MA0005 Algebra 2, 1. seminář

5. 10. 2023

Náplň cvičení

1. Determinant matice
   - Inverze v permutaci
   - Výpočet determinantu matice řádu 2 a 3
   - Příklady na výpočet determinantu
2. Cramerovo pravidlo

Literatura

- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.
- Petáková, J.: *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Prometheus, 1998. ISBN 978-80-7196-099-7.
- Danešová, A.: *Soustavy lineárních rovnic a jejich řešení na různých stupních škol*. Brno, 2022. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta. Dostupné z: `https://is.muni.cz/th/l0113/`.

Determinant

Mějme čtvercovou matici M řádu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$.
Co je to determinant matice M?

Determinant

Mějme čtvercovou matici M řádu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$.
Co je to determinant matice M?

Determinant

Determinant čtvercové matice M řádu $n \times n$ je číslo, které je dáno vzorcem

$$|M| = \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_n)} (-1)^{N(j_1, j_2, \ldots, j_n)} \cdot a_{1,j_1} \cdot a_{2,j_2} \cdot \ldots \cdot a_{n,j_n}$$

kde $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ je libovolná permutace sloupcových indexů z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ a $N(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ je počet inverzí v dané permutaci.

Determinant

Mějme čtvercovou matici M řádu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$.
Co je to determinant matice M?

Determinant

Determinant čtvercové matice M řádu $n \times n$ je číslo, které je dáno vzorcem

$$|M| = \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_n)} (-1)^{N(j_1, j_2, \ldots, j_n)} \cdot a_{1,j_1} \cdot a_{2,j_2} \cdot \ldots \cdot a_{n,j_n}$$

kde $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ je libovolná permutace sloupcových indexů z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ a $N(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ je počet inverzí v dané permutaci.

Důležité otázky:
Co je to permutace konečné množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$?
Co je to inverze v dané permutaci?

Příklad: Mějme matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Inverze v permutaci

Příklad: Mějme matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Vezměme v každém řádku a každém sloupci matice M jeden prvek, např. $a_{13}, a_{24}, a_{32}, a_{41}$. Sloupcové indexy prvků se prohodily dle permutace $p = (3, 4, 2, 1)$.

Inverze v permutaci

Příklad: Mějme matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Vezměme v každém řádku a každém sloupci matice M jeden prvek, např. $a_{13}, a_{24}, a_{32}, a_{41}$. Sloupcové indexy prvků se prohodily dle permutace $p = (3, 4, 2, 1)$.

Inverze permutace

Inverze v permutaci p je dvojice prvků a, b taková, že $a < b$ a zároveň $p(a) > p(b)$.

Inverze v permutaci

Příklad: Mějme matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Vezměme v každém řádku a každém sloupci matice M jeden prvek, např. $a_{13}, a_{24}, a_{32}, a_{41}$. Sloupcové indexy prvků se prohodily dle permutace $p = (3, 4, 2, 1)$.

Inverze permutace

Inverze v permutaci p je dvojice prvků a, b taková, že $a < b$ a zároveň $p(a) > p(b)$.

Kolik inverzí najdete v permutaci $p = (3, 4, 2, 1)$?

Inverze v permutaci

Příklad: Mějme matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Vezměme v každém řádku a každém sloupci matice M jeden prvek, např. $a_{13}, a_{24}, a_{32}, a_{41}$. Sloupcové indexy prvků se prohodily dle permutace $p = (3, 4, 2, 1)$.

Inverze permutace

Inverze v permutaci p je dvojice prvků a, b taková, že $a < b$ a zároveň $p(a) > p(b)$.

Kolik inverzí najdete v permutaci $p = (3, 4, 2, 1)$?

Celkem 5, např. $p(1) = 3 > 2 = p(3)$.

Geometrický význam inverze

Příklad: Mějme matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Geometrický význam inverze

Příklad: Mějme matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Které prvky určují hlavní diagonálu? A které vedlejší diagonálu?

Geometrický význam inverze

Příklad: Mějme matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Které prvky určují hlavní diagonálu? A které vedlejší diagonálu?

Vezměme opět v každém řádku a každém sloupci matice M jeden prvek, znovu např. $a_{13}, a_{24}, a_{32}, a_{41}$. Propojte tyto prvky čarou, každý s každým.

