K a p i t o l a XV.

C V I Č E N Í v I N T E G R O V Á N Í

Neurčitý integrál.

Podle definice neurčitého integrálu funkce $f(x)$ jest integrování funkce opačnou operací k derivování funkce. Při integrování funkce $f(x)$ hledáme k funkci $f(x)$, definované v jistém otevřeném intervalu I, takovou novou funkci $F(x)$, tak zvanou p r i m i t i v n í funkci k funkci $f(x)$, která má tu vlastnost, že pro všechna x z intervalu I jest $F'(x) = f(x)$. Např.:

je-li $f(x) = \cos x$, definované v intervalu $(-\infty,+\infty)$, jest $F(x) = \sin x$,

neboť pro každé x z intervalu $(-\infty,+\infty)$ jest $(\sin x)' = \cos x$.

Pro primitivní funkci k funkci $y = f(x)$ se užívá symbolu

$$\int f(x)dx \quad \text{nebo} \quad \int y\,dx\,,$$

který se vysvětlí pozdějšími úvahami. Symbol čteme „integrál $f(x)dx$".
Funkce $f(x)$ se nazývá funkce integrovaná (integrand), x je integrační proměnná, dx je diferenciál integrační proměnné, $f(x)dx$ je integrovaný diferenciální výraz.

Poněvadž všechny funkce, jež se liší jen aditivní konstantou, mají tutéž derivaci, pak obráceně musí k dané funkci $f(x)$ existovat nekonečně mnoho primitivních funkcí $F(x)$, jež se liší aditivní konstantou, zv. i n t e g r a č n í konstanta.

Proto píšeme $\int f(x)dx = F(x) + C$, např. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

Ve výsledcích cvičení bude integrační konstanta vynechávána.
K integraci funkce $f(x)$ se užívá různých pravidel a metod, z nichž některé vyplývají přímo z derivování funkcí, jiné se získávají umělou cestou. Neurčitý integrál funkce můžeme vypočítat často několika způsoby, při čemž obdržíme výsledky často formálně různé. Tyto výsledky se ale liší jen aditivní konstantou.
Poněvadž neexistuje obecná integrační metoda, která by vedla k integraci jakékoli funkce, jest integrování funkcí daleko obtížnější operací než derivování funkcí.

§ 35. INTEGRACE UŽITÍM ZÁKLADNÍCH VZORCŮ.

$$\boxed{\begin{aligned} &\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\,,\quad n \neq -1\,; \quad \int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C \\ &\int ax^n dx = a.\int x^n dx\,; \quad \int a\,dx = ax + C\,; \quad \int dx = x + C \end{aligned}} \tag{120}$$

263. cvičení. Vypočítejte neurčité integrály:

a) $\int x^{12}dx$, b) $\int 5x^7dx$, c) $\int 2x\,dx$, d) $\int 3x^0dx$, e) $\int \frac{3}{4}dx$, f) $\int x^{-5}dx$, g) $\int x^{-t}dx$,

h) $\int 4x^{-3}dx$, k) $\int 3x^{-1}dx$, m) $\int x^{\frac{1}{2}}dx$, n) $\int 2x^{\frac{3}{5}}dx$, o) $\int x^{\frac{-1}{3}}dx$ p) $\int 7x^{\frac{-10}{3}}dx$,

r) $\int x^{0,13}dx$, s) $\int 2{,}4x^{-0,16}dx$, t) $\int z^{\sqrt{2}}dz$.

Výsledky: a) $\frac{1}{13}x^{13}$, b) $\frac{5}{8}x^8$, c) x^2, d) $3x$, e) $\frac{3}{4}x$, f) $-\frac{1}{4}x^{-4}$, g) $\frac{x^{1-t}}{1-t}$, h) $-2x^{-2}$,

k) $3.\ln|x|$, m) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, n) $\frac{5}{4}x^{\frac{8}{5}}$, o) $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$, p) $-3x^{\frac{-7}{3}}$, r) $\frac{x^{1,13}}{1,13}$, s) $\frac{20}{7}x^{0,84}$, t) $\frac{z^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1}$.

V následujícím cvičení nahraďte integrand jedinou mocninou integrační proměnné.

264.cvičení. a) $\int\frac{3}{x}dx$, b) $\int\frac{1}{x^2}dx$, c) $\int\frac{5}{x^6}dx$, d) $\int\frac{2}{3x^4}dx$, e) $\int\sqrt{x}\,dx$, f) $\int\sqrt[3]{x^2}dx$,

g) $\int 7\sqrt[3]{x^4}dx$, h) $\int\sqrt[m]{x^n}\,dx$, k) $\int\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$, m) $\int\frac{7}{\sqrt[5]{x^{12}}}\,dx$, n) $\int\frac{4}{\sqrt[5]{5x}}\,dx$, o) $\int\frac{1}{\sqrt{2gx}}\,dx$

p) $\int x^3.\sqrt[3]{x}\,dx$, q) $\int\frac{\sqrt{x}}{x^2}\,dx$, r) $\int\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}\,dx$, s) $\int\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$.

Výsledky: a) $3.\ln|x|$, b) $-\frac{1}{x}$, c) $\frac{-1}{x^5}$, d) $\frac{-2}{9x^3}$, e) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$, f) $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}$, g) $3x^2\sqrt[3]{x}$,

h) $\frac{m}{m+n}.x\sqrt[m]{x^n}$, k) $2\sqrt{x}$, m) $\frac{-5}{\sqrt[5]{x^7}}$, n) $\sqrt[5]{625x^4}$, o) $\sqrt{\frac{2x}{g}}$, p) $\frac{3x^4}{13}.\sqrt[3]{x}$, q) $\frac{-2\sqrt{x}}{x}$,

r) $\frac{3x^2}{8}.\sqrt[3]{x^2}$, s) $\frac{4x}{7}.\sqrt[4]{x^3}$,

Neurčitý integrál součtu (rozdílu) funkcí.

$$\int[\,f(x)\pm g(x)\,]\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx \qquad (121)$$

Tohoto pravidla užijeme zatím pro součet mocnin.

265.cvičení. Vypočítejte neurčitý integrál :

a) $\int(4x^5+x^3-x-5)dx$, b) $\int(x+\frac{1}{x}+\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})dx$, c) $\int(\frac{14}{3}\sqrt{x^3}-\frac{11}{\sqrt[3]{x^5}}-\frac{4}{3x^2})dx$

Výsledky:

a) $\frac{2}{3}x^6+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2-5x$, b) $\frac{1}{2}x^2+\ln|x|+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}$, c) $\frac{28}{15}\sqrt{x^5}+-\frac{33}{2\sqrt[3]{x^2}}+\frac{4}{3x}$.

V následujícím cvičení nejprve dělením čitatele jmenovatelem nahraďte integrand součtem mocnin.

266.cvičení. a) $\int\frac{x^3-2x+1}{x^3}\,dx$, b) $\int(\frac{1-x}{x})^2dx$, c) $\int\frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$, d) $\int\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\,dx$,

e) $\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$, f) $\int\frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{x^2}dx$.

Výsledky: a) $x+\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2}$, b) $x-2.\ln|x|-\frac{1}{x}$, c) $\frac{2x^2}{5}\sqrt{x}+\frac{4}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}$,

d) $\frac{3}{\sqrt[3]{x}}.(1+\frac{3}{2}x-\frac{3}{5}x^2+\frac{1}{8}x^3)$, e) $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-\frac{24}{17}x.\sqrt[12]{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}$, f) $4.\ln|x|-\frac{8}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$.

Neurčitý integrál goniometrických funkcí budeme provádět zatím užitím vzorců :

$$\int\sin x\,dx=-\cos x+C;\ \int\cos x\,dx=\sin x+C;\ \int\frac{dx}{\cos^2x}=\operatorname{tg}x+C;\ \int\frac{dx}{\sin^2x}=-\operatorname{cotg}x+C \qquad (122)$$

267.cvičení. a) $\int(8\cos x-3\sin x)dx$, b) $\int(\sin x-\cos x)dx$, c) $\int\frac{1}{3\cos^2x}\,dx$,

d) $\int\frac{a}{b.\sin^2x}dx$, e) $\int\frac{\cos^3x-0,8}{\cos^2x}dx$, f) $\int\frac{5\sin^2x+3\cos^2x}{2\sin^2x.\cos^2x}dx$, g) $\int\frac{3-2\operatorname{cotg}^2x}{\cos^2x}\,dx$

Výsledky: a) $8\sin x+3\cos x$, b) $-(\cos x+\sin x)$, c) $\frac{1}{3}\mathrm{tg}x$, d) $-\frac{a}{b}\mathrm{cotg}x$, e) $\sin x-0{,}8\mathrm{tg}x$,

f) $\frac{5}{2}\mathrm{tg}x - \frac{3}{2}\mathrm{cotg}x$, g) $3\mathrm{tg}x + 2\mathrm{cotg}x$.

V dalších případech zavedeme v čitateli funkci, která je ve jmenovateli a dělíme.

268.cvičení. a) $\int\frac{\sin^2x}{\cos^2x}dx$, b) $\int\frac{5\cos^2x}{3\sin^2x}dx$, c) $\int\mathrm{cotg}^2x\,dx$, d) $\int\frac{3\sin^2x-2\cos^2x+5}{4\cos^2x}dx$.

Výsledky: a) $\mathrm{tg}x-x$, b) $-\frac{5}{3}(\mathrm{cotg}x+x)$, c) $-(\mathrm{cotg}x+x)$, d) $2\mathrm{tg}x - \frac{5}{4}x$.

Dále užijeme k úpravě integrované funkce základních goniometrických vztahů.

269.cvičení. a) $\int(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})^2dx$, b) $\int\frac{1}{\sin^2x.\cos^2x}dx$, c) $\int\frac{\cos2x}{\cos x - \sin x}dx$,

d) $\int\frac{4\cos2x}{\sin^22x}dx$. Výsledky : a) $x+\cos x$, b) $\mathrm{tg}x-\mathrm{cotg}x$, c) $\sin x-\cos x$, d) $-(\mathrm{cotg}x+\mathrm{tg}x)$.

270.cvičení. a) $\int\frac{1+\cos^2x}{1+\cos2x}dx$, b) $\int\cos^2\frac{x}{2}\,dx$, c) $\int2\sin^2\frac{x}{2}\,dx$, d) $\int\frac{3}{1+\cos2x}dx$,

e) $\int\frac{1}{1-\cos2x}dx$, f) $\int\frac{1+\cos2x}{1-\cos2x}dx$. Výsledky: a) $\frac{x+\mathrm{tg}x}{2}$, b) $\frac{x+\sin x}{2}$, c) $x- \sin x$,

d) $\frac{3}{2}\mathrm{tg}x$, e) $-\frac{\mathrm{cotg}x}{2}$, f) $-\mathrm{cotg}x - x$

Integrace exponenciálních funkcí a^x , $a > 0$ a e^x

$$\int a^x\,dx = a^x.\log_a e = a^x.\frac{1}{\ln a} + C \quad ; \quad \int e^x\,dx = e^x + C \qquad (123)$$

271.cvičení. a) $\int10^xdx$, b) $\int2^xdx$, c) $\int(\frac{4}{5})^xdx$, d) $\int(\sqrt{2})^xdx$, e) $\int\sqrt{e^x}\,dx$,

f) $\int5^{2x}dx$, g) $\int a^{3x}dx$, h) $\int(2^x+ 3^x)^2dx$, k) $\int a^x(1+ \frac{a^{-x}}{\sqrt{x^3}})dx$, m) $\int e^x(1+ \frac{e^{-x}}{\cos^2x})dx$

n) $\int\frac{e^{2x}-1}{e^x- 1}dx$, o) $\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$. Výsledky : a) $10^x.\frac{1}{\ln10}$, b) $2^x.\frac{1}{\ln2}$, c) $(\frac{4}{5})^x.\frac{1}{\ln0{,}8}$,

d) $\frac{2}{\ln2}.\sqrt{2^x}$, e) $2\sqrt{e^x}$, f) $\frac{25^x}{\ln25}$, g) $\frac{a^{3x}}{3.\ln a}$, h) $\frac{4^x}{\ln4} + 2.\frac{6^x}{\ln6} + \frac{9^x}{\ln9}$, k) $\frac{a^x}{\ln a} - \frac{2}{\sqrt{x}}$,

m) $e^x+ \mathrm{tg}x$, n) $e^x+ x$, o) $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x$.

Integrace převedením na neurčité integrály :

$$\int\frac{1}{\sqrt{1- x^2}}dx = \arcsin x +C; \quad \int\frac{1}{1+ x^2}dx = \mathrm{arctg}x +C \ ; \quad \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+ a}} =\ln\left|x+ \sqrt{x^2+a}\right|+C \qquad (124)$$

272.cvičení. a) $\int\frac{4}{\sqrt{4- 4x^2}}dx$, b) $\int\frac{1}{\sqrt{3- 3x^2}}dx$, c) $\int\frac{b}{\sqrt{a^2- a^2x^2}}dx$, d) $\int\frac{3 - \sqrt{1- x^2}}{\sqrt{1- x^2}}dx$,

e) $\int\frac{1}{9+ 9x^2}dx$, f) $\int\frac{a}{b+ bx^2}dx$, g) $\int(2x^2+ 2)^{-1}dx$.

Výsledky: a) $2\arcsin x$, b) $\frac{\sqrt{3}}{3}\arcsin x$, c) $\frac{b}{a}.\arcsin x$, d) $3\arcsin x - x$,

e) $\frac{1}{9}\mathrm{arctg}\,x$, f) $\frac{a}{b}.\mathrm{arctg}\,x$, g) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x$

K funkci arctg x vede integrace racionální funkce lomené typu $\frac{P(x^2)}{x^2+ 1}$, kde $P(x^2)$ je mnohočlen obsahující jen sudé mocniny proměnné. Jde o integraci racionální funkce neryze lomené, kterou vždy vyjadřujeme součtem mnohočlenu a části ryze lomené. Dosáhneme toho dělením čitatele jmenovatelem nebo úpravou čitatele a dělením. **Integrace vede k funkci arctg x , když dělením obdržíme zbytek různý od nuly.**

/93/. příklad. (Čitatele dělíme jmenovatelem až po konstantní zbytek)

$$\int \frac{3x^4-7x^2+5}{x^2+1}dx = \int (3x^2-10+\frac{15}{x^2+1})dx = x^3-10x+15\,\mathrm{arctg}\,x + C$$

/94/. příklad. (Čitatele vhodně doplníme, abychom mohli přímo dělit)

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx = \int (1-\frac{1}{x^2+1})dx = x - \mathrm{arctg}\,x + C$$

273. <u>cvičení</u>.

a) $\int \frac{ax^2}{bx^2+b}dx$, b) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx$, c) $\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$, d) $\int \frac{4x^6-3x^2+5}{2x^2+2}dx$

e) $\int \frac{1+2x^2}{x^2.(1+x^2)}dx$, f) $\int \frac{(1+x)^2}{x.(1+x^2)}dx$.

Výsledky: a) $\frac{a}{b}(x-\mathrm{arctg}x)$, b) $x-2\,\mathrm{arctg}x$, c) $\frac{x^3}{3}-x+\mathrm{arctg}x$, d) $\frac{2}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+\frac{x}{2}+2\,\mathrm{arctg}x$, e) $\mathrm{arctg}x-\frac{1}{x}$, f) $\ln|x|+2\,\mathrm{arctg}\,x$.

274. <u>cvičení</u>.

a) $\int \frac{3}{\sqrt{x^2+1}}dx$, b) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$, c) $\int \frac{2}{\sqrt{x^2-5}}dx$, d) $\int \frac{\ln 2}{\sqrt{2+2x^2}}dx$, e) $\int \frac{5}{\sqrt{9x^2-18}}dx$

f) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx$, g) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$. (V případech f), g) dělíme čitatele jmenovatelem.)

Výsledky : a) $3.\ln|x+\sqrt{x^2+1}|$, b) $\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$, c) $2.\ln|x+\sqrt{x^2-5}|$, d) $\frac{\ln 2}{\sqrt{2}}.\ln|x+\sqrt{x^2+1}|$, e) $\frac{5}{3}\ln|x+\sqrt{x^2-2}|$, f) $\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right|$, g) $\arcsin x + \ln|x+\sqrt{x^2+1}|$.

DESÍTKA ÚLOH čís. 57

Vypočítejte neurčité integrály :

1.a) $\int (1-\frac{1}{x^2}).\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$, $[\frac{4(x^2+7)}{7.\sqrt[4]{x}}]$; b) $\int (1+\mathrm{cotg}^2x)dx$, $[-\mathrm{cotg}\,x]$;

2.a) $\int \frac{2\sin^2x-3\cos^2x}{5\cos^2x}dx$, $[\frac{2}{5}\mathrm{tg}x-x]$; b) $\int (\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x\sqrt{x}})dx$ $[3\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}]$;

3.a) $\int \frac{4+e^x.\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{x^2+2}}dx$, $[e^x+4.\ln|x+\sqrt{x^2+2}|]$; b) $\int \frac{1}{\sin^2 2x}dx$, $[\frac{\mathrm{tg}x-\mathrm{cotg}x}{4}]$;

4.a) $\int \frac{3+e^{-x}.\sin x}{e^{-x}}dx$, $[3e^x-\cos x]$; b) $\int \frac{x^2+3}{x^2+1}dx$, $[x+2\,\mathrm{arctg}x]$;

5.a) $\int (\frac{4}{\sqrt{x^2-6}}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}})dx$, $[4.\ln|x+\sqrt{x^2-6}|+ - 2\arcsin x]$; b) $\int \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$, $[-\sqrt{2}.\cos x]$;

6.a) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx$, $[\frac{2x^2-12x-6}{3\sqrt{x}}]$; b) $\int \frac{1-\sin^3x}{\sin^2x}dx$, $[\cos x - \mathrm{cotg}x]$,

7.a) $\int e^x(1-\frac{e^{-x}}{x^2})dx$, $[e^x+\frac{1}{x}]$; b) $\int \frac{2\mathrm{tg}^2x+5}{3\sin^2x}dx$, $[\frac{2}{3}\mathrm{tg}x-\frac{5}{3}\mathrm{cotg}x]$;

8.a) $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$, $[\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+x]$; b) $\int \frac{8-\sin^2x}{\cos^2x}dx$, $[7\mathrm{tg}x+x]$;

9.a) $\int \frac{\sqrt{x^3}+1}{\sqrt{x}+1}dx$ $[x+\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}]$; b) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2x.\cos^2x}dx$, $[-\mathrm{cotg}x-\mathrm{tg}x]$;

10.a) $\int \frac{7x.\sqrt[6]{x^7}-5\sqrt[3]{x^2}-11}{x.\sqrt[3]{x^2}}dx$, $[\frac{33}{2\sqrt[3]{x^2}}+\frac{14}{3}.\sqrt{x^3}+ -5.\ln|x|]$ b) $\int \frac{1+\sin^2x+2\cos^2x}{1-\cos 2x}dx$, $[-\frac{3}{2}\mathrm{cotg}x-\frac{x}{2}]$.

§ 36. INTEGRACE SUBSTITUČNÍ METODOU.

Integrace zavedením nové proměnné je metodou, které užíváme v různých formách velmi často. K nejjednodušším případům řadíme ty, při nichž po zavedení nové proměnné obdržíme funkci, kterou dovedeme integrovat užitím vzorců.
Jednoduchá je někdy <u>integrace složené funkce, jejíž vnitřní složkou je funkce lineární</u>.

