MA0005 Algebra 2, 7. seminář

16. 11. 2023

Náplň cvičení

1. Lineární zobrazení mezi vektorovými prostory
   - Reprezentace lineárního zobrazení
   - Lineární zobrazení přímky a roviny
   - Jádro a obor hodnot lineárního zobrazení

- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.
- Isibalo.com: *Matematika – Lineární algebra*. Dostupné z: `https://isibalo.com/matematika/linearni-algebra`.
- Čadek, M.: Sbírka úloh z lineární algebry. 2002. Dostupné z: `http://www.math.muni.cz/~cadek/LA/sbirka.pdf`.
- Sobotíková, V. Řešené úlohy z Úvodu do algebry. Dostupné z: `http://www.vrstevnice.com/akce/grandaction/vskola/1semestr/lingebra/resPriklady.pdf`.

Lineární zobrazení mezi vektorovými prostory

Jsou dány dva vektorové prostory $(V, +, \cdot)$ dimenze $n \in \mathbb{N}$ a $(V', +, \cdot)$ dimenze $m \in \mathbb{N}$ nad číselným tělesem $(T, +, \cdot)$. Lineárním zobrazením mezi prostory V, V' rozumíme zobrazení $\varphi : V \to V'$ splňující tyto dvě podmínky:

1. $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$,
2. $\varphi(\alpha \cdot \vec{u}) = \alpha \cdot \varphi(\vec{u})$

pro $\vec{u}, \vec{v} \in V, \alpha \in T$.

Lineární zobrazení mezi vektorovými prostory

Jsou dány dva vektorové prostory $(V, +, \cdot)$ dimenze $n \in \mathbb{N}$ a $(V', +, \cdot)$ dimenze $m \in \mathbb{N}$ nad číselným tělesem $(T, +, \cdot)$. Lineárním zobrazením mezi prostory V, V' rozumíme zobrazení $\varphi : V \to V'$ splňující tyto dvě podmínky:

1. $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$,
2. $\varphi(\alpha \cdot \vec{u}) = \alpha \cdot \varphi(\vec{u})$

pro $\vec{u}, \vec{v} \in V, \alpha \in T$.

Poznámka: Lineární zobrazení lze zadat třemi způsoby:

- pomocí předpisu mezi souřadnicemi vektoru $\vec{u} \in V$ a $\varphi(\vec{u}) \in V'$,
- pomocí matice A typu $m \times n$, tj. $\varphi(\vec{u}) = A \cdot \vec{u}$,
- pomocí obrazů $\varphi(\vec{e_1}), \varphi(\vec{e_2}), \dots, \varphi(\vec{e_n})$ bázových vektorů prostoru V.

Příklad 1

Lineární zobrazení $\varphi : V \to V'$ je zadáno předpisem pro vektor $\vec{x} \in V$.

- Najděte matici A zobrazení φ a obrazy standardní báze prostoru V.
- Najděte $\varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v})$.

1. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \varphi(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_2, x_2 - x_1), \vec{u} = (2, 3)^T, \vec{v} = (-2, 1)^T$.
2. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1, x_1)$, $\vec{u} = (4, -1, 0)^T, \vec{v} = (-3, 0, 5)^T$.
3. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3)$, $\vec{u} = (0, 2, -3)^T, \vec{v} = (-1, 1, 2)^T$.

Výsledky příkladu 1

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$\varphi(1,0) = (2,0,-1)^T, \varphi(0,1) = (1,1,1)^T,$
$\varphi(2,3) = (7,3,1)^T, \varphi(-2,1) = (-3,1,3)^T.$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$\varphi(1,0,0) = (1,0,1,1)^T, \varphi(0,1,0) = (1,1,0,0)^T, \varphi(0,0,1) = (0,1,1,0)^T,$
$\varphi(4,-1,0) = (3,-1,4,4)^T, \varphi(-3,0,5) = (-3,5,2,-3)^T.$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$\varphi(1,0,0) = (1,0)^T, \varphi(0,1,0) = (1,1)^T, \varphi(0,0,1) = (0,1)^T,$
$\varphi(0,2,-3) = (2,-1)^T, \varphi(-1,1,2) = (0,3)^T.$

Reprezentace lineárního zobrazení

Příklad 2

Lineární zobrazení $\varphi : V \to V'$ je zadáno obrazy bázových vektorů V.

- Najděte matici A zobrazení φ.
- Najděte $\varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v})$.

1. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,
   $\varphi(1,0,2) = (1,3)^T, \varphi(-3,4,-2) = (2,-1)^T, \varphi(0,2,1) = (-3,5)^T$,
   $\vec{u} = (1,4,2)^T, \vec{v} = (-1,0,4)^T$.
2. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,
   $\varphi(1,2,-3) = (-2,1)^T, \varphi(2,1,-2) = (1,1)^T, \varphi(1,-4,5) = (8,-1)^T$,
   $\vec{u} = (3,6,-1)^T, \vec{v} = (0,3,2)^T$.
3. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,
   $\varphi(1,0,1) = (1,0,1,0)^T, \varphi(1,1,0) = (0,0,0,0)^T$,
   $\varphi(0,1,1) = (0,1,0,1)^T$,
   $\vec{u} = (2,4,6)^T, \vec{v} = (-4,0,2)^T$.

Výsledky příkladu 2

1. $A = \begin{pmatrix} -10 & -\frac{17}{4} & \frac{11}{2} \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$,

$\varphi(1,4,2) = (-16,15)^T, \varphi(-1,0,4) = (32,-9)^T$.

2. zadané vektory netvoří bázi prostoru $V = \mathbb{R}^3$.

3. $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$\varphi(2,4,6) = (2,4,2,4)^T, \varphi(-4,0,2) = (-1,3,-1,3)^T$.