Geometrický význam inverze

Příklad: Mějme matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Které prvky určují hlavní diagonálu? A které vedlejší diagonálu?

Vezměme opět v každém řádku a každém sloupci matice M jeden prvek, znovu např. $a_{13}, a_{24}, a_{32}, a_{41}$. Propojte tyto prvky čarou, každý s každým.

Otázka: Kolik hran má sklon "příbuzný" s vedlejší diagonálou?

Příklad 4.2.B5

Užitím pouze definice determinantu spočtěte:

(a)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Příklad 4.2.B5

Užitím pouze definice determinantu spočtěte:

(a)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Výsledky: (a) $a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{34} \cdot a_{43} - a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{41}$,

Příklad 4.2.B5

Užitím pouze definice determinantu spočtěte:

(a)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Výsledky: (a) $a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{34} \cdot a_{43} - a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{41}$, (b) 0.

Výpočet determinantu matice řádu 2 a 3

Křížové pravidlo: Determinant čtvercové matice (řádu 2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

je roven číslu $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$
(tj. součin prvků na hlavní diagonále − součin prvků na vedlejší diagonále).

Výpočet determinantu matice řádu 2 a 3

Křížové pravidlo: Determinant čtvercové matice (řádu 2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

je roven číslu $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$
(tj. součin prvků na hlavní diagonále − součin prvků na vedlejší diagonále).

Sarusovo pravidlo: slouží pro výpočet determinantu matice řádu 3.

Výpočet determinantu matice řádu 2 a 3

Křížové pravidlo: Determinant čtvercové matice (řádu 2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

je roven číslu $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$
(tj. součin prvků na hlavní diagonále − součin prvků na vedlejší diagonále).

Sarusovo pravidlo: slouží pro výpočet determinantu matice řádu 3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$=$$

Výpočet determinantu matice řádu 2 a 3

Křížové pravidlo: Determinant čtvercové matice (řádu 2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

je roven číslu $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$
(tj. součin prvků na hlavní diagonále − součin prvků na vedlejší diagonále).

Sarusovo pravidlo: slouží pro výpočet determinantu matice řádu 3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} +$$

Výpočet determinantu matice řádu 2 a 3

Křížové pravidlo: Determinant čtvercové matice (řádu 2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

je roven číslu $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$
(tj. součin prvků na hlavní diagonále − součin prvků na vedlejší diagonále).

Sarusovo pravidlo: slouží pro výpočet determinantu matice řádu 3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

Výpočet determinantu matice řádu 2 a 3

Křížové pravidlo: Determinant čtvercové matice (řádu 2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

je roven číslu $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$
(tj. součin prvků na hlavní diagonále − součin prvků na vedlejší diagonále).

Sarusovo pravidlo: slouží pro výpočet determinantu matice řádu 3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \color{red}{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \color{red}{a_{23}} \\ \color{red}{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + \color{red}{a_{12}a_{23}a_{31}}$$

Výpočet determinantu matice řádu 2 a 3

Křížové pravidlo: Determinant čtvercové matice (řádu 2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

je roven číslu $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$
(tj. součin prvků na hlavní diagonále − součin prvků na vedlejší diagonále).

Sarusovo pravidlo: slouží pro výpočet determinantu matice řádu 3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & {\color{blue}a_{13}} \\ a_{21} & {\color{blue}a_{22}} & a_{23} \\ {\color{blue}a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - {\color{blue}a_{13}a_{22}a_{31}}$$

Výpočet determinantu matice řádu 2 a 3

Křížové pravidlo: Determinant čtvercové matice (řádu 2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

je roven číslu $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$
(tj. součin prvků na hlavní diagonále − součin prvků na vedlejší diagonále).

Sarusovo pravidlo: slouží pro výpočet determinantu matice řádu 3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Křížové pravidlo: Determinant čtvercové matice (řádu 2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

je roven číslu $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$
(tj. součin prvků na hlavní diagonále − součin prvků na vedlejší diagonále).