V integrálu $\int f(ax+b)dx$ zavedeme novou proměnnou $\underline{z}$ substituční rovnicí $z = ax+b$ a vypočteme diferenciál dz, abychom našli vztah mezi diferenciály dz, dx a mohli diferenciál dx vyjádřit diferenciálem dz:

$$z = ax + b\ , \qquad dz = (ax+b)'.dx = a.dx\ , \qquad dx = \frac{1}{a}.dz$$

Oba diferenciály se v takovém případě liší jen multiplikativní konstantou. Touto substitucí tedy původní proměnná x vymizí z integrandu.

Daný neurčitý integrál se tak transformuje na neurčitý integrál $\frac{1}{a}\int f(z)\,dz$, který lze případně vypočítat.

Postupně uvedeme integraci substituční metodou u několika typů složených funkcí:

$$\int (ax+b)^n dx = \int z^n.\frac{dz}{a} = \frac{1}{a}\int z^n dz = \frac{1}{a}.\frac{z^{n+1}}{n+1} = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a.(n+1)} + C\ , \quad n \neq -1 \qquad (125)$$

275. <u>cvičení</u>. Vypočítejte neurčité integrály:

a) $\int (4x-3)^4 dx$, b) $\int (x+1)^{15} dx$, c) $\int (1-\frac{x}{6})^5 dx$, d) $\int \frac{1}{(2x-7)^5}dx$, e) $\int \frac{3}{(3x+2)^2}dx$,

f) $\int \frac{1}{x^2-6x+9}dx$, g) $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6}dx$, h) $\int \sqrt[3]{5-6x}\,dx$, k) $\int \frac{1}{\sqrt{4x+9}}dx$, m) $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x}}\,dx$

Výsledky: a) $\frac{1}{20}(4x-3)^5$, b) $\frac{1}{16}(x+1)^{16}$, c) $-(1-\frac{x}{6})^6$, d) $\frac{-1}{8(2x-7)^4}$, e) $\frac{-1}{3x+2}$,
f) $\frac{-1}{x-3}$, g) $-\frac{5}{33}.\sqrt[5]{(8-3x)^{11}}$, h) $-\frac{1}{8}.\sqrt[3]{(5-6x)^4}$, k) $\frac{1}{2}\sqrt{4x+9}$, m) $-\sqrt{3-2x}$.

Velmi často se setkáme s integrálem:

$$\int (ax+b)^{-1}dx = \int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}.\int \frac{1}{z}dz = \frac{1}{a}.\ln|ax+b| + C; \qquad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C \qquad (126)$$

276. <u>cvičení</u>.

a) $\int (3x+5)^{-1}dx$, b) $\int \frac{1}{7x-9}dx$, c) $\int \frac{1}{1-x}dx$, d) $\int \frac{5}{x+2}dx$, e) $\int \frac{a}{x-2}dx$, f) $\int \frac{c}{a^2+b^2x}dx$

<u>Výsledky</u>: a) $\frac{1}{3}\ln|3x+5|$; b) $\frac{1}{7}\ln|7x-9|$, c) $-\ln|1-x|$, d) $5.\ln|x+2|$, e) $a.\ln|x-2|$,
f) $\frac{c}{b^2}\ln|a^2+b^2x|$.

Na předešlý případ uvádíme integraci každé racionální lomené funkce s lineárním jmenovatelem. Přitom možno postupovat dvojím způsobem jako v příkladech /93/a/94/.

/95/. příklad. (Dělíme čitatele jmenovatelem až po konstantní zbytek)

$$\int \frac{6x^3-4x^2+2x-3}{2x-1}dx = \int (3x^2 - \frac{x}{2} + \frac{3}{4} - \frac{9}{4}.\frac{1}{2x-1})dx = x^3 - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{4}x - \frac{9}{8}\ln|2x-1| + C$$

/96/. <u>příklad</u>. (Čitatele vhodně upravujeme a pak dělíme.)

$$\int \frac{x+2}{2x-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{2x-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-1)+1+4}{2x-1}dx = \frac{1}{2}\int (1 + \frac{5}{2x-1})dx = \frac{x}{2} + \frac{5}{4}\ln|2x-1| + C$$

277. cvičení.

a) $\int\frac{2x-1}{x-2}dx$, b) $\int\frac{3+x}{3-x}dx$, c) $\int\frac{x}{x+4}dx$, d) $\int\frac{x}{2x+1}dx$, e) $\int\frac{x^3}{x-2}dx$, f) $\int\frac{x^4}{1-x}\,dx$.

Výsledky : a) $2x+3.\ln|x-2|$, b) $-x-6.\ln|x-3|$, c) $x-4.\ln|x+4|$, d) $\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\ln|2x+1|)$

e) $\frac{x^3}{3}+x^2+4x+8.\ln|x-2|$, f) $-\frac{x^4}{4}-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x-\ln|x-1|$.

$$\begin{aligned}
\int\sin(ax+b)dx &= \frac{1}{a}\int\sin z\,dz = -\frac{1}{a}.\cos z = -\frac{1}{a}.\cos(ax+b)+C\\
\int\cos(ax+b)dx &= \frac{1}{a}\int\cos z\,dz = \frac{1}{a}.\sin z = \frac{1}{a}.\sin(ax+b)+C\\
\int\frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx &= \frac{1}{a}\int\frac{1}{\cos^2 z}\,dz = \frac{1}{a}.\mathrm{tg}\,z = \frac{1}{a}.\mathrm{tg}(ax+b)+C\\
\int\frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx &= \frac{1}{a}\int\frac{1}{\sin^2 z}\,dz = -\frac{1}{a}.\mathrm{cotg}\,z = -\frac{1}{a}.\mathrm{cotg}(ax+b)+C
\end{aligned}\qquad(127)$$

278. cvičení.

a) $\int\sin(2x-3)dx$, b) $\int\cos(3x+2)dx$, c) $\int\sin 5x\,dx$, d) $\int\sin\frac{x}{2}\,dx$, e) $\int(3-\cos 2x)dx$

f) $\int\frac{1}{\sin^2(3x-7)}dx$, g) $\int\frac{1}{\cos^2 8x}dx$, h) $\int\frac{1}{1+\cos x}dx$, k) $\int\frac{1}{1-\cos x}dx$, m) $\int\frac{1}{1-\cos 4x}dx$

(V případech h),k),m) užijte vztahů : $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$, $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$)

Výsledky : a) $\frac{-\cos(2x-3)}{2}$, b) $\frac{1}{3}\sin(3x+2)$, c) $-\frac{1}{5}\cos 5x$, d) $-2\cos\frac{x}{2}$, e) $3x-\frac{1}{2}\sin 2x$,

f) $-\frac{1}{3}\mathrm{cotg}(3x-7)$, g) $\frac{1}{8}.\mathrm{tg}8x$, h) $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$, k) $-\mathrm{cotg}\frac{x}{2}$, m) $-\frac{1}{4}.\mathrm{cotg}\,2x$.

$$\begin{aligned}
\int A^{ax+b}dx &= \frac{1}{a}\int A^z dz = \frac{1}{a}.A^z.\frac{1}{\ln A} = \frac{1}{a.\ln A}.A^{ax+b}+C\ , \quad A>0,\ a\neq 0\\
\int e^{ax+b}dx &= \frac{1}{a}\int e^z dz = \frac{1}{a}.e^z = \frac{1}{a}.e^{ax+b}+C\ , \quad a\neq 0
\end{aligned}\qquad(128)$$

279. cvičení.

a) $\int e^{x-8}dx$, b) $\int e^{7x-5}dx$, c) $\int 3e^{-3x+1}dx$, d) $\int 10^{3x+5}dx$, e) $\int 5^{2x}dx$, f) $\int a^{-x}dx$

g) $\int\frac{e^{2x}-1}{e^x}\,dx$, h) $\int(e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{-x}{2}})dx$, k) $\int(e^x+1)^3dx$.

Výsledky : a) e^{x-8}, b) $\frac{1}{7}e^{7x-5}$, c) $-e^{-3x+1}$, d) $\frac{10^{3x+5}}{3.\ln 10}$, e) $\frac{5^{2x}}{2.\ln 5}$, f) $\frac{-1}{a^x.\ln a}$,

g) e^x+e^{-x}, h) $2(e^{\frac{x}{2}}-e^{\frac{-x}{2}})$, k) $\frac{e^{3x}}{3}+\frac{3}{2}e^{2x}+3e^x+x$.

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}dx = \frac{1}{a}\int\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}dz = \frac{1}{a}.\arcsin z = \frac{1}{a}.\arcsin(ax+b)+C$$

Pro $c>0$: (Naznačená úprava vede k zavedení substituce $t=\frac{ax+b}{\sqrt{c}}$) (129)

$$\int\frac{1}{\sqrt{c-(ax+b)^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{c}}.\int\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{ax+b}{\sqrt{c}})^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{c}}.\frac{\sqrt{c}}{a}\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{1}{a}.\arcsin\frac{ax+b}{\sqrt{c}}$$

Bez uvedené úpravy možno zavést přímo substituci $ax+b = t.\sqrt{c}$ čili $(ax+b)^2 = c.t^2$

280. cvičení.

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}dx$, b) $\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}dx$, c) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$, d) $\int \frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}dx$,

e) $\int \frac{c}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}dx$, f) $\int \frac{5}{\sqrt{2-49x^2}}dx$, g) $\int \frac{1}{\sqrt{36-5x^2}}dx$, h) $\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}dx$,

k) $\int \frac{4}{\sqrt{4-(3-2x)^2}}dx$. Výsledky: a) $\frac{1}{2}\arcsin(2x+3)$, b) $\frac{1}{5}\arcsin 5x$, c) $\arcsin\frac{x}{2}$,
d) $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{2}x$, e) $\frac{c}{b}\arcsin\frac{b}{a}x$, f) $\frac{5}{7}\arcsin\frac{7x}{\sqrt{2}}$, g) $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{x\sqrt{5}}{6}$, h) $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$,
k) $-2\arcsin\frac{3-2x}{2}$.

Na uvedené případy lze převést integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \quad , \quad \text{když} \quad a < 0 .$$

Při jeho výpočtu upravujeme odmocněnce doplněním na čtverec dvojčlenu a uvedením na tvar (129).

/97/. příklad.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+6x+4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4 \quad -3(x^2-2x+ \quad)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4+3-3(x^2-2x+1)}} =$$
$$= \int \frac{dx}{\sqrt{7-3(x-1)^2}} = \ldots\ldots = \frac{1}{\sqrt{3}}.\arcsin\frac{(x-1).\sqrt{3}}{\sqrt{7}} + C$$

(V upraveném integrandu možno užít substituce $(x-1).\sqrt{3} = t.\sqrt{7}$)

281. cvičení.

a) $\int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$, b) $\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2+3x+2}}dx$, c) $\int \frac{1}{\sqrt{-2x-x^2}}dx$, d) $\int \frac{3}{\sqrt{4x-x^2}}dx$.

Výsledky :
a) $-\arcsin\frac{1-x}{2}$, b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}$, c) $\arcsin(x+1)$, d) $3.\arcsin\frac{x-2}{2}$.

Podobných obratů užíváme při výpočtu integrálů :

$$\boxed{\int \frac{dx}{1+(ax+b)^2} \; ; \; \int \frac{dx}{c+(ax+b)^2} \; ; \; c>0 \; ; \; \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \; , \; \text{když jmenovatel je nerozložitelný, tj. když } b^2-4ac<0.} \quad (130)$$

282. cvičení.

a) $\int \frac{1}{1+4x^2}dx$, b) $\int \frac{1}{9+4x^2}dx$, c) $\int \frac{1}{x^2+3}dx$, d) $\int \frac{1}{2x^2+9}dx$, e) $\int \frac{10}{3+7x^2}dx$,

f) $\int \frac{1}{1+(x+1)^2}dx$, g) $\int \frac{2}{(x-1)^2+4}dx$, h) $\int \frac{5}{3+(2-5x)^2}dx$, k) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$, m) $\int \frac{3dx}{x^2+3x+3}$.

Výsledky : a) $\frac{1}{2}\text{arctg}2x$, b) $\frac{1}{6}\text{arctg}\frac{2x}{3}$, c) $\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}$, d) $\frac{1}{3\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{3}$,
e) $\frac{10}{\sqrt{21}}\text{arctg}\frac{x\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$, f) $\text{arctg}(x+1)$, g) $\text{arctg}\frac{x-1}{2}$, h) $\frac{-\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\frac{2-5x}{\sqrt{3}}$, k) $\text{arctg}(x+2)$,
m) $2\sqrt{3}.\text{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{3}}$.

Jednodušší cesta je při výpočtu integrálu $\int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)^2+c}}$, u něhož nemusíme upravovat integrand tak, aby místo členu c obsahoval jako v předešlých případech ± 1 .

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)^2+c}} = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{z^2+c}}dz = \frac{1}{a}.\ln|z+\sqrt{z^2+c}| = \frac{1}{a}.\ln|ax+b+\sqrt{(ax+b)^2+c}|$$

(Bylo zavedeno jen $ax+b = z$.)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad \text{pro } a > 0. \tag{131}$$

(Odmocněnce upravujeme doplněním na čtverec dvojčlenu a uvedením na předešlý tvar.)

283.<u>cvičení</u>.

a) $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+5}}dx$, b) $\int \frac{1}{\sqrt{144x^2-52}}dx$, c) $\int \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}dx$, d) $\int \frac{1}{\sqrt{3x^2-2}}dx$,

e) $\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+3}}dx$, f) $\int \frac{1}{\sqrt{1+(3-5x)^2}}dx$, g) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx$, h) $\int \frac{1}{\sqrt{5-2x+x^2}}dx$,

k) $\int \frac{2}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$, m) $\int \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3x^2-2x-1}}dx$. <u>Výsledky</u>: a) $\frac{1}{2}\ln|2x+\sqrt{4x^2+5}|$,

b) $\frac{1}{12}.\ln|12x+\sqrt{144x^2-52}|$, c) $\frac{c}{b}.\ln|bx+\sqrt{a^2+b^2x^2}|$, d) $\frac{1}{\sqrt{3}}.\ln|x\sqrt{3}+\sqrt{3x^2-2}|$,

e) $\ln|x-1+\sqrt{x^2-2x+4}|$, f) $-\frac{1}{5}\ln|3-5x+\sqrt{25x^2-30x+10}|$, g) $\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}|$,

h) $-\ln|1-x+\sqrt{5-2x+x^2}|$, k) $\ln|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}|$,

m) $\ln|3x-1+\sqrt{9x^2-6x-3}|$.

DESÍTKA ÚLOH čís. 58

1.a) $\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx$ $\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}\right]$; b) $\int \frac{4dx}{1-\cos(4x+2a)}$, $[-\operatorname{cotg}(2x+a)]$;

2.a) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+11}}dx$ $[\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+11}|]$; b) $\int \frac{2dx}{1-3x+3x^2-x^3}$ $\left[\frac{1}{(1-x)^2}\right]$;

3.a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx$ $\left[\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right]$; b) $\int (e^x+e^{-x})^2dx$, $\left[2x+\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\right]$;

4.a) $\int \frac{4}{x^2-2x+5}dx$, $\left[2.\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}\right]$; b) $\int \frac{x^2-4x+5}{x+3}dx$, $\left[-7x+\frac{x^2}{2}+26.\ln|x+3|\right]$

5.a) $\int \frac{1}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$, $\left[\arcsin\frac{x+2}{3}\right]$; b) $\int \frac{3dx}{x^4+4x^3+6x^2+4x+1}$, $\left[-\frac{1}{(x+1)^3}\right]$

6.a) $\int \frac{1}{x^2+4x+29}dx$, $\left[\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{5}\right]$; b) $\int (e^{-3x}-\sqrt[3]{5-6x})dx$, $\left[\frac{\sqrt[3]{(5-6x)^4}}{8} + -\frac{1}{3}e^{-3x}\right]$

7.a) $\int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2x^2-x+2}}dx$, $\left[\ln|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+1}|\right]$; b) $\int (\sin^2x+\cos 2x)dx$, $\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x\right]$;

8.a) $\int \frac{1}{x^2-x+2}dx$, $\left[\frac{2}{\sqrt{7}}.\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right]$; b) $\int \frac{2}{\sqrt{3-4x^2}}dx$, $\left[\arcsin\frac{2x}{\sqrt{3}}\right]$;

9.a) $\int \frac{3}{\sqrt{12x-9x^2-2}}dx$, $\left[\arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{2}}\right]$; b) $\int \frac{x^4}{x^2+2}dx$, $\left[-2x+\frac{x^3}{3}+2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right]$

10.a) $\int \frac{3}{\sqrt{9x^2-6x+2}}dx$ $[\ln|3x-1+\sqrt{9x^2-6x+2}|]$; b) $\int \frac{x^3}{x+3}dx$, $\left[9x-\frac{3x^2}{2}+\frac{x^3}{3} + -27.\ln|x+3|\right]$.

<u>Poznámka</u>. Připomeňme si, že při zavedení nové proměnné za vnitřní lineární složku složené funkce se diferenciály dz a dx lišily jen multiplikativní konstantou, která byla derivací lineární funkce, za niž jsme zavedli novou proměnnou .

Jisté zobecnění dosavadní substituční metody se objeví při výpočtu integrálů

$$\boxed{\int f(x).a.f'(x)\,dx\ , \quad \int \frac{a.f'(x)}{f(x)}\,dx} \qquad (132)$$

V prvém případě jde o integraci funkce, která je součinem, jehož jedním činitelem je nějaká funkce $f(x)$ a druhým činitelem je její derivace, případně derivace té funkce až na nějakou multiplikativní konstantu. Při výpočtu integrálu zavádíme novou proměnnou $z = f(x)$, z čehož $dz = f'(x).dx$ čili $dx = \frac{dz}{f'(x)}$. Pak

$$\int f(x).a.f'(x)\,dx = \int z.a.dz = a\int z.dz = \frac{a}{2}.z^2 = \frac{a}{2}.[f(x)]^2 + C$$

Poněvadž jsme součin $f'(x).dx$ nahradili diferenciálem dz nové proměnné, vymizela původní proměnná z integrandu daného integrálu.
Téhož výsledku dosáhneme, když za diferenciál dx dosadíme $dx = \frac{dz}{f'(x)}$. Obdržíme však přechodný zápis formálně nesprávný, neboť integrand v tomto zápise obsahuje dvě proměnné. Původní proměnná krácením derivací $f'(x)$ také vymizí.
Stejnou substitucí vypočítáváme druhý integrál :

$$\int \frac{a.f'(x)}{f(x)}dx = a\int \frac{1}{f(x)}.f'(x).dx = a\int \frac{1}{z}dz = a.\ln|z| = a.\ \ln|f(x)|$$

V následujících cvičeních je třeba vystihnout, je-li integrovaná funkce součinem nebo podílem podle uvedených vzorů nebo dá-li se na tyto případy upravit.

