MA0005 Algebra 2, 9. seminář

30. 11. 2023

Náplň cvičení

Literatura a zdroje

- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.

Ortogonální a ortonormální vektory

Ortogonální vektory

Vektory $\vec{u}, \vec{v}$ v Euklidovském prostoru jsou ortogonální, jestliže pro jejichž skalární součin platí: $skal(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Poznámka: Ortogonálnost vektorů narozdíl od kolmosti připouští, že jeden z nich, případně oba byly nulové.

Ortogonální a ortonormální vektory

Ortogonální vektory

Vektory $\vec{u}, \vec{v}$ v Euklidovském prostoru jsou ortogonální, jestliže pro jejichž skalární součin platí: $skal(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Poznámka: Ortogonálnost vektorů narozdíl od kolmosti připouští, že jeden z nich, případně oba byly nulové.

Ortogonální/ortonormální posloupnost vektorů

Báze podprostoru, nebo libovolná posloupnost vektorů je

- **ortogonální**, jestliže každé dva vektory z této báze (posloupnosti) jsou ortogonální.
- **ortonormální**, jestliže je ortogonální a každý její vektor je normovaný (tj. jeho velikost je 1).

Poznámka: Velikost vektoru $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ je v Euklidovském prostoru definována takto: $||u|| = \sqrt{skal(\vec{u}, \vec{u})} = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}$.

Ortogonální a ortonormální vektory – příklady

Příklad 6.2.B1: Rozhodněte, zda dané vektory euklidovského prostoru $\mathbb{R}^4$ jsou ortogonální, resp. ortonormální.

a) $\vec{u} = (1; -2; 2; 1)$, $\vec{v} = (1; 3; 2; 1)$, $\vec{w} = (-1; 0; 1; -1)$

b) $\vec{u} = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

c) $\vec{u} = (2; 3; -3; -4)$, $\vec{v} = (-1; 3; -3; 4)$, $\vec{w} = (3; 1; 3; 0)$

d) $\vec{u} = (1; 3; 1; 2)$, $\vec{v} = (0; 0; 0; 0)$, $\vec{w} = (1; -3; 2; 3)$

Příklad 6.2.B2: Určete parametry $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby dané vektory euklidovského prostoru $\mathbb{R}^5$ byly ortogonální.

a) $\vec{u} = (1; 1; 2; 0; 0), \vec{v} = (1; -1; 0; 1; a), \vec{w} = (1; b; 2; 3; -2)$

b) $\vec{u} = (2; -1; 0; a; b), \vec{v} = (a; b; 0; -2; 1), \vec{w} = (a; 2b; 5; b; -a)$

c) $\vec{u} = (1; -2; a; 3; 0), \vec{v} = (-1; 1; 0; a; 7), \vec{w} = (1; -2; b; 3; 0)$,
$\vec{z} = (0; b; -1; 1; 8)$

d) $\vec{u} = (1; 2; 0; 2; 1), \vec{v} = (0; 0; 0; 0; 0), \vec{w} = (-5; 2; 5; -2; 5)$,
$\vec{z} = (a; b; 0; b; a)$

Výsledky:

B1 a) ortogonální, b) ortonormální, c) nejsou ortogonální, d) ortogonální

B2 a) $a = \frac{9}{2}, b = -5$, b) $(a = b = 0) \vee (a = b = 1)$, c) žádné neexistují, d) $a = -2b$

Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces

Věta: Buď $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_k}$ vektory euklidovského prostoru. Pak existují ortogonální vektory $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_k}$ tak, že $\langle(\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_k})\rangle = \langle(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_k})\rangle$.

Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces

Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces

Věta: Buď $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_k}$ vektory euklidovského prostoru. Pak existují ortogonální vektory $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_k}$ tak, že $\langle(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_k})\rangle = \langle(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_k})\rangle$.

Důkaz této věty je konstruktivní a je založen na těchto krocích:

a) $\vec{e_1} = \vec{u_1}$.

Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces

Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces

Věta: Buď $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_k}$ vektory euklidovského prostoru. Pak existují ortogonální vektory $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_k}$ tak, že $\langle(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_k})\rangle = \langle(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_k})\rangle$.

Důkaz této věty je konstruktivní a je založen na těchto krocích:

a) $\vec{e_1} = \vec{u_1}$.

b) Hledáme vektor $\vec{e_2}$ tak, že vyjádření $\vec{e_2} = p_1 \cdot \vec{e_1} + \vec{u_2}$ skalárně vynásobíme vektorem $\vec{e_1}$. Díky ortogonalitě vektorů $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= p_1 \cdot skal(\vec{e_1}, \vec{e_1}) + skal(\vec{u_2}, \vec{e_1}) \\ p_1 &= -\frac{skal(\vec{u_2}, \vec{e_1})}{skal(\vec{e_1}, \vec{e_1})} \end{aligned}$$

Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces

Věta: Buď $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_k}$ vektory euklidovského prostoru. Pak existují ortogonální vektory $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_k}$ tak, že $\langle(\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_k})\rangle = \langle(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_k})\rangle$.

Důkaz této věty je konstruktivní a je založen na těchto krocích:

a) $\vec{e_1} = \vec{u_1}$.

b) Hledáme vektor $\vec{e_2}$ tak, že vyjádření $\vec{e_2} = p_1 \cdot \vec{e_1} + \vec{u_2}$ skalárně vynásobíme vektorem $\vec{e_1}$. Díky ortogonalitě vektorů $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= p_1 \cdot skal(\vec{e_1}, \vec{e_1}) + skal(\vec{u_2}, \vec{e_1}) \\ p_1 &= -\frac{skal(\vec{u_2}, \vec{e_1})}{skal(\vec{e_1}, \vec{e_1})} \end{aligned}$$

c) Podobně vyjádření $\vec{e_3} = p_1 \cdot \vec{e_1} + p_2 \cdot \vec{e_2} + \vec{u_3}$ vynásobíme jednou vektorem $\vec{e_1}$, podruhé $\vec{e_2}$. Dostaneme dvě rovnice, z nichž opět získáme hodnoty p_1, p_2.

Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces

Věta: Buď $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_k}$ vektory euklidovského prostoru. Pak existují ortogonální vektory $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_k}$ tak, že $\langle(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_k})\rangle = \langle(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_k})\rangle$.

Důkaz této věty je konstruktivní a je založen na těchto krocích:

a) $\vec{e_1} = \vec{u_1}$.

b) Hledáme vektor $\vec{e_2}$ tak, že vyjádření $\vec{e_2} = p_1 \cdot \vec{e_1} + \vec{u_2}$ skalárně vynásobíme vektorem $\vec{e_1}$. Díky ortogonalitě vektorů $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= p_1 \cdot skal(\vec{e_1}, \vec{e_1}) + skal(\vec{u_2}, \vec{e_1}) \\ p_1 &= -\frac{skal(\vec{u_2}, \vec{e_1})}{skal(\vec{e_1}, \vec{e_1})} \end{aligned}$$

c) Podobně vyjádření $\vec{e_3} = p_1 \cdot \vec{e_1} + p_2 \cdot \vec{e_2} + \vec{u_3}$ vynásobíme jednou vektorem $\vec{e_1}$, podruhé $\vec{e_2}$. Dostaneme dvě rovnice, z nichž opět získáme hodnoty p_1, p_2.

d) Takto podobně postupujeme dále.

Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces – příklady

Příklad 6.2.B7: V euklidovském prostoru V nalezněte ortogonální bázi podprostoru W, je-li:

a) $V = \mathbb{R}^4, W = \langle(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})\rangle$, kde
$\vec{u_1} = (1; 2; 2; -1), \vec{u_2} = (1; 1; -5; 3), \vec{u_3} = (3; 2; 8; -7)$

b) $V = \mathbb{R}^4, W = \langle(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})\rangle$, kde
$\vec{u_1} = (1; 0; 1; 0), \vec{u_2} = (0; 1; 0; -7), \vec{u_3} = (3; -2; 3; 14)$

c) $V = \mathbb{R}^4, W = \langle(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4})\rangle$, kde $\vec{u_1} = (1; 1; 1; 1)$,
$\vec{u_2} = (1; 1; 1; -1), \vec{u_3} = (1; -1; -1; 1), \vec{u_4} = (-1; 1; 1; 1)$

d) $V = \mathbb{R}^5, W = \langle(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4})\rangle$, kde $\vec{u_1} = (1; -2; -1; 0; 1)$,
$\vec{u_2} = (2; 3; 0; -2; 3), \vec{u_3} = (1; 1; -2; -1; -1), \vec{u_4} = (1; -6; -4; 1; -2)$

e) $V = \mathbb{R}^5, W = \langle(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4})\rangle$, kde $\vec{u_1} = (1; 2; 0; 1; 2)$,
$\vec{u_2} = (1; 1; 3; 0; 1), \vec{u_3} = (1; 3; -3; 2; 3), \vec{u_4} = (1; -1; 9; -2; -1)$

Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces – výsledky

Příklad 6.2.B7: hledaných bází je nekonečně mnoho. Jedna z nich je např.:

a) $((1; 2; 2; -1), (2; 3; -3; 2), (2; -1; -1; -2))$
b) $((1; 0; 1; 0), (0; 1; 0; -7))$
c) $((1; 1; 1; 1), (1; 1; 1; -3), (4; -2; -2; 0))$
d) $((1; -2; -1; 0; 1), (1; 1; -2; -1; -1), (69; 93; 36; -63; 153))$
e) $((1; 2; 0; 1; 2), (1; 0; 6; -1; 0))$

Ortogonální doplněk

Ortogonální množiny vektorů

Množiny vektorů A, B jsou ortogonální, když pro každý libovolná dvojice vektorů $\vec{a} \in A, \vec{b} \in B$ je ortogonální. Značíme $A \perp B$.

Poznámka: Je-li $A \perp B$, pak jsou ortogonální i podprostory $\langle A \rangle, \langle B \rangle$ generované vektory obou množin.

Ortogonální doplněk

Ortogonální množiny vektorů

Množiny vektorů A, B jsou ortogonální, když pro každý libovolná dvojice vektorů $\vec{a} \in A, \vec{b} \in B$ je ortogonální. Značíme $A \perp B$.

Poznámka: Je-li $A \perp B$, pak jsou ortogonální i podprostory $\langle A \rangle, \langle B \rangle$ generované vektory obou množin.

Ortogonální doplněk podprostoru

Buď U vektorový podprostor euklidovského prostoru V. Ortogonálním doplňkem $U^\perp$ podprostoru U v prostoru V rozumíme množinu všech vektorů ortogonálních k U, tj.

$$U^\perp = \{\vec{x} \in V \mid skal(\vec{x}, \vec{u}) = 0, \quad \forall \vec{u} \in U\}$$

Poznámka: Ortogonální doplněk $U^\perp$ je též vektorovým podprostorem a platí: $V = U + U^\perp$ (tj. $U \cap U^\perp = \vec{o}$ a $\dim(V) = \dim(U) + \dim(U^\perp)$).

Ortogonální doplněk – příklady

Příklad 6.2.B15: V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ je dán podprostor W. Nalezněte bázi ortogonálního doplňku $W^\perp$, je-li:

a) $W = \{(2r+t; -3r+s-t; 4r+3t; 8r+5t) \mid r, s, t \in \mathbb{R}\}$

b) $W = \langle(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})\rangle$, kde
$\vec{u_1} = (3; -5; 4; 1)$, $\vec{u_2} = (1; -2; 2; -3)$, $\vec{u_3} = (1; -1; 0; 7)$

c) $W = \langle(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4})\rangle$, kde
$\vec{u_1} = (3; 2; 1; 0)$, $\vec{u_2} = (1; 1; -2; 1)$, $\vec{u_3} = (1; 1; 0; 1)$, $\vec{u_4} = (2; 3; -1; 1)$

d) W je podprostor řešení homogenního SLR:

$$\begin{array}{ccccccccc} 3x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 7x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & & & - & 2x_3 & - & 9x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

