

# MA0005 Algebra 2, 8. seminář

23. 11. 2023

## 1 Matice přechodu

- Matice přechodu od jedné báze k druhé bázi
- Změna matice lineárního zobrazení při změně báze
- Změna matice lineární transformace při změně báze

## Literatura a zdroje

- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.
- Isibalo.com: *Matematika – Lineární algebra*. Dostupné z: <https://isibalo.com/matematika/linearni-algebra>.
- Fiala, J. a kol. *Sbírka úloh z matematiky*. Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy, 2008. Dostupné z: <https://kam.mff.cuni.cz/~sbirka>.

# Matice přechodu – motivace

**Motivace:** Ve vektorovém prostoru  $V$  dimenze  $n$  jsou dány dvě různé báze

$$\alpha = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n), \quad \beta = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n)$$

# Matice přechodu – motivace

**Motivace:** Ve vektorovém prostoru  $V$  dimenze  $n$  jsou dány dvě různé báze

$$\alpha = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n), \quad \beta = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n)$$

Chceme-li vektor  $\vec{u}_\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$  zadaný v souřadnicích báze  $\alpha$  převést do souřadnic báze  $\beta$ , hledáme lineární kombinaci  $\vec{u}_\alpha$  pomocí vektorů báze  $\beta$ ,

**Motivace:** Ve vektorovém prostoru  $V$  dimenze  $n$  jsou dány dvě různé báze

$$\alpha = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n), \quad \beta = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n)$$

Chceme-li vektor  $\vec{u}_\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$  zadaný v souřadnicích báze  $\alpha$  převést do souřadnic báze  $\beta$ , hledáme lineární kombinaci  $\vec{u}_\alpha$  pomocí vektorů báze  $\beta$ , tedy hledáme  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  tak, aby

$$(u_1, u_2, \dots, u_n)^T = \vec{f}_1 \cdot x_1 + \vec{f}_2 \cdot x_2 + \dots + \vec{f}_n \cdot x_n,$$

# Maticе přechodu – motivace

**Motivace:** Ve vektorovém prostoru  $V$  dimenze  $n$  jsou dány dvě různé báze

$$\alpha = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n), \quad \beta = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n)$$

Chceme-li vektor  $\vec{u}_\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$  zadaný v souřadnicích báze  $\alpha$  převést do souřadnic báze  $\beta$ , hledáme lineární kombinaci  $\vec{u}_\alpha$  pomocí vektorů báze  $\beta$ , tedy hledáme  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  tak, aby

$$(u_1, u_2, \dots, u_n)^T = \vec{f}_1 \cdot x_1 + \vec{f}_2 \cdot x_2 + \dots + \vec{f}_n \cdot x_n,$$

což vede na řešení systému  $\vec{u} = \beta \cdot \vec{x}$ , tedy řešení soustavy

$$\beta | \vec{u} = \left( \begin{array}{cccc|c} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} & u_1 \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} & u_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} & u_n \end{array} \right)$$

**Motivace:** Ve vektorovém prostoru  $V$  dimenze  $n$  jsou dány dvě různé báze

$$\alpha = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n), \quad \beta = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n)$$

Chceme-li vektor  $\vec{u}_\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$  zadaný v souřadnicích báze  $\alpha$  převést do souřadnic báze  $\beta$ , hledáme lineární kombinaci  $\vec{u}_\alpha$  pomocí vektorů báze  $\beta$ , tedy hledáme  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  tak, aby

$$(u_1, u_2, \dots, u_n)^T = \vec{f}_1 \cdot x_1 + \vec{f}_2 \cdot x_2 + \dots + \vec{f}_n \cdot x_n,$$

což vede na řešení systému  $\vec{u} = \beta \cdot \vec{x}$ , tedy řešení soustavy

$$\beta | \vec{u} = \left( \begin{array}{cccc|c} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} & u_1 \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} & u_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} & u_n \end{array} \right)$$

Budeme takovou soustavu řešit pro každý vektor zvlášť?

# Matrice přechodu od jedné báze k druhé bázi

Libovolný vektor  $\vec{e}_i$  báze  $\alpha$  lze vyjádřit v bázi  $\beta$  takto:

$$\vec{e}_i = \vec{f}_1 \cdot p_{1i} + \vec{f}_2 \cdot p_{2i} + \cdots + \vec{f}_n \cdot p_{ni} = \sum_{k=1}^n \vec{f}_k \cdot p_{ki},$$

kde  $(p_{1i}, p_{2i}, \dots, p_{ni})^T$  je vektor  $\vec{e}_i$  vyjádřený v bázi  $\beta$ .