284.cvičení. Vypočtěte neurčitý integrál :

a) $\int (3x^2-x+7).(6x-1)dx$, b) $\int (x^4-2x^2+3)(x^3-x)dx$, c) $\int \sin x.\cos x\,dx$,

d) $\int tgx.\frac{1}{\cos^2 x}dx$, e) $\int \frac{cotgx}{\sin^2 x}dx$, f) $\int \frac{2.\ln x}{x}dx$, g) $\int arctgx.\frac{1}{2+2x^2}dx$,

h) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, Výsledky: a) $\frac{1}{2}(3x^2-x+7)^2$, b) $\frac{1}{8}(x^4-2x^2+3)^2$, c) $\frac{1}{2}.\sin^2 x$,

d) $\frac{1}{2}.tg^2 x$, e) $-\frac{1}{2}.cotg^2 x$, f) $\ln^2 x$, g) $\frac{1}{4}(arctgx)^2$, h) $\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$.

285.cvičení. a) $\int \frac{4x-8}{2x^2-8x+7}dx$, b) $\int \frac{x}{x^2+3}dx$, c) $\int \frac{\sin x}{\cos x}dx$, d) $\int tg\ x\ dx$,

e) $\int cotgx\ dx$, f) $\int \frac{\cos 2x}{\sin x.\cos x}dx$, g) $\int \frac{1}{cotgx}.\frac{1}{\sin^2 x}dx$, h) $\int \frac{cotgx}{\cos^2 x}dx$,

k) $\int \frac{1}{x.\ln x}dx$, m) $\int \frac{1}{(1+x^2).arctg\ x}dx$, n) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}.\arcsin x}dx$.

Výsledky: a) $\ln(2x^2-8x+7)$, b) $\frac{1}{2}\ln(x^2+3)$, c) $-\ln|\cos x|$, d) jako c), e) $\ln|\sin x|$,
f) $\ln|\sin 2x|$, g) $-\ln|cotgx|$, h) $\ln|tgx|$, k) $\ln|\ln x|$, m) $\ln|arctgx|$, n) $\ln|\arcsin x|$.

Uvedené metody lze užít po úpravě integrandu pro dvě goniometrické funkce :

/98/.příklad: $\int \frac{1}{\sin x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{tg\frac{x}{2}.\cos^2\frac{x}{2}} = \ln|tg\frac{x}{2}| + C.$ Zavedeno $z = tg\frac{x}{2}$

/99/.příklad. $\int \frac{1}{\cos x}dx = \int \frac{dx}{\sin(\frac{\pi}{2}+x)} = \int \frac{dz}{\sin z}$ =(zavedeno $z = \frac{\pi}{2}+x$, $dz = dx$)

$$= \ln|tg\frac{z}{2}| = \ln|tg(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})| + C$$

Vysvětlete, proč integrál $\int \frac{a.f'(x)}{f(x)+k}dx$, kde k je reálné číslo, se vypočte substitucí $z = f(x) + k$.
Užijte toho v následujícím cvičení.

287. <u>cvičení</u>.

a) $\int \frac{\cos x}{\sin x + 1}dx$, b) $\int \frac{\sin x}{1+ 3\cos x}dx$, c) $\int \frac{e^x}{e^x+ 1}dx$, d) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+a^2}\, dx$,

e) $\int \frac{2a^{3x}}{3a^{3x}+ 5}dx$, f) $\int \frac{1}{x(1+ \ln x)}dx$, g) $\int \frac{- 5}{x(3- 5.\ln x)}dx$. <u>Výsledky</u>: a) $\ln|\sin x +1|$, b) $- \frac{1}{3}\ln|1+ 3\cos x|$, c) $\ln(e^x+ 1)$, d) $\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+a^2)$, e) $\frac{2}{9.\ln a}\ln(3a^{3x}+5)$, f) $\ln|1+\ln x|$ g) $\ln|3- 5.\ln x|$.

Úplným zobecněním dosavadní substituční metody je výpočet integrálů:

$$\boxed{\int F[f(x)].a.f'(x)\, dx \quad \text{a} \quad \int \frac{a.f'(x)}{F[f(x)]}dx \quad \text{substitucí} \quad z=f(x)} \qquad (133)$$

/100/. <u>příklad</u>: $\int (3x+2).\sqrt[3]{(3x^2+4x-7)^2}dx$ = /zavedeme $z=3x^2+4x-7$, z čehož $dz=2(3x+2)dx$

$$= \int \sqrt[3]{z^2}.\ \frac{dz}{2} = \frac{1}{2}\int z^{\frac{2}{3}}\, dz = \frac{3}{10}z^{\frac{5}{3}} = \frac{3}{10}.\sqrt[3]{(3x^2+4x-7)^5} + C$$

288. <u>cvičení</u>.

a) $\int (x^2- 5)^{45}.2x dx$, b) $\int x^2(x^3+6)^{-\frac{3}{2}}dx$, c) $\int 2x.\sqrt{x^2+1}dx$, d) $\int x^2\sqrt[3]{x^3-8}dx$,

e) $\int \sin^7 x.\cos x\, dx$, f) $\int \cos^4 x.\sin x\, dx$, g) $\int \cos x.\sqrt{1+ 4\sin x}\, dx$, h) $\int \frac{tg^3 x}{\cos^2 x}\, dx$,

k) $\int \frac{cotg^4 x}{\sin^2 x}\, dx$, m) $\int x.\sin x^2 dx$, n) $\int 2x.\cos(x^2+1)dx$, o) $\int \frac{1}{x^2}.\sin\frac{1}{x}\, dx$,

p) $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$, q) $\int e^x.\cos e^x dx$, r) $\int tg\ 5x\, dx$, s) $\int cotg(2x+1)\, dx$.

<u>Výsledky</u>: a) $\frac{(x^2-5)^{46}}{46}$, b) $- \frac{2}{3}(x^3+6)^{-\frac{1}{2}}$, c) $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}$, d) $\frac{1}{4}.\sqrt[3]{(x^3-8)^4}$, e) $\frac{1}{8}\sin^8 x$, f) $\frac{-\cos^5 x}{+5}$, g) $\frac{1}{6}.\sqrt{(1+ 4\sin x)^3}$, h) $\frac{tg^4 x}{4}$, k) $\frac{-cotg^5 x}{5}$, m) $\frac{-\cos x^2}{2}$, n) $\sin(x^2+1)$, o) $\cos\frac{1}{x}$, p) $-2\cos\sqrt{x}$, q) $\sin e^x$, r) $\frac{\ln|\cos 5x|}{-5}$, s) $\frac{\ln|\sin(2x+1)|}{2}$.

289. <u>cvičení</u>.

a) $\int x.e^{x^2}dx$, b) $\int x^2.e^{-x^3}dx$, c) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$, d) $\int e^{\sin x}.\cos x\, dx$, e) $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$,

f) $\int \frac{1}{x}.\sqrt{\ln x}\, dx$, g) $\int \frac{(\ln x)^n}{x}dx$, <u>Výsledky</u>: a) $\frac{1}{2}e^{x^2}$, b) $\frac{-e^{-x^3}}{3}$, c) $2e^{\sqrt{x}}$, d) $e^{\sin x}$, e) $\frac{1}{3}\ln^3 x$, f) $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}$, g) $\frac{1}{n+1}.(\ln x)^{n+1}$.

290. <u>cvičení</u>.

a) $\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\, dx$, b) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{(8x^3+27)^2}}dx$, c) $\int \frac{x^4}{2\sqrt{4+x^5}}dx$, d) $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4+ 1}}dx$,

e) $\int \frac{x}{\sqrt{a^2+ x^2}}dx$, f) $\int \frac{6x-5}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}dx$, g) $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}dx$, h) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$, k) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}dx$

m) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}dx$, n) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{1+2\cos x}}\, dx$, o) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$, p) $\int \frac{1}{\cos^2 x.\sqrt{1+ tgx}}\, dx$

q) $\int \frac{1}{x.\ln x.\ln(\ln x)}dx$, r) $\int \frac{1}{(\arcsin x)^3.\sqrt{1-x^2}}dx$.

<u>Výsledky</u>: a) $\frac{-1}{2(1+x^2)}$, b) $\frac{1}{8}.\sqrt[3]{8x^3+27}$, c) $\frac{1}{5}.\sqrt{4+x^5}$, d) $\frac{3}{8}.\sqrt[3]{(x^4+1)^2}$, e) $\sqrt{a^2+x^2}$,

f) $\sqrt{3x^2-5x+6}$, g) $\frac{-1}{3\sin^3 x}$, h) $\frac{1}{2\cos^2 x}$, k) $3.\sqrt[3]{\sin x}$, m) $\frac{2}{\sqrt{\cos x}}$, n) $\frac{-3\sqrt[3]{(1+2\cos x)^2}}{4}$

o) $-2.\sqrt{1+\cos^2 x}$, p) $2.\sqrt{1+\mathrm{tg}x}$, q) $\ln|\ln(\ln x)|$, r) $\frac{-1}{2(\arcsin x)^2}$.

Substitucí $f(x) = z$ a $f'(x).dx = dz$ převádíme následující integrály na základní integrály (124) :

$$\int \frac{a.f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}dx, \quad \int \frac{a.f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx, \quad \int \frac{a.f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2+b}}dx, \quad b \text{ reálné} \qquad (134)$$

291.cvičení.

a) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}dz = \frac{1}{2}\arcsin z = \frac{1}{2}\arcsin x^2 + C$

(Dosazeno $x^2 = z$, $2x.dx = dz$)

b) $\int \frac{x}{\sqrt{4-9x^4}}dx$, c) $\int \frac{x}{\sqrt{3-x^4}}dx$, d) $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx$, e) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$, f) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{2-3e^{2x}}}$

g) $\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}.\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}dx$, h) $\int \frac{dx}{x.\sqrt{1-(\ln x)^2}}$, k) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4-9\sin^4 x}}dx$

Výsledky: b) $\frac{1}{6}\arcsin \frac{3x^2}{2}$, c) $\frac{1}{2}\arcsin \frac{x^2}{\sqrt{3}}$, d) $\frac{\arcsin 2^x}{\ln 2}$, e) $\arcsin e^x$,

f) $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin e^x\sqrt{\frac{3}{2}}$, g) $2\arcsin \sqrt{x}$, h) $\arcsin(\ln x)$, k) $\frac{1}{3}.\arcsin(\frac{3}{2}\sin^2 x)$.

292.cvičení.

a) $\int \frac{x}{x^4+1}dx$, b) $\int \frac{x^2}{x^6+4}dx$, c) $\int \frac{x}{3+2x^4}dx$, d) $\int \frac{x}{9+(x^2+1)^2}dx$,

e) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+4}dx$, f) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$, g) $\int \frac{\cos x}{a^2+\sin^2 x}dx$, h) $\int \frac{dx}{(1+x).\sqrt{x}}$, k) $\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$.

Výsledky: a) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\, x^2$, b) $\frac{1}{6}\mathrm{arctg}\, \frac{x^3}{2}$, c) $\frac{1}{2\sqrt{6}}\mathrm{arctg}\frac{x^2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, d) $\frac{1}{6}\mathrm{arctg}\, \frac{x^2+1}{3}$,

e) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\, \frac{e^x}{2}$, f) $2(\sqrt{x} - \mathrm{arctg}\sqrt{x})$, g) $\frac{1}{a}.\mathrm{arctg}\, \frac{\sin x}{a}$, h) $2\mathrm{arctg}\sqrt{x}$, k) $\mathrm{arctg}(\ln x)$.

293.cvičení.

a) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^8-1}}dx$, b) $\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}dx$, c) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{25\sin^2 x-1}}dx$, d) $\int \frac{a^{2x}.\ln a^2}{\sqrt{a^{4x}+2}}dx$.

Výsledky: a) $\frac{1}{4}\ln(x^4+\sqrt{x^8-1})$, b) $2.\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})$, c) $\frac{1}{5}.\ln|5\sin x + \sqrt{25\sin^2 x-1}|$,

d) $\ln(a^{2x}+\sqrt{a^{4x}+2})$.

Integrace rozkladem integrované funkce na součet funkcí.

Pro některé integrály můžeme již užít rozkladu integrované funkce na součet takových funkcí, jichž integrály dovedeme již známým způsobem vypočítat. Někdy je rozklad přímo patrný a účelný, jindy je třeba integrand upravovat.

/101/.příklad.

a) $\int \frac{1-2\cos x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx - 2\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = -\mathrm{cotg}x + \frac{2}{\sin x} = \frac{2-\cos x}{\sin x} + C$

(U druhého integrálu zavedeno $\sin x = z$)

b) $\int \frac{x+(\mathrm{arctg})^{-1}}{1+x^2}dx = \int \frac{x}{1+x^2}dx + \int \frac{(\mathrm{arctg}x)^{-1}}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln|\mathrm{arctg}x| + C$.

Velmi důležité jsou integrály :

1) pro $c > 0$

$$\int \frac{ax+b}{x^2+c}dx = \int \frac{ax}{x^2+c}dx + \int \frac{b}{x^2+c}dx = \frac{a}{2}\int \frac{2x}{x^2+c}dx + b\int \frac{1}{x^2+c}dx = \frac{a}{2}\ln(x^2+c) + \frac{b}{\sqrt{c}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{c}}$$

$$\int \frac{ax+b}{\sqrt{c-x^2}}dx = \int \frac{ax.dx}{\sqrt{c-x^2}} + \int \frac{b.dx}{\sqrt{c-x^2}} = \frac{-a}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{c-x^2}}dx + \frac{b}{\sqrt{c}}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -a\sqrt{c-x^2} + b.\arcsin\frac{x}{\sqrt{c}}$$

2) pro c reálné (zavedeno $x = t\sqrt{c}$)

$$\int \frac{ax+b}{\sqrt{x^2+c}}dx = \int \frac{ax.dx}{\sqrt{x^2+c}} + \int \frac{b.dx}{\sqrt{x^2+c}} = \frac{a}{2}\int \frac{2x.dx}{\sqrt{x^2+c}} + b\int \frac{1}{\sqrt{x^2+c}}dx = a.\sqrt{x^2+c} + b.\ln|x+\sqrt{x^2+c}|$$

294.cvičení.

a) $\int \frac{3x-1}{x^2+9}dx$, b) $\int \frac{1-2x}{4x^2+3}dx$, c) $\int \frac{4x+5}{\sqrt{4-x^2}}dx$, d) $\int \frac{5x-2}{\sqrt{5-2x^2}}dx$, e) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{9x^2-4}}dx$

Výsledky: a) $\frac{3}{2}\ln(x^2+9) - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}$, b) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4}\ln(4x^2+3)$, c) $-4.\sqrt{4-x^2} + 5\arcsin\frac{x}{2}$, d) $-\frac{5}{2}\sqrt{5-2x^2} - \sqrt{2}.\arcsin x\sqrt{0,4}$, e) $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2-4} - \frac{1}{3}\ln|3x+\sqrt{9x^2-4}|$.

Na předešlé případy převedeme integrály typu

$$\int (Mx+N).(ax^2+bx+c)^n \quad \text{pro} \quad n = -1 \ , \ \frac{1}{2} \ , \ -\frac{1}{2} \qquad (135)$$

Lze určit dvě konstanty k_1 , k_2 tak,že pro každé x je splněna rovnost :

$$(Mx+N).(ax^2+bx+c)^n = k_1.(2ax+b).(ax^2+bx+c)^n + k_2.(ax^2+bx+c)^n$$

a tedy také rovnost $Mx+N = k_1.(2ax+b) + k_2$,kde $2ax+b = (ax^2+bx+c)'$ (136)

čili $Mx+N = 2ak_1.x + (bk_1 + k_2)$

Z rovnosti mnohočlenů plyne soustava lineárních rovnic o neznámých k_1 , k_2 :

$$2ak_1 = M \quad , \quad bk_1 + k_2 = N$$

Užitím konstant k_1 a k_2 ,jež dovedeme naznačeným způsobem vypočítat,nahradíme integrovanou funkci součtem dvou funkcí,které již dovedeme integrovat. Uvedeného typu (135) užijeme zatím pro $n = -1$ a $n = -\frac{1}{2}$,tj. pro

$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx \quad \text{a} \quad \int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

První integrál je zvlášť důležitý,když ve jmenovateli je nerozložitelný kvadratický trojčlen.

/102/.příklad.

$$\int \frac{9x-2}{\sqrt{-9x^2+12x-2}}dx = J$$

Provedeme rozklad integrandu na součet dvou lomených funkcí,z nichž jedna má v čitateli derivaci trojčlenu $-9x^2+12x-2$,případně až na konstantu k_1 ,a druhá má v čitateli konstantu k_2.

$$(-9x^2+12x-2)' = -18x + 12$$

Užijeme přímo rovnosti (136) :

$$9x - 2 = (-18x + 12).k_1 + k_2$$

čili

$$9x - 2 = -18k_1x + (12k_1 + k_2)$$

Z rovnosti mnohočlenů plyne: $-18k_1 = 9$, $12k_1 + k_2 = -2$ čili $k_1 = -\frac{1}{2}$, $k_2 = 4$

Pak $$J = -\frac{1}{2}\int \frac{-18x+12}{\sqrt{-9x^2+12x-2}}dx + 4.\int \frac{1}{\sqrt{-9x^2+12x-2}}dx = -\frac{1}{2}.J_1 + 4.J_2$$

Integrál J_1 vypočteme substitucí $z = -9x^2+12x-2$; $J_1 = -\sqrt{-9x^2+12x-2}$

Integrál J_2 vypočteme úpravou na tvar (129) ; $J_2 = \frac{1}{3}.\arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{2}}$

$$J = \frac{1}{2}.\sqrt{-9x^2+12x-2} + \frac{4}{3}.\arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{2}} + C$$

Rozklad na součet dvou lomených funkcí lze provést přímo úpravou na požadovaný tvar.Avšak je třeba vystihnout,jak nutno čitatele doplňovat.Například:

$$\int\frac{9x-2}{\sqrt{-9x^2+12x-2}}dx = -\frac{1}{2}\int\frac{-18x+4}{\sqrt{-9x^2+12x-2}}dx = -\frac{1}{2}\int\frac{(-18x+12)+(4-12)}{\sqrt{-9x^2+12x-2}}dx$$

$$= -\frac{1}{2}.J_1 + 4.J_2 \quad \text{(jako u prvního způsobu rozkladu)}$$

V některých případech je tato úprava složitější.Například:

$$\int\frac{7x+4}{5x^2-3x+1}dx = J \quad ; \quad (5x^2-3x+1)' = 10x-3$$

$$J = 7.\int\frac{x+\frac{4}{7}}{5x^2-3x+1}dx = \frac{7}{10}.\int\frac{10x+\frac{40}{7}}{5x^2-3x+1}dx = \frac{7}{10}.\int\frac{(10x-3)+(3+\frac{40}{7})}{5x^2-3x+1}dx =$$

$$= \frac{7}{10}.\int\frac{10x-3}{5x^2-3x+1}dx + \frac{61}{10}.\int\frac{1}{5x^2-3x+1}dx = \frac{7}{10}.J_1 + \frac{61}{10}.J_2$$

Integrál J_1 vypočteme substitucí $z = 5x^2-3x+1$,integrál J_2 úpravou na typ (130)

95.cvičení. Vypočtěte integrály :

a) $\int\frac{5x+2}{x^2+2x+10}dx$, [$\frac{5}{2}\ln(x^2+2x+10) - \operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + C$]

b) $\int\frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx$, [$-8.\sqrt{5+2x-x^2} - 3.\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}} + C$]

c) $\int\frac{x}{\sqrt{3x^2-11x+2}}dx$, [$\frac{1}{3}.\sqrt{3x^2-11x+2} + \frac{11}{6\sqrt{3}}.\ln\left|x-\frac{11}{6} + \frac{1}{\sqrt{3}}.\sqrt{3x^2-11x+2}\right|$]

DESÍTKA ÚLOH čís. 59 Vypočtěte neurčité integrály :

1) $\int\frac{x+1}{x^2+x+1}dx$, 2) $\int\frac{x}{4x^2+4x+5}dx$, 3) $\int\frac{5x^4-7x^3+4x^2+3x-2}{x^2+x+1}dx$

4) $\int\frac{x-2}{\sqrt{x^2-10x+29}}dx$, 5) $\int\frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}dx$, 6) $\int\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$, 7) $\int\frac{x}{\sqrt{2x^2+4x+5}}dx$

8) $\int\frac{2x-3}{\sqrt{8-2x-x^2}}dx$, 9) $\int\frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}}dx$, 10) $\int\frac{x}{\sqrt{5+x-x^2}}dx$. Výsledky :

1) $\frac{1}{2}.\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}.\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, 2) $\frac{1}{8}.\ln(4x^2+4x+5) - \frac{1}{8}.\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{2}$,

3) $\frac{5}{3}x^3-6x^2+11x+2.\ln(x^2+x+1) - \frac{30}{\sqrt{3}}.\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, 4) $\sqrt{x^2-10x+29} + 3.\ln\left|x-5+\sqrt{x^2-10x+29}\right|$

5) $\frac{2}{9}.\sqrt{9x^2+6x+2} + \frac{13}{9}.\ln\left|3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2}\right|$, 6) $3.\sqrt{x^2+2x+2} - 4.\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|$,

7) $\frac{1}{2}.\sqrt{2x^2+4x+5} - \frac{1}{\sqrt{2}}.\ln\left|(x+1)\sqrt{2}+\sqrt{2x^2+4x+5}\right|$, 8) $-2.\sqrt{8-2x-x^2} - 5.\arcsin\frac{x+1}{3}$,

9) $-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2} + \frac{7}{4}.\arcsin\frac{2x-1}{2}$, 10) $-\sqrt{5+x-x^2} + \frac{1}{2}.\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{21}}$.

