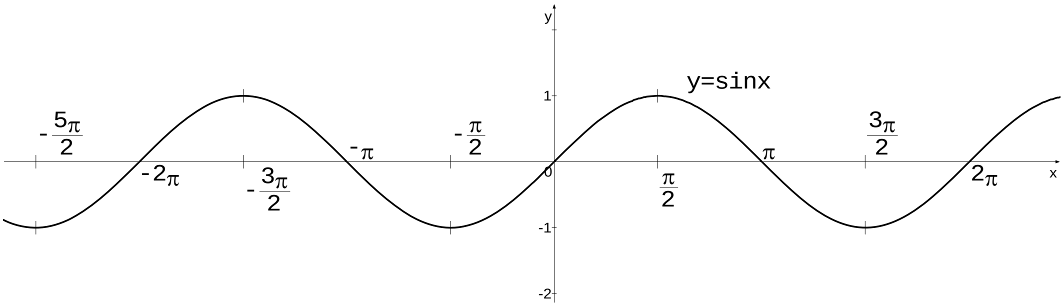


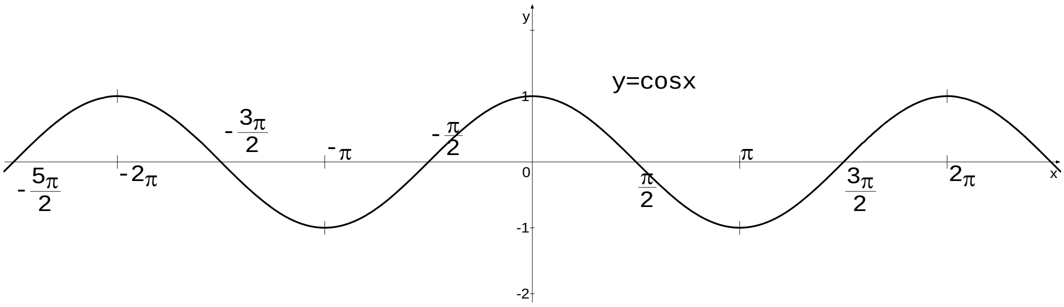
$\sin x = y_M\,,$ $\qquad \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}\,,\ \cos x \neq 0$

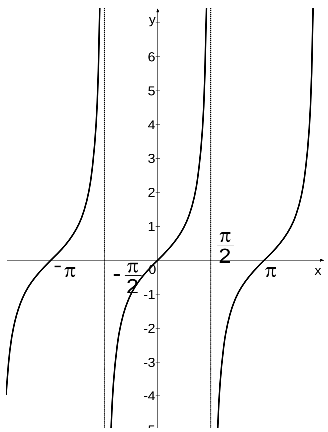
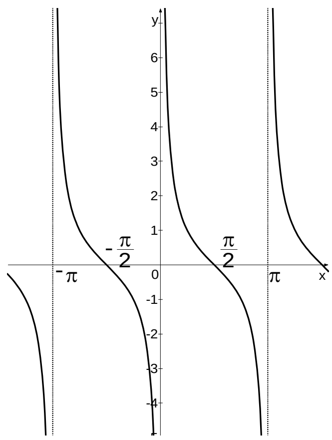
$\cos x = x_M\,,$ $\qquad \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}\,,\ \sin x \neq 0$

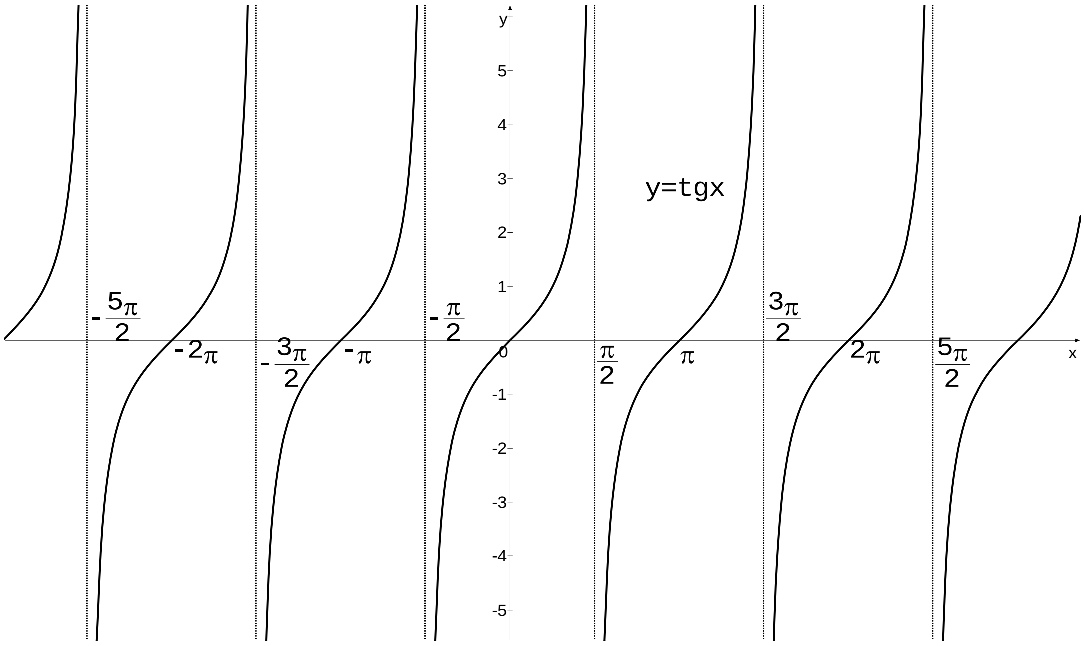
	$y = \sin x$	$y = \cos x$
		
Definiční obor	**R**	**R**
Obor hodnot	$\langle -1,1 \rangle$	$\langle -1,1 \rangle$
Funkce	lichá	sudá
Základní perioda	2π	2π
Rostoucí	v každém intervalu $\left\langle -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$	v každém intervalu $\langle \pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi \rangle$
Klesající	v každém intervalu $\left\langle \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$	v každém intervalu $\langle 0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$
	shora i zdola ohraničená	shora i zdola ohraničená
Maximum	v každém bodě $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$	v každém bodě $x = 2k\pi$
Minimum	v každém bodě $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$	v každém bodě $x = \pi + 2k\pi$

