

MA0001 Základy matematiky

Podklady k cvičení 4

Břetislav Fajmon, Lukáš Másilko a další

11. října 2023

Cvičení 4.1. Pomocí Vennových diagramů dokažte de Morganova pravidla – věty 9 a 10.

(Věta 09) De Morganovo pravidlo (a): Pro každé dvě množiny A, B , které jsou podmnožinou univerzální množiny U , platí: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(Věta 10) De Morganovo pravidlo (b): Pro každé dvě množiny A, B , které jsou podmnožinou univerzální množiny U , platí: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Cvičení 4.2. Vidíte souvislost mezi větami 1 a 2 a větami 9 a 10? Z jakého důvodu tato souvislost existuje?

(Věta 01) Formule $\neg(A \wedge B)$ je ekvivalentní s formulí $(\neg A) \vee (\neg B)$.

(Věta 02) Formule $\neg(A \vee B)$ je ekvivalentní s formulí $(\neg A) \wedge (\neg B)$.

Cvičení 4.3. Napište množinové výrazy, jejichž výsledkem je vyšrafovaná plocha Vennova diagramu na obrázku 1:

Cvičení 4.4. Prozkoumejte¹ operaci symetrického rozdílu a pomocí Vennových diagramů dokažte, že platí

a) $A \div B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$,

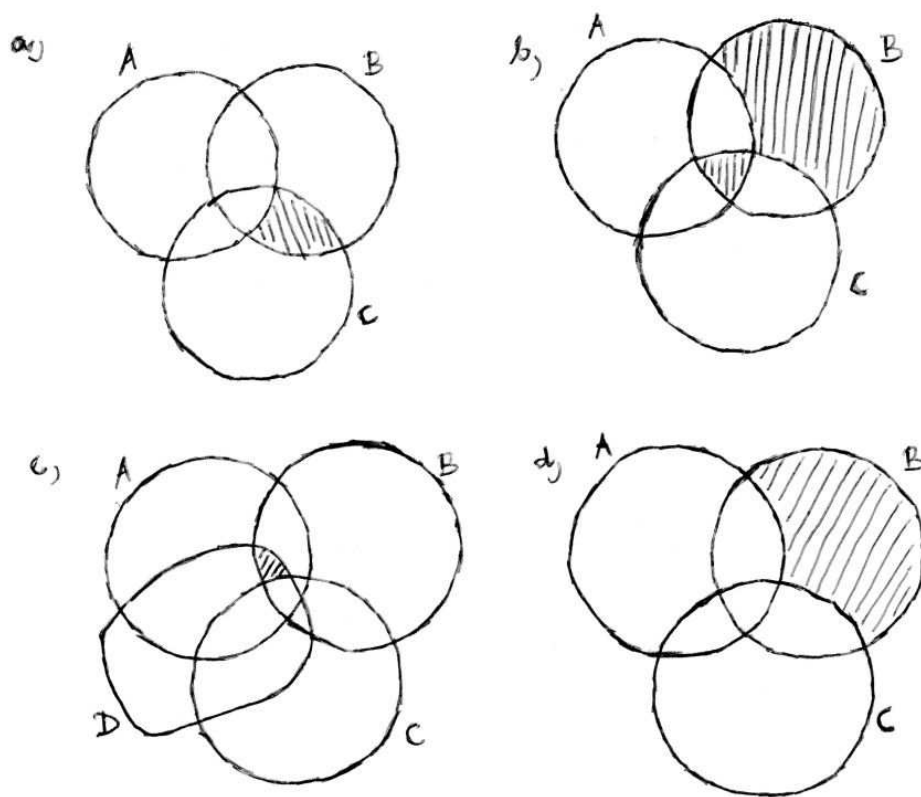
b) $A \div B = B \div A$,

c) $A \cup B = A \div (B \div (A \cap B))$,

d) $A \setminus B = A \div (A \cap B)$,

e) $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$.

¹Viz [17], str.44, př 1.2.B6.



Obrázek 1: Vennovy diagramy k Cvičení 4.3

Cvičení 4.5. Vyjádřete matematickým zápisem bez jakéhokoli českého slova definice všech operací, které jsme v této kapitole prošli:

