Archimédova statika v geometrii

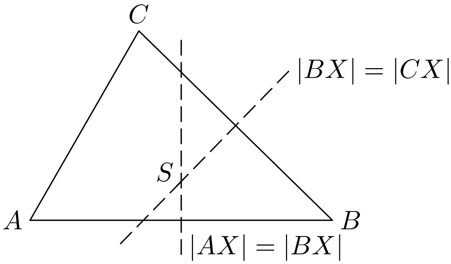
JAROMÍR ŠIMŠA

Abstrakt. Článek je podrobným výkladem tématu, ve kterém se pojí základy dvou disciplin: eukleidovské geometrie a newtonovské mechaniky. Způsobem zpracovaní je příspěvek úplným podkladem pro demonstraci mezipředmětové kooperace při výuce matematiky a fyziky na čtyřletých gymnáziích.

1. Úvod

Na příkladech z elementární geometrie ukážeme, že za každou matematickou teorií se může skrývat (někdy zjevně, někdy utajeně) nějaká přírodní nebo sociální „zápletka“. Tato myšlenka není ve sporu se současným pohledem na podstatu matematické teorie, jež spočívá ve formálně-logickém odvozování důsledků některé soustavy axiómů. Při tomto pojetí matematika není — na rozdíl od ostatních přírodních věd — bezprostřední výpovědí o světě kolem nás. Přestože výchozí postuláty každé matematické teorie mohou být vybrány libovolně a diskuse o jejich platnosti samotné matematice nepřísluší, skutečně zajímavé a bohatě strukturované výsledky dostaneme obvykle jen tehdy, pokud výchozí definice a axiómy jsou odrazem našich zkušeností s objekty a procesy reálného světa. (I když se někteří matematikové holedbají, že jejich výsledky jsou krásné samy o sobě a nemají žádný přesah mimo matematiku, nelze taková vyhlášení brát zcela vážně.) V současnosti je to dobře vidět na intenzívním rozvoji geometrie topologických variet, který by byl nemyslitelný, kdyby nebyl podněcován otázkami, jež kladou fyzika mikrosvěta elementárních částic a fyzika makrosvěta galaxií.

Vraťme se však z výšin atraktivního světa moderního výzkumu na pevnou zem školské praxe. Dobře víte, že několik základních pouček z geometrie trojúhelníku je následujícího typu: *Tři přímky, které jsou jistým popisem přiřazeny danému trojúhelníku, procházejí jedním bodem.* Taková jsou např. tvrzení o průsečících těžnic, výšek, os stran či os vnitřních úhlů. Budeme-li je posuzovat z hlediska metod, jimiž se dokazují, pak k nejsnadnějším patří poučka o osách stran. Leží-li totiž bod X na ose strany AB trojúhelníku ABC, pak $|AX| = |BX|$ (obr. 1); leží-li navíc



Obr. 1

i na ose strany BC, pak $|BX| = |CX|$. Pro průsečík S os stran AB a BC tedy platí $|AS| = |BS| = |CS|$, rovnost $|AS| = |CS|$ ale znamená, že bod S leží i na ose třetí strany trojúhelníku, strany AC.

Jistě si uvědomíte, že podobně snadný je i důkaz tvrzení o průsečíku os vnitřních úhlů. Tyto osy jsou totiž množiny bodů, které můžeme snadno popsat pomocí vzdáleností od stran trojúhelníku (u os stran byly ve hře vzdálenosti od vrcholů trojúhelníku). Podobný množinový popis nám ale schází u dalších významných přímek nebo úseček, jakými jsou například spojnice vrcholů trojúhelníku se středy protějších stran, tedy *těžnice.*[1] Tvrzení o těžnicích proto obvykle dokazujeme jinak, nejčastěji na základě vlastností středních příček trojúhelníku a stejnolehlosti (viz [2], kde je uveden i jiný pěkný důkaz, který využívá pouze vlastnosti obsahů trojúhelníků). Vývoj školské matematiky zapříčinil, že historicky první důkaz věty o těžnicích trojúhelníku, který podal Archimédes[2], je současnou matematickou veřejností téměř zapomenut. Připomíná se nám však v samotném názvu *těžnice*, odvozeném od slova *tíha*. Archimédes totiž dospěl ke geometrickým pojmům těžnice a těžiště cestou abstrakce od tíhy (či chcete-li, hmotnosti) konkrétních těles. Objevil přitom základní zákony statiky. Podívejme se proto spolu, jak se taková (ve své podstatě fyzikální) metoda může uplatnit v geometrii. Určitě přitom oceníme, jak některé intuitivně neprůhledné geometrické výsledky mají přirozenou fyzikální interpretaci.

