MA0005 Algebra 2, 6. seminář

9. 11. 2023

Náplň cvičení

1. Další způsoby řešení SLR
   - Gauss-Jordanova metoda řešení SLR
   - Princip superpozice

Literatura

- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.
- Kovár, M.: *Maticový a tenzorový počet*. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav matematiky.

Gauss-Jordanova metoda řešení SLR

SLR $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ (matice A je čtvercová) lze zapsat takto:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Gauss-Jordanova metoda řešení SLR

SLR $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ (matice A je čtvercová) lze zapsat takto:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Je-li matice A regulární, je možné systém $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ vyřešit tzv. **Gauss-Jordanovou metodou** založenou na aplikaci elementárních řádkových úprav a dosažení níže uvedeného tvaru:

$$(A|\vec{b}) \sim \dots \sim (E|\vec{y}),$$

přičemž E je jednotková matice a $\vec{y}$ je vektor s řešením systému $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

Gauss-Jordanova metoda řešení SLR

Pomocí Gauss-Jordanovy metody řešte následující systémy lineárních rovnic:

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 9 \\ 2x & - & y & + & z & = & 8 \\ 3x & & & - & z & = & 3 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & - & z & = & 3 \\ -x & & & - & 2z & = & 2 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ -3x & - & 6y & - & 6z & = & 0 \\ -3x & - & 4y & - & 5z & = & -2 \end{array}$$

Gauss-Jordanova metoda řešení SLR

Pomocí Gauss-Jordanovy metody řešte následující systémy lineárních rovnic:

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 9 \\ 2x & - & y & + & z & = & 8 \\ 3x & & & - & z & = & 3 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & - & z & = & 3 \\ -x & & & - & 2z & = & 2 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ -3x & - & 6y & - & 6z & = & 0 \\ -3x & - & 4y & - & 5z & = & -2 \end{array}$$

Výsledky: a) $(x, y, z)^T = (2, -1, 3)^T$,

Gauss-Jordanova metoda řešení SLR

Pomocí Gauss-Jordanovy metody řešte následující systémy lineárních rovnic:

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 9 \\ 2x & - & y & + & z & = & 8 \\ 3x & & & - & z & = & 3 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & - & z & = & 3 \\ -x & & & - & 2z & = & 2 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ -3x & - & 6y & - & 6z & = & 0 \\ -3x & - & 4y & - & 5z & = & -2 \end{array}$$

Výsledky: a) $(x, y, z)^T = (2, -1, 3)^T$, b) $(x, y, z)^T = (0, 2, -1)^T$,

Gauss-Jordanova metoda řešení SLR

Pomocí Gauss-Jordanovy metody řešte následující systémy lineárních rovnic:

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 9 \\ 2x & - & y & + & z & = & 8 \\ 3x & & & - & z & = & 3 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & - & z & = & 3 \\ -x & & & - & 2z & = & 2 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ -3x & - & 6y & - & 6z & = & 0 \\ -3x & - & 4y & - & 5z & = & -2 \end{array}$$

Výsledky: a) $(x, y, z)^T = (2, -1, 3)^T$, b) $(x, y, z)^T = (0, 2, -1)^T$, c) $(x, y, z)^T = (-2, -3, 4)^T$.

Homogenní vs. nehomogenní SLR

Motivační příklad: Pomocí Gaussovy eliminační metody vyřešte oba systémy a porovnejte výsledky.

1. Nehomogenní systém:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & & & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 3 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & 2 \end{array}$$

2. Homogenní systém:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & & & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \end{array}$$

Homogenní vs. nehomogenní SLR

Motivační příklad: Pomocí Gaussovy eliminační metody vyřešte oba systémy a porovnejte výsledky.

1. Nehomogenní systém:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & & & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 3 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & 2 \end{array}$$

2. Homogenní systém:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & & & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \end{array}$$

1. $K = \{[\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0]^T + t \cdot (1, -1, 0, 1)^T, t \in \mathbb{R}\}$,
2. $K = \{[0, 0, 0, 0]^T + t \cdot (1, -1, 0, 1)^T, t \in \mathbb{R}\}$

Princip superpozice

Definice 18

- **Obecné řešení SLR** = řešení, ve kterém se vyskytují parametry.
- **Partikulární řešení SLR** = řešení, které dostaneme konkrétní volbou parametrů.
- **Fundamentální systém řešení** homogenního SLR = taková množina řešení, která tvoří bázi vektorového podprostoru řešení SLR.

Princip superpozice

Definice 18

- **Obecné řešení SLR** = řešení, ve kterém se vyskytují parametry.
- **Partikulární řešení SLR** = řešení, které dostaneme konkrétní volbou parametrů.
- **Fundamentální systém řešení** homogenního SLR = taková množina řešení, která tvoří bázi vektorového podprostoru řešení SLR.

