Domácí úkol 2

Upozornění: příklady byly náhodně vygenerovány odpovědníkem „Domácí úkol 2“. Nabízené řešení bylo zpracováno Lukášem Másilkem.

Příklad 1: Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ je podprostor W zadán následující množinou generátorů.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1. Určete dimenzi podprostoru W.

2. Vaším dalším úkolem je nalézt bázi α_W podprostoru W. Předpokládejme, že $\vec{a} \in \alpha_M$. Vyberte další vektory, které patří do báze α_M:

   a) $\vec{b}$

   b) $\vec{c}$

   c) $\vec{d}$

   d) Žádný další vektor do báze α_W nepřidáme.

Řešení:
Vložíme všechny čtyři vektory do matice, například do řádků, a spočítáme hodnost matice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \downarrow_1 \\ \uparrow_1 \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -2r_1 \\ +r_1 \\ -r_1 \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -11 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ +r_3 \\ \\ +r_3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -3r_2 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \downarrow_1 \\ \uparrow_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 27 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ -27r_3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

Matice je ve schodovém tvaru a žádný ze čtyř řádků není nulový. Její hodnost je tedy 4, stejně tak $\dim W = 4$.

Katedra matematiky Pedagogické fakulty MU, podzim 2023

Báze α_W podprostoru W tedy bude kromě vektoru $\vec{a}$ obsahovat i vektory $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$.

$$\alpha_W = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$$

Množina čtyř zadaných generátorů je lineárně nezávislá, jak jsme ověřili výpočtem hodnosti matice z nich složených.

Příklad 2: Je dán následující systém lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
-x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & = & -4 \\
2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 7 \\
-3x_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & -3 \\
4x_1 & + & 10x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 1
\end{array}$$

Úkoly:

1. Kolik řešení má výše zadaný systém?

2. Má-li systém řešení, zapište jej.

Řešení:
Koeficienty a pravou stranu rovnic vložíme do rozšířené matice, kterou upravíme na schodový tvar:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} \color{red}{\mathbf{-1}} & 3 & 0 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 7 \\ -3 & -4 & -2 & 1 & -3 \\ 4 & 10 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +2r_1 \\ -3r_1 \\ +4r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 9 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -13 & -2 & -2 & 9 \\ 0 & 22 & 3 & 6 & -15 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 3r_2 + 2r_3 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{1}} & -1 & 8 & 15 \\ 0 & -13 & -2 & -2 & 9 \\ 0 & 22 & 3 & 6 & -15 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +13r_2 \\ -22r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 8 & 15 \\ 0 & 0 & -15 & 102 & 204 \\ 0 & 0 & 25 & -170 & -345 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ :3 \\ :5 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 8 & 15 \\ 0 & 0 & \color{red}{\mathbf{-5}} & 34 & 68 \\ 0 & 0 & 5 & -34 & -69 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ +r_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 8 & 15 \\ 0 & 0 & -5 & 34 & 68 \\ \color{red}{\mathbf{0}} & \color{red}{\mathbf{0}} & \color{red}{\mathbf{0}} & \color{red}{\mathbf{0}} & -1 \end{array}\right)$$

Z poslední matice, která již je ve schodovém tvaru, je patrné, že hodnost matice systému je 3, zatímco hodnost rozšířené matice systému 4. Platí tedy $h(A) = 3 < 4 = h(A|b)$, což znamená, že systém nemá řešení.

Příklad 3: Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou zadány dva podprostory $W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$, $W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$, přičemž:

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{u_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Určete dimenzi součtu podprostorů W_1, W_2:

2. Vaším dalším úkolem je nalézt bázi α_s podprostoru W_1+W_2. Předpokládejme, že $\vec{u_1}, \vec{v_1} \in \alpha_s$. Vyberte další vektor či vektory, které patří do báze α_s.

   a) $\vec{u_2}$

   b) $\vec{u_3}$

   c) $\vec{v_2}$

   d) $\vec{v_3}$

   e) Žádný další vektor do báze α_s nepřidáme.

   f) $\dim(W_1+W_2) = 1$, takže do báze α_s vybereme pouze jeden z vektorů $\vec{u_1}, \vec{v_1}$.