§ 37. INTEGRACE METODOU PER PARTES (p o č á s t e c h).

Integrace metodou per partes se provádí podle rovnosti :

$$\int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int u'(x).v(x)dx$$

stručně
$$\int u.v' = u.v - \int u'.v \tag{137}$$

Metoda per partes spočívá v tom,že integrovanou funkci zapíšeme jako součin takových dvou funkcí u, v′, z nichž za v′ považujeme tu funkci,kterou dovedeme integrovat,abychom určili funkci v.

Užití rovnosti (137) vede k cíli v podstatě ve dvou případech,a to když integrál na pravé straně rovnosti dovedeme

buď vypočítat jinými metodami,případně opakováním metody per partes,

nebo vyjádřit hledaným integrálem tak,aby z rovnosti (137) vznikla rovnice pro hledaný integrál jako neznámou.

Postupně uvedeme několik typů funkcí,jež možno touto metodou integrovat.

$$\int \underset{u}{x}.\underset{v'}{f(x)}dx \quad \text{nebo obecněji} \quad \int \underset{u}{(Mx+N)}.\underset{v'}{f(x)}dx \tag{138}$$

Funkce $f(x)=v'$ musí být taková,abychom dovedli určit $v=\int f(x)dx$.

/103/.příklad.

$$\int \underset{u}{(5x+3)}.\underset{v'}{e^{3x-2}}dx = \frac{5x+3}{3}.e^{3x-2} - \frac{5}{3}\int e^{3x-2}dx$$
$$= \frac{5x+3}{3}.e^{3x-2} - \frac{5}{9}.e^{3x-2}$$
$$= \frac{1}{9}e^{3x-2}.(15x+4) + C$$

Zavedeme :

$u=5x+3 \longrightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x-2}$, $\quad v' = e^{3x-2}$

$u' = 5 \longrightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x-2}$

Výpočet ...... $v = \int e^{3x-2}dx = \frac{1}{3}e^{3x-2}$

Zápis při volbě funkcí u a v′ a při výpočtu funkcí u′ a v provádíme co nejpřehledněji,případně užijeme naznačeného schematu,který vede k správnému sestavení rovnosti pro integraci per partes.

296.cvičení.

a) $\int x.e^{x}dx$, b) $\int x.e^{2x}dx$, c) $\int x.3^{x}dx$, d) $\int (2x+1).2^{2x-3}dx$, e) $\int x.\sin x\,dx$

f) $\int (3x+2).\cos x\,dx$, g) $\int x.\sin 2x\,dx$, h) $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$, k) $\int \frac{x.\cos 2x}{\sin^2 x.\cos^2 x}dx$,

m) $\int x.\mathrm{tg}^2 x\,dx$, n) $\int x.\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$, o) $\int x.\sin^2 x\,dx$, p) $\int x.\cos^2 x\,dx$, q) $\int x.\sin^2\frac{x}{2}dx$

r) $\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}}dx$, s) $\int x.\sqrt[3]{5-6x}\,dx$. Výsledky: a) $(x-1)e^{x}$, b) $\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})e^{2x}$,

c) $\frac{1}{\ln 3}.(x-\frac{1}{\ln 3}).3^{x}$, d) $\frac{2^{2x-3}}{2.\ln 2}(2x+1-\frac{1}{\ln 2})$, e) $\sin x - x.\cos x$, f) $(3x+2)\sin x + 3\cos x$,

g) $-\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$, h) $-x.\mathrm{cotg}x + \ln|\sin x|$, k) $-x(\mathrm{tg}x + \mathrm{cotg}x) + \ln|\mathrm{tg}x|$,

m) $x.\mathrm{tg}x - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x|$, n) $-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sin^2 x} + \mathrm{cotg}x)$, o) $\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}x.\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x$,

p) $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x$, q) $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$, r) $x.\sqrt{1+2x} - \frac{1}{3}.\sqrt{(1+2x)^3}$,

s) $-\frac{x}{8}.\sqrt[3]{(5-6x)^4} - \frac{1}{112}.\sqrt[3]{(5-6x)^7}$.

$$\int \underset{u}{x^n} . \underset{v'}{f(x)}\, dx\ , \quad n \text{ přirozené} \ ; \quad \int \underset{u}{P(x)} . \underset{v'}{f(x)} dx\ , \quad P(x) \text{ je mnohočlen} \tag{139}$$

Funkce $f(x)$ může být např.: $\sin x$, $\cos x$, $\sin(ax+b)$, $\cos(ax+b)$, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, e^x, a^x, e^{ax+b}, a^{cx+d}, $\sinh x$, $\cosh x$, ...

Je-li $\underline{n}$ stupeň funkce $\underline{u}$, užijeme metody per partes n-krát.

297. cvičení.

a) $\int x^2 . \cos x\, dx$, b) $\int x^3 . \sin x\, dx$, c) $\int x^2 . \sin 2x\, dx$, d) $\int x^2 . \cos kx\, dx$,

e) $\int (x^2-3x+2) . e^x dx$, f) $\int x^2 . e^{-2x} dx$, g) $\int x^2 . \cos^2 x\, dx$, h) $\int x^3 . \cosh x\, dx$.

Výsledky : a) $(x^2-2)\sin x + 2x . \cos x$, b) $-x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x . \cos x - 6\sin x$,
c) $\frac{1-2x^2}{4}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x$, d) $\frac{k^2x^2-2}{k^3}\sin kx + \frac{2x}{k^2}\cos kx$, e) $(x^2-5x+7) . e^x$,
f) $\frac{-e^{-2x}}{2}(x^2+x+\frac{1}{2})$, g) $\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4}\sin 2x + \frac{x}{4}\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x$, h) $(x^3+6x)\sinh x - (3x^2+6) . \cosh x$

V některých případech je třeba mocninu x^n nahradit tak součinem $x^k . x^h$, aby bylo možno vypočítat integrál $x^k . x^h f(x) dx$ zavedením $u = x^k$, $v' = x^h f(x)$:

298. cvičení.

a) $\int x^3 . e^{x^2} dx$, b) $\int x^5 . e^{-x^2} dx$, c) $\int x^5 . e^{x^3} dx$, d) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int x^2 . \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$

e) $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$, f) $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{3+5x^2}} dx$. Výsledky : a) $\frac{1}{2}e^{x^2} . (x^2-1)$, b) $-e^{-x^2} . (\frac{x^4}{2}+x^2+1)$,
c) $\frac{1}{3} . (x^3-1) . e^{x^3}$, d) $x^2 . \sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3} . \sqrt{(1+x^2)^3}$, e) $-\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} . \operatorname{arctg} x$,
f) $\frac{3x^2}{20} . \sqrt[3]{(3+5x^2)^2} - \frac{9}{500} . \sqrt[3]{(3+5x^2)^5}$.

V následujících případech volíme funkce $\underline{u}$ a $\underline{v'}$ obráceně :

$$\int \underset{v'}{x^n} . \underset{u}{\ln x}\, dx\ , \quad n \neq -1 \qquad \int \underset{v'}{x^n} . \underset{u}{\ln(ax+b)}\, dx\ , \quad n \text{ přirozené}$$

$$\int \underset{v'}{x^n} . \underset{u}{\operatorname{arctg} x}\, dx\ , \qquad \int \underset{v'}{x^n} . \underset{u}{\operatorname{arccotg} x}\, dx\ , \quad n \text{ přirozené} \tag{140}$$

299. cvičení.

a) $\int x . \ln x\, dx$, b) $\int x^2 . \ln x\, dx$, c) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$, d) $\int \frac{\log x}{x^3} dx$, e) $\int \sqrt{x} . (\ln x)^2 dx$

f) $\int x . \ln(x-1)\, dx$, g) $\int x^2 . \ln(x+1)\, dx$. Výsledky : a) $\frac{x^2}{4}(2 . \ln x - 1)$, b) $\frac{x^3}{9}(3 . \ln x - 1)$,
c) $-\frac{1}{x}(\ln x + 1)$. d) $\frac{-1}{2x^2}(\log x + \frac{\log e}{2})$, e) $\frac{2x\sqrt{x}}{3}(\ln^2 x - \frac{4}{3}\ln x + \frac{8}{9})$
f) $\frac{x^2}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x-1)$, g) $\frac{x^3+1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x$.

300. cvičení.

a) $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx$, b) $\int (\frac{\ln x}{x})^2 dx$, c) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$; Výsledky :
a) $-\frac{1}{x}(\ln^3 x + 3 . \ln^2 x + 6 . \ln x + 6)$, b) $-\frac{1}{x}(\ln^2 x + 2 . \ln x + 2)$, c) $\ln|x| . \ln|\ln x| - \ln|x|$.

301. cvičení.

a) $\int x . \operatorname{arctg} x\, dx$, b) $\int x^3 . \operatorname{arctg} x\, dx$, c) $\int x^4 . \operatorname{arccotg} x\, dx$.

Výsledky : a) $\frac{x^2+1}{2}\text{arctg } x - \frac{x}{2}$, b) $\frac{x^4-1}{4}\text{arctg}x - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4}$,

c) $\frac{x^5}{5}\text{arccotg}x + \frac{1}{10}\ln(x^2+1) + \frac{x^4}{20} - \frac{x^2}{10}$.

U následujících integrálů zapíšeme integrovanou funkci $f(x)$ jako součin $1.f(x)$ a zavedeme $u = f(x)$, $v' = 1$, z čehož $u' = f'(x)$ a $v = x$.
Tohoto obratu užijeme zvláště pro základní elementární funkce $\ln x$, $\arcsin x$, $\text{arctg } x$.

302.cvičení

a) $\int \ln x \, dx$, b) $\int \log_a x \, dx$, c) $\int \arcsin x \, dx$, d) $\int \text{arctg}x \, dx$, e) $\int \ln(x^2+1)$

f) $\int e^{\sqrt{x}} dx$, g) $\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})$, h) $\int \text{arctg}\sqrt{x} \, dx$, k) $\int (\arcsin x)^2 dx$.

Výsledky: a) $x(\ln x - 1)$, b) $x(\log_a x - \frac{1}{\ln a})$, c) $x.\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$, d) $x.\text{arctg}x + {}$ $- \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$, e) $x.\ln(x^2+1) - 2x + 2\text{arctg}x$, f) $2(\sqrt{x} - 1).e^{\sqrt{x}}$, g) $x.\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1}$,

h) $x.\text{arctg}\sqrt{x} + \text{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x}$, k) $x(\arcsin x)^2 + 2\arcsin x.\sqrt{1-x^2} - 2x$.

Metodou per partes integrujeme často součin dvou funkcí různého charakteru. Je-li integrand podílem funkcí, je třeba jej zapsat jako součin a správně vystihnout, jak zavést funkce u a v' .Například:

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx = \int \underset{u}{\arcsin x}.\underset{v'}{\frac{1}{\sqrt{x+1}}} dx = 2.\sqrt{x+1}.\arcsin x + 4.\sqrt{x+1} + C$$

DESÍTKA ÚLOH čís. 60

Vypočtěte neurčité integrály :

1) $\int \frac{x.\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$, 2) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$, 3) $\int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}} dx$, 4) $\int x.(\text{arctg}x)^2 dx$,

5) $\int \frac{x.\text{arctg } x}{\sqrt{1+x^2}} dx$, 6) $\int \frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}}.\text{arctg}x \, dx$, 7) $\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} dx$, 8) $\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx$,

9) $\int \frac{x.\ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}} dx$, 10) $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} dx$. Výsledky: 1) $x - \sqrt{1-x^2}.\arcsin x$,

2) $-2.\sqrt{1-x}.\arcsin\sqrt{x} + 2.\sqrt{x}$, 3) $4.\sqrt{2+x} - 2.\sqrt{2-x}.\arcsin \frac{x}{2}$, 4) $\frac{x^2+1}{2}(\text{arctg}x)^2 + {}$ $-x.\text{arctg}x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$, 5) $\sqrt{1+x^2}.\text{arctg}x - \ln|x+\sqrt{1+x^2}|$, 6) $\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}.\text{arctg}x - 2\sqrt{x}$

7) $\text{tg}x.\ln|\cos x| + \text{tg}x - x$, 8) $-(\text{cotg}x.\ln|\sin x| + \text{cotg}x + x)$,

9) $\text{arctg}\sqrt{x^2-1} - \frac{\ln|x|}{\sqrt{x^2-1}}$, 10) $2.\sqrt{x+1}.\ln(x+1) - 4.\sqrt{x+1}$, $x > -1$.

Integrace per partes p ř e v e d e n í m n a r o v n i c i pro hledaný integrál.

/104/.příklad. $\int e^x.\cos x \, dx = J$

Zavedeme: $u = e^x \rightarrow v = \sin x$, $v' = \cos x$, $u' = e^x$

$$\int e^x.\cos x \, dx = e^x.\sin x - \int e^x.\sin x \, dx$$

Zavedeme: $u = e^x \rightarrow v = -\cos x$, $v' = \sin x$, $u' = e^x$

$$\int e^x.\sin x \, dx = -e^x.\cos x + \int e^x.\cos x \, dx$$

Tím jsme integrál funkce $e^x.\sin x$ vyjádřili hledaným integrálem J. Po dosazení do první rovnosti obdržíme rovnici, v níž neznámou jest hledaný integrál:

$$\int e^x.\cos x\,dx = e^x\sin x + e^x\cos x - \int e^x\cos x\,dx$$

$$2\int e^x.\cos x\,dx = e^x(\sin x + \cos x)$$

$$\int e^x.\cos x\,dx = \frac{e^x}{2}.(\sin x + \cos x) + C$$

3.cvičení.
a) $\int e^x.\sin x\,dx$, b) $\int \frac{\sin\frac{x}{2}}{e^x}\,dx$, c) $\int \frac{\ln x}{x}dx$.

Výsledky: a) $\frac{e^x}{2}.(\sin x-\cos x)$, b) $\frac{-2}{5e^x}(2\sin\frac{x}{2} +\cos\frac{x}{2})$, c) $\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

DESÍTKA ÚLOH čís. 61

Vypočtěte neurčité integrály :

1) $\int e^{ax}.\cos bx\,dx$, 2) $\int e^{ax}.\sin bx\,dx$, 3) $\int e^{3x}.\sin 2x\,dx$, 4) $\int e^x.\cos 3x\,dx$
5) $\int e^{\frac{x}{2}}.\cos 2x\,dx$, 6) $\int e^{\frac{-x}{3}}.\sin\frac{x}{3}\,dx$, 7) $\int e^x.\sin^2 x\,dx$, 8) $\int e^x.\cos^2 x\,dx$,
9) $\int \sin\ln x\,dx$, 10) $\int \cos\ln x\,dx$. Výsledky: 1) $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}.(a.\cos bx + b.\sin bx)$
2) $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}.(a.\sin bx - b.\cos bx)$, 3) $\frac{e^{3x}}{13}.(3\sin 2x- 2\cos 2x)$, 4) $\frac{e^x}{10}.(\cos 3x + 3\sin 3x)$,
5) $\frac{2}{17}e^{\frac{x}{2}}.(4\sin 2x + \cos 2x)$, 6) $-\frac{3}{2}e^{\frac{-x}{3}}.(\sin\frac{x}{3} + \cos\frac{x}{3})$, 7) $\frac{e^x}{2}.(1- \frac{2\sin 2x + \cos 2x}{5})$
8) $\frac{e^x}{5}.(\sin 2x + \cos^2 x +2)$, 9) $\frac{x}{2}.(\sin\ln x - \cos\ln x)$, 10) $\frac{x}{2}(\cos\ln x + \sin\ln x)$

105/.příklad. $\int \sin^2 x\,dx = J$

$$\int \sin x.\sin x\,dx = -\sin x.\cos x + \int \cos^2 x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\sin 2x + \int (1-\sin^2 x)dx$$

$$\int \sin^2 x\,dx = -\frac{1}{2}\sin 2x + x - \int \sin^2 x\,dx$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}.(x - \frac{1}{2}\sin 2x) + C$$

Zavedeme:

$u = \sin x$ $v' = \sin x$
$u' = \cos x$ $v = -\cos x$

Integrál pravé strany nelze počítat stejným způsobem. Přesvědčte se !

106/.příklad.

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \int 1.\sqrt{x^2+a}\,dx$$

$$= x.\sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}\,dx$$

$u = \sqrt{x^2+a}$ $v' = 1$
$u' = \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}$ $v = x$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \int \frac{(x^2+a)-a}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \int \sqrt{x^2+a}\,dx - \int \frac{a}{\sqrt{x^2+a}}\,dx$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = x.\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a}\,dx + a.\ln|x + \sqrt{x^2+a}|$$

Z rovnice vypočteme hledaný integrál, důležitý pro další integraci :

$$\boxed{\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}.[\, x.\sqrt{x^2+a} + a.\ln|x + \sqrt{x^2+a}|\,],\ \underline{a}\ \text{reál.}} \qquad (141)$$

Podobným způsobem vypočtěte sami stejně důležitý integrál :

$$\boxed{\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left[\, x\cdot\sqrt{a-x^2} + a\cdot\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}}\,\right], \quad a > 0} \qquad (142)$$

S oběma integrály se často setkáme a proto jich také užíváme jako vzorců. Později je vypočteme i jiným způsobem. Nyní jich užijeme k výpočtu integrálů:

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\,dx \quad \text{pro } a > 0 \text{ nebo } a < 0$$

Kvadratický trojčlen upravíme doplněním na čtverec dvojčlenu jako v /97/.př.

