Domácí úkol 3

Upozornění: příklady byly náhodně vygenerovány odpovědníkem „Domácí úkol 3“. Nabízené řešení bylo zpracováno Petrou Buškovou a Lukášem Másilkem.

Příklad 1: Je dán sloupcový vektor $\vec{b} = (3, 2, 1)^T$ a matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Nalezněte inverzní matici A^{-1} k matici A.
2. S pomocí inverzní matice A^{-1} vyřešte systém $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, je-li $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$.

Řešení: Gauss-Jordanovou metodou určíme inverzní matici:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \downarrow_2 \\ \\ \uparrow_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} {\color{red}\mathbf{1}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2r_1 \\ -2r_1 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & {\color{red}\mathbf{-1}} & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} +r_2 \\ \\ -r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & {\color{red}\mathbf{-1}} & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} +2r_3 \\ +2r_3 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

V poslední rozšířené matici napravo už je inverzní matice A^{-1}, kterou nyní použijeme k řešení systému $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$. Vynásobíme obě strany této rovnice zleva inverzní maticí A^{-1} a upravíme na tvar $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Katedra matematiky Pedagogické fakulty MU, podzim 2023

Příklad 2: Lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je zadáno maticí A_S vzhledem ke standardní bázi:

$$A_S = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Nalezněte jádro lineárního zobrazení φ. Určete jeho dimenzi a bázi.
2. Nalezněte obor hodnot lineárního zobrazení φ. Určete jeho dimenzi a bázi.

Řešení:
1. hledáme vektory $\vec{x} = (x_1; x_2)^T$ tak, že $A_S \cdot \vec{x} = (0; 0)^T$, což vede k převodu matice A_S na schodový tvar:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow_2 \\ \\ \uparrow_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \color{red}{1} & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2r_1 \\ -2r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \color{red}{1} \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -3r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \color{green}{0} & \color{green}{0} \end{pmatrix}$$

Odstraníme nulový řádek a zpětným chodem zjistíme, že $x_2 = x_1 = 0$. Platí tedy: $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 0$ a jádro $\operatorname{Ker} \varphi = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ nemá bázi.

2. Dosazením do vzorce $\dim V = \dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi$, kde $V = \mathbb{R}^2$ je vstupní prostor, dostáváme:

$$\begin{aligned} 2 &= 0 + \dim \operatorname{Im} \varphi \\ 2 &= \dim \operatorname{Im} \varphi \end{aligned}$$

Zobrazíme-li vektory standardní báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ pomocí matice A_S, dostáváme:

$$\begin{aligned} \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Oba sloupce matice A_S tedy tvoří bázi oboru hodnot φ:

$$\operatorname{Im} \varphi = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Příklad 3: Lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ je zadáno svým jádrem a oborem hodnot.

$$\operatorname{Ker} \varphi = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \operatorname{Im} \varphi = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Nalezněte matici M_φ zobrazení φ částečně zadané níže.

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & u_1 & v_1 \\ -1 & u_2 & v_2 \\ 2 & u_3 & v_3 \\ 1 & u_4 & v_4 \end{pmatrix}$$

Řešení: Použijeme oba vektory jádra, které by se měly zobrazit na nulový vektor:

$$\varphi\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & u_1 & v_1 \\ -1 & u_2 & v_2 \\ 2 & u_3 & v_3 \\ 1 & u_4 & v_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\varphi\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & u_1 & v_1 \\ -1 & u_2 & v_2 \\ 2 & u_3 & v_3 \\ 1 & u_4 & v_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Ze systému (1) dostáváme rovnice:

$$\begin{aligned} -4 + u_1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad u_1 = 4 \\ 1 + u_2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad u_2 = -1 \\ -2 + u_3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad u_3 = 2 \\ -1 + u_4 = 0 \quad &\Rightarrow \quad u_4 = 1 \end{aligned}$$

Ze systému (2) dostáváme rovnice:

$$\begin{aligned} -8 + v_1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad v_1 = 8 \\ 2 + v_2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad v_2 = -2 \\ -4 + v_3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad v_3 = 4 \\ -2 + v_4 = 0 \quad &\Rightarrow \quad v_4 = 2 \end{aligned}$$

Výsledná matice lineárního zobrazení φ:

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Příklad 4: Jsou dány báze α, β vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.

$$\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right), \quad \beta = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

1. Nalezněte matici přechodu $P_{\alpha\to\beta}$ od báze α k bázi β.

2. S pomocí matice přechodu $P_{\alpha \to \beta}$ vyjádřete vektor $\vec{u_\beta} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ v souřadnicích báze α.

Řešení: Z vektorů obou bází vytvoříme rozšířenou matici $(\alpha|\beta)$ a matici vlevo převedeme na jednotkovou:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} \color{red}{\mathbf{1}} & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{-1}} & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} +r_2 \\ \\ -r_2 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \cdot(-1) \\ :(-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \color{red}{\mathbf{1}} & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -r_3 \\ +r_3 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad P_{\alpha \to \beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

S pomocí spočítané matice přechodu převedeme vektor $\vec{u_\beta}$ do souřadnic báze α:

$$\vec{u_\alpha} = P_{\alpha \to \beta} \cdot \vec{u_\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$