3. Určete dimenzi průniku podprostorů W_1, W_2.

4. Najděte vektory báze α_p podprostoru $W_1 \cap W_2$.

Řešení:
Nejprve si spočítáme dimenzi jednotlivých podprostorů (určíme hodnosti matic složených z vektorů obou podprostorů):

$$\dim W_1: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -3r_1 \\ +2r_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ +r_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dim W_2: \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \downarrow_1 \\ \uparrow_1 \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -r_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -r_2 \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \dim W_1 = \dim W_2 = 2$$

Pro spočítání $\dim (W_1 + W_2)$ použijeme pouze první dva vektory z obou podprostorů, které vložíme do matice a spočítáme její hodnost:

$$\dim (W_1 + W_2): \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -3r_1 \\ \\ -3r_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \downarrow_2 \\ \\ \uparrow_2 \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ +3r_2 \\ +5r_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ -2r_3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Součet W_1+W_2 má dimenzi 3. Do jeho báze α_S můžeme kromě vektorů $\vec{u_1}, \vec{v_1}$ vybrat kterýkoliv jiný vektor nabízený ve variantách a)–d), tedy např. $\vec{u_2}$:

$$\alpha_S = (\vec{u_1}, \vec{v_1}, \vec{u_2})$$

Dle vzorce pro součet a průnik podprostorů

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

je $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, průnikem W_1, W_2 je přímka procházející počátkem. Hledáme tedy její směrový vektor $\vec{x}$, který lze vyjádřit lineární kombinací vektorů generujících W_1 i W_2. To lze symbolicky zapsat takto:

$$\vec{x} = \alpha_1 \cdot \vec{u_1} + \alpha_2 \cdot \vec{u_2} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\vec{x} = \beta_1 \cdot \vec{v_1} + \beta_2 \cdot \vec{v_2} = \beta_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Z obou pravých stran předchozích rovnic můžeme vytvořit novou rovnici, v níž všechny výrazy převedeme na levou stranu:

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \beta_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \beta_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Získáváme homogenní systém. Znaménko $-$ u koeficientů β_1, β_2 roznásobíme do vektorů a sestavíme matici (bez nul napravo), kterou převedeme na schodový tvar:

$$\begin{pmatrix} \color{red}{\mathbf{1}} & 3 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -r_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \downarrow_1 \\ \uparrow_1 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{1}} & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +4r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Zpětným chodem zjišťujeme:

- Poslední řádek matice je rovnice $-\beta_1 + 3\beta_2 = 0$. Zvolíme $\beta_2 = t,\ t \in \mathbb{R}$. Následně $-\beta_1 + 3t = 0$, z čehož $\beta_1 = 3t$.

- Prostřední řádek znamená rovnici $\alpha_1 - \beta_1 + \beta_2 = 0$. Dosadíme vyjádření β_1, β_2 z předchozího řádku a máme $\alpha_2 = 2t$.

- Z prvního řádku $\alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\beta_2 = 0$ díky již dříve vypočteným hodnotám α_2, β_2 získáváme $\alpha_1 = -3t$.

Vypočtené koeficienty dosadíme do rovnic (1, 2) a měli bychom dostat stejný výsledek:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= -3t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \vec{x} &= 3t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bází průniku $W_1 \cap W_2$ je tedy

$$\alpha_P = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Příklad 4: Jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Pro které dvojice vybírané z matic A, B, C je možné provést násobení? Najděte všechny možnosti.
2. Je dána matice

   $$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

   Nalezněte matici $Y = A \cdot X$ a zapište počet všech jejích prvků, jejichž hodnota je větší nebo rovna nule.

Řešení:
Aby bylo možné uskutečnit součin matic $K \cdot L$, musí být počet sloupců matice K stejný jako počet řádků matice L. Dle tohoto kritéria je možné provést součiny $A \cdot B$, $C \cdot A$.

Ověřme, zda lze provést součin matic $A \cdot X$. Matice A je typu 3×2, matice X je typu 2×2. Součin tedy je možné uskutečnit:

$$\begin{aligned} Y = A \cdot X &= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 & -2 \cdot 0 - 1 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kolik prvků matice Y má hodnotu větší nebo rovnu nule? Celkem 4.