/107/.příklad. $\int \sqrt{3x^2 - 3x + 1}\,dx = J$

Úprava odmocněnce : $3x^2-3x+1 = 3(x^2 - x + \frac{1}{4}) + (1 - \frac{3}{4}) = 3(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$

$$= 3\cdot\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

Nová proměnná : $z = \frac{\sqrt{3}}{2}(2x-1)$, z čehož $dx = \frac{dz}{\sqrt{3}}$

Po dosazení :

$$J = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \sqrt{z^2 + \frac{1}{4}}\,dz = \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\left[\, z\cdot\sqrt{z^2+\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\cdot\ln\left|z + \sqrt{z^2+\frac{1}{4}}\right| \,\right] =$$

Původní proměnná :

$$= \frac{2x-1}{4}\cdot\sqrt{3x^2-3x+1} + \frac{1}{8\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}}{2}(2x-1) + \sqrt{3x^2-3x+1}\right| .$$

DESÍTKA ÚLOH čís. 62

Vypočtěte neurčitý integrál :

1) $\int \sqrt{x^2 - 2x - 1}\,dx$, $\quad \left[\, \frac{x-1}{2}\cdot\sqrt{x^2-2x-1} - \ln\left|x-1 + \sqrt{x^2-2x-1}\right| + C \,\right]$

2) $\int \sqrt{5x^2-6x-1}\,dx$, $\quad \left[\, \frac{5x-3}{10}\cdot\sqrt{5x^2-6x-1} - \frac{7}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{5x-3}{\sqrt{5}} + \sqrt{5x^2-6x-1}\right| + C \,\right]$

3) $\int \sqrt{2+x+x^2}\,dx$, $\quad \left[\, \frac{2x+1}{4}\cdot\sqrt{2+x+x^2} + \frac{7}{8}\cdot\ln\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{2+x+x^2}\right| + C \,\right]$

4) $\int \sqrt{3+2x-x^2}\,dx$, $\quad \left[\, \frac{x-1}{2}\cdot\sqrt{3+2x-x^2} + 2\cdot\arcsin\frac{x-1}{2} + C \,\right]$

5) $\int \sqrt{1-2x-x^2}\,dx$, $\quad \left[\, \frac{x+1}{2}\cdot\sqrt{1-2x-x^2} + \arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C \,\right]$

6) $\int \sqrt{2+x-x^2}\,dx$, $\quad \left[\, \frac{2x-1}{4}\cdot\sqrt{2+x-x^2} + \frac{9}{8}\cdot\arcsin\frac{2x-1}{3} + C \,\right]$

7) $\int x\cdot\sqrt{x^4+2x^2-1}\,dx$, $\quad \left[\, \frac{x^2+1}{4}\cdot\sqrt{x^4+2x^2-1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1 + \sqrt{x^4+2x^2-1}) + C \,\right]$

8) $\int (x+1)\cdot\sqrt{x^2-2x+3}\,dx$, $\quad \left[\, \frac{x^2+x}{3}\cdot\sqrt{x^2-2x+3} + 2\cdot\ln\left|x-1 + \sqrt{x^2-2x+3}\right| + C \,\right]$

9) $\int (2x-3)\cdot\sqrt{5+4x-x^2}\,dx$, $\quad \left[\, \frac{4x^2-13x-26}{6}\cdot\sqrt{5+4x-x^2} + \frac{9}{2}\cdot\arcsin\frac{x-2}{3} + C \,\right]$

10) $\int x\cdot\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$ $\quad \left[\, \frac{1}{3}\cdot\sqrt{(x^2-2x+2)^3} + \frac{x-1}{2}\cdot\sqrt{x^2-2x+2} + \frac{1}{2}\ln\left|x-1 + \sqrt{x^2-2x+2}\right| \,\right]$

V úlohách 8-10 jsou integrály typu (135) pro $n = \frac{1}{2}$, jež počítáme pomocí konstant k_1, k_2. Viz rovnost (136) a příklad /102/.

§ 38. INTEGRACE RACIONÁLNÍ FUNKCE LOMENÉ.

Prvními třemi základními integračními metodami byly vypočteny integrály těchto typů racionálních funkcí lomených :

$\int \frac{a}{x}dx, \int \frac{c}{ax+b}dx, \int \frac{ax+b}{cx+d}dx, \int \frac{P(x)}{cx+d}dx$ Viz cvič. 276,277

$\int \frac{a}{x^n}\,dx, \int \frac{c}{(ax+b)^n}dx$, n přirozené Viz cvič. 275 a–e

$\int \frac{1}{1+x^2}dx, \int \frac{c}{a^2+b^2x^2}dx, \int \frac{d}{ax^2+bx+c}dx, (b^2-4ac<0)$ Viz cvič. 272 e–g 273,282

$\int \frac{Mx+N}{a^2x^2+b^2}dx, \int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx, (b^2-4ac<0)$ Viz cvič. 294ab,295a

$\int \frac{k.P'(x)}{P(x)}dx, \int \frac{k.P'(x)}{[P(x)]^n}\,dx$, n přirozené, P(x) je mnohočlen Viz cvič. 285ab,290a

Další základní neurčité integrály racionálních funkcí lomených.

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx = J_n \quad \text{, n přirozené}$$

Počítáme-li integrál J_{n-1} metodou per partes ($u = \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}$, $v' = 1$), dospějeme k rovnici,která vyjadřuje vztah mezi integrály J_{n-1} a J_n :

$$J_{n-1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + 2(n-1).J_{n-1} - 2a^2(n-1).J_n ,$$

z čehož

$$\boxed{J_n = \frac{1}{2a^2(n-1)} \cdot \left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3).J_{n-1} \right]} \qquad (143)$$

Tím přicházíme k tzv. r e d u k č n í m u vzorci,kterým integrál J_n převedeme na integrál J_{n-1}. Tak možno přejít postupně z integrálu J_n až k integrálu

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}.\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C$$

304.cvičení.Užijte redukčního vzorce (143) pro výpočet integrálů :

a) $\int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = \frac{1}{4}.\left[\frac{x}{x^2+2} + \int \frac{dx}{x^2+2} \right] = \frac{1}{4}.\left(\frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{\sqrt{2}}.\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{2}} \right) + C$

b) $\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$, $\left[\frac{x}{36(x^2+9)^2} + \frac{x}{216(x^2+9)} + \frac{1}{648}.\mathrm{arctg}\,\frac{x}{3} + C \right]$

c) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}$, $\left[\frac{15x^5+40x^3+33x}{48(x^2+1)^3} + \frac{5}{16}.\mathrm{arctg}\,x + C \right]$

d) $\int \frac{dx}{(9x^2+1)^2}$, $\left[\frac{x}{2(9x^2+1)} + \frac{1}{6}.\mathrm{arctg}\,3x + C \right]$

Poznámka. Pro malé n (např. n=2 nebo n=3) můžeme takové integrály vypočítat způsobem,kterým byl odvozen redukční vzorec.Hledáme-li např.integrál

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} \text{, začneme počítat } \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \int \underbrace{1}_{v'}.\underbrace{\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}}_{u} = \dots\dots ,$$

čímž obdržíme vztah mezi integrály J_2 a J_3.Stejným způsobem najdeme vztah mezi integrály J_1 a J_2 ,přičemž vycházíme z integrálu J_1 ,který již známe.

Již známými obraty a užitím redukčního vzorce (143) vypočteme integrály :

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \int \frac{Mx}{(\underbrace{x^2+a^2}_{z})^n}\,dx + N.\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx \qquad (144)$$

(redukčním vzorcem)

$$\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx \qquad (145)$$

Trojčlen upravíme doplněním na čtverec dvojčlenu a po zavedení nové proměnné obdržíme (143).

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx = k_1.\int \frac{2ax+b}{(\underbrace{ax^2+bx+c}_{z})^n}\,dx + k_2.\underbrace{\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx}_{(145)} \qquad (146)$$

Konstanty k_1, k_2 určíme podle rovnosti (136).

O trojčlenu (ax^2+bx+c) předpokládáme, že je nerozložitelný.

305.cvičení.

a) $\int \frac{3x+1}{(x^2+2)^3}\,dx$, $\left[\frac{3x^3+10x-24}{32(x^2+2)^2} + \frac{3}{32\sqrt{2}}.\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{2}} + C \right]$

b) $\int \frac{1}{(x^2+6x+10)^3}\,dx = \int \frac{1}{[(x+3)^2+1]^3}\,dx = \int \frac{1}{(z^2+1)^3}\,dz = (z=x+3) = \ldots.$

$= \frac{x+3}{4(x^2+6x+10)^2} + \frac{3x+9}{8(x^2+6x+10)} + \frac{3}{8}.\mathrm{arctg}(x+3) + C$

c) $\int \frac{dx}{(x^2-6x+10)^3}$, $\left[\frac{(x-3).(3x^2-18x+32)}{8(x^2-6x+10)^2} + \frac{3}{8}.\mathrm{arctg}(x-3) + C \right]$

d) $\int \frac{dx}{(x^2+2x+10)^3}$, $\left[\frac{1}{648}.(\mathrm{arctg}\,\frac{x+1}{3} + \frac{3(x+1)}{x^2+2x+10} + \frac{18(x+1)}{(x^2+2x+10)^2}) + C \right]$

DESÍTKA ÚLOH čís. 63

1) $\int \frac{3x-2}{(x^2-2x+3)^3}\,dx$, $\left[\frac{3x^3-9x^2+19x-37}{32(x^2-2x+3)^2} + \frac{3}{32\sqrt{2}}.\mathrm{arctg}\,\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C \right]$

2) $\int \frac{3x+2}{(x^2-3x+3)^2}\,dx$, $\left[\frac{13x-24}{3(x^2-3x+3)} + \frac{26}{3\sqrt{3}}.\mathrm{arctg}\,\frac{2x-3}{\sqrt{3}} + C \right]$

3) $\int \frac{x+3}{(x^2-x+1)^2}\,dx$, $\left[\frac{7x-5}{3(x^2-x+1)} + \frac{14}{3\sqrt{3}}.\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \right]$

4) $\int \frac{2x+1}{(x^2+2x+5)^2}\,dx$, $\left[\frac{-(x+9)}{8(x^2+2x+5)} - \frac{1}{16}.\mathrm{arctg}\,\frac{x+1}{2} + C \right]$

5) $\int \frac{x}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$, $\left[\frac{-(x+2)}{2(x^2+2x+2)} - \frac{1}{2}.\mathrm{arctg}(x+1) + C \right]$

6) $\int \frac{4x-1}{(x^2+4x+13)^2}\,dx$, $\left[\frac{-(x+6)}{2(x^2+4x+13)} - \frac{1}{6}.\mathrm{arctg}\,\frac{x+2}{3} + C \right]$

7) $\int \frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^3}\,dx$ $\left[\frac{2x-7}{4(x^2-2x+5)^2} + \frac{3x-3}{16(x^2-2x+5)} + \frac{3}{32}.\mathrm{arctg}\,\frac{x-1}{2} + C \right]$

8) $\int \frac{24x}{(x^4+2x^2+10)^3}\,dx, (x^2=z), \left[\frac{1}{54}.(\mathrm{arctg}\,\frac{x^2+1}{3} + \frac{3(x^2+1)}{x^4+2x^2+10} + \frac{18(x^2+1)}{(x^4+2x^2+10)^2} + C \right]$

9) $\int \frac{32x^3+16x}{(x^4+2x^2+5)^2}\,dx, (x^2=z), \left[\frac{-(x^2+9)}{x^4+2x^2+5} - \frac{1}{2}.\mathrm{arctg}\,\frac{x^2+1}{2} + C \right]$

10) $\int \frac{9x^5+27x^2}{(x^6-x^3+1)^2}\,dx$, $(x^3=z)$, $\left[\frac{7x^3-5}{x^6-x^3+1} + \frac{14}{\sqrt{3}}.\mathrm{arctg}\,\frac{2x^3-1}{\sqrt{3}} + C \right]$

Poznámka. V této úvodní části pro integraci racionálních funkcí lomených byly zvláště shrnuty integrály těch funkcí, jichž jmenovatel je nerozložitelný kvadratický dvojčlen nebo trojčlen, případně jeho mocnina. Jsou základem pro další integraci.

Integrace racionální funkce lomené s r o z l o ž i t e l n ý m jmenovatelem.

Je-li jmenovatelem racionální funkce lomené mnohočlen stupně aspoň druhého, nahradíme jej součinem mnohočlenů lineárních a nerozložitelných kvadratických, případně jejich mocnin. O rozkladech mnohočlenů pojednává kapitola III., § 8. Při integraci budeme rozlišovat několik případů podle rozkladu jmenovatele. V každém případě však předpokládáme, že funkce je ryze lomená (čitatel je nižšího stupně než jmenovatel). Není-li tomu tak, dělíme čitatele jmenovatelem až po zbytek, který je nižšího stupně než jmenovatel. Půjde tedy o integrály typu

$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, kde $P(x)$ je mnohočlen stupně m-tého a $Q(x)$ je mnohočlen stupně n-tého, přičemž $m < n$.

I. Nechť mnohočlen $Q(x)$ má n r ů z n ý c h reálných kořenů $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$, takže $Q(x) = a_n.(x-x_1).(x-x_2).(x-x_3)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(x-x_n)$, kde a_n je koeficient při x^n v mnohočlenu $Q(x)$.

Dokazuje se, že racionální výraz ryze lomený $\frac{P(x)}{Q(x)}$ lze nahradit součtem n tzv. p a r c i á l n í c h (elementárních) zlomků s lineárními jmenovateli a konstantními čitateli :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \frac{A_3}{x-x_3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{A_n}{x-x_n} \qquad (147)$$

Výpočet konstant $A_1, A_2, A_3, \ldots. A_n$ musíme provést tak, aby rovnost (147) platila pro každé x. Ukážeme to na konkretních případech, v nichž konstanty značíváme nejčastěji A, B, C, D,.......

/108/. příklad. $\int \frac{5x - 14}{x^3-x^2- 4x+ 4}\,dx = J$

1.krok: Rozklad jmenovatele.

$$x^3- x^2- 4x + 4 = x^2(x-1) - 4(x-1) = (x-1)(x^2- 4)= (x-1)(x-2)(x+2)$$

2.krok: Rozklad na parciální zlomky.

$$\frac{5x - 14}{(x-1)(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} \qquad /.(x-1)(x-2)(x+2)$$

$$5x - 14 = A(x-2)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x-2) \qquad (148)$$

3.krok: Výpočet konstant A, B, C; provádí se hlavně dvojím způsobem :

1.způsob (uvedením na rovnost mnohočlenů a porovnáváním koeficientů)

$$0.x^2+ 5x- 14 = (A+B+C).x^2 + (B- 3C).x + (- 4A-2B+2C)$$

Z rovnosti mnohočlenů plyne rovnost koeficientů u stejných mocnin, což vede v tomto případě k soustavě tří rovnic o třech neznámých A, B, C :

$$A+ B+ C = 0$$
$$B-3C = 5$$
$$- 4A-2B+2C = - 14$$

Řešením soustavy obdržíme jedinou trojici $A = 3$, $B = - 1$, $C = - 2$

24905 P11

2.způsob; postupným dosazováním kořenů mnohočlenu $Q(x)$, případně jiných malých celých čísel, do rovnosti (148) :

$$5x-14 = A(x-2)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x-2)$$

pro $x=1$ $\quad -9 = -3A\,, \qquad A = 3$

pro $x=2$ $\quad -4 = 4B\,, \qquad B = -1$

pro $x=-2$ $\quad -24 = 12C\,, \qquad C = -2$

V případě všech různých reálných jednoduchých kořenů mnohočlenu $Q(x)$ je tento způsob velmi výhodný. Každý kořen vede přímo k výpočtu jedné konstanty.

4.krok: Dosazení konstant do čitatelů parciálních zlomků a rozvedení daného integrálu na součet integrálů :

$$J = 3.\int\frac{1}{x-1}dx - \int\frac{1}{x-2}dx - 2.\int\frac{1}{x+2}dx = 3.\ln(x-1) - \ln(x-2) - 2.\ln(x+2) =$$

$$= \ln(x-1)^3 - \ln(x-2) - \ln(x+2)^2 = \ln\left|\frac{(x-1)^3}{(x-2).(x+2)^2}\right| + C$$

/109/.příklad. $\displaystyle\int\frac{1}{6x^3-7x^2-3x}\,dx = J$

Rozklad jmenovatele: $6x^3-7x^2-3x = x(6x^2-7x-3) = x.\overset{2.3}{\cancel{6}}.(x-\frac{3}{2})(x+\frac{1}{3}) =$
$= x(2x-3)(3x+1)$

Rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{1}{x(2x-3)(3x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-3} + \frac{C}{3x+1} \qquad /.\ x(2x-3)(3x+1)$$

$$1 = A(2x-3)(3x+1) + Bx(3x+1) + Cx(2x-3)$$

Konstanty vypočteme druhým způsobem. Dosazováním $x=0$, $x=\frac{3}{2}$, $x=-\frac{1}{3}$ obdržíme $A = -\frac{1}{3}$, $B = \frac{4}{33}$, $C = \frac{9}{11}$.

$$J = -\frac{1}{3}\ln x + \frac{2}{33}\ln(2x-3) + \frac{3}{11}\ln(3x+1) = \ldots\ldots = \ln\left|\sqrt[33]{\frac{(2x-3)^2(3x+1)^9}{x^{11}}}\right|$$

306.cvičení. Vypočtěte integrály :

a) $\displaystyle\int\frac{x}{2x^2-3x-2}\,dx$, $\left[\frac{1}{5}\ln(x-2)^2.\sqrt{2x+1}\right]$; b) $\displaystyle\int\frac{1}{1+x-x^2}\,dx$, $\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1+\sqrt{5}}{2x-1-\sqrt{5}}\right|\right]$;

c) $\displaystyle\int\frac{x-1}{(x+1)(x^2-4)}\,dx$, $\left[\frac{2}{3}\ln|x+1| - \frac{3}{4}\ln|x+2| + \frac{1}{12}\ln|x-2| + C\right]$

d) $\displaystyle\int\frac{32x\,dx}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}$, $\left[\ln|2x-1| - 6.\ln|2x-3| + 5.\ln|2x-5| + C\right]$

e) $\displaystyle\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$, $\left[x + \frac{1}{6}\ln|x| - \frac{9}{2}\ln|x-2| + \frac{28}{3}\ln|x-3| + C\right]$

f) $\displaystyle\int\frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}\,dx$, $\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| + \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + C\right]$

g) $\displaystyle\int\frac{15x^2-70x-95}{x^3-6x^2-13x+42}\,dx$ $\left[\ln|(x-7)^3.(x+3)^5.(x-2)^7| + C\right]$

h) $\displaystyle\int\frac{4x^4-x^3-46x^2-20x+153}{x^3-2x^2-9x+18}\,dx$, $\left[2x^2 + 7x + \ln\frac{|(x-2)^3(x+3)^5|}{(x-3)^4} + C\right]$

Poznámka. V případě g) určete zkusmo jeden kořen mnohočlenu a ostatní určete dělením příslušným kořenovým činitelem. Viz § 8 .

