

MA0005 Algebra 2, 5. seminář

2. 11. 2023

Literatura

- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.
- Kovár, M.: *Maticový a tenzorový počet*. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav matematiky.

Mějme následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n\end{aligned}$$

kde $n \in \mathbb{N}$.

Mějme následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n\end{aligned}$$

kde $n \in \mathbb{N}$.

Soustavu lze zapsat maticově:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

System

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Ize zapsat symbolicky takto: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, kde A je čtvercová matice řádu n .

Systém

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Ize zapsat symbolicky takto: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, kde A je čtvercová matice řádu n .

Existence inverzní matice A^{-1} vzhledem k násobení by zajistila přímý výpočet řešení systému:

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{x} &= \vec{b} \\ A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} &= A^{-1} \cdot \vec{b} \\ \vec{x} &= A^{-1} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

Sčítání matic

Pro matice A, B stejného typu $m \times n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) definujeme jejich součet $A + B$ jako matici, která vznikne sčítáním po složkách:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sčítání matic

Pro matice A, B stejného typu $m \times n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) definujeme jejich součet $A + B$ jako matici, která vznikne sčítáním po složkách:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Poznámka: $(M_{m \times n}, +)$ je komutativní grupa.

Příklad násobení matic

Jsou dány matice A, B . Jejich součinem je matice

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ -8 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

Příklad násobení matic

Jsou dány matice A, B . Jejich součinem je matice

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ -8 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Příklad násobení matic

Jsou dány matice A, B . Jejich součinem je matice

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ -8 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ & \end{pmatrix}$$

Příklad násobení matic

Jsou dány matice A, B . Jejich součinem je matice

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ -8 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 + 7 \cdot 2 & \end{pmatrix}$$

Příklad násobení matic

Jsou dány matice A, B . Jejich součinem je matice

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ -8 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 + 7 \cdot 2 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 7 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

Příklad násobení matic

Jsou dány matice A, B . Jejich součinem je matice

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ -8 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 + 7 \cdot 2 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 7 \cdot 3 \\ -8 \cdot 3 + 0 \cdot (-4) + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \end{pmatrix}$$

Příklad násobení matic

Jsou dány matice A, B . Jejich součinem je matice

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ -8 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 + 7 \cdot 2 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 7 \cdot 3 \\ -8 \cdot 3 + 0 \cdot (-4) + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 2 & -8 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

Příklad násobení matic

Jsou dány matice A, B . Jejich součinem je matice

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ -8 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 + 7 \cdot 2 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 7 \cdot 3 \\ -8 \cdot 3 + 0 \cdot (-4) + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 2 & -8 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 9 & 22 \\ -14 & -1 \end{pmatrix}$$

Násobení matic – pracovní list

Jsou dány matice A, B, C :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Pro každou dvojici výše uvedených matic proveďte součin v obou směrech. Diskutujte situace, kdy to nelze.
2. Za jakých podmínek je možné součin dvou matic provést? Kdy to lze provést oběma směry?
3. Je-li možné provést součin matic $C = X \cdot Y$, stanovte výraz, kterému se obecně rovná prvek c_{ij} výsledné matice C . Jaký je typ výsledné matice C ?
4. Je násobení matic asociativní? Je komutativní? Zdůvodněte svou odpověď vlastními slovy či protipříkladem.

Násobení matic

Jsou dány matice A typu $m \times k$ a matice B typu $k \times n$. Součin matic $C = A \cdot B$ definujeme jako matici typu $m \times n$, jehož prvky získáme dle vzorce

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{ik} \cdot b_{kj} = \sum_{l=1}^k a_{il} \cdot b_{lj}$$

Poznámka: Násobení matic je asociativní, nicméně není komutativní.

Regulární vs. singulární matice

Čtvercovou matici A řádu $n \times n$ (kde $n \in \mathbb{N}$) nazveme

- **regulární**, právě když $h(A) = n$;
- **singulární**, právě když $h(A) < n$.

Regulární vs. singulární matice

Čtvercovou matici A řádu $n \times n$ (kde $n \in \mathbb{N}$) nazveme

- **regulární**, právě když $h(A) = n$;
- **singulární**, právě když $h(A) < n$.

Poznámka: Množina čtvercových matic $(M_{n,n}, +, \cdot)$ je nekomutativní okruh obsahující netriviální dělitele nuly.