# Matrice přechodu od jedné báze k druhé bázi

Libovolný vektor  $\vec{e}_i$  báze  $\alpha$  lze vyjádřit v bázi  $\beta$  takto:

$$\vec{e}_i = \vec{f}_1 \cdot p_{1i} + \vec{f}_2 \cdot p_{2i} + \cdots + \vec{f}_n \cdot p_{ni} = \sum_{k=1}^n \vec{f}_k \cdot p_{ki},$$

kde  $(p_{1i}, p_{2i}, \dots, p_{ni})^T$  je vektor  $\vec{e}_i$  vyjádřený v bázi  $\beta$ .

## Matrice přechodu

Maticí přechodu  $P_{\alpha \rightarrow \beta}$  od báze  $\alpha$  k bázi  $\beta$  rozumíme matici, pro níž platí

$$\beta = \alpha \cdot P_{\alpha \rightarrow \beta} \quad (1)$$

# Maticе přechodu od jedné báze k druhé bázi

Libovolný vektor  $\vec{e}_i$  báze  $\alpha$  lze vyjádřit v bázi  $\beta$  takto:

$$\vec{e}_i = \vec{f}_1 \cdot p_{1i} + \vec{f}_2 \cdot p_{2i} + \cdots + \vec{f}_n \cdot p_{ni} = \sum_{k=1}^n \vec{f}_k \cdot p_{ki},$$

kde  $(p_{1i}, p_{2i}, \dots, p_{ni})^T$  je vektor  $\vec{e}_i$  vyjádřený v bázi  $\beta$ .

## Maticе přechodu

Maticí přechodu  $P_{\alpha \rightarrow \beta}$  od báze  $\alpha$  k bázi  $\beta$  rozumíme matici, pro níž platí

$$\beta = \alpha \cdot P_{\alpha \rightarrow \beta} \quad (1)$$

## Poznámka:

- Vektory obou bází se ve vztahu (1) zapisují sloupcově.
- Maticе přechodu  $P_{\alpha \rightarrow \beta}$  je regulární.
- Maticе  $(P_{\alpha \rightarrow \beta})^{-1} = P_{\beta \rightarrow \alpha}$  je maticí přechodu od báze  $\beta$  k bázi  $\alpha$  a platí tento vztah:

$$\alpha = \beta \cdot P_{\beta \rightarrow \alpha} \quad (2)$$

**Převádění souřadnic vektorů při změně báze:** Při vyjádření souřadnic vektoru v jiné bázi potřebujeme matici přechodu **v opačném směru**:

- $\vec{u}_\beta = P_{\beta \rightarrow \alpha} \cdot \vec{u}_\alpha$
- $\vec{v}_\alpha = P_{\alpha \rightarrow \beta} \cdot \vec{v}_\beta$

## Příklad 1

Jsou dány dvě různé báze  $\alpha, \beta$  vektorového prostoru  $\mathbb{R}^3$ . Najděte matici přechodu  $P_{\beta \rightarrow \alpha}, P_{\alpha \rightarrow \beta}$  a určete souřadnice vektoru  $\vec{u}_\alpha = (1, 2, 1)^T$  v bázi  $\beta$  a souřadnice vektoru  $\vec{v}_\beta = (-1, 0, 3)^T$  v bázi  $\alpha$ .

- 1  $\alpha = ((1, 0, 1)^T; (2, 1, 1)^T; (0, 0, 2)^T),$   
 $\beta = ((0, 1, 1)^T; (1, 0, 2)^T; (2, 0, 2)^T).$
- 2  $\alpha = ((1, 0, 2)^T; (2, 1, 1)^T; (3, 2, 4)^T),$   
 $\beta = ((1, 2, 0)^T; (2, 2, 4)^T; (0, 1, -3)^T).$
- 3  $\alpha = ((1, 2, 0)^T; (2, 1, 1)^T; (1, 0, 1)^T),$   
 $\beta = ((2, 2, 1)^T; (1, 2, 1)^T; (0, 0, 2)^T).$