[1] V oddílu 3 tohoto článku ukážeme, že i pro těžnice takový popis existuje.

[2] Archimédes ze Syrakus, asi 287–212 př.n.l., jeden z největších a nejslavnějších starořeckých matematiků, fyziků a astronomů.

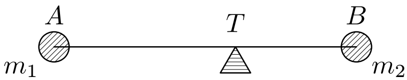
2. Archimédovy axiomy

Poznatky o těžištích konkrétních těles, tj. místech, kde působí jejich tíha, byly lidem známy od pradávna. Teprve Archimédes však tyto jednotlivé poznatky systematizoval a extrahoval jejich podstatu do jednoduchých statických zákonů. Tyto zákony považoval za neměnné a univerzální. Navíc požadoval, aby se veškeré výpočty a úvahy opíraly pouze o ně. Dnes bychom řekli, že Archimédes postupoval přísně vědecky: vybudoval statiku jako *axiomatickou teorii.*

Dříve než si zmíněné axiomy o těžištích uvedeme, poznamenejme, že Archimédes ve svých úvahách důvtipně kombinoval prvky diskrétní a infinitezimální povahy. (Sami se o tom za chvíli přesvědčíme na příkladu těžiště „hmotného“ trojúhelníku.) Uvažoval například o hmotných úsečkách složených z hmotných bodů apod. Budeme proto raději mluvit o hmotných *soustavách* místo *tělesech.* Každou přímku, která prochází těžištěm hmotné soustavy, nazveme *těžnicí* dané soustavy.

Axiom I. (Existence a jednoznačnost) *Každá hmotná soustava má právě jedno těžiště.*

Axiom II. (Zákon páky) *Těžiště dvojice hmotných bodů A, B o hmotnostech m_1, m_2 je ten bod T úsečky AB, pro který platí $m_1|AT| = m_2|BT|$* (obr. 2).



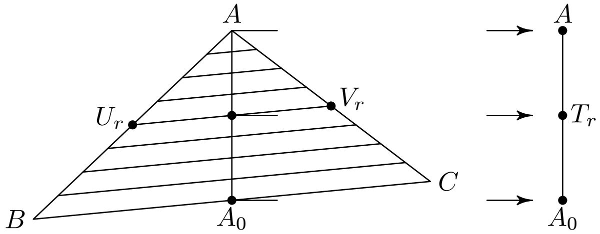
Obr. 2

Axiom III. (Redukční princip) *Těžiště hmotné soustavy se nezmění, zaměníme-li libovolnou její část (tzv. podsoustavu) jedním hmotným bodem splývajícím s těžištěm této podsoustavy a majícím celou její hmotnost.*

Zkusme se nyní ve svých myšlenkách přenést do Archimédova starého Řecka, do dob, kdy se ještě tak striktně nerozlišovala matematika od fyziky, a podívejme se, jaké geometrické výsledky se dají z uvedených tří axiomů odvodit. Teprve na závěr v oddílu 12 si řekneme, jak se naše „hmotnostní“ úvahy dají formalizovat tak, aby se vyhovělo současným požadavkům na exaktnost matematických teorií.

3. Těžiště trojúhelníku

Představme si, že z tenké homogenní destičky je vyroben model obecného trojúhelníku ABC. Abychom určili jeho těžiště, postupujme jako Archimédes a rozložme celý trojúhelník na velké množství tenkých „pásků“ rovnoběžných se stranou BC. V „limitním“ případě jsou tyto pásky hmotné úsečky U_rV_r (obr. 3).



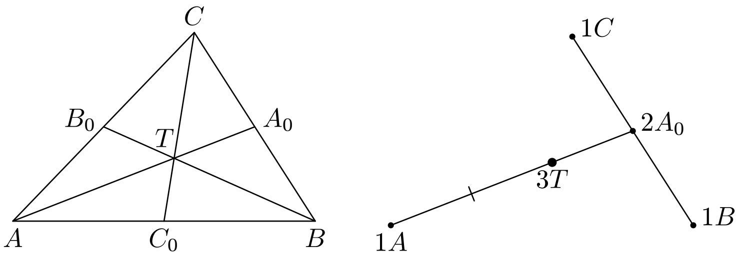
Obr. