Domácí úkol 1

Upozornění: příklady byly náhodně vygenerovány odpovědníkem „Domácí úkol 1“. Nabízené řešení bylo zpracováno Lukášem Másilkem.

Příklad 1: Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 15 & 9 & 3 \\ -3 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

a permutace $p = (j_1, j_2, j_3, j_4) = (4, 2, 3, 1)$ konečné množiny $\{1, 2, 3, 4\}$.

1. Určete počet inverzí v permutaci p.
2. Jakou hodnotu by měl při výpočtu determinantu matice A součin $(-1)^{N(p)} \cdot a_{1,j_1} \cdot a_{2,j_2} \cdot a_{3,j_3} \cdot a_{4,j_4}$, pokud byste použili vzorec z definice determinantu?
3. Vypočítejte determinant matice A.

Řešení: Permutace p má celkem pět inverzí:
$(\mathbf{4}, \mathbf{2}, 3, 1)$, $(\mathbf{4}, 2, \mathbf{3}, 1)$, $(\mathbf{4}, 2, 3, \mathbf{1})$, $(4, \mathbf{2}, 3, \mathbf{1})$, $(4, 2, \mathbf{3}, \mathbf{1})$.

Dle této permutace vybíráme z matice A na 1. řádku 4. sloupec, na 2. řádku 2. sloupec, na 3. řádku 3. sloupec a na 4. řádku 1. sloupec:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 15 & 9 & \mathbf{3} \\ -3 & \mathbf{5} & 2 & 1 \\ 3 & 2 & \mathbf{4} & 5 \\ \mathbf{1} & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zadaný součin má tedy hodnotu:

$$(-1)^{N(p)} \cdot a_{1,j_1} \cdot a_{2,j_2} \cdot a_{3,j_3} \cdot a_{4,j_4} = (-1)^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 = -60$$

Katedra matematiky Pedagogické fakulty MU, podzim 2023

Financováno Evropskou unií NextGenerationEU

Národní plán obnovy

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Posledním úkolem je spočítat determinant matice A:

$$\begin{vmatrix} -3 & 15 & 9 & 3 \\ -3 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} :3 \\ +r_3 \\ \\ \\ \end{matrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{-1} & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 6 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +3r_1 \\ +r_1 \end{matrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 6 & 6 \\ 0 & 17 & 13 & 8 \\ 0 & 8 & 7 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -r_4 \\ -2r_4 \end{matrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{-1} & 5 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 8 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \cdot \{+[(-1) \cdot (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \cdot 8 + 3 \cdot 1 \cdot 7] - [8 \cdot (-1) \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \cdot (-1)]\}$$

$$= -3 \cdot \{+[3 - 16 + 21] - [-24 - 14 - 3]\} = -3 \cdot 49 = -147$$

Příklad 2: Je dán systém $S : A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 9, \\ 4x_1 & + & x_2 & & & = & 0, \\ -3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1, \end{array}$$

kde A je matice systému S, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ je vektor neznámých a $\vec{b}$ vektor pravých stran rovnic systému.

1. Ověřte platnost $|A| \neq 0$, čímž zjistíte, zda systém lze řešit Cramerovým pravidlem.
2. Následně vypočtěte determinanty matic A_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) vzniklých dosazením vektoru $\vec{b}$ místo i-tého sloupce matice A_i.
3. Na závěr stanovte řešení pomocí Cramerova pravidla.

Řešení: Determinant matice systému

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

spočítáme Sarusovým pravidlem, přičemž si pomůžeme tím, že první dva sloupce zopakujeme napravo:[1]

$$|A| = \left| \begin{array}{rrr|rr} -1 & 1 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & -3 & -1 \end{array} \right. =$$

$$= +[(-1) \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot (-3) + 4 \cdot 4 \cdot (-1)] - [(-3) \cdot 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 \cdot 1]$$

$$= +[-2 + 0 - 16] - [-12 + 0 + 8] = -14$$

[1] S „kladným“ znaménkem bude součin prvků na diagonálách, které mají příbuzný sklon s hlavní diagonálou (označeno červeně), se „záporným“ znaménkem naopak součin prvků na diagonálách, které mají příbuzný sklon s vedlejší diagonálou (označeno modře)