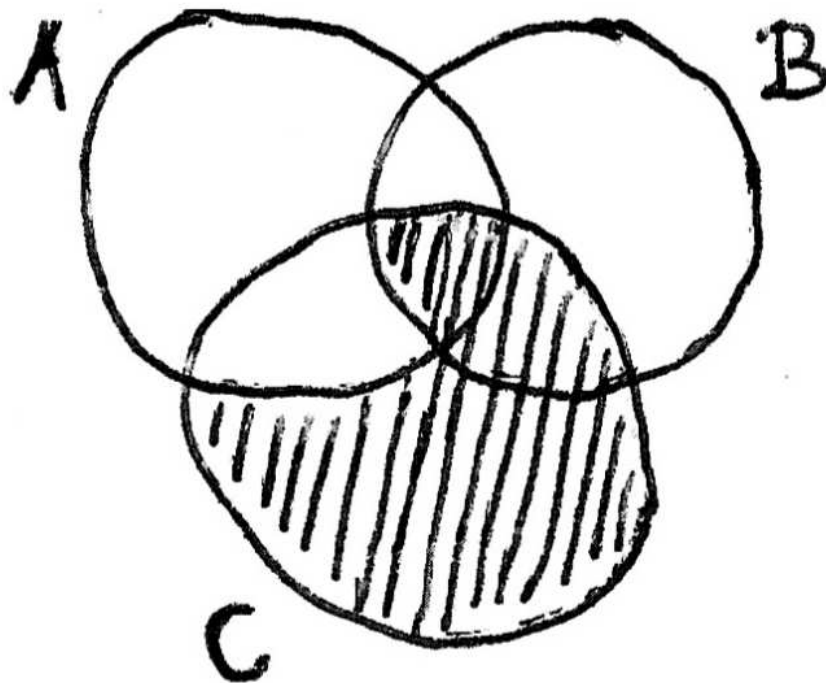
- a) $\bar{A} = \dots$
- b) $A \setminus B = \dots$
- c) $A \times B = \dots$
- d) $A \cup B = \dots$
- e) $A \cap B = \dots$
- f) $A \div B = \dots$

Cvičení 4.6. Uveďte de Morganova pravidla (věty 9 a 10) pouze slovně, bez jakéhokoli matematického symbolu.

Cvičení 4.7. Na univerzální množině U všech přirozených čísel jsou zadány množiny $A = \{2, 3, 4, 5, 8, 10\}$, $B = \{3, 5, 10, 12, 15\}$, $C = \{3, 10, 17, 18, 19\}$. Udejte výčtem prvků množinu $(\overline{A \cup B}) \cap C$.

Cvičení 4.8.

- Uveďte definici množiny: Množina je ...
- Vyjádřete šrafovanou část S Vennova diagramu na obrázku 2 pomocí množin na obrázku a známých množinových operací: $S = \dots$



Obrázek 2: Vennovy diagramy k Cvičení 4.8

Cvičení 4.9. Na konci jistého výrobního procesu prochází 500 součástek třemi kontrolami K_1 , K_2 , K_3 . Zjistilo se, že 38 součástek neprošlo kontrolou K_1 (= bylo shledáno nevyhovující); 29 neprošlo K_2 ; 30 neprošlo K_3 ; 7 součástek neprošlo K_1 ani K_2 ; 5 neprošlo K_2 ani K_3 ; 8 neprošlo K_1 ani K_3 ; 3 součástky neprošly žádnou z kontrol. Určete, kolik součástek

- prošlo všemi kontrolami bez vady, tj. žádná z kontrol je neshledala nevyhovujícími.

b) neprošlo právě jednou z kontrol K_1 , K_2 , K_3 (některou z nich).

Cvičení 4.10. Pomocí Vennových diagramů vyřešte tuto úlohu²: Ráno bylo na letišti 17 letadel, z nichž během dne odletělo 15 letadel, ale tři z nich se zase na letišti vrátila. Toho dne přiletělo celkem 32 letadel a odletělo jich celkem 28. Každé letadlo bylo toho dne na dráze letiště nejvýš dvakrát. Kolik letadel bylo na letišti večer? (Nápověda ... nakreslete si tři množiny v obecné poloze: množinu letadel, které byly na letišti ze včerejška; množinu letadel, které vzlétly dnes; množinu letadel, které se vrátily dnes – vyplňujte počty prvků do jednotlivých oblastí roviny).

Cvičení 4.11. Pomocí Vennových diagramů vyřešte: 120 studentů skládalo tři zkoušky. Přitom deset procent studentů nesložilo ani jednu z nich. Nebyl nikdo, kdo by složil zkoušku jen z druhého předmětu. Devět studentů z něj složilo úspěšně zkoušku, leč pro změnu neprospělo z prvního předmětu. 47 studentů složilo ze tří zkoušek dvě. 33 studentů nevyhovělo z třetího předmětu. 56 studentů složilo úspěšně zkoušku ze druhého i třetího předmětu, zato však 20 studentů neobstálo ani u jednoho z nich. Kolik studentů složilo pouze třetí zkoušku?

Cvičení 4.12. Cvičení k pojmu kartézský součin: Viz realisticky.cz (materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 2101 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

²Úlohy 4.10 a 4.11 byly převzaty z Hruša (kniha [6]).