- Vynásobením čtvercových matic dostaneme opět čtvercovou matici.
- Násobení matic je asociativní, ne však komutativní.
- Neutrálním prvkem je jednotková matice E .
- Pouze k regulární matici A existuje inverzní matice A^{-1} tak, že $A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A$.
- Dokážeme najít dvě netriviální čtvercové matice, jejichž vynásobením vznikne nulová matice.

Gauss-Jordanova metoda pro výpočet inverzní matice

Mějme regulární čtvercovou matici A .

- 1 Zapišme si matice $(A|E)$, kde E je jednotková matice.
- 2 Elementárními řádkovými úpravami se snažíme z matice A nalevo “vyrobit” jednotkovou matici.
 - Nejprve matici nalevo převádíme na schodový tvar.
 - Následně nulujeme prvky nad hlavní diagonálou.
 - Na závěr případně násobíme jednotlivé řádky tak, aby se nalevo objevila jednotková matice.
- 3 Matice napravo je po všech výše uvedených úpravách maticí inverzní k původní matici A .

Inverzní matice – příklady

K následujícím maticím nalezněte inverzní matice.

$$1 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 13 & 10 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2 \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$3 \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Inverzní matice – příklady

K následujícím maticím nalezněte inverzní matice.

$$1 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 13 & 10 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2 \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$3 \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Výsledky:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

Inverzní matice – příklady

K následujícím maticím nalezněte inverzní matice.

$$1 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 13 & 10 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2 \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$3 \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Výsledky:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 18 & -10 & 2 \\ -24 & 15 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

Inverzní matice – příklady

K následujícím maticím nalezněte inverzní matice.

$$1 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 13 & 10 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2 \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$3 \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Výsledky:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 18 & -10 & 2 \\ -24 & 15 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

C^{-1} neexistuje.

Gauss-Jordanovou metodou jste našli matici A^{-1} k matici A :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & 10 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

1. Najděte matice U_i , kterými reprezentujete každou Vámi provedenou úpravu u_1, \dots, u_n ($n \in \mathbb{N}$). Například úprava $u_1: r_2 := r_2 - 13 \cdot r_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 13 & 10 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -5 \\ 6 & 5 & 4 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -13 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 13 & 10 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -5 \\ 6 & 5 & 4 \end{array} \right)$$

2. Nechť symbol U_i odpovídá Vámi nalezené matici k úpravě u_i . Pak $U_n \cdot \dots \cdot U_1 \cdot A = E$. Proč funguje Gauss-Jordanova metoda?

SLR pomocí inverzní matice

Pomocí inverzní matice řešte následující systémy lineárních rovnic:

(a)

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\x - y - 2z &= 3 \\2x + y + z &= 2\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= -1 \\x - 2y + z &= -5 \\3x + y + z &= 3\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}x + y + z &= 0 \\x - y &= 3 \\y + z &= 1\end{aligned}$$

SLR pomocí inverzní matice

Pomocí inverzní matice řešte následující systémy lineárních rovnic:

(a)

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\x - y - 2z &= 3 \\2x + y + z &= 2\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= -1 \\x - 2y + z &= -5 \\3x + y + z &= 3\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}x + y + z &= 0 \\x - y &= 3 \\y + z &= 1\end{aligned}$$

Výsledky: a) $(x, y, z) = (1, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$,

SLR pomocí inverzní matice

Pomocí inverzní matice řešte následující systémy lineárních rovnic:

(a)

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\x - y - 2z &= 3 \\2x + y + z &= 2\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= -1 \\x - 2y + z &= -5 \\3x + y + z &= 3\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}x + y + z &= 0 \\x - y &= 3 \\y + z &= 1\end{aligned}$$

Výsledky: a) $(x, y, z) = (1, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$, b) $(x, y, z) = (1, 2, -2)$,

SLR pomocí inverzní matice

Pomocí inverzní matice řešte následující systémy lineárních rovnic:

(a)

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\x - y - 2z &= 3 \\2x + y + z &= 2\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= -1 \\x - 2y + z &= -5 \\3x + y + z &= 3\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}x + y + z &= 0 \\x - y &= 3 \\y + z &= 1\end{aligned}$$

Výsledky: a) $(x, y, z) = (1, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$, b) $(x, y, z) = (1, 2, -2)$,
c) $(x, y, z) = (-1, 4, -3)$.