**Výsledky:** na dalším slajdu.

# Výsledky Příkladu 1

$$1. P_{\beta \rightarrow \alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & -1 \end{pmatrix}, A_{\alpha \rightarrow \beta} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$(1, 2, 1)_{\alpha}^T = (2, -2, \frac{7}{2})_{\beta}^T, (-1, 0, 3)_{\beta}^T = (8, -1, -1)_{\alpha}^T$$

$$2. P_{\beta \rightarrow \alpha} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -5 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, P_{\alpha \rightarrow \beta} = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$(1, 2, 1)_{\alpha}^T = (-20, 14, 16)_{\beta}^T, (-1, 0, 3)_{\beta}^T = (-4, 3, -1)_{\alpha}^T$$

$$3. P_{\beta \rightarrow \alpha} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, P_{\alpha \rightarrow \beta} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$(1, 2, 1)_{\alpha}^T = (4, -2, \frac{1}{2})_{\beta}^T, (-1, 0, 3)_{\beta}^T = (5, -12, 17)_{\alpha}^T$$

# Změna matice lineárního zobrazení při změně báze – příklady

## Příklad 2

Lineární zobrazení  $\varphi : U \rightarrow V$  je zadáno maticí  $A_S$  ve standardních bázích  $U, V$ . Pro zadané báze  $\alpha$  prostoru  $U$  a  $\beta$  prostoru  $V$  určete matice  $A_{S \rightarrow \alpha}, A_{\beta \rightarrow S}, A_{\beta \rightarrow \alpha}$ .

$$1. \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, A_S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = ((1, 2)^T; (-2, 1)^T), \beta = ((1, 1, 1)^T; (1, 1, 0)^T; (1, 2, 0)^T).$$

$$2. \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, A_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = ((1, 0, 1)^T; (1, 1, 1)^T; (1, 2, 0)^T),$$

$$\beta = ((1, 2, -1, 0)^T; (0, 1, -1, -2)^T; (-1, 0, 0, -2)^T; (2, 1, 0, -3)^T).$$

# Změna matice lineárního zobrazení při změně báze – příklady

## Příklad 2

Lineární zobrazení  $\varphi : U \rightarrow V$  je zadáno maticí  $A_S$  ve standardních bázích  $U, V$ . Pro zadané báze  $\alpha$  prostoru  $U$  a  $\beta$  prostoru  $V$  určete matice  $A_{S \rightarrow \alpha}, A_{\beta \rightarrow S}, A_{\beta \rightarrow \alpha}$ .

$$3. \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, A_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\alpha = ((1, 1, 1)^T; (1, 0, 4)^T; (1, 4, 0)^T),$$
$$\beta = ((1, 0)^T; (4, 1)^T).$$

**Výsledky:** na dalším slajdu.

## Výsledky Příkladu 2

$$1. A_{S \rightarrow \alpha} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A_{\beta \rightarrow S} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, A_{\beta \rightarrow \alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -10 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$2. A_{S \rightarrow \alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_{\beta \rightarrow S} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 12 \\ -11 & -5 & -19 \\ 3 & 2 & 16 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{\beta \rightarrow \alpha} = \begin{pmatrix} \frac{16}{7} & 3 & 2 \\ -\frac{30}{7} & -5 & -3 \\ \frac{19}{7} & 3 & 1 \\ \frac{5}{7} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3. A_{S \rightarrow \alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, A_{\beta \rightarrow S} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{\beta \rightarrow \alpha} = \begin{pmatrix} -6 & -15 & -11 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

# Změna matice lineární transformace při změně báze – příklady

## Příklad 3

Lineární transformace  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  je zadána maticí  $A_S$  ve standardní bázi prostoru  $\mathbb{R}^3$ . Pro bázi

$$\alpha = ((1, 1, 1)^T; (1, 1, 0)^T; (1, 2, 0)^T)$$

prostoru  $\mathbb{R}^3$  určete matice  $A_{S \rightarrow \alpha}$ ,  $A_{\alpha \rightarrow S}$ ,  $A_{\alpha \rightarrow \alpha}$ .

$$1. A_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad 2. A_S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$3. A_S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



# Výsledky Příkladu 3

$$1. A_{S \rightarrow \alpha} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 9 & 5 & 6 \end{pmatrix}, A_{\alpha \rightarrow S} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ -4 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{\alpha \rightarrow \alpha} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 6 \\ -4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$2. A_{S \rightarrow \alpha} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}, A_{\alpha \rightarrow S} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ -7 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{\alpha \rightarrow \alpha} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -5 & -5 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

# Výsledky Příkladu 3

$$3. A_{S \rightarrow \alpha} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}, A_{\alpha \rightarrow S} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -4 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix},$$

$$A_{\alpha \rightarrow \alpha} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 8 \\ -3 & -9 & -14 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$