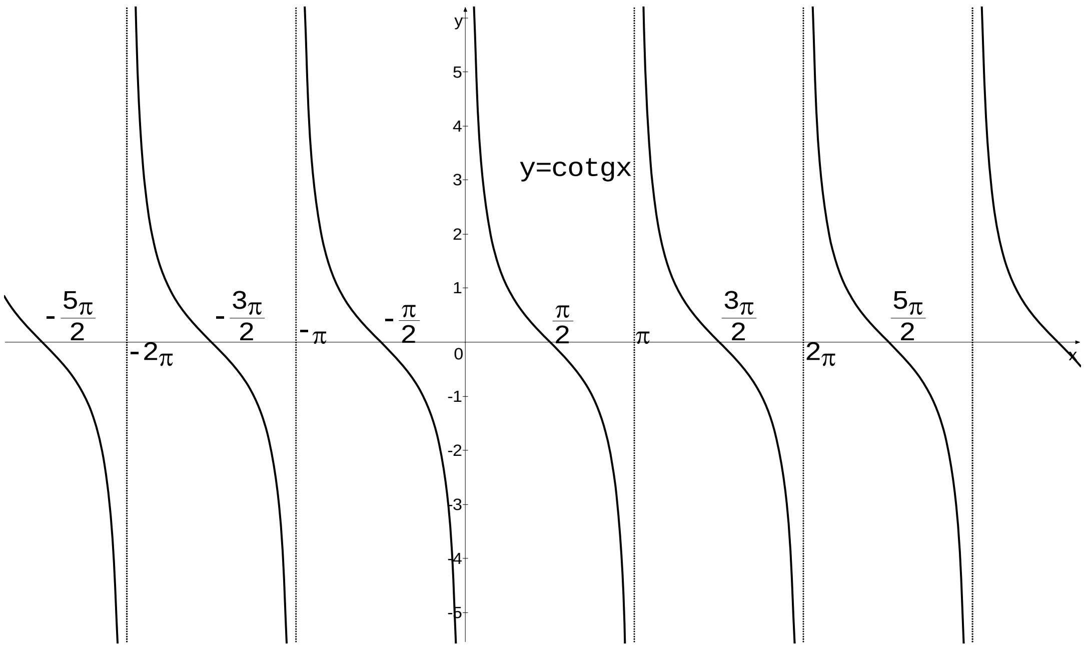
Písmeno k v tabulce označuje libovolné celé číslo.





	$y = \mathrm{tg}\, x$	$y = \mathrm{cotg}\, x$
		
Definiční obor	množina všech $x \in R - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}$ pro $\forall k \in Z$	množina všech $x \in R - \{k\pi\}$ pro $\forall k \in Z$
Obor hodnot	**R**	**R**
Funkce	lichá	lichá
Základní perioda	π	π
Rostoucí	v každém intervalu $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$	———————
Klesající	———————	v každém intervalu $(0 + k\pi, \pi + k\pi)$
	shora i zdola neohraničená	shora i zdola neohraničená
Maximum	neexistuje	neexistuje
Minimum	neexistuje	neexistuje





Znaménko funkce	I. kvadrant	II. kvadrant	III. kvadrant	IV. kvadrant
$\sin x$	+	+	-	-
$\cos x$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} x$	+	-	+	-
$\operatorname{cotg} x$	+	-	+	-

Monotónnost	I. kvadrant	II. kvadrant	III. kvadrant	IV. kvadrant
$\sin x$	roste	klesá	klesá	roste
$\cos x$	klesá	klesá	roste	roste
$\operatorname{tg} x$	roste	roste	roste	roste
$\operatorname{cotg} x$	klesá	klesá	klesá	klesá

Goniometrické funkce jsou periodické.

Platí: Pro každé $k \in \mathbf{Z}$ a pro každé $x \in \mathbf{R}$ je $\cos(x + k2\pi) = \cos x$

$\sin(x + k2\pi) = \sin x$.

Pro každé $k \in \mathbf{Z}$ a pro každé $x \in \mathbf{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$ je $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$.

Pro každé $k \in \mathbf{Z}$ a pro každé $x \in \mathbf{R} - \{k\pi\}$ je $\operatorname{cotg}(x + k\pi) = \operatorname{cotg} x$.

Funkce sinus je lichá, platí tedy pro $\forall x \in R$ $\sin(-x) = -\sin x$.

Funkce kosinus je sudá, platí tedy pro $\forall x \in R$ $\cos(-x) = \cos x$.

Funkce tangens je lichá, platí tedy pro $\forall x \in R$ $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

Funkce kotangens je lichá, platí tedy pro $\forall x \in R$ $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$.

x rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nedef.	0	nedef.	0
$\operatorname{cotg} x$	nedef.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	nedef.	0	nedef.

nedef. v tabulce značí, že hodnota není definována, bod nepatří definičnímu oboru.

Pro kteroukoliv goniometrickou funkci f platí rovnost:

$$|f(x)| = |f(\pi - x)| = |f(\pi + x)| = |f(2\pi - x)|.$$

Řešené úlohy

Příklad 2.11.1. Určete hodnoty goniometrických funkcí $f(x)$ pro $x=\frac{5}{6}\pi$.

Řešení:

$x=\frac{5}{6}\pi\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ tj. II. kvadrant. Vyjádříme si tedy $x=\frac{5}{6}\pi$ ve tvaru $\pi-x_0$, kde $x_0=\frac{\pi}{6}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Znaménka hodnot goniometrických funkcí určíme podle tabulky.

Znaménko funkce	II. kvadrant
$\sin x$	+
$\cos x$	-
$\operatorname{tg} x$	-
$\operatorname{cotg} x$	-

$$\sin\frac{5}{6}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{5}{6}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

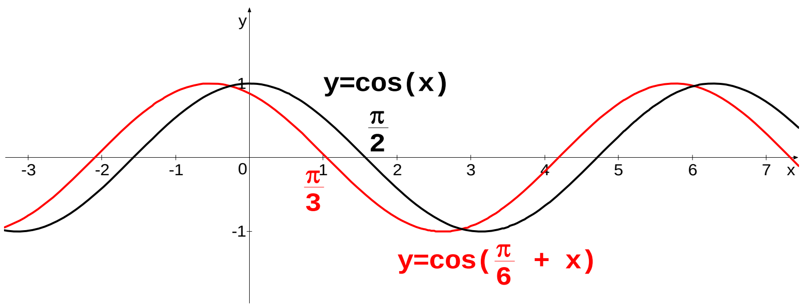
$$\operatorname{tg}\frac{5}{6}\pi=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{5}{6}\pi=\operatorname{cotg}\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\operatorname{cotg}\frac{\pi}{6}=-\sqrt{3}$$

Příklad 2.11.2. Nakreslete graf funkce $y=\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$.

Řešení:

Graf funkce $y=\cos x$, jehož průběh známe, posuneme o $\frac{\pi}{6}$ ve směru záporné poloosy x.



Příklad 2.11.3. Nakreslete graf funkce $y = \sin 2x$.

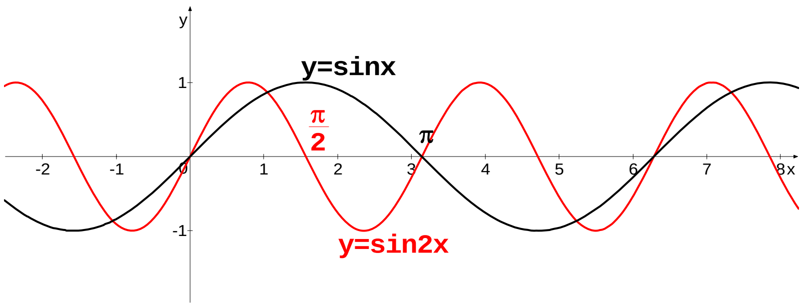
Řešení:

Budeme postupovat od jednoduššího grafu. Tím je graf funkce $y = \sin x$.

Nyní sestrojíme graf funkce $y = \sin 2x$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
y	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0

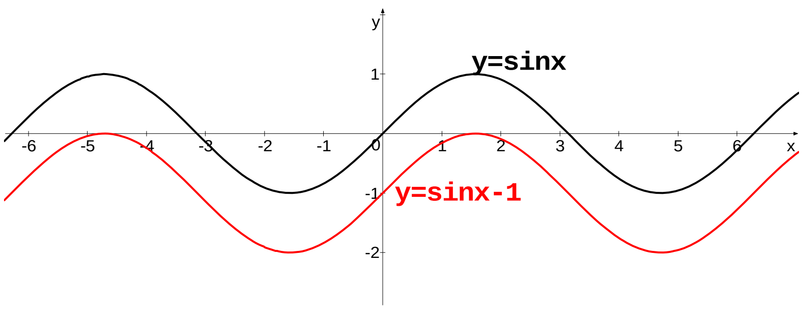
Průběh grafu se dvakrát „zrychlí“, perioda se zkrátí na polovinu.



Příklad 2.11.4. Nakreslete graf funkce $y = \sin x - 1$.

Řešení:

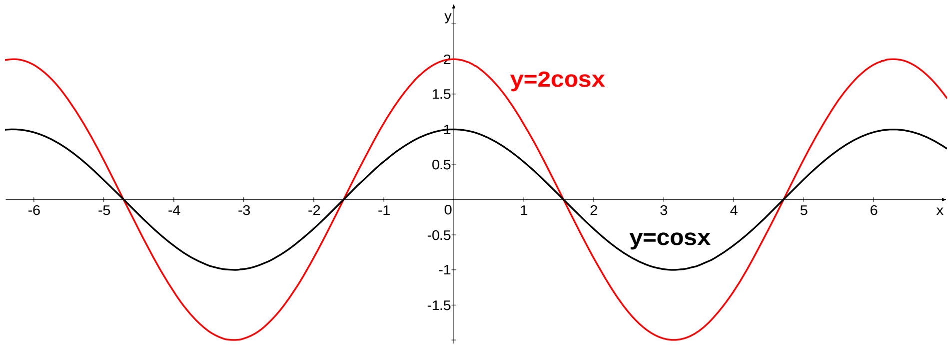
Graf funkce $y = \sin x$ se posune o 1 jednotku ve směru záporné poloosy y.



Příklad 2.11.5. Nakreslete graf funkce $y = 2\cos x$.

Řešení: Graf funkce $y = \cos x$ je výchozím grafem pro sestrojení grafu funkce $y = 2\cos x$. Funkční hodnoty se zvětší dvakrát.

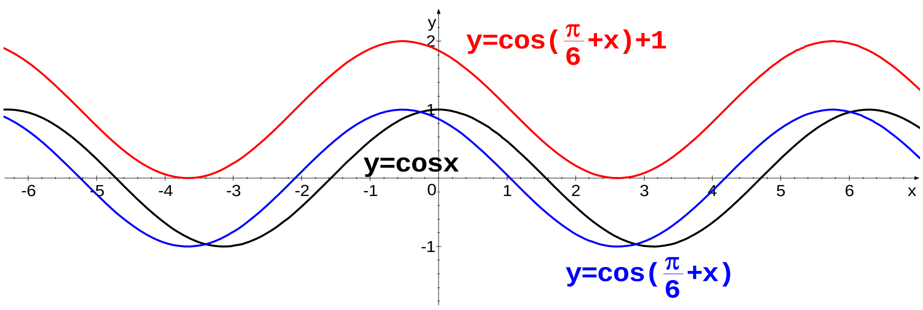
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
y	0	$\sqrt{3}$	1	0	-2



Při sestrojování grafů goniometrických funkcí vždy vycházíme ze základního grafu. Jestliže se jedná o násobek funkce, tj. $y = kf(x)$, funkční hodnoty se násobí. Je-li $k > 1$ graf se „zvětšuje“, je-li $k \in (0, 1)$ graf se „smršťuje“ vzhledem k ose *x*.

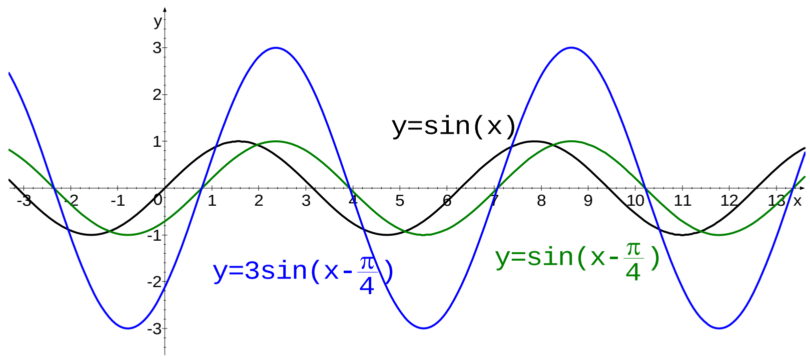
Příklad 2.11.6. Nakreslete graf funkce $y = \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + 1$.

Řešení: Opět začínáme od grafu funkce $y = \cos x$, ten posuneme o $\frac{\pi}{6}$ ve směru záporné poloosy *x* a sestrojíme tak graf funkce $y = \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$, ten pak posuneme o 1 jednotku ve směru kladné poloosy y .



Příklad 2.11.7. Nakreslete graf funkce $y = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Řešení: Budeme postupovat od grafu funkce $y = \sin x$, který posuneme o $\frac{\pi}{4}$ ve směru kladné poloosy x, máme graf funkce $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ a nyní funkční hodnoty vynásobíme 3.

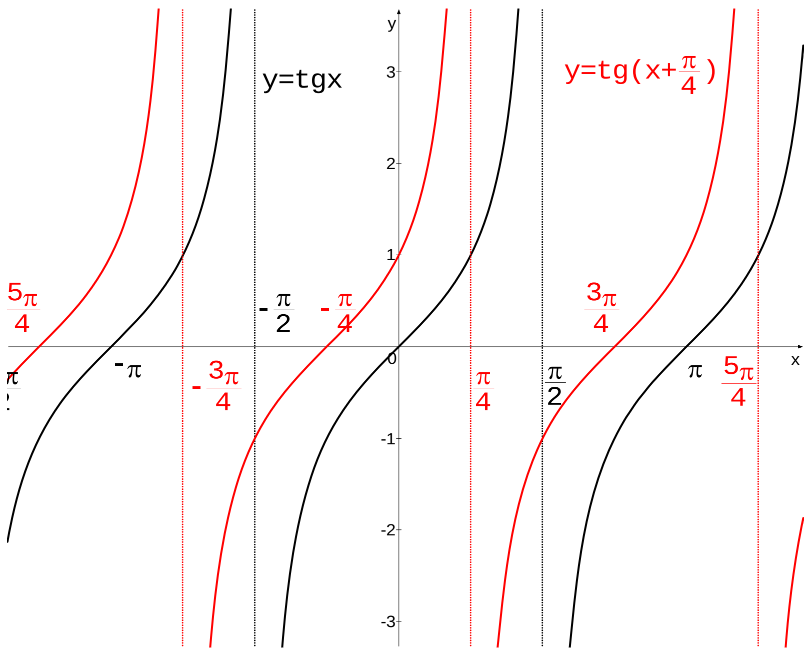


Příklad 2.11.8. Nakreslete graf funkce $y = \mathrm{tg}(x + \frac{\pi}{4})$.

Řešení: Nejdříve určíme definiční obor funkce: $\cos(x + \frac{\pi}{4}) \neq 0$, odtud $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Graf funkce $y = \mathrm{tg}\, x$ posuneme o $\frac{\pi}{4}$ ve směru záporné poloosy x,

přímky $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ jsou asymptoty grafu funkce.



Úlohy k samostatnému řešení

9. Postupně zakreslete do téže soustavy souřadnic grafy těchto funkcí

a) $y=\sin x,\ y=\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right),\ y=0{,}7\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right),\ y=0{,}7\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)+1,$

b) $y=\cos x,\ y=\cos 0{,}5x,\ y=\cos\left(0{,}5x+\frac{\pi}{4}\right),\ y=2\cos\left(0{,}5x+\frac{\pi}{4}\right).$

10. Nakreslete graf funkce $y=-0{,}5\,\mathrm{tg}(x+\frac{\pi}{6})$.

2.11.3. Goniometrické vzorce

Výklad

Pro každé $x\in D(f)$ platí: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $\mathrm{tg}\,x\cdot\mathrm{cotg}\,x=1$.

Součtové vzorce:

$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$

$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$

$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$

$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$

$$\mathrm{tg}(x+y)=\frac{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y}{1-\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y}\qquad \mathrm{tg}(x-y)=\frac{\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}\,y}{1+\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y}$$

$$\mathrm{cotg}(x+y)=\frac{\mathrm{cotg}\,x\,\mathrm{cotg}\,y-1}{\mathrm{cotg}\,y+\mathrm{cotg}\,x}\qquad \mathrm{cotg}(x-y)=\frac{\mathrm{cotg}\,x\,\mathrm{cotg}\,y+1}{\mathrm{cotg}\,y-\mathrm{cotg}\,x}$$

Vzorce pro dvojnásobný argument:

$$\sin 2x=2\sin x\cos x\qquad \mathrm{tg}\,2x=\frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}^2 x}$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x\qquad \mathrm{cotg}\,2x=\frac{\mathrm{cotg}^2 x-1}{2\,\mathrm{cotg}\,x}$$

Vzorce pro poloviční argument:

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\qquad \left|\cos\frac{x}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}\qquad \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$$

Goniometrické vzorce používáme k úpravám výrazů, k důkazům platnosti rovnic a k řešení goniometrických rovnic (viz kap. **3.7.**).

Příklad 2.11.9. Určete pro která $x \in R$ mají dané výrazy smysl a pak výrazy zjednodušte:

a) $(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x$,

b) $\dfrac{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x}{1-\cos^2 x}$,

c) $1-\sin^2 x + \operatorname{cotg}^2 x \cdot \sin^2 x$.

Řešení:

a) Při úpravě použijeme dva vzorce: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1,\ \sin 2x = 2\sin x \cos x$.

$\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin 2x = 1,\ \ x \in R$.

b) Při úpravě použijeme vztahy: $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x},\ \sin^2 x = 1-\cos^2 x$.

$$\frac{\frac{\sin x}{\cos x}\cdot \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{cotg} x,\quad x \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in Z.$$

c) Při úpravě použijeme vztahy: $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x},\ \cos^2 x = 1-\sin^2 x$.

$$\cos^2 x + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot \sin^2 x = 2\cos^2 x,\quad x \neq k\pi,\ k \in Z.$$

Příklad 2.11.10. Dokažte: a) $\cos(x + \frac{2}{3}\pi) + \cos(x + \frac{5}{3}\pi) = 0$,

b) $\sin(x+\frac{\pi}{2}) - \sin(x-\frac{\pi}{2}) = 2\cos x$.

Řešení: a) K důkazu potřebujeme součtové vzorce,

$$L = \cos x \cos\frac{2}{3}\pi - \sin x \sin\frac{2}{3}\pi + \cos x \cos\frac{5}{3}\pi - \sin x \sin\frac{5}{3}\pi =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 0 = P.$$

b) $$L = \sin x \cos\frac{\pi}{2} + \cos x \sin\frac{\pi}{2} - \sin x \cos\frac{\pi}{2} + \cos x \sin\frac{\pi}{2} =$$

$$= 0 + \cos x - 0 + \cos x = 2\cos x = P.$$

Úlohy k samostatnému řešení

11. Dokažte: a) $\cos x + \cos(x + \frac{2}{3}\pi) + \cos(x + \frac{4}{3}\pi) = 0$,

b) $\sin(x + \pi) + \sin(x - \pi) = -2\sin x$,

c) $2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \cos x$,

d) $1 + \sin x = (\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2})^2$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) ani sudá, ani lichá; b) lichá; c) lichá; d) sudá; e) lichá; f) sudá; g) ani sudá, ani lichá.

2. a) $x \in (-2,2)$, b) $x \in (1,\infty)$, c) $x \in (-\infty,-3\rangle \cup (-2,3\rangle$, d) $x \neq \frac{k\pi}{3}, k \in Z$, e) $x \neq 3$;

f) $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.

Klíč k řešení úloh

1. a) $D(f) = R - \{2\}$, číslo -2 patří $D(f)$, není splněna 1.podmínka , proto funkce

není ANI SUDÁ, ANI LICHÁ.

b) $D(f) = R - \{0\}$, pro $\forall x \in D(f)$ je $(-x) \in D(f)$,

$$f(-x) = -\frac{-x - 5(-x)^3}{(-x)^2} = -\frac{-x + 5x^3}{x^2} = \frac{x - 5x^3}{x^2} = -f(x) \quad \text{LICHÁ}$$

c) $D(f) = R$, pro $\forall x \in D(f)$ je $(-x) \in D(f)$,

$$f(-x) = -x\left(\cos(-x) - (-x)\sin(-x)\right) = -x\left(\cos x + x(-\sin x)\right) =$$

$$= -x(\cos x - x\sin x) = -f(x) \qquad \text{LICHÁ.}$$

d) $D(f) = R$, pro $\forall x \in D(f)$ je $(-x) \in D(f)$,

$$f(-x) = -x\ln 2^{-x} = x\ln 2^{x} = f(x) \qquad \text{SUDÁ}$$

e) $D(f) = R$, pro $\forall x \in D(f)$ je $(-x) \in D(f)$,

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{e^{-x} + e^{-(-x)}} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x} + e^{x}} = \frac{-\left(e^{x} - e^{-x}\right)}{e^{x} + e^{-x}} = -f(x) \qquad \text{LICHÁ}$$

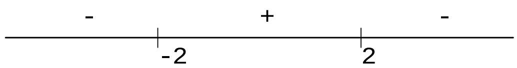
f) $D(f) = R$, pro $\forall x \in D(f)$ je $(-x) \in D(f)$,

$$f(-x) = -x\left((-x)^3 - (-x)^2 \sin(-x)\right) = -x\left(-x^3 + x^2 \sin x\right) = x\left(x^3 - x^2 \sin x\right) = f(x) \qquad \text{SUDÁ}$$

g) $D(f) = R$, pro $\forall x \in D(f)$ je $(-x) \in D(f)$,

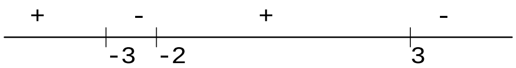
$$f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) - 5 = x^2 - 2x - 5 \qquad \text{ANI SUDÁ ANI LICHÁ}$$

2. a) $\dfrac{2-x}{2+x} > 0 \ \wedge\ 2 + x \neq 0$, $\qquad x \in (-2,2)$



b) $\ln x > 0 \wedge x > 0$, $\ln x > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow\ x \in (1,\infty)$.

c) $\dfrac{9-x^2}{2+x} \geq 0 \ \wedge\ 2 + x \neq 0$,

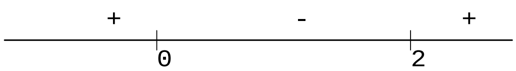


$x \in \left(-\infty,-3\right\rangle \cup \left(-2,3\right\rangle$

d) $\operatorname{cotg} 3x = \dfrac{\cos 3x}{\sin 3x}$, $\sin 3x \neq 0 \Rightarrow 3x \neq k\pi \Rightarrow\ x \neq \dfrac{k\pi}{3}, k \in Z$.

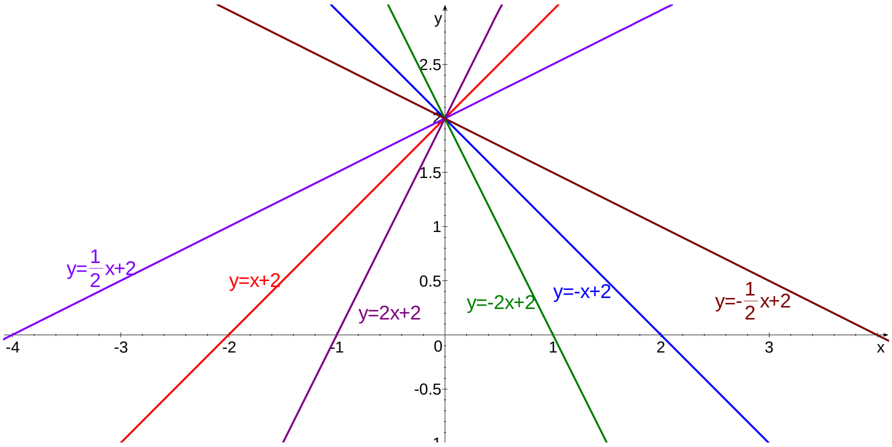
e) $3 - x \neq 0 \ \Rightarrow\ x \neq 3$, $D(f) = R - \{3\}$.

f) $x^2 - 2x > 0 \Rightarrow x(x-2) > 0$

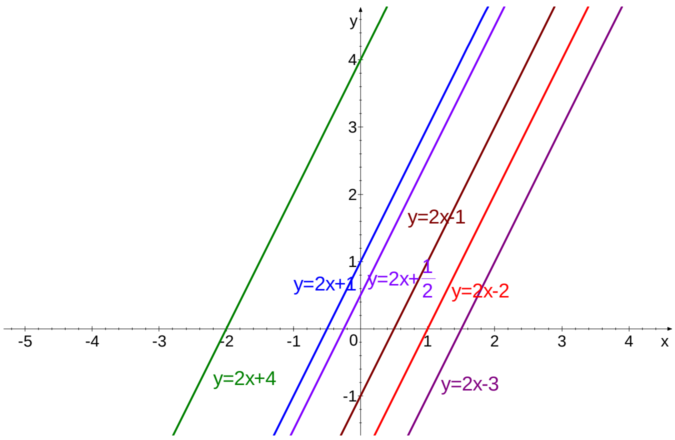


$D(f) = (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

3. a) Jedná se o různoběžky procházející bodem 2 na ose y.



b) Jedná se o rovnoběžky, které vytínají na ose y úsek b.

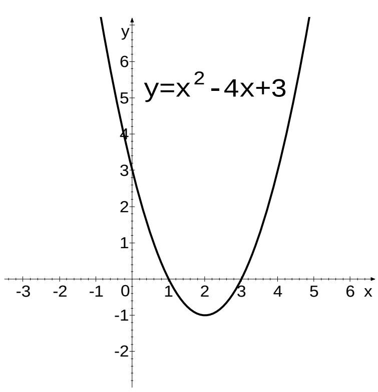


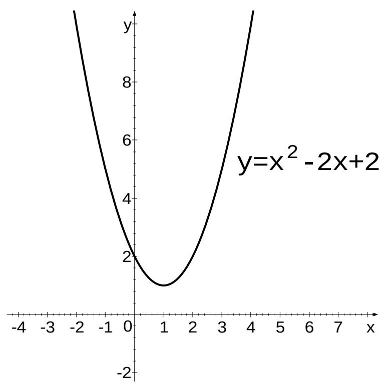
4. a) $y=(x-2)^2-1$, $V[2,-1]$,

průsečíky s osami jsou $[0, 3], [1, 0], [3, 0]$

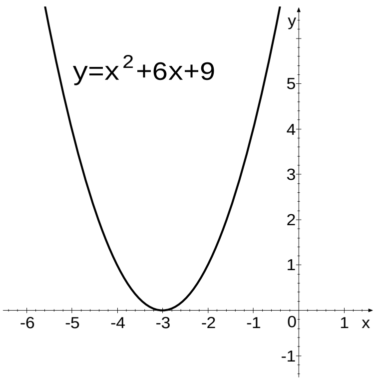
b) $y=(x-1)^2+1$, $V[1,1]$

průsečík s osou y $[0, 2]$





c) $y=(x+3)^2$, $V[-3, 0]$, průsečík s osou y $[0, 9]$

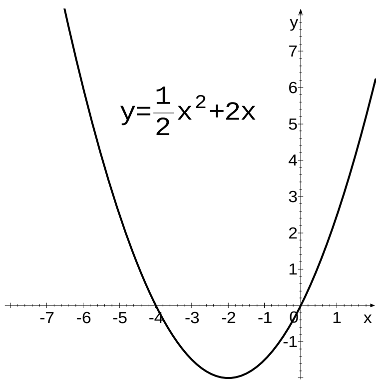


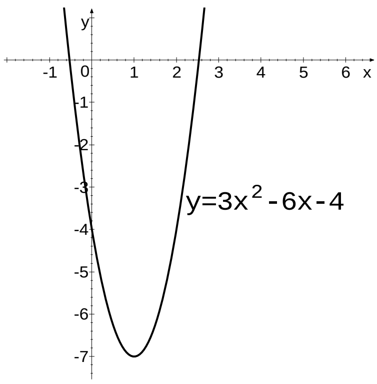
5. a) $y=\frac{1}{2}(x+2)^2-2$, $V[-2,-2]$,

průsečíky $[0, 0], [-4, 0]$

b) $y=3(x-1)^2-7$, $V[1,-7]$,

průsečík s osou y $[0,-4]$



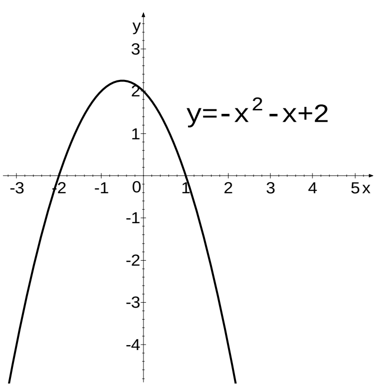


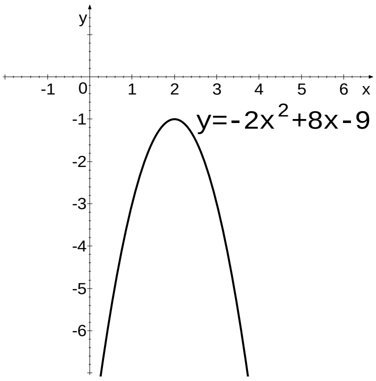
6. a) $y=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$, $V[-\frac{1}{2},\frac{9}{4}]$,

průsečíky $[0, 2], [1, 0], [-2, 0]$

b) $y=-2(x-2)^2-1$, $V[2,-1]$,

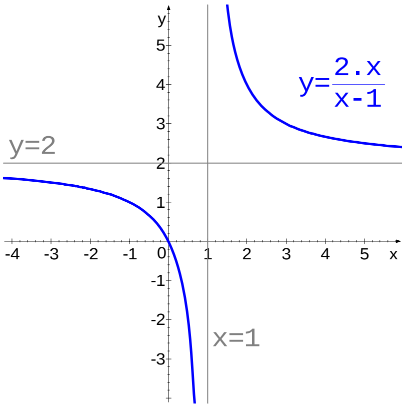
průsečík s osou y $[0,-9]$





7.

a)

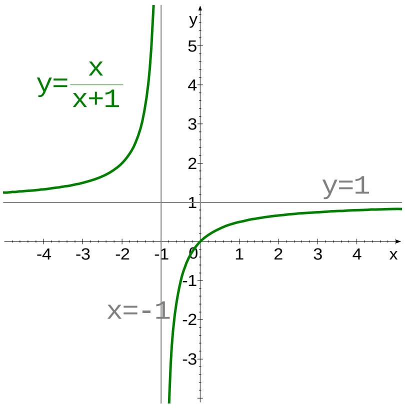


$$y=\frac{2x}{x-1}=\frac{2x-2+2}{x-1}=\frac{2x-2}{x-1}+\frac{2}{x-1}=2+\frac{2}{x-1}$$

$$y=\frac{2}{x-1}+2$$

$S[1,2]$, $k=2$, průsečík [0, 0]

b)

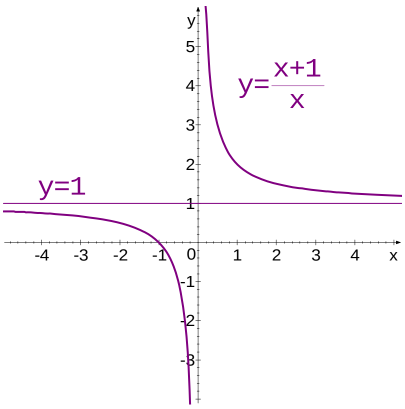


$$y=\frac{x}{x+1}=\frac{x+1-1}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}-\frac{1}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$$

$$y=\frac{-1}{x+1}+1$$

$S[-1,1], k=-1$, průsečík [0, 0]

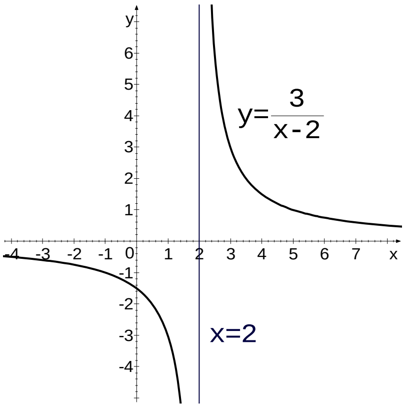
c)



$$y=\frac{x+1}{x}=\frac{x}{x}+\frac{1}{x}=1+\frac{1}{x}$$

$$y=\frac{1}{x}+1$$

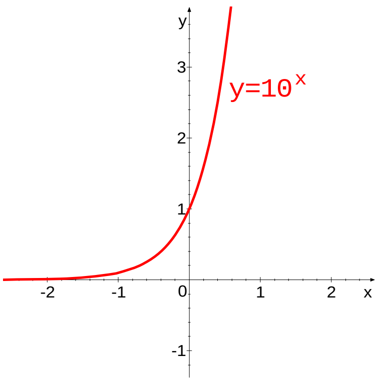
$S[0,1]$, $k=1$, průsečík s osou x [−1, 0] d)



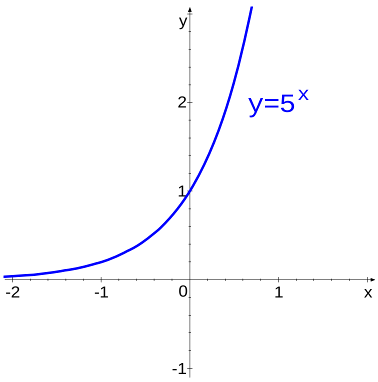
$S[2,0],\ k=3$, průsečík s osou y $[0,-\frac{3}{2}]$

8.

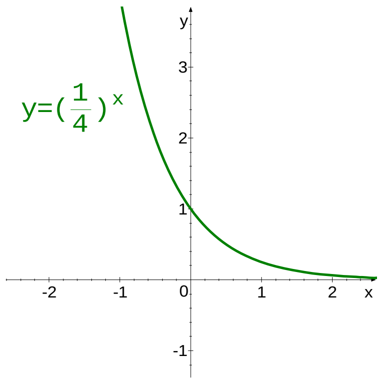
a)



b)

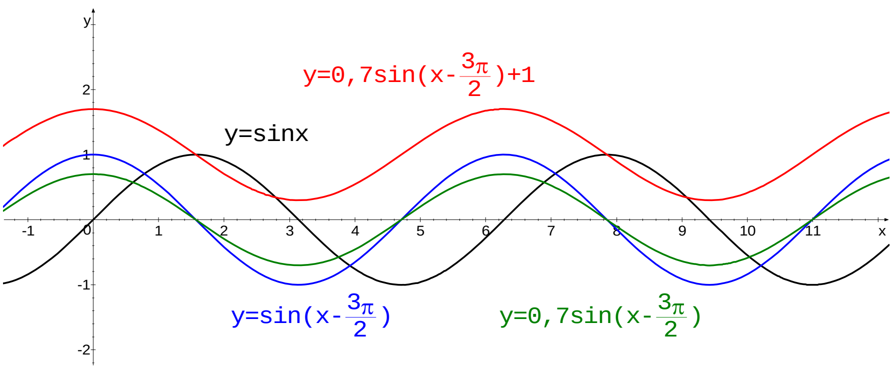


c)

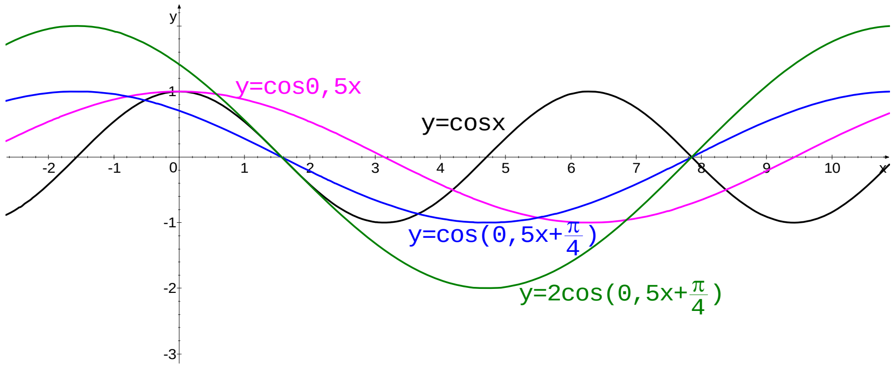


9.

a)



b)

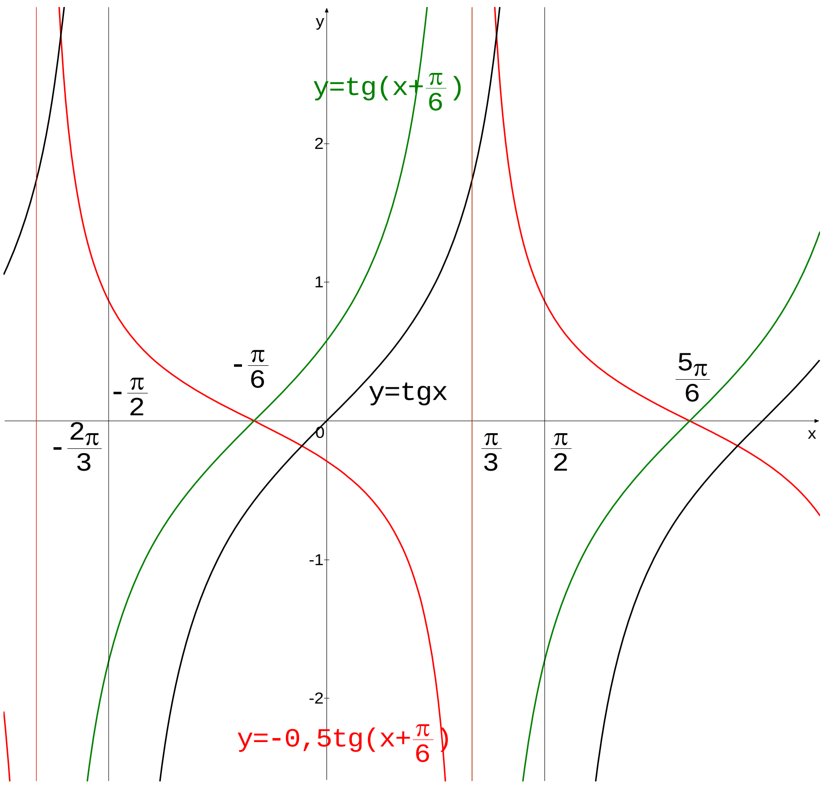


10. Určíme definiční obor: $\cos(x+\frac{\pi}{6})\neq 0$ odtud $x\neq\frac{\pi}{3}+k\pi$. Pak $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$ jsou rovnice asymptot grafu $(\forall k\in Z)$. Budeme postupovat opět od nejjednoduššího grafu, jako v předchozích příkladech s funkcemi sinus a kosinus.

$y=\operatorname{tg} x$

$y=\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{6})$ Graf $y=\operatorname{tg} x$ posuneme o $\frac{\pi}{6}$ ve směru záporné poloosy x.

$y=-0,5\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{6})$ Funkční hodnoty vynásobíme $-0,5$.



11. a) $L = \cos x + \cos x \cos\frac{2}{3}\pi - \sin x \sin\frac{2}{3}\pi + \cos x \cos\frac{4}{3}\pi - \sin x \sin\frac{4}{3}\pi =$

$$= \cos x + \cos x\left(-\frac{1}{2}\right) - \sin x\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x\left(-\frac{1}{2}\right) - \sin x\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 = P,$$

b) $L = \sin x \cos\pi + \cos x \sin\pi + \sin x \cos\pi - \cos x \sin\pi =$

$$= -\sin x + 0 - \sin x - 0 = -2\sin x = P,$$

c) $L = 2\frac{1+\cos x}{2} - 1 = \cos x = P,$

d) $P = \sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1 + \sin x = L.$

Kontrolní otázky

1. Jak je definována funkce?
2. Jak poznáte, že je funkce sudá nebo lichá, znáte-li její funkční předpis?
3. Jak poznáte, že je funkce sudá nebo lichá, znáte-li její graf?
4. Kdy je funkce rostoucí nebo klesající na definičním oboru funkce?
5. Jakou funkci nazýváme prostou?
6. Jak poznáte periodickou funkci, znáte-li její funkční předpis?
7. Na co všechno musíte brát ohled, určujete-li definiční obor funkce?
8. Jak poznáte lineární funkci? Jaký je její definiční obor, obor hodnot, vlastnosti a graf?
9. Jak poznáte kvadratickou funkci, jaký je její definiční obor, obor hodnot,vlastnosti a graf?
10. Jak poznáte lineární lomenou funkci, jaký je její definiční obor, obor hodnot a vlastnosti ? Načrtněte graf.
11. Jak poznáte mocninnou funkci, jaký je její definiční obor, obor hodnot a vlastnosti? Načrtněte graf.
12. Jak poznáte exponenciální funkci, jaký je její definiční obor, obor hodnot a vlastnosti? Načrtněte graf.
13. Jak poznáte logaritmickou funkci, jaký je její definiční obor, obor hodnot a vlastnosti? Načrtněte graf.
14. Jaké goniometrické funkce znáte? Jaký je jejich definiční obor, obor hodnot a jaké mají vlastnosti ? Načrtněte jejich grafy.

Odpovědi najdete v textu.

Kontrolní test

1. Najděte definiční obor funkce $y=\ln(x+4)$:

a) $\langle 0,\infty)$, b) $(-4,\infty)$, c) $\langle -4,\infty)$, d) $(-\infty,-4)$.

2. Najděte definiční obor funkce $y=\sqrt{16-4x^2}$:

a) $(-2,2)$, b) $\langle -4,4\rangle$, c) $\langle -2,2\rangle$, d) $(-4,4)$.

3. Najděte definiční obor funkce $y=\dfrac{x+4}{x-5}$:

a) $(5,\infty)$, b) $(-\infty,5)\cup(5,\infty)$, c) $(-\infty,-5)\cup(5,\infty)$, d) $\langle -5,5\rangle$.

4. Najděte definiční obor funkce $y=\operatorname{tg}3x$:

a) $x\neq\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{\pi}{3}$, b) $\mathbf{R}$, c) $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, d) $(-3,3)$.

5. Najděte definiční obor funkce $y=\sqrt[3]{x^2-4x+3}$:

a) $(-\infty,1)\cup(3,\infty)$, b) $(1,3)$, c) $\mathbf{R}$, d) $\langle 1,3\rangle$.

6. Najděte definiční obor funkce $y=\operatorname{cotg}\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$:

a) $x\neq k\pi$, b) $x\neq\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2}$, c) $\mathbf{R}$, d) $x\neq\dfrac{\pi}{4}+k\pi$.

7. Poznejte, která funkce je sudá.

a) $y=x^2+3x-7$, b) $y=x^2-\cos x$, c) $y=x-\dfrac{1}{x}$, d) $y=x-\sin 3x$.

8. Poznejte, která funkce je lichá.:

a) $y=x^2-\cos x$, b) $y=x^2+3x-7$, c) $y=x-\sin 3x$, d) $y=x-\dfrac{1}{x}$.

Výsledky testu

1. b), **2.** c), **3.** b), **4.** a), **5.** c), **6.** b), **7.** b), **8.** c) i d).