Zobrazení přímky a roviny

Příklad 3

Je dána přímka p a rovina ϱ:

$p = \{[1+t, 2-t, 1-t]; t \in \mathbb{R}\}$

$\varrho : 2x - 3y + z + 1 = 0$

Zjistěte, na jakou množinu bodů se přímka p a rovina ϱ zobrazí pomocí lineárního zobrazení:

- $\varphi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které je zadáno maticí
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$
- $\varphi_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které je zadáno maticí
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Výsledky příkladu 3

1. $\varphi_1(p) = \{[8, 3 - t, 2 + 2t]^T; t \in \mathbb{R}\}$
$\varphi_1(\varrho) : x - 2y - z = 0$

2. $\varphi_2(p) = \{[4 + t, 3 - 2t, 2 + t]^T; t \in \mathbb{R}\}$
$\varphi_2(\varrho) : 8x - 7y - 10z + 3 = 0$

Jádro a obor hodnot lineárního zobrazení

Jádro a obor hodnot lineárního zobrazení

Je dáno lineární zobrazení $\varphi : V \to V'$ mezi vektorovými prostory V (dimenze n) a V' (dimenze m).

1. Jádrem $\operatorname{Ker}\varphi$ zobrazení φ rozumíme množinu vektorů $\vec{u} \in V$, které se zobrazí na nulový vektor, tj.
   $\operatorname{Ker}\varphi = \{\vec{u} \in V \mid \varphi(\vec{u}) = \vec{o}_{V'}\}$.
2. Oborem hodnot $\operatorname{Im}\varphi$ zobrazení φ rozumíme množinu vektorů $\vec{v} \in V'$, pro které existuje nějaký vzor, tj.
   $\operatorname{Im}\varphi = \{\vec{v} \in V' \mid \exists \vec{u} \in V : \varphi(\vec{u}) = \vec{v}\}$.

Jádro a obor hodnot lineárního zobrazení

Jádro a obor hodnot lineárního zobrazení

Je dáno lineární zobrazení $\varphi : V \to V'$ mezi vektorovými prostory V (dimenze n) a V' (dimenze m).

1. Jádrem $\operatorname{Ker}\varphi$ zobrazení φ rozumíme množinu vektorů $\vec{u} \in V$, které se zobrazí na nulový vektor, tj.
   $\operatorname{Ker}\varphi = \{\vec{u} \in V \mid \varphi(\vec{u}) = \vec{o}_{V'}\}$.
2. Oborem hodnot $\operatorname{Im}\varphi$ zobrazení φ rozumíme množinu vektorů $\vec{v} \in V'$, pro které existuje nějaký vzor, tj.
   $\operatorname{Im}\varphi = \{\vec{v} \in V' \mid \exists \vec{u} \in V : \varphi(\vec{u}) = \vec{v}\}$.

Poznámka:

- $\operatorname{Ker}\varphi$ a $\operatorname{Im}\varphi$ jsou vektorové podprostory.
- $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = n - h(A) = \dim V - h(A)$, kde A je matice lineárního zobrazení φ.
- $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = h(A)$.
- $\dim V = \dim(\operatorname{Ker}\varphi) + \dim(\operatorname{Im}\varphi)$.

Příklad 4

Nalezněte jádro a obor hodnot lineárního zobrazení φ a určete jejich dimenze.

1. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4,\ \varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1, x_1)$
2. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3)$
3. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4,\ \varphi(1, 2, 1) = (-1, 1, 1, 1)^T,$
   $\varphi(0, 1, 2) = (1, 0, 0, 1)^T, \varphi(1, 0, -1) = (0, 1, 1, 2)^T.$
4. $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ \varphi$ je dáno maticí

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Výsledky příkladu 4

1. $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 0, \operatorname{Ker}\varphi = \{(0,0,0)^T\}$,
   $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 3, \operatorname{Im}\varphi = \langle\{(1,0,1,1)^T, (1,1,0,0)^T, (0,1,1,0)^T\}\rangle$.
2. $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 1, \operatorname{Ker}\varphi = \langle\{(1,-1,1)^T\}\rangle$,
   $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 2, \operatorname{Im}\varphi = \langle\{(1,0)^T, (0,1)^T\}\rangle$.
3. $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 1, \operatorname{Ker}\varphi = \langle\{(0,3,4)^T\}\rangle$,
   $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 2, \operatorname{Im}\varphi = \langle\{(-1,1,1,1)^T, (1,0,0,1)^T\}\rangle$.
4. $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 2, \operatorname{Ker}\varphi = \langle\{(-3,-2,1,0)^T, (-1,-1,0,1)^T\}\rangle$,
   $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 2, \operatorname{Im}\varphi = \langle\{(1,2,-3)^T, (0,-1,5)^T\}\rangle$.

Příklad 5

Lineární zobrazení ψ je zadáno pomocí svého jádra a oboru hodnot. Sestrojte matici A_ψ zobrazení ψ. Pokud zjistíte, že takových zobrazení existuje více, stačí nalézt jedno z nich.

(a) $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$,
$\operatorname{Ker}\psi = ((2;2;1;0)^T, (-5;-3;0;1)^T)$,
$\operatorname{Im}\psi = ((-1;-3;-1;-1)^T, (1,4,3,2)^T)$.

(b) $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,
$\operatorname{Ker}\psi = ((2;2;1)^T, (1;0;1)^T)$,
$\operatorname{Im}\psi = ((1;0;1;1)^T)$.

(c) $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,
$\operatorname{Ker}\psi = ((2;0;2;1)^T, (0;1;-1;1)^T)$,
$\operatorname{Im}\psi = ((1;0;1)^T, (1;1;0)^T)$.

Výsledky příkladu 5

(a) $A_\psi = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A_\psi = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$

(c) $A_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$