Sarusovo pravidlo: slouží pro výpočet determinantu matice řádu 3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Příklad 4.2.B7

Spočtěte determinant

(a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 6 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & -8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$

Příklad 4.2.B7

Spočtěte determinant

(a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 6 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & -8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$

Výsledky: (a) 106, (b) -46, (c) -100

Cramerovo pravidlo pro soustavy 2 rovnic o 2 neznámých

Mějme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$

Cramerovo pravidlo pro soustavy 2 rovnic o 2 neznámých

Řešení této soustavy lze vypočítat takto:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|},$$

kde následující determinanty spočítáme křížovým pravidlem:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad |A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Poznámka: Matici A koeficientů proměnných nazýváme **maticí systému**.

Cramerovo pravidlo pro soustavy 3 rovnic o 3 neznámých

Mějme soustavu tří rovnic o třech neznámých:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$
$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$

Cramerovo pravidlo pro soustavy 3 rovnic o 3 neznámých

Řešení této soustavy lze vypočítat takto:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}$$

kde následující determinanty spočítáme Sarusovým pravidlem:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \; |A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Cramerovo pravidlo pro soustavy 2 rovnic o 2 neznámých

Pomocí Cramerova pravidla řešte následující soustavy rovnic ([Petáková, 2.16.30]:

(a) $$\begin{aligned} 7x - 3y &= 15 \\ 5x + 6y &= 27 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} 3x + 2y &= 20 \\ 2x + 3y &= 20 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} 3(x-2) + 2y &= x + y \\ 4x + 5(y+x) &= 3x - 6 \end{aligned}$$

Cramerovo pravidlo pro soustavy 2 rovnic o 2 neznámých

Pomocí Cramerova pravidla řešte následující soustavy rovnic ([Petáková, 2.16.30]:

(a) $7x - 3y = 15$
$5x + 6y = 27$

(b) $3x + 2y = 20$
$2x + 3y = 20$

(c) $3(x-2) + 2y = x + y$
$4x + 5(y + x) = 3x - 6$

Výsledky: (a) $[3; 2]$, (b) $[4; 4]$, (c) $[9; -12]$,

Cramerovo pravidlo pro soustavy 3 rovnic o 3 neznámých

Pomocí Cramerova pravidla řešte následující soustavy rovnic ([Petáková, 2.16.31]:

(a) $$\begin{aligned} x + y + 2z &= -1 \\ 2x - y + 2z &= -4 \\ 4x + y + 4z &= -2 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 15 \\ 7x - y + z &= 9 \\ x + 2y + z &= 9 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ 4x + 2y + z &= 0 \\ x - y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

Cramerovo pravidlo pro soustavy 3 rovnic o 3 neznámých

Pomocí Cramerova pravidla řešte následující soustavy rovnic ([Petáková, 2.16.31]:

(a) $$\begin{aligned} x + y + 2z &= -1 \\ 2x - y + 2z &= -4 \\ 4x + y + 4z &= -2 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 15 \\ 7x - y + z &= 9 \\ x + 2y + z &= 9 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ 4x + 2y + z &= 0 \\ x - y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

Výsledky: (a) $[1; 2; -2]$, (b) $[2; 4; -1]$, (c) $[0; 0; 0]$.

Poznámka: Cramerovo pravidlo lze použít i v případě, že

1. je determinant matice systému roven 0 a zároveň
2. má systém nekonečně mnoho řešení.

Cramerovo pravidlo a jeho další použití

Poznámka: Cramerovo pravidlo lze použít i v případě, že

1. je determinant matice systému roven 0 a zároveň
2. má systém nekonečně mnoho řešení.

Příklad 6.3 (Danešová, str. 64–65): Determinant matice systému

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 4 \\ 2x + 3y - z &= 3 \\ 4x - y + z &= 11 \end{aligned}$$

je roven 0.

Cramerovo pravidlo a jeho další použití

Poznámka: Cramerovo pravidlo lze použít i v případě, že

1. je determinant matice systému roven 0 a zároveň
2. má systém nekonečně mnoho řešení.

Příklad 6.3 (Danešová, str. 64–65): Determinant matice systému

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 4 \\ 2x + 3y - z &= 3 \\ 4x - y + z &= 11 \end{aligned}$$

je roven 0. Zároveň platí, že $2 \cdot r_1 + r_2 = r_3$ (r_1, r_2, r_3 označují řádky systému), což znamená závislost 3. řádku na prvních dvou a nekonečný počet řešení systému.