Z předchozího příkladu: $K = \{[\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0]^T + t \cdot (1, -1, 0, 1)^T, t \in \mathbb{R}\}$ je obecné řešení nehomogenního SLR. Volbou $t = 1$ dostáváme partikulární řešení $[\frac{10}{3}, -\frac{4}{3}, 1, 1]^T$. Obecné řešení homogenního SLR (tj. $t \cdot (1, -1, 0, 1)^T, t \in \mathbb{R}$) je zároveň fundamentálním systémem řešení.

Princip superpozice

Definice 18

- **Obecné řešení SLR** = řešení, ve kterém se vyskytují parametry.
- **Partikulární řešení SLR** = řešení, které dostaneme konkrétní volbou parametrů.
- **Fundamentální systém řešení** homogenního SLR = taková množina řešení, která tvoří bázi vektorového podprostoru řešení SLR.

Z předchozího příkladu: $K = \{[\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0]^T + t \cdot (1, -1, 0, 1)^T, t \in \mathbb{R}\}$ je obecné řešení nehomogenního SLR. Volbou $t = 1$ dostáváme partikulární řešení $[\frac{10}{3}, -\frac{4}{3}, 1, 1]^T$. Obecné řešení homogenního SLR (tj. $t \cdot (1, -1, 0, 1)^T, t \in \mathbb{R}$) je zároveň fundamentálním systémem řešení.

Princip superpozice

Obecné řešení nehomogenního SLR = obecné řešení homogenního SLR + partikulární řešení nehomogenního SLR.

Princip superpozice

Poznámka

- Partikulární řešení hledáme tak, že např. uhodneme neznámé, nebo některé neznámé zvolíme jako nulové a ostatní dopočítáme.
- Princip superpozice je užitečnou metodou v případě, kdy má nehomogenní SLR nekonečně mnoho řešení.

Princip superpozice

Poznámka

- Partikulární řešení hledáme tak, že např. uhodneme neznámé, nebo některé neznámé zvolíme jako nulové a ostatní dopočítáme.
- Princip superpozice je užitečnou metodou v případě, kdy má nehomogenní SLR nekonečně mnoho řešení.

Příklad: Pomocí principu superpozice vyřešte zadaný systém lineárních rovnic.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 5x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & - & 9x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & -11 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 7x_4 & = & -5 \end{array}$$

Poznámka

- Partikulární řešení hledáme tak, že např. uhodneme neznámé, nebo některé neznámé zvolíme jako nulové a ostatní dopočítáme.
- Princip superpozice je užitečnou metodou v případě, kdy má nehomogenní SLR nekonečně mnoho řešení.

Příklad: Pomocí principu superpozice vyřešte zadaný systém lineárních rovnic.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 5x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & - & 9x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & -11 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 7x_4 & = & -5 \end{array}$$

Výsledek: obecné řešení homogenního SLR (po volbě $x_4 = t$) je $t \cdot (-2, 3, 2, 1)^T, t \in \mathbb{R}$. Volbou $x_4 = 0$ dostaneme toto obecné řešení zadaného systému: $K = \{[-5, 2, 3, 0]^T + t \cdot (-2, 3, 2, 1)^T, t \in \mathbb{R}\}$.

Princip superpozice

Příklad: Pomocí principu superpozice vyřešte zadaný systém lineárních rovnic.

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 5 \\
x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & = & 11 \\
x_1 & & & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -7
\end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\
2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 3 \\
9x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & 1 \\
2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 5 \\
7x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & - & x_4 & = & 7
\end{array}$$

Výsledky příkladů

(a) obecné řešení homogenního SLR (po volbě $x_3 = t, x_4 = s$) je

$$\{t \cdot (0, -2, 1, 0)^T + s \cdot (3, -3, 0, 1)^T, t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Volbou $x_3 = x_4 = 0$ dostaneme toto obecné řešení zadaného systému:

$$K = \{[-7, 6, 0, 0]^T + t \cdot (0, -2, 1, 0)^T + s \cdot (3, -3, 0, 1)^T, t, s \in \mathbb{R}\}.$$

(b) obecné řešení homogenního SLR (po volbě $x_4 = t$) je

$$\{t \cdot (-20, 1, 6, 7)^T, t \in \mathbb{R}\}.$$

Volbou $x_1 = 0$ dostaneme toto obecné řešení zadaného systému:

$$K = \{[0, -\frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}]^T + t \cdot (-20, 1, 6, 7)^T, t \in \mathbb{R}\}.$$