II. Nechť mnohočlen $Q(x)$ má opět všechny kořeny reálné, ale některé z nich vícenásobné.

V rozkladu mnohočlenu $Q(x)$ se objeví mocniny lineárního dvojčlenu. Má-li tedy např. mnohočlen $Q(x)$ tři různé reálné kořeny x_1, x_2, x_3, přičemž kořen x_1 je trojnásobný, kořen x_2 jednoduchý a kořen x_3 dvojnásobný, pak v rozkladu na parciální zlomky opět s konstantními čitateli musí být zlomky o jmenovatelích $(x-x_1)^3$, $(x-x_2)$, $(x-x_3)^2$ a mohou být ještě zlomky o jmenovatelích $(x-x_1)$, $(x-x_1)^2$, $(x-x_3)$.

Rozklad by tedy obsahoval maximálně 6 parciálních zlomků :

$$\frac{P(x)}{(x-x_1)^3(x-x_2)(x-x_3)^2} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{(x-x_1)^2} + \frac{C}{(x-x_1)^3} + \frac{D}{x-x_2} + \frac{E}{(x-x_3)^2} + \frac{F}{x-x_3}$$

/110/. příklad.
$$\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\,dx = J$$

Rozklad jmenovatele: $x^4-3x^3+3x^2-x = x(x^3-3x^2+3x-1) = x.(x-1)^3$

Rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3} \qquad /.\ x(x-1)^3$$

$$x^3+1 = A(x-1)^3 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx$$

Konstanty A,B,C,D vypočteme opět druhým způsobem. Po dosazení kořenů jmenovatele $x=0, x=1$ obdržíme jen konstanty $A=-1$, $D=2$. Pro určení zbývajících konstant B, C dosadíme do rovnosti postupně dvě libovolná malá celá čísla, např.: $x=2$, $9 = A+2B+2C+2D$; $x=-1$, $0 = -8A-4B+2C-D$

$3 = B + C \qquad 3 = 2B - C$

$B = 2$, $C = 1$

$$J = -\ln|x| + 2.\ln(x-1) - (x-1)^{-1} - (x-1)^{-2} = \ln\frac{(x-1)^2}{|x|} - \frac{x}{(x-1)^2} + C$$

307. cvičení.

a) $\displaystyle\int \frac{x^4-x^3-16x^2+38x-25}{(x-1)^2(x-2)^3}\,dx$, $\left[\ln\frac{(x-1)^2}{|x-2|} + \frac{53x-14x^2-45}{2(x-2)^2(x-1)} + C\right]$

b) $\displaystyle\int \frac{3x^3+10x^2-x}{(x^2-1)^2}\,dx$, $\left[\ln\frac{(x-1)^4}{|x+1|} - \frac{5x+1}{x^2-1} + C\right]$

DESÍTKA ÚLOH čís. 64

Vypočtěte integrály :

1) $\displaystyle\int \frac{3x^2+1}{x^4-3x^2+2x}\,dx$, $\left[\tfrac{1}{2}\ln|x| + \tfrac{2}{9}\ln|x-1| - \tfrac{13}{18}\ln|x+2| - \frac{4}{3(x-1)}\right]$

2) $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}\,dx$ $\left[\frac{6}{x+1} + \ln\frac{x^2}{|x+1|} + C\right]$

3) $\displaystyle\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}\,dx$ $\left[-\frac{x}{(x^2-1)^2} + C\right]$

4) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}\,dx$ $\left[\frac{4}{x+2} + \ln|x+1| + C\right]$

5) $\displaystyle\int \frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x^2-7x+10)(x^2-4x+4)}\,dx$, $\left[\frac{3}{2(x-2)^2} + \ln|x-5| + C\right]$

6) $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x-1)^2(x^2-1)}\,dx$, $\left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{9}{4(x-1)} + \tfrac{31}{8}\ln|x-1| + \tfrac{1}{8}\ln|x+1|\right]$

7) $\displaystyle\int \frac{x^3-6x^2+11x-5}{x^4-8x^3+24x^2-32x+16}\,dx$, $\left[-\frac{1}{3(x-2)^3} + \frac{1}{2(x-2)^2} + \ln|x-2| + C \right]$

8) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^5-4x^4+4x^3}\,dx$, $\left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right| - \frac{1}{x}(1+\frac{1}{2x}) - \frac{1}{2(x-2)} + C \right]$

9) $\displaystyle\int \frac{5x-1}{x^3-3x-2}\,dx$ $\left[\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| - \frac{2}{x+1} + C \right]$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$, $\left[\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right| + C \right]$

III. Nechť mnohočlen $Q(x)$ má kořeny reálné i imaginární, případně vícenásobné. Pak v rozkladu mnohočlenu $Q(x)$ se objeví dvojčleny lineární, případně jejich mocniny, a nerozložitelné kvadratické dvojčleny nebo trojčleny, případně jejich mocniny.

Při rozkladu na parciální zlomky musíme počítat s tím, že ty elementární zlomky, jež mají za jmenovatele nerozložitelné kvadratické mnohočleny, mohou mít čitatele lineární. Např.:

$$\frac{P(x)}{(x-m)^2(x^2+q^2)^3(ax^2+bx+c)^2} = \frac{A}{x-m} + \frac{B}{(x-m)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+q^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+q^2)^2} + \frac{Gx+H}{(x^2+q^2)^3} + \frac{Kx+L}{ax^2+bx+c} + \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^2}$$

/111/. příklad. $\displaystyle\int \frac{2x+2}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx = J$

Rozklad jmenovatele: $x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1 = (x^5-1)-x(x^3-1)+2x^2(x-1) = (x-1)(x^4+2x^2+1) = (x-1).(x^2+1)^2$

Rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} \quad /.\ (x-1)(x^2+1)^2$$

$$2x+2 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+1) + (Dx+E)(x-1)$$

Rovnost upravíme na výpočet konstant prvním způsobem :

$0.x^4+0.x^3+0.x^2+2x+2 = x^4(A+B)+x^3(-B+C)+x^2(2A+B-C+D)+x(-B+C-D+E)+(A-C-E)$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin obdržíme soustavu pěti rovnic : $A+B=0$, $-B+C=0$, $2A+B-C+D=0$, $-B+C-D+E=2$, $A-C-E=2$; $A=1$, $B=-1$, $C=-1$, $D=-2$, $E=0$.

$$J = \int\frac{1}{x-1}dx - \int\frac{x+1}{x^2+1}dx - \int\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} - \operatorname{arctg} x + C$$

Poznámka. Při výpočtu konstant druhým způsobem dosadili bychom do rovnosti nejprve jediný reálný kořen $x=1$, což by vedlo k $A=1$. Dosazujeme-li pak libovolná malá celá čísla, např.: $x=0$, $x=-1$, $x=2$, $x=-2$ a současně $A=1$, obdržíme soustavu čtyř rovnic: $C+E=-1$, $2B-2C+D-E=-2$, $10B+5C+2D+E=-19$, $30B-15C+6D-3E=-27$, z nichž plyne $B=-1$, $C=-1$, $D=-2$, $E=0$.

308. cvičení.

a) $\displaystyle\int\frac{x^2}{1-x^4}\,dx$, $\left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x \right]$; b) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4+x^3+x^2+x}$, $\left[\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x \right]$

c) $\int \frac{7x^2-1}{x^4+4x^2-5}\,dx$, d) $\int \frac{x}{x^3+1}\,dx$, e) $\int \frac{x+1}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)}\,dx$, f) $\int \frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2}\,dx$

__Výsledky:__ c) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{6}{\sqrt{5}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}$, d) $\frac{1}{6}\ln\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$,

e) $\frac{2}{3\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x+2)$, f) $\frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)} + \frac{53}{16}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}$

DESÍTKA ÚLOH čís. 65

1) $\int \frac{x^6+x^4-4x^2-2}{x^7+2x^5+x^3}\,dx$, $\left[\frac{1}{x^2(x^2+1)} + \ln\sqrt{x^2+1} + C\right]$

2) $\int \frac{1}{(x^4-1)^2}\,dx$, $\left[\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x - \frac{x}{4(x^4-1)} - \frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C\right]$

3) $\int \frac{1}{(x^3-1)^2}\,dx$, $\left[-\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{x^3-1} + \frac{1}{9}\ln\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\right]$

4) $\int \frac{1}{(x^3+1)^2}\,dx$, $\left[\frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C\right]$

5) $\int \frac{4x^4+6x^3+10x^2+7x+2}{(x+1).(x^2+x+1)^2}\,dx$, $\left[\ln|x+1|^3.\sqrt{x^2+x+1} - \frac{x+5}{3(x^2+x+1)} - \frac{17\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\right]$

6) $\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx$, $\left[\frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)} + \ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \operatorname{arctg}x + C\right]$

7) $\int \frac{2x}{(1+x)(x^4+2x^2+1)}\,dx$, $\left[\frac{x-1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + C\right]$

8) $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}\,dx$, $\left[\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)} + \frac{1}{9}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{8}{3\sqrt{3}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\right]$

9) $\int \frac{x^4+5x^3+14x^2+17x+6}{(x+2)(x^2+2x+2)^2}\,dx$, $\left[\ln|x+2| - \frac{1}{x^2+2x+2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1)\right]$

10) $\int \frac{x^7+2}{(x^2+x+1)^2}\,dx$, $\left[\frac{x}{x^2+x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - 2\cdot\ln(x^2+x+1) + \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2+4x}{2}\right]$

Závěrem integrace racionální funkce lomené uvedeme několik integrálů, jichž integrand obsahuje ve jmenovateli dvojčlen (x^4+1) :

a) $\int \frac{x^3}{x^4+1}\,dx$, $(x^4+1=t)$; b) $\int \frac{x}{x^4+1}\,dx$, $(x^2=t)$; c) $\int \frac{1}{x(x^4+1)}\,dx$, $(x=\frac{1}{t})$,

d) $\int \frac{1}{x^4+1}\,dx$, $\left[\frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C\right]$

V posledním případě užijeme rozkladu jmenovatele :

$$x^4+1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - (x\sqrt{2})^2 = (x^2+x\sqrt{2}+1).(x^2-x\sqrt{2}+1)$$

§ 39. INTEGRACE IRACIONÁLNÍCH FUNKCÍ.

S integrací některých iracionálních funkcí jsme se již setkali u základních integračních metod. Byly to integrály těchto typů :

$\int \sqrt[n]{x^m}\,dx$, (viz cvič.264e-s,266c-f) ; $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx$, (275 g-m), /z=ax+b/

$\int \sqrt[n]{f(x)}.a.f'(x)dx$, (288 b-d) $\int \frac{a.f'(x)}{\sqrt[n]{f(x)}}\,dx$, (290 b-f), /z= f(x)/

Druhou skupinu, která obsahovala funkce s druhou odmocninou z kvadratického mnohočlenu, uvedeme v přehledu později.
Nyní přistoupíme k dalším iracionálním funkcím, jejichž integrace se vhodnými substitucemi převádí na integraci funkcí racionálních.

$$\int R\left(x\,,\ \sqrt[n]{f(x)}\right)dx\ ,\ \text{kde } f(x)=x \ \text{ nebo } f(x)=ax+b \ \text{ nebo } f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \qquad (149)$$
$$\text{Substituce : } \quad t = \sqrt[n]{f(x)}$$

Symbolem $R(x,\sqrt[n]{f(x)})$ naznačujeme, že jde o funkci racionální v x a v odmocnině $\sqrt[n]{f(x)}$, což znamená, že číslo x a odmocnina $\sqrt[n]{f(x)}$ jsou vázány vzájemně a s konstantami racionálními operacemi (sčítáním, odčítáním, násobením a dělením).

/112/.příklad. $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2}\,dx = J$

Zavedeme $\sqrt{2x+1} = t$, vypočteme x ,dx
$x = \frac{t^2-1}{2}$, $dx = t.dt$

$$J = \int \frac{t}{\frac{(t^2-1)^2}{4}}.t.dt = 4.\int \frac{t^2}{(t^2-1)^2}\,dt$$

Zavedenou substitucí jsme obdrželi integrál racionální funkce lomené v proměnné t. Rozkladem na parciální zlomky vypočteme :

$$J = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{2t}{t^2-1} = \ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right| - \frac{\sqrt{2x+1}}{x} + C$$

/113/.příklad. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,.\frac{1}{(x+1)(x-1)}dx = J$

Zavedeme $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = t$
Vypočteme :
$x = \frac{t^3+1}{t^3-1}$, $dx = \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}$
$x+1 = \frac{2t^3}{t^3-1}$, $x-1 = \frac{2}{t^3-1}$

$$J = \int t.\frac{1}{\frac{4t^3}{(t^3-1)^2}}.\frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}.dt = -\frac{3}{2}\int dt$$

$$J = -\frac{3}{2}t = -\frac{3}{2}.\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C$$

Na předešlý případ lze někdy uvést integrály typu $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^r.(x-b)^s}}$

/114/.příklad. $\int \frac{dx}{(x+2).\sqrt[4]{(x-1)^3.(x+2)}} = \int \frac{\sqrt[4]{(x-1)^4}}{(x-1)(x+2).\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)}}\,dx =$

$$= \int \frac{1}{(x-1)(x+2)}.\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}\,dx = \ldots\ldots\ldots = \frac{4}{3}.\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} + C$$

Poznámka. Abychom později dovedli vystihnout, o jaký typ integrálu iracionální funkce jde, pozorujeme v každém cvičení a desítce úloh zadané integrály a ověřujeme si jejich příslušnost k uvedenému typu.

...cvičení. a) $\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^2}$, b) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$, c) $\int x.\sqrt{a+x}\,dx$, d) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\,dx$,

e) $\int \frac{1}{(2+x).\sqrt{1+x}}\,dx$, f) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx$, g) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\,dx$, h) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$.

Výsledky: a) $\frac{3}{1+\sqrt[3]{x}} + 3.\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right|$, b) $2.(\sqrt{x} - \mathrm{arctg}\sqrt{x})$, c) $\frac{2}{15}(3x-2a).\sqrt{(a+x)^3}$,

d) $2.(\sqrt{x+1} - \ln(\sqrt{x+1} + 1))$, e) $2.\mathrm{arctg}\sqrt{1+x}$, f) $\frac{2\sqrt{x-1}}{35}.(5x^3+6x^2+8x+16)$,

g) $\frac{x+2}{5}.\sqrt[3]{(3x+1)^2}$, h) $\sqrt{1-x^2} - 2.\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C$.

DESÍTKA ÚLOH čís. 66

1) $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^3}\,dx$, $\left[\, 2.\ln(1+\sqrt{x}) + \frac{4}{1+\sqrt{x}} - \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2} + C \,\right]$

2) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}.(\sqrt[3]{x}-1)}\,dx$, $\left[\, 3.(\sqrt[3]{x} + \ln|\sqrt[3]{x} - 1|) + C \,\right]$

3) $\int \frac{1}{x.\sqrt{x+1}}\,dx$, $\left[\, \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C \,\right]$

4) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx$, $\left[\, x+1 + 4.\sqrt{x+1} + 4.\ln|\sqrt{x+1} - 1| + C \,\right]$

5) $\int \frac{1}{x - \sqrt[3]{3x+2}}\,dx$, $\left[\, \frac{1}{\sqrt[3]{3x+2}+1} + \frac{5}{3}\ln|\sqrt[3]{3x+2}+1| + \frac{4}{3}\ln|\sqrt[3]{3x+2} - 2| \,\right]$

6) $\int \frac{1}{x^2}.\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}\,dx$, $\left[\, \frac{1}{2}\ln\frac{3x+2-2.\sqrt{2x^2+3x+1}}{x} - \frac{\sqrt{2x^2+3x+1}}{x} + C \,\right]$

7) $\int \frac{1}{(3x+5).\sqrt{(2x+3)(x+2)}}\,dx$, $\left[\, -2.\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x+2}{2x+3}} + C \,\right]$

8) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.\frac{dx}{x}$, $\left[\, \ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + 2.\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C \,\right]$

9) $\int \frac{1}{(1-x).\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $\left[\, \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C \,\right]$

10) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1).(x+1)^2}}\,dx$, $\left[\, \frac{1}{2}\ln(t^2+t+1) - \ln|t-1| + \sqrt{3}.\mathrm{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C \,\right]$,

kde $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$

$$\int R(\,x,\ \sqrt[n]{f(x)},\ \sqrt[m]{f(x)},\ \sqrt[p]{f(x)},\ \ldots\ldots\,)\,dx \text{ , kde}$$

$f(x) = x$ nebo $f(x) = ax+b$ nebo $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (150)

Substituce : $t = \sqrt[s]{f(x)}$, s je společný odmocnitel

Integrand integrálu uvedeného typu obsahuje různé odmocniny o společném odmocněnci.

/115/.**příklad.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x^3}-7\sqrt[3]{x^2}+12\sqrt{x}}{x.(\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x})}\,dx = J$

Společný odmocnitel $s = 12$. Zavedeme $t = \sqrt[12]{x}$ a určíme : $x = t^{12}$, $dx = 12.t^{11}.dt$

$\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[12]{x^9} = t^9$, $\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[12]{x^8} = t^8$, $\sqrt{x} = \sqrt[12]{x^6} = t^6$, $\sqrt[3]{x} = \sqrt[12]{x^4} = t^4$, $\sqrt[6]{x} = \sqrt[12]{x^2} = t^2$

Po dosazení obdržíme :

$$J = 12\int \frac{t^6-7t^5+12t^3}{t^2-1}\,dt = \ldots\ldots\ldots = 12\left(\frac{t^5}{5}-\frac{7t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{5t^2}{2}+t+3.\ln|t-1|+2.\ln|t+1|\right),\quad t = \sqrt[12]{x}$$

310.**cvičení.**

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,dx$, b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,dx$, c) $\displaystyle\int \frac{1}{x.(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}\,dx$,

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}\,dx$, e) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$, f) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$.

Výsledky: a) $\ln\dfrac{|x|}{(\sqrt[6]{x}+1)^6}$, b) $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4.\ln(\sqrt[4]{x}+1)$, c) $\dfrac{-5}{2\sqrt[5]{x^2}}+\dfrac{10}{3.\sqrt[10]{x^3}}-\dfrac{5}{\sqrt[5]{x}}+\dfrac{10}{\sqrt[10]{x}}+\ln\left|\dfrac{x}{(\sqrt[10]{x}+1)^{10}}\right|$, d) $2.\sqrt{1+x}-3.\sqrt[3]{1+x}+6.\sqrt[6]{1+x}-6.\ln(1+\sqrt[6]{1+x})$,

e) $\frac{2}{3}.\sqrt{(x+1)^3}-\frac{3}{4}.\sqrt[3]{(x+1)^4}+\frac{6}{7}.\sqrt[6]{(x+1)^7}-(x+1)+\frac{6}{5}.\sqrt[6]{(x+1)^5}-\frac{3}{2}.\sqrt[3]{(x+1)^2}$,

f) $-\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}-6\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x+1}+3.\ln\left|\sqrt[3]{x+1}+1\right|$

B i n o m i c k é i n t e g r á l y

$\displaystyle\int x^m.(a+bx^n)^p\,dx$, m , n , p .... racionální čísla

Převádějí se určitými substitucemi na integrály racionálních funkcí, když aspoň jedno z čísel p , $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n}+p$ je číslo celé.