Podobně můžeme spočítat i determinanty matic A_1, A_2, A_3, které získáme z matice A nahrazením příslušného sloupce vektorem $\vec{b} = (\mathbf{9}; \mathbf{0}; \mathbf{1})^{\mathbf{T}}$ pravých stran systému S:

$$|A_1| = \left|\begin{array}{rrr|rr} \mathbf{9} & 1 & 4 & \mathbf{9} & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{1} & -1 & 2 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right. =$$

$$= +[9 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \cdot (-1)] - [1 \cdot 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 \cdot 9 + 2 \cdot 0 \cdot 1]$$

$$= +[18 + 0 + 0] - [4 + 0 + 0] = 14$$

$$|A_2| = \left|\begin{array}{rrr|rr} -1 & \mathbf{9} & 4 & -1 & \mathbf{9} \\ 4 & \mathbf{0} & 0 & 4 & \mathbf{0} \\ -3 & \mathbf{1} & 2 & -3 & \mathbf{1} \end{array}\right. =$$

$$= +[(-1) \cdot 0 \cdot 2 + 9 \cdot 0 \cdot (-3) + 4 \cdot 4 \cdot 1] - [(-3) \cdot 0 \cdot 4 + 1 \cdot 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 \cdot 9]$$

$$= +[0 + 0 + 16] - [0 + 0 + 72] = -56$$

$$|A_3| = \left|\begin{array}{rrr|rr} -1 & 1 & \mathbf{9} & -1 & 1 \\ 4 & 1 & \mathbf{0} & 4 & 1 \\ -3 & -1 & \mathbf{1} & -3 & -1 \end{array}\right. =$$

$$= +[(-1) \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot (-3) + 9 \cdot 4 \cdot (-1)] - [(-3) \cdot 1 \cdot 9 + (-1) \cdot 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 \cdot 1]$$

$$= +[-1 + 0 - 36] - [-27 + 0 + 4] = -14$$

Cramerovo pravidlo nyní dokončíme a spočítáme řešení:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{14}{-14} = -1 \\ x_2 &= \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-56}{-14} = 4 \\ x_3 &= \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-14}{-14} = 1 \end{aligned}$$

Závěrem: $K = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Příklad 3: Je dána matice

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & -2 \\ -2 & 5 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 11 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vypočítejte determinant matice X Laplaceovým rozvojem podle 4. řádku.

Řešení:

$$|X| = (-1)^{4+1}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & -1 \\ 5 & 11 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{4+2}\cdot(-2)\cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 11 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{4+3}\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix}$$

Spočítejme zvlášť determinanty 3. řádu:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & -1 \\ 5 & 11 & -2 \end{vmatrix} = +[-8-20-110]-[-20-22-40] = -138+82 = -56$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 11 & -2 \end{vmatrix} = +[-12-16+44]-[-16-33+16] = 16+33 = 49$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = +[-30-8+20]-[-40-15+8] = -18-(-47) = 29$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix} = +[165+16-40]-[80+30-44] = 141-66 = 75$$

Dosadíme výsledky determinantů do předchozího rozvoje pro $|X|$:

$$\begin{aligned} |X| &= (-1)^{4+1}\cdot 1\cdot(-56) + (-1)^{4+2}\cdot(-2)\cdot 49 + (-1)^{4+3}\cdot 2\cdot 29 + (-1)^{4+4}\cdot 1\cdot 75 \\ &= -(-56) - 2\cdot 49 - 2\cdot 29 + 75 \\ &= -25 \end{aligned}$$

Příklad 4: Je dána matice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Vypočítejte determinant matice M úpravou na schodový tvar.

Řešení:

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \downarrow_2 \\ \\ \uparrow_2 \\ :2 \end{matrix} = (-1)\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 3 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ +2r_1 \\ -3r_1 \\ -2r_1 \end{matrix} =$$

$$= (-2)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 4 \\ 0 & -14 & -14 & -7 \\ 0 & -7 & -8 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ +r_4 \\ :7 \\ \\ \end{matrix} = (-2)\cdot 7\cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & \mathbf{-1} & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -7 & -8 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2r_2 \\ -7r_2 \end{matrix} =$$

$$= (-14) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -22 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \downarrow_1 \\ \uparrow_1 \end{matrix} = (-14) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= 14 \cdot [1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-7)] = 14 \cdot (-7) = -98$$