MA0001 Základy matematiky
Podklady k cvičení 6

Břetislav Fajmon, Lukáš Másilko a další

6. listopadu 2023

- Začneme **cvičením 6.3**: kolik možných relací existuje na dvojprvkové množině, trojprvkové množině? … hodně … tj. už na malých množinách existují různé možné soubory vztahů-vazeb, neboli relace.
- Příklad 6.2 z přednášky: Nakreslete pět bodů znázorňujících pětiprvkovou množinu, označte je a, b, c, d, e. Do množiny šipkami znázorněte relaci, která

    1. je reflexivní,
    2. je antireflexivní,
    3. není ani reflexivní, ani antireflexivní[1],
    4. je symetrická,
    5. je antisymetrická,
    6. není ani symetrická, ani antisymetrická[2],
    7. je tranzitivní,
    8. není tranzitivní.

- Doplnění definic, které se nestihly, letos:

    a) definice antisymetrie,

    b) alternativní definice antisymetrie, která na levé straně implikace vylučuje rovnost prvků, tj. pak v tvrzení implikace je pro studenty přirozenější varianta: „opačná vazba“ mezi dvěma různými prvky je zakázána;

[1] Takové relace existují, protože vlastnosti reflexivity a antireflexivity nejsou si navzájem negacemi, nýbrž „opačnými póly spektra“ vzhledem ke sledované vlastnosti.

[2] Takové relace existují, protože vlastnosti symetrie a antisymetrie nejsou si navzájem negacemi, nýbrž „opačnými póly spektra“ vzhledem ke sledované vlastnosti.

c) definice úplné relace; také lze zmínit dvě různá pojetí, u toho, které je ve skriptech napsáno, budeme počítat s tím, že z úplnosti už plyne reflexivita (u úplnosti zejména poznámka-příklad na pětiprvkové množině, že úplnost neznamená, že by relace musela obsahovat všechny vazby).

- Některé základní zkoumání relací, budeme procházet každou z vlastností R, AR, S, AS, T, U:
  - relace rovnoběžnosti přímek v rovině;
  - relace kolmosti přímek v rovině;
  - relace dělitelnosti na množině přirozených čísel;
  - relace $\leq$ na množině přirozených čísel;
  - relace $\subseteq$ na množině 2^A všech podmnožin množiny $A = \{1, 2, 3, 4\}$;
- A ještě skupina příkladů na reprezentaci relace kartézským grafem:
  - relace $\rho = \{[1; 2], [2; 2], [3; 3], [4; 4]\}$; jaké má tato relace vlastnosti? je tato relace zobrazením? náznak definice zobrazení; co je to první obor relace, co je to druhý obor relace? přesné definice O_1, O_2.
  - relace dělitelnosti na množině $\{2; 3; 4; 6; 11; 18\}$; je tato relace zobrazením? přesná definice zobrazení a) pomocí zákazu dvou prvků nad sebou v kartézském grafu; b) pomocí formulace „existuje nejvýše jeden prvek“ takový, že … c) pomocí formulace „existuje právě jeden prvek“ pro každé x z prvního oboru relace ρ.
  - pokusme se prozkoumat podmínku tranzitivity z kartézského grafu ohledně návaznosti vazeb mezi čísly 3, 6, 18 z předchozího příkladu … formulace není jednoduchá, pomocí jistého obdélníku a úhlopříčky obdélníku? Nebudu po vás chtít.

Cvičení 6.1. Úvodní cvičení k pojmu **relace**: Viz realisticky.cz (materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 2102 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 6.2. Úvodní cvičení k pojmu **zobrazení**: Viz realisticky.cz (materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 2103 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 6.3. Nakreslete všechny relace (v grafové reprezentaci) na a) jednoprvkové možině, b) na dvouprvkové množině, c) na tříprvkové množině; d) pokuste se vyslovit větu o počtu všech relací na $n-$prvkové množině.

Cvičení 6.4. Uveďte příklad relace ρ na množině $\{1, 2, 3, 4\}$, která je symetrická a současně není tranzitivní.

Cvičení 6.5. Pokud dvě relace ρ_1, ρ_2 jsou obě tranzitivní, pak jejich sjednocení $\rho_1 \cup \rho_2$ je také tranzitivní. Dokažte nebo vyvraťte tvrzení v předchozí větě[3].

Cvičení 6.6. Uveďte příklad relace ρ na množině $\{1, 2, 3, 4\}$, která není ani symetrická, ani antisymetrická a obsahuje mimo jiné také prvky $[3; 4]$ a $[4; 3]$.

Cvičení 6.7.

a) Je relace dělitelosti $|$ antisymetrická na množině N?

b) Je relace dělitelnosti $|$ antisymetrická i na množině Z?

Cvičení 6.8. Na množině Z je dána relace ρ definovaná vztahem

$$x\rho y \Leftrightarrow x^2 = y.$$

Určete její vlastnosti, zejména ověřte R, AR, S, AS, T, U.

Cvičení 6.9. Negujte vlastnost S relace ρ na množině M, a to důkladněji než jen stylem „není pravda, že“. Postup:

a) Napište vlastnost S symbolickým matematickým zápisem;

b) Negujte část (a).

Cvičení 6.10. Negujte vlastnost AS relace ρna množině M, a to důkladněji než jen stylem „není pravda, že“. Postup:

a) Napište vlastnost AS symbolickým matematickým zápisem;

b) Negujte část (a).

Cvičení 6.11. Negujte vlastnost T relace ρna množině M, a to důkladněji než jen stylem „není pravda, že“. Postup:

a) Napište vlastnost T symbolickým matematickým zápisem;

[3] Pokud si studenti neví rady, doporučte nakreslení tří obrázků: jeden obrázek pro relaci ρ_1, druhý pro relaci ρ_2 a třetí pro relaci $\rho_1 \cup \rho_2$. Dále doporučte studentům tvrzení spíše vyvracet než dokazovat.

b) Negujte část (a).

Cvičení 6.12. Podmnožiny X, Y množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ jsou v relaci ρ, když $X \cup Y = A$. Zjistěte, které z vlastností R, AR, S, AS, T, U platí pro tuto relaci.

Cvičení 6.13. Na množině přirozených čísel je dána relace ρ_1 takto: $x\rho_1 y$, když $x \cdot y$ je liché číslo. Zjistěte, jaké vlastnosti (R, AR, S, AS, atd.) má tato relace.

Cvičení 6.14. Ve fotbalové lize hraje[4] v každém ročníku každý tým s každým jiným týmem dva zápasy, z toho jeden zápas se hraje na hřišti jednoho týmu a druhý na hřišti druhého týmu. Definujme relaci $a\rho_2 b$ tehdy, když tým A hraje proti týmu B na svém hřišti v daném roce. Určete vlastnosti relace na množině všech týmů ligy v daném ligovém ročníku.

Cvičení 6.15. Co se ještě nedělalo z příkladů B1 (tento příklad obsahuje inverzní relaci), B2, B6, B8, B9, B10, B11 na stranách 48-49 sbírky [17].

[4]Tento systém platil do roku 2018, Od té doby to v první fotbalové lize bude podle všeho fungovat jinak: kromě dvou zápasů každého s každým jsou v daném roce ještě další ligové zápasy s některými soupeři, jakási nadstavbová část. Tuto situaci v příkladu neuvažujte.