MA0001 Základy matematiky
Podklady k cvičení 2

Břetislav Fajmon, Lukáš Másilko a další

10. října 2023

Cvičení 2.1. Pomocí pravdivostní tabulky dokažte platnost tvrzení: Výrokové formy $A \Rightarrow B$ a $\neg A \vee B$ jsou ekvivalentní.

Cvičení 2.2. Zjednodušte symbolický zápis, aby ve výsledku nebyl symbol negace před žádnou závorkou, pouze u dílčích výrokových proměnných:

a) $\neg((A \Rightarrow B) \wedge C)$

b) $\neg(A \Rightarrow (B \vee C))$

c) $\neg((A \vee B) \wedge C)$

Cvičení 2.3. Proveďte přímý důkaz následujích tvrzení:

a) (viz příklad 2.1[1]) Pro všechna kladná reálná čísla a, b platí:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}.$$

b) $\forall s \in \mathbb{N} :$ (s je součet tří po sobě jdoucích mocnin čísla 2) $\Rightarrow$ $(7 \mid s)$.

c) $\forall n \in \mathbb{N} :$ (n je sudé) $\Rightarrow$ (číslo $3^n + 63$ je násobkem čísla 72).

Cvičení 2.4. Napište obměnu výroku: Pokud n je sudé číslo, pak jeho druhá mocnina n^2 je sudé číslo.

Cvičení 2.5. Proveďte nepřímý důkaz následujících tvrzení

a) (viz Příklad 4.14[2]): Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: když n není druhá mocnina přirozeného čísla, tak $\sqrt{n}$ není racionální číslo.

[1] Rediger, Thiele. *Matematické důkazy.* SNTL Praha, 1985. Str. 92.
[2] Rediger, Thiele. *Matematické důkazy.* SNTL Praha, 1985. Str. 103.

b) $\forall n \in \mathbb{N} : (n^2 + 2 \text{ je dělitelné } 3) \Rightarrow \ (n \text{ není dělitelné } 3)$.

c) $\forall n \in \mathbb{Z} : (5n - 7 \text{ je sudé}) \Rightarrow \ (n \text{ je liché})$.

d) $\forall x \in \mathbb{Z} : (7x - 8 \text{ je sudé}) \Rightarrow \ (x \text{ je sudé})$.

e) $\forall z \in \mathbb{Z} : (5 \text{ nedělí } z^2 + 4) \Rightarrow (5 \text{ nedělí ani } z - 1, \text{ ani } z + 1)$.

Cvičení 2.6. Dokažte řetězcem ekvivalencí tvrzení:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^4 + 1 \geq 2x^2.$$

Cvičení 2.7. Dokažte pomocí obousměrných implikací tvrzení:

a) $\forall n \in \mathbb{N} : 3 \mid n^2 \Leftrightarrow 3 \mid n$.

b) $\forall n \in \mathbb{N} : 4 \mid n^2 \Leftrightarrow 4 \mid n$.

Poznámka: Pozor, tvrzení 2.7.b) neplatí z obou stran!