Ortogonální doplněk – příklady

Příklad 6.2.B15: V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ je dán podprostor W. Nalezněte bázi ortogonálního doplňku $W^\perp$, je-li:

a) $W = \{(2r + t; -3r + s - t; 4r + 3t; 8r + 5t) \mid r, s, t \in \mathbb{R}\}$

b) $W = \langle(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})\rangle$, kde
$\vec{u_1} = (3; -5; 4; 1)$, $\vec{u_2} = (1; -2; 2; -3)$, $\vec{u_3} = (1; -1; 0; 7)$

c) $W = \langle(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4})\rangle$, kde
$\vec{u_1} = (3; 2; 1; 0)$, $\vec{u_2} = (1; 1; -2; 1)$, $\vec{u_3} = (1; 1; 0; 1)$, $\vec{u_4} = (2; 3; -1; 1)$

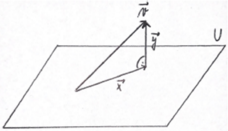
d) W je podprostor řešení homogenního SLR:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 7x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & & & - & 2x_3 & - & 9x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

Výsledky: a) např. $((2; 0; 1; -1))$, b) např. $((2; 2; 1; 0), (17; 10; 0; -1))$, c) neexistuje, d) např. $((3; 3; 2; 7), (3; 0; -2; -9), (0; 0; 1; 1))$

Ortogonální projekce vektoru

Ortogonální projekce nenulového vektoru $\vec{v}$ do podprostoru U je vektor $\vec{x}$ takový, že $\vec{x} + \vec{y} = \vec{v}$, kde $\vec{x} \in U, \vec{y} \in U^{\perp}$.



Poznámka:

- Ortogonální projekci, někdy též **kolmý průmět**, je možné provádět v euklidovském prostoru, v němž je díky skalárnímu součinu definován pojem kolmosti vektorů.
- Pomocí ortogonální projekce vektoru lze spočítat jeho odchylku od zadaného podprostoru (určíme ji jako úhel, který svírá vektor se svým kolmým průmětem do podprostoru).

Ortogonální projekce vektoru – příklady

Příklad 6.2.B18: V euklidovském prostoru V nalezněte ortogonální projekci vektoru u do podprostoru W, je-li:

a) $V = \mathbb{R}^3; \vec{u} = (3; -7; 8); W = \langle(\vec{w_1}, \vec{w_2})\rangle$, kde
$\vec{w_1} = (1; 1; -2), \vec{w_2} = (3; 1; -1)$

b) $V = \mathbb{R}^4; \vec{u} = (-2; 2; 2; 5); W = \langle(\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3})\rangle$, kde
$\vec{w_1} = (1; 1; -1; 2), \vec{w_2} = (3; 1; 0; 1), \vec{w_3} = (2; 0; 1; -1)$

c) $V = \mathbb{R}^4; \vec{u} = (2; 7; -3; -6)$;
$W = \{(r + s; r + s; -r - 3s; 2r + 3s) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$

d) $V = \mathbb{R}^4; \vec{u} = (1; 2; 3; 4); W = \langle(0; 1; 0; 1)\rangle$

e) $V = \mathbb{R}^4; \vec{u} = (2; 0; 1; -4)$; W je podprostor řešení homogenního SLR:

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & & & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

Ortogonální projekce vektoru – výsledky

Příklad 6.2.B18 – výsledky:

a) $\left(\frac{34}{15}; -\frac{10}{3}; \frac{142}{15}\right)$
b) $(-1; 1; -2; 3)$
c) $(0; 0; 0; 0)$
d) $(0; 3; 0; 3)$
e) $\left(\frac{9}{4}; -\frac{5}{4}; -\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}\right)$