1. p je celé číslo . Jde o známé integrály typu (150) . (151)
2. $\frac{m+1}{n}$ je celé číslo. Substituce : $a + bx^n = t^q$,
3. $\frac{m+1}{n}+p$ je celé číslo. Substituce : $a + bx^n = t^q x^n$

q je jmenovatel zlomku p

/116/.**příklad.**

$$\int \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3-2.\sqrt[5]{x^3}}}\,dx = \int x^{\frac{1}{5}}.(3-2x^{\frac{3}{5}})^{-\frac{1}{2}}\,dx = J$$

$m = \frac{1}{5}$, $n = \frac{3}{5}$, $p = -\frac{1}{2}$; $\frac{m+1}{n} = 2$ (celé číslo) . Zavedeme :

$3-2x^{\frac{3}{5}} = t^2$

$x^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{3-t^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, $x = \left(\frac{3-t^2}{2}\right)^{\frac{5}{3}}$

$dx = -\frac{5}{3}t.\left(\frac{3-t^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

$$J = -\frac{5}{6}\int(3-t^2)\,dt = -\frac{5}{6}\left(3t-\frac{t^3}{3}\right) = -\frac{5}{2}t\left(1-\frac{t^2}{9}\right)+C\ ;\quad t = \sqrt{3-2\sqrt[5]{x^3}}$$

311. cvičení. a) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$, b) $\displaystyle\int x^5.\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$, c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3.\sqrt[5]{1+x^{-1}}}\,dx$

Výsledky:

a) $\frac{3}{5}.\sqrt{(1+\sqrt[3]{x^2})^5} - 2.\sqrt{(1+\sqrt[3]{x^2})^3} + 3.\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$, b) $\frac{1}{8}(1+x^3)^{\frac{8}{3}} - \frac{1}{5}(1+x^3)^{\frac{5}{3}}$,

c) $\frac{5}{4}t^4 - \frac{5}{9}t^9$, $t = \sqrt[5]{1+x^{-1}}$.

312. cvičení. a) $\displaystyle\int x^{-6}(1+2x^3)^{\frac{2}{3}}dx$, b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$, c) $\displaystyle\int \frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

Výsledky:

a) $-\frac{1}{5}x^{-5}(1+2x^3)^{\frac{5}{3}}$, b) $\frac{1}{4}.\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2}.\mathrm{arctg}\,t$, $t = \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$; c) $-\frac{x(x^2-3)}{2\sqrt{1-x^2}}$ +

$-\frac{3}{2}\arcsin x$, d) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ + C.

DESÍTKA ÚLOH čís. 67

1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{(2x^3+1)^2}}{x^6}dx$, 2) $\displaystyle\int \frac{1}{x.\sqrt[4]{1+x^3}}dx$, 3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+x^{-1}}}$, 4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3.\sqrt[3]{2-x^3}}dx$,

5) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$, 6) $\displaystyle\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,dx$, 7) $\displaystyle\int \frac{1}{x.\sqrt[6]{1+x^6}}dx$, 8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}dx$,

9) $\displaystyle\int \sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}\,dx$, 10) $\displaystyle\int x^{\frac{1}{3}}(2+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}dx$.

Výsledky:

1) $-\frac{1}{5}(x^{-3}+2)^{\frac{5}{3}}$, 2) $\frac{1}{3}.\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^3}-1}{\sqrt[4]{1+x^3}+1}\right| + \frac{2}{3}\mathrm{arctg}\sqrt[4]{1+x^3}$, 3) $\frac{5}{4}.\sqrt[5]{(1+x^{-1})^4} - \frac{5}{9}\sqrt[5]{(1+x^{-1})^9}$,

4) $-\frac{\sqrt[3]{(2-x^3)^2}}{4x^2}$, 5) $\frac{3}{5}t^5 - 2t^3 + 3t$, $t = \sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$, 6) $\frac{3t}{2(t^3+1)} - \frac{1}{4}.\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}$ +

$-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}$, $t = \frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}$; 7) $\frac{1}{6}.\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{1}{12}.\ln\frac{t^2+t+1}{t^2-t+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{t^2-1}{t\sqrt{3}}$,

$t = \sqrt[6]{1+x^6}$; 8) $\frac{1}{6}.\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$, $t = \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$;

9) $\frac{8}{77}(7\sqrt{x}-4).(1+\sqrt{x})^{\frac{7}{4}}$, 10) $\frac{1}{15}(10x^{\frac{2}{3}}-16).(2+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{4}}$ + C.

Poznámka. K tzv. binomickému integrálu vede nás integrál funkce, která obsahuje součet tvaru $(a+bx^n)$, umocněný jakýmkoli racionálním číslem a případně vázaný s mocninou proměnné x násobením nebo dělením. Pozorujte příklady cvičení a desítky úloh.

Poněvadž exponent n je také racionální číslo, neodpovídá vždy název ,,binomický integrál'' nynějšímu pojmu dvojčlenu čili binomu.

Integrace funkcí obsahujících druhou odmocninu z kvadratického mnohočlenu.

Eulerovy substituce.

Základními metodami jsme integrovali hlavně tyto případy funkcí, obsahujících druhou odmocninu z kvadratického dvojčlenu nebo trojčlenu:

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\,,\quad \int\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}dx\,,\quad \int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx\,,\ a<0.$$ Viz cvičení: 272a-d, 280, 281

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+b}}dx\,,\quad \int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx\,,\ a>0\,.$$ 274, 283

$$\int\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx\,;\quad t=ax^2+bx+c$$ 290 e, f

DES. ÚLOH čís. 62

$$\int\sqrt{b^2-x^2}\,dx\,,\quad \int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx\,,\ a<0\,.$$ př.: 4 - 6

$$\int\sqrt{x^2+b}\,dx\,,\quad \int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx\,,\ a>0$$ 1 - 3

$$\int(Mx+N).\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx\,,$$ 7 -10

DES. ÚLOH čís. 59

$$\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$ př. 4 -10

Uvedeme obecnou metodu pro integraci funkcí, které jsou racionální v $\underline{x}$ a v odmocnině $\sqrt{ax^2+bx+c}$ a jejichž integrály značíme

$$\int R(\,x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\ )dx$$

Tato metoda spočívá v tzv. E u l e r o v ý c h substitucích. Rozlišujeme tři případy:

1) Je-li $a>0$, zavedeme substituci $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x.\sqrt{a}$

2) Je-li $c>0$, zavedeme substituci $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$

3) Má-li kvadratický trojčlen dva reálné kořeny (zvláště racionální) x_1, x_2, můžeme postupovat dvojím způsobem:

a) provedeme rozklad a úpravu:

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=\sqrt{\frac{a(x-x_1)(x-x_2)^2}{x-x_2}}=(x-x_2).\sqrt{\frac{a(x-x_1)}{x-x_2}}\,,$$

čímž to převedeme na iracionální funkci, kterou dovedeme integrovat. Viz /114/. př.

b) po rozkladu zavedeme přímo substituci

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=(x-x_1).t\quad \text{nebo}\quad \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=(x-x_2).t$$

U každého z uvedených tří případů postupujeme dále tak, že užitím substituční rovnice vyjadřujeme proměnnou x, diferenciál dx, odmocninu $\sqrt{ax^2+bx+c}$ a všechny ostatní výrazy s proměnnou x novou proměnnou t a dosadíme do dané integrované funkce. Po úpravě obdržíme funkci racionální v proměnné t. Jde někdy o zdlouhavý výpočet, složený většinou z řady algebraických operací, který musíme přehledně zapisovat.

Uvedeme příklady funkcí, které užitím Eulerových substitucí obyčejně integrujeme. Přitom u některých případů poznamenáme integraci i jinou substitucí, která vede k jednodušším výpočtům.

/117/.příklad.

$$\int \frac{x-1}{x.\sqrt{x^2+3x+1}}\,dx = J$$

V tomto případě můžeme užít kterékoli Eulerovy substituce.Přesvědčte se ! Třetí substituce by nebyla výhodná,poněvadž kořeny trojčlenu jsou iracionální.

Užijeme 1.substituce :

$$\sqrt{x^2+3x+1} = t - x$$

Ze substituční rovnice vypočteme :

$$x = \frac{t^2-1}{3+2t},\quad dx = \frac{2t^2+6t+2}{(3+2t)^2}\,dt,\quad x-1 = \frac{t^2-2t-4}{3+2t},\ \sqrt{x^2+3x+1} = t-x = t-\frac{t^2-1}{3+2t} = \frac{t^2+3t+1}{3+2t}$$

Po dosazení do integrandu a po úpravě obdržíme:

$$J = 2.\int \frac{t^2-2t-4}{(t^2-1)(3+2t)}\,dt = \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + \ln|3+2t| = \ln\left|\frac{(t+1).(3+2t)}{t-1}\right|,$$

$$\text{kde}\quad t = x + \sqrt{x^2+3x+1}\,.$$

/118/.příklad.

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = J$$

Užijeme druhé Eulerovy substituce.Třetí by pro iracionální kořeny trojčlenu nebyla výhodná.

Ze substituční rovnice $\sqrt{1-2x-x^2} = xt - 1$ vypočteme :

$$x = \frac{2t-2}{t^2+1},\quad dx = \frac{2+4t-2t^2}{(t^2+1)^2}\,dt,\quad 1+\sqrt{1-2x-x^2} = 1+(xt-1) = xt = \frac{2t(t-1)}{t^2+1}$$

Po dosazení do integrované funkce a po úpravě obdržíme :

$$J = -\int \frac{t^2-2t-1}{t(t-1).(t^2+1)}\,dt = \ln|t-1| - \ln|t| - 2.\mathrm{arctg}\ t = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| - 2\mathrm{arctg}\ t\,,$$

$$\text{kde}\quad t = \frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$$ (ze substituční rovnice)

/119/.příklad.

$$\int \frac{x}{(x-1).\sqrt{-x^2+3x-2}}\,dx = J$$

Poněvadž $a < 0$, $c < 0$,zbývá užít třetí Eulerovy substituce.Je to možné,poněvadž kořeny trojčlenu jsou reálné,dokonce celá čísla : $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

Ze substituční rovnice $\sqrt{-(x-1)(x-2)} = (x-1).t$ vypočteme :

$$t = \sqrt{\frac{2-x}{x-1}},\quad x = \frac{t^2+2}{t^2+1},\quad dx = \frac{-2t}{(t^2+1)^2}\,dt,\quad x-1 = \frac{1}{t^2+1},\quad \sqrt{-(x-1)(x-2)} = \frac{t}{t^2+1}$$

$$J = -2\int\left(1+\frac{1}{t^2+1}\right)dt = -2(t+\mathrm{arctg}\ t) = -2\left(\sqrt{\frac{2-x}{x-1}} + \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}\right) + C$$

Eulerovy substituce lze užít i k výpočtu základních integrálů .

/120/.příklad.

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = J \qquad \sqrt{x^2+a} = t - x \quad \text{(1.Eulerova subst.)}$$

$$x = \frac{t^2-a}{2t},\quad dx = \frac{t^2+a}{2t^2}\,dt,\quad t-x = t-\frac{t^2-a}{2t} = \frac{t^2+a}{2t}$$

$$J = \frac{1}{4}\int \frac{(t^2+a)^2}{t^3}\,dt = \frac{1}{4}\int\left(t+\frac{2a}{t}+\frac{a^2}{t^3}\right)dt = \frac{1}{2}.\left(\frac{t^4-a^2}{4t^2} + a.\ln|t|\right) =$$

$$= \frac{1}{2}.\left[x.\sqrt{x^2+a} + a.\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right] + C\ ,\ \text{neboť}\ \frac{t^4-a^2}{4t^2} = \frac{t^2-a}{2t}.\frac{t^2+a}{2t} = x.\sqrt{x^2+a}$$

DESÍTKA ÚLOH čís. 68

Užitím Eulerových substitucí vypočtěte integrály:

1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$, $\displaystyle\left[\ \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| + \frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + C\ \right]$

2) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2.\sqrt{2x^2-2x+1}}\,dx$, $\displaystyle\left[\ \frac{2.\sqrt{2x^2-2x+1}-x}{2x} + c = \frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x} + C\ \right]$

3) $\displaystyle\int \frac{1}{x.\sqrt{2+x-x^2}}\,dx$, $\displaystyle\left[\ -\frac{1}{\sqrt{2}}.\ln\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right| + C\ \right]$ (Také $x = \frac{1}{t}$)

4) $\displaystyle\int \frac{1}{x.\sqrt{x^2+4x-4}}\,dx$, $\displaystyle\left[\ \mathrm{arctg}\,\frac{x+\sqrt{x^2+4x-4}}{2} + C\ \right]$

5) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1).\sqrt{x^2+1}}\,dx$, $\displaystyle\left[\ \frac{1}{\sqrt{2}}.\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(1+x^2)}}{1+x}\right| + C\ \right]$ (Také $x+1 = \frac{1}{t}$)

6) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2).\sqrt{-x^2+4x-3}}\,dx$, $\displaystyle\left[\ \ln\left|\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1}}\right| + C\ \right]$

7) $\displaystyle\int \frac{1}{x-\sqrt{x^2-x+1}}\,dx$ $\displaystyle\left[\ 2.\ln\left|x-\sqrt{x^2-x+1}\right| - \frac{3}{2}.\ln\left|2x-1-2\sqrt{x^2-x+1}\right| + \right.$
$\displaystyle\left. - \frac{3}{2(2x-1-2\sqrt{x^2-x+1})} + C\ \right]$

8) $\displaystyle\int \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\,dx$ $\displaystyle\left[\ \frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}.\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C\ \right]$

9) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+\sqrt{x^2-1})^2}\,dx$, $\displaystyle\left[\ \frac{2}{3}.(x^3-\sqrt{(x^2-1)^3}) - x + C\ \right]$

10) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2.(x+\sqrt{x^2+1})}\,dx$, $\displaystyle\left[\ \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}\right| - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C\ \right]$

V případech 7) – 10) , u nichž jmenovatel obsahuje součet $x \pm \sqrt{x^2+px+q}$ je výhodné zavést přímo substituci $x \pm \sqrt{x^2+px+q} = t$, což je v podstatě 1.Eulerova substituce.

§ 40. INTEGRACE GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ.

Základními metodami byly vypočteny integrály goniometrických funkcí hlavně těchto typů :

a) (užitím vzorců)

$\displaystyle\int \sin x\,dx,\ \int \cos x\,dx,\ \int \frac{dx}{\sin^2 x},\ \int \frac{dx}{\cos^2 x}$, a integrály, jež se na ně po úpravě převedou, jako : $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2 x\,dx,\ \int \mathrm{cotg}^2 x\,dx,\ \int \frac{a.\sin^2 x + b.\cos^2 x + c}{d.\cos^2 x}\,dx$

Viz cvičení 267 – 270 .

b) (metodou substituční)

$\displaystyle\int \sin(ax+b)dx,\ \int \cos(ax+b)\,dx,\ \int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)},\ \int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)}$; Viz cvič. 278.

$\int \text{tgx}\, dx$, $\int \text{cotgx}\, dx$, $\int \cos^n x . \sin x\, dx$, $\int \sin^n x . \cos x\, dx$, (cosx=z nebo sinx=z)

$\int \frac{a.\sin x}{b+c.\cos x} dx$, (b+c.cosx = z); $\int \frac{a.\cos x}{b+c.\sin x} dx$, (b+c.sinx= z); Viz cvič. 287

c) (úpravou a metodou substituční)

$\int \frac{dx}{\sin x}$, $\int \frac{dx}{\cos x}$, viz příkl. /98/ a /99/

$\int \sin^2 x\, dx$, $\int \cos^2 x\, dx$, $\int \sin^2(ax+b)dx$, $\int \cos^2(ax+b)dx$

užitím rovností $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$, $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$ nebo per partes (/105/)

Poslední skupinu integrálů doplníme redukčními vzorci pro vyšší mocniny funkcí sin x a cos x.

$J_n = \int \sin^n x\, dx = \int \underbrace{\sin^{n-1} x}_{u} . \underbrace{\sin x}_{v'} dx$ Per partes: $u = \sin^{n-1} x$ $v' = \sin x$

$u' = (n-1)\sin^{n-2} x . \cos x$, $v = -\cos x$

Obdržíme vztah mezi integrály J_n a J_{n-2}, z něhož vypočteme J_n:

$$\int \sin^n x\, dx = \frac{1}{n} . \left[(n-1)\int \sin^{n-2} x\, dx - \sin^{n-1} x . \cos x \right]$$
$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n} . \left[(n-1)\int \cos^{n-2} x\, dx + \cos^{n-1} x . \sin x \right] \qquad (152)$$

Redukční vzorec pro $\cos^n x$ se odvodí stejným způsobem. Oběma redukčními vzorci se sníží exponent o 2.

313. cvičení. Užitím redukčních vzorců vypočtěte integrály:

a) $\int \sin^3 x\, dx$, b) $\int \cos^3 x\, dx$, c) $\int \sin^5 x\, dx$, d) $\int \cos^5 x\, dx$, e) $\int \sin^6 x\, dx$.

Výsledky: a) $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x$, b) $-\frac{1}{3}\sin^3 x + \sin x$, c) $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x$,

d) $\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x$, e) $\frac{5}{16}x - \cos x . \left(\frac{1}{6}\sin^5 x + \frac{5}{24}\sin^3 x + \frac{5}{16}\sin x \right)$.

Je-li exponent n číslem celým záporným, lze také užít redukčního vzorce. Základ tvoří integrály $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$, $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$, pro n sudé, integrály $\int \frac{dx}{\sin x}$, $\int \frac{dx}{\cos x}$ pro n liché.

/121/. příklad.

a) Pro n= -2 jest n-2=-4 : $\int \sin^{-2} x\, dx = \frac{1}{2}\cos x . \sin^{-3} x + \frac{3}{2}\int \sin^{-4} x\, dx$,

z čehož vypočteme $\int \sin^{-4} x = \frac{2}{3}\left[-\text{cotgx} - \frac{\cos x}{2\sin^3 x} \right] = \ldots\ldots\ldots$

b) Pro n= -1 jest n-2=-3 : $\int \sin^{-1} x\, dx = \cos x . \sin^{-2} x + 2\int \sin^{-3} x\, dx$,

$\int \sin^{-3} x = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} = \ldots\ldots\ldots$

314. cvičení.

a) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$, $\left[\text{tgx} + \frac{1}{3}\text{tg}^3 x \right]$; b) $\int \frac{1}{\sin^6 x} dx$, $\left[-\text{cotgx} - \frac{2}{3}\text{cotg}^3 x - \frac{1}{5}\text{cotg}^5 x \right]$;

c) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$, $\left[\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} . \ln\left|\text{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)\right| \right]$.

Mnohé integrály g o n i o m e t r i c k ý c h funkcí jsou typu

$$\int R\,(\sin x\;,\;\cos x\;)\,dx\;,$$

což znamená, že integrandem je funkce racionální v sinu a v kosinu. Patří sem všechny integrály uvedené v tomto článku a integrály funkcí, v nichž je sin x a cos x vázán vzájemně a s konstantami sčítáním, odčítáním, násobením a dělením.