Cramerovo pravidlo a jeho další použití (2)

Ze systému

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 4 \\ 2x + 3y - z &= 3 \\ 4x - y + z &= 11 \end{aligned}$$

vybereme libovolnou submatici řádu 2, jejíž determinant není roven 0, např. submatici A_{33} k prvku a_{33}:

$$A_{33} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Cramerovo pravidlo a jeho další použití (2)

Ze systému

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 4 \\ 2x + 3y - z &= 3 \\ 4x - y + z &= 11 \end{aligned}$$

vybereme libovolnou submatici řádu 2, jejíž determinant není roven 0, např. submatici A_{33} k prvku a_{33}:

$$A_{33} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Oba řádky rovnic příslušných submatici A_{33} upravíme tak, že na pravou stranu přesuneme členy s 3. proměnnou:

$$\begin{aligned} x - 2y &= 4 - z \\ 2x + 3y &= 3 + z \end{aligned}$$

Cramerovo pravidlo a jeho další použití (3)

Na vzniklý systém

$$\begin{aligned} x - 2y &= 4 - z \\ 2x + 3y &= 3 + z \end{aligned}$$

použijeme Cramerovo pravidlo, přičemž 3. proměnná je parametr, na němž nekonečně mnoho řešení závisí.

Cramerovo pravidlo a jeho další použití (3)

Na vzniklý systém

$$\begin{aligned} x - 2y &= 4 - z \\ 2x + 3y &= 3 + z \end{aligned}$$

použijeme Cramerovo pravidlo, přičemž 3. proměnná je parametr, na němž nekonečně mnoho řešení závisí.

$$|A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - (-4) = 7,$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 - z & -2 \\ 3 + z & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (4 - z) - (-2) \cdot (3 + z) = 18 + 5z \;\Rightarrow\; x = \tfrac{18}{7} + \tfrac{5}{7} z$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 4 - z \\ 2 & 3 + z \end{vmatrix} = 3 + z - 2 \cdot (4 - z) = -5 + 3z \;\Rightarrow\; y = -\tfrac{5}{7} + \tfrac{3}{7} z$$

Cramerovo pravidlo a jeho další použití (3)

Na vzniklý systém

$$\begin{aligned} x - 2y &= 4 - z \\ 2x + 3y &= 3 + z \end{aligned}$$

použijeme Cramerovo pravidlo, přičemž 3. proměnná je parametr, na němž nekonečně mnoho řešení závisí.

$$|A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - (-4) = 7,$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 - z & -2 \\ 3 + z & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (4 - z) - (-2) \cdot (3 + z) = 18 + 5z \ \Rightarrow \ x = \tfrac{18}{7} + \tfrac{5}{7} z$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 4 - z \\ 2 & 3 + z \end{vmatrix} = 3 + z - 2 \cdot (4 - z) = -5 + 3z \ \Rightarrow \ y = -\tfrac{5}{7} + \tfrac{3}{7} z$$

$$K = \left\{ \left[\tfrac{18}{7} + \tfrac{5}{7} z, -\tfrac{5}{7} + \tfrac{3}{7} z, z \right], z \in \mathbb{R} \right\}$$

Cramerovo pravidlo pro soustavy 3 rovnic o 3 neznámých

Pomocí Cramerova pravidla řešte následující soustavy rovnic ([Petáková, 2.16.31]:

(d) $$\begin{aligned} 2x - y &= 6 \\ y + 4z &= 8 \\ x - z &= 1 \end{aligned}$$

(e) $$\begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ x + y + 2z &= 4 \\ 4x + 3y + 3z &= 8 \end{aligned}$$

(f) $$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 3 \\ x + y + z &= 2 \\ 4x + 3y + 2z &= 8 \end{aligned}$$

Cramerovo pravidlo pro soustavy 3 rovnic o 3 neznámých

Pomocí Cramerova pravidla řešte následující soustavy rovnic ([Petáková, 2.16.31]:

(d) $2x - y = 6$
$y + 4z = 8$
$x - z = 1$

(e) $2x + y - z = 0$
$x + y + 2z = 4$
$4x + 3y + 3z = 8$

(f) $3x + 2y + z = 3$
$x + y + z = 2$
$4x + 3y + 2z = 8$

Výsledky: (d) $[3; 0; 2]$,
(e) nekonečně mnoho řešení, např. $\{[4 + 3z, 8 - 5z, z], z \in \mathbb{R}\}$,
(f) nemá řešení.