Než poznáme obecnou metodu k jejich integraci, uvedeme předem dva zvláštní případy :

$$\boxed{\begin{array}{lll} \int R\,(\,\sin x\,).\cos x\,dx\;; & \text{zavedeme-li} & \sin x = t\;,\;\text{pak } \cos x.dx = dt \\ \int R\,(\,\cos x\,).\sin x\,dx\;; & \text{zavedeme-li} & \cos x = t\;,\;\text{pak } \sin x.dx = -dt \end{array}} \quad (1$$

Například symbol R (sinx) znamená funkci racionální jen v sinu.
Často je možno integrand na takový tvar uvést. Příslušnou úpravu provádíme několika způsoby :

a) užitím goniometrických vztahů

/122/.příklad. $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}\,dx = 2\int \frac{\sin x}{1+\sin^4 x}.\cos x\,dx\;;\;(\sin x = t,\;\cos x.dx = dt\;)$

$$= 2\int \frac{t}{1+t^4}\,dt = \int \frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arctg} z = \operatorname{arctg} t^2 =$$

$$= \operatorname{arctg}(\sin^2 x)\;+C$$

b) rozkladem mocniny

/123/.<u>příklad</u>. $\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{2+\cos x}.\sin x\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{2+\cos x}.\sin x\,dx\;;\;(\cos x = t\;)$

$$= -\int \frac{1-t^2}{2+t}\,dt = \int \frac{t^2-1}{t+2}\,dt = \ldots = \tfrac{1}{2}t^2 - 2t + 3.\ln|t+2| = .$$

O b d o b n ě můžeme integrovat <u>liché mocniny funkcí sin x a cos x</u> .

/124/.<u>příklad</u>. $\int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x.\cos x\,dx = \int (1-\sin^2 x)^2.\cos x\,dx\;;\;(\sin x = t\;)$

$$= \int (1-2t^2+t^4)\,dt = \ldots = \sin x - \tfrac{2}{3}\sin^3 x + \tfrac{1}{5}\sin^5 x\;+C$$

c) rozšířením zlomku funkcí sinx nebo cosx

/125/.<u>příklad</u>. $\int \frac{dx}{\sin x.\cos 2x} = \int \frac{\sin x.dx}{\sin^2 x.(\cos^2 x-\sin^2 x)} = \int \frac{1}{(1-\cos^2 x)(2\cos^2 x-1)}.\sin x$

$$(\cos x = t) = -\int \frac{dt}{(1-t^2)(2t^2-1)} = \ldots = \tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right| + \frac{1}{\sqrt{2}}.\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x+1}{\sqrt{2}\cos x-1}\right| + C$$

315.<u>cvičení</u>. a) $\int \frac{\cos x.\sin 2x}{\sin^2 x.(1+\cos^2 x)}\,dx$, [$\operatorname{arctg}(\cos x) - \ln\left|\cot g\,\frac{x}{2}\right|\;+C$]

b) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x+1}\,dx$, [$\cos x - 2\operatorname{arctg}(\cos x)$]

316.<u>cvičení</u>. Upravte následující integrály na tvar (153) :

a) $\int \frac{dx}{(2+\cos x).\sin x}$, b) $\int \frac{dx}{\sin x.\cos^3 x}$, c) $\int \frac{dx}{\sin x.\cos^4 x}$, d) $\int \frac{dx}{\sin^2 x.\cos x}$

Výsledky :

a) $\int \frac{dx}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)}.\sin x$, b) $\int \frac{dx}{(1-\cos^2 x)\cos^3 x}.\sin x$, d) $\int \frac{dx}{\sin^2 x(1-\sin^2 x)}.\cos x$

O b d o b n ě vypočteme integrály

$$\int \sin^n x.\cos^m x\, dx \quad , \quad \int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}\, dx \quad ,$$

když aspoň jeden z exponentů je lichý. Funkci s lichým exponentem rozložíme; je-li ve jmenovateli, zlomek rozšíříme.

/126/.<u>příklad</u>. $\int \sin^3 x.\cos^3 x\, dx = \int \sin^3 x.\cos^2 x.\cos x\, dx = \int \sin^3 x.(1-\sin^2 x).\cos x dx$

$$= \frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x + C$$

/127/.<u>příklad</u>. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x}\, dx = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}.\cos x\, dx = \int \frac{\sin^4 x}{(1-\sin^2 x)^2}.\cos x\, dx = \ldots\ldots$

317.<u>cvičení</u>. a) $\int \sin^2 x.\cos^3 x\, dx$, b) $\int \cos^6 x.\sin^5 x\, dx$, c) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$, d) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$

e) $\int \operatorname{cotg}^3 x\, dx$, f) $\int \frac{\sin^3 x+1}{\cos^2 x} dx$, g) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx$. <u>Výsledky</u>: a) $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x$,

b) $-\frac{1}{7}\cos^7 x + \frac{2}{9}\cos^9 x - \frac{1}{11}\cos^{11} x$, c) $-\frac{1}{\sin x} - \sin x$, d) $\frac{1}{3.\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}$,

e) $-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 x - \ln|\sin x|$, f) $\frac{1}{\cos x} + \cos x + \operatorname{tg} x$, g) $-\frac{3\cos x}{2} - \frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

Pro úplnost uvedeme ještě na tomto místě integraci funkce tvaru $R(\sin x , \cos x)$, jestliže obsahuje jen sudé mocniny, případně součiny stejných mocnin funkcí sinx a cosx. Užijeme k tomu goniometrických rovností :

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad , \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad , \quad \sin x.\cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

/128/.<u>příklad</u>.

a) $\int \sin^4 x.\cos^2 x\, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right)^2 . \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x-\cos^2 2x+\cos^3 2x)dx$

$$= -\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$$

b) $\int \cos^4 x\, dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 4x}{32} + C$

c) $\int \sin^3 x.\cos^3 x\, dx = \int (\sin x.\cos x)^3 dx = \frac{1}{8}\int (\sin 2x)^3 dx = \frac{1}{48}\cos^3 2x - \frac{1}{16}\cos 2x + C$

318.<u>cvičení</u>. a) $\int \sin^4 x\, dx$, b) $\int \cos^6 x\, dx$, c) $\int \cos^4 x.\sin^4 x\, dx$,

d) $\int \sin^5 x.\cos^5 x\, dx$, e) $\int \sin^2 x.\cos^4 x\, dx$. <u>Výsledky</u> : a) $\frac{3}{8}x - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32}$,

b) $\frac{5x}{16} + \frac{\sin 2x}{12}.\left(\cos^4 x + \frac{5\cos^2 x}{4} + \frac{15}{8} \right)$, c) $\frac{1}{128}.\left(3x - \sin 4x + \frac{1}{8}\sin 8x \right)$,

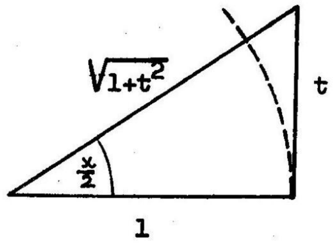
d) $-\frac{\cos 2x}{64} + \frac{\cos^3 2x}{96} - \frac{\cos^5 2x}{320}$, e) $\frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48}$.

<u>U n i v e r s á l n í   m e t o d a</u> k výpočtu integrálů $\int R(\sin x , \cos x)dx$ se zakládá na substituci

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$$

Pro transformaci integrálu musíme novou proměnnou t nahradit funkce sin x a cos x. Potřebné vztahy pro argument $\frac{x}{2}$ získáme nejvýhodněji ze zobrazení v jednotkové kružnici :

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad , \quad \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$



Funkce sin x a cos x určíme ze vztahů :

$\sin 2a = 2.\sin a.\cos a \qquad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-t}{1+t}$

Ze substituční rovnice plyne : $\frac{x}{2} = \mathrm{arctg}\ t$

$x = 2.\mathrm{arctg}\ t$

$dx = 2.(\mathrm{arctg}\ t)'.dt = \frac{2}{1+t^2}.dt$

/129/.**příklad.**

$$\int \frac{1 - \sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{1 - \frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = -2\int \frac{t-1}{(t+1).(t^2+1)}\,dt = \ldots\ldots =$$

$$= \ln\frac{(t+1)^2}{t^2+1} = \ln\frac{(\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1)^2}{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \ln|1+\sin x| + C$$

319.**cvičení.**

a) $\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}\,dx$, b) $\int \frac{dx}{1-\cos x}$, c) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$, d) $\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}$

e) $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$. Výsledky : a) $\frac{4}{1-\mathrm{tg}\frac{x}{2}} - x$, b) $-\mathrm{cotg}\frac{x}{2}$, c) $\frac{-2}{1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}}$,

d) $\frac{1}{5}.\ln\left|\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+2}\right|$, e) $\frac{1}{2-\mathrm{tg}\frac{x}{2}}$

DESÍTKA ÚLOH čís. 69

1) $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx$, $\quad [\ \ln|2+\cos x| + \frac{4}{\sqrt{3}}.\mathrm{arctg}(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}\frac{x}{2}) + C\ ]$

2) $\int \frac{1}{\sin 2x - 2\sin x}\,dx$, $\quad [\ -\frac{1}{4}.\ln|\mathrm{tg}\frac{x}{2}| + \frac{1}{8.\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} + C\ ]$

3) $\int \frac{1}{5-3\cos x}\,dx$, $\quad [\ \frac{1}{2}.\mathrm{arctg}(2\mathrm{tg}\frac{x}{2}) + C\ ]$

4) $\int \frac{1}{5+4\sin x}\,dx$, $\quad [\ \frac{2}{3}.\mathrm{arctg}\frac{5\mathrm{tg}\frac{x}{2}+4}{3} + C\ ]$

5) $\int \frac{1+\cos x}{\sin^3 x}\,dx$, $\quad [\ \frac{1}{2}.\ln|\mathrm{tg}\frac{x}{2}| - \frac{1}{4}.\mathrm{cotg}^2\frac{x}{2} + C\ ]$

6) $\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}\,dx$, $\quad [\ \frac{1}{\sqrt{5}}.\mathrm{arctg}\frac{3\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + C\ ]$

7) $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}\,dx$, $\quad [\ -\frac{x}{5} - \frac{3}{5}.\ln|\sin x + 2\cos x| + C\ ]$

8) $\int \frac{1}{\sin x + \sqrt{3}\cos x}\,dx$, $\quad [\ \frac{1}{2}.\ln\left|\frac{3.\mathrm{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}.\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\right| + C\ ]$

9) $\int \frac{\sin x.\cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$, $\quad [\ \frac{t-1}{t^2+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-(1-\sqrt{2})}{t-(1+\sqrt{2})}\right| + C,\ t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}\ ]$

10) $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\sin x.(1+\cos x)}\,dx$, $\left[\ \frac{1}{4}.\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + \mathrm{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}.\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C\ \right]$

Obsahuje-li funkce R (sinx , cosx) jen s u d é mocniny funkcí sin x a cos x, případně i součin obou funkcí, nebo jde-li o funkci R (tg x) , je výhodnější užít substituční rovnice

$$\mathrm{tg}\,x = t\ ,\quad \text{z níž plyne}\quad x = \mathrm{arctg}\,t\ ,\quad dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

Z jednotkové kružnice pro argument x : $\sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

/130/.příklad.

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int\frac{t^2}{(t^2+2)(t^2+1)}\,dt = \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{2}} - x$$

320.cvičení.

a) $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx$, b) $\displaystyle\int\frac{\sin x.\cos x}{1+\sin^4 x}\,dx$ c) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$, d) $\displaystyle\int\frac{1-\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}x}\,dx$, e) $\displaystyle\int\frac{1+\mathrm{tg}x}{\sin 2x}\,dx$

Výsledky :

a) $x-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}x)$, b) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(2\mathrm{tg}^2x+1)$, c) $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}2x}{\sqrt{2}}$, d) $\ln|\sin x+\cos x|$,
e) $\frac{1}{2}(\ \mathrm{tg}x+\ln|\mathrm{tg}x|\ )$.

DESÍTKA ÚLOH čís. 70

1) $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}$, 2) $\displaystyle\int\frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\cos 2x}\,dx$, 3) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^4 x.\cos^4 x}$, 4) $\displaystyle\int\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\,dx$,

5) $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$, 6) $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx$, 7) $\displaystyle\int\frac{\sin 2x}{\cos^4 x}\,dx$, 8) $\displaystyle\int\frac{dx}{1+3\cos^2 x}$

9) $\displaystyle\int\frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx$, 10) $\displaystyle\int\sin^2 x.\cos^4 x\,dx$ .Výsledky: 1) $\frac{1}{\sqrt{2}}.\mathrm{arctg}(\ \sqrt{2}.\mathrm{tg}x\ )$,
2) $\frac{1}{4}.\ln\left|\frac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x}\right| + \frac{1}{2}\sin x.\cos x$, 3) $\dfrac{(\mathrm{tg}^2x-1)(\mathrm{tg}^4x+10\mathrm{tg}^2x+1)}{3.\mathrm{tg}^3x}$, 4) $\mathrm{tg}x+\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{3}{2}x$,
5) $\frac{1}{ab}.\mathrm{arctg}\frac{a.\mathrm{tg}x}{b}$, 6) $\frac{1}{2\sqrt{2}}.\ln\left|\frac{\sqrt{2}-\sin 2x}{\sqrt{2}+\sin 2x}\right|$, 7) tg^2x+C nebo $\frac{1}{\cos^2 x}+C$,
8) $\frac{1}{2}.\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}x}{2}$, 9) $\mathrm{arctg}(\ \mathrm{tg}^2x\ )$, 10) $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+C$.

Integrace g o n i o m e t r i c k ý m i substitucemi .

$$\int R\,(x, \sqrt{p^2x^2+q^2}\,)\,dx\ ,\ \ px = q.\mathrm{tg}\,t\ ;\qquad \int R\,(x, \sqrt{p^2x^2-q^2}),\ \ px = \frac{q}{\cos t}$$
$$\int R\,(x, \sqrt{q^2-p^2x^2}\,)\,dx\ ,\ \ px = q.\sin t\ \ \text{nebo}\ \ px = q.\cos t \qquad (154)$$

/131/.příklad.

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1+2x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{tg}^3t}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2t}}.\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{dt}{\cos^2t} = \frac{1}{4}\int\frac{\sin^3t}{\cos^4t}dt = \ldots = \frac{1}{6}\sqrt{1+2x^2}\,(x^2-1)+C$$

(zavedeno: $x.\sqrt{2} = \mathrm{tg}\ t$)

/132/.příklad.

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \int\frac{1}{\frac{a^2}{\cos^2t}\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2t}-a^2}}.\frac{a.\sin t}{\cos^2t}dt = \frac{1}{a^2}\int\cos t\ dt = \frac{1}{a^2.|x|}.\sqrt{x^2-a^2}.$$

(zavedeno: $x = \frac{a}{\cos t}$)

§ 41. INTEGRACE METODOU NEURČITÝCH KOEFICIENTŮ.

U některých funkcí známe předem tvar příslušné primitivní funkce. Jde o některé funkce tvaru $P(x).f(x)$ nebo $\frac{P(x)}{f(x)}$, kde $P(x)$ je mnohočlen. Primitivní funkce je vyjádřena jistým mnohočlenem $Q(x)$, jehož koeficienty určíme tzv. metodou neurčitých koeficientů. Postup výpočtu lze v hlavních rysech vyjádřit dvěma kroky:

1. krok: Rovnost, která má na levé straně daný integrál a na druhé straně známý tvar primitivní funkce, derivujeme.
2. krok: Ze vzniklé rovnosti získáme po úpravě rovnost mnohočlenů, která nás povede k výpočtu koeficientů mnohočlenu $Q(x)$.

Uvedeme tři rovnosti, jejichž správnost se dokazuje a jichž užijeme k výpočtu tří typů integrálů:

I. typ:
$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q(x).\sqrt{ax^2+bx+c} + k.\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + C, \tag{155}$$
kde $Q(x)$ je mnohočlen stupně o 1 nižšího než mnohočlen $P(x)$.

/133/. příklad. $J = \int \frac{11x^4-195x^2}{\sqrt{x^2+6x+5}}dx = (Ax^3+Bx^2+Cx+D).\sqrt{x^2+6x+5} + k.\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+5}}dx$

1. krok: $\frac{11x^4-195x^2}{\sqrt{x^2+6x+5}} = (3Ax^2+2Bx+C)\sqrt{x^2+6x+5} + \frac{(Ax^3+Bx^2+Cx+D)(2x+6)}{2.\sqrt{x^2+6x+5}} + \frac{k}{\sqrt{x^2+6x+5}}$

2. krok: Rovnost násobíme výrazem $\sqrt{x^2+6x+5}$ a uvedeme na rovnost mnohočlenů:

$$11x^4-195x^2 = 4A.x^4+(21A+3B)x^3+(15A+15B+2C)x^2+(10B+9C+D)x+(5C+3D+k)$$

Ze soustavy čtyř rovnic vypočteme neznámé: $A=\frac{11}{4}$, $B=-\frac{77}{4}$, $C=\frac{105}{4}$, $D=-\frac{175}{4}$, $k = 0$

Pak $J = \frac{1}{4}(11x^3-77x^2+105x-175).\sqrt{x^2+6x+5} + C$

321. cvičení.

a) $\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$, [$(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6})\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{5}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| + C$]

b) $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$, [$-\frac{1-2x}{4}.\sqrt{1+x-x^2} - \frac{11}{8}.\arcsin\frac{1-2x}{\sqrt{5}} + C$]

II. typ: (156)
$$\int P(x).\cos mx\,dx = M(x).\cos mx + N(x).\sin mx;$$
$$\int P(x).\sin mx\,dx = M(x).\cos mx + N(x).\sin mx.$$
[Mnohočleny $M(x)$ a $N(x)$ jsou téhož stupně jako $P(x)$]

/134/. příklad. $J = \int (x^2+3x+5).\cos 2x\,dx = (A_2x^2+A_1x+A_0)\cos 2x + (B_2x^2+B_1x+B_0)\sin 2x$

Po derivování obdržíme rovnost, kterou uvedeme na tvar:

$$(x^2+3x+5)\cos 2x = \left[2B_2x^2+(2B_1+2A_2)x+(A_1+2B_0)\right].\cos 2x + \left[-2A_2x^2+2(B_2-A_1)x+(B_1-2A_0)\right].\sin 2x$$

Porovnáváme zvlášť mnohočleny při $\cos 2x$ a zvlášť při $\sin 2x$ (v tomto případě je na levé straně při $\sin 2x$ nulový mnohočlen), čímž dospějeme k soustavě šesti rovnic; z nich: $A_2=0$, $A_1=\frac{1}{2}$, $A_0=\frac{3}{4}$; $B_2=\frac{1}{2}$, $B_1=\frac{3}{2}$, $B_0=\frac{9}{4}$.

$$J = (\tfrac{1}{2}x+\tfrac{3}{4})\cos 2x + (\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{3}{2}x+\tfrac{9}{4})\sin 2x + C$$

322. cvičení. $\int (x^2+3x+2).\sin 2x\,dx$, [$\frac{1}{4}(2x+3)\sin 2x - \frac{1}{4}(2x^2+6x+3)\cos 2x$]

III. typ:
$$\int P(x).e^{kx}dx = Q(x).e^{kx} + C; \text{ P(x) a Q(x) jsou téhož stupně.} \tag{157}$$

Po derivování rovnosti krátíme mocninou e^{kx} a uvedeme na rovnost mnohočlenů.

323. cvičení. $\int (x^3-2x^2+5).e^{3x}dx$, [$(\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{2}{3}x+\frac{13}{9}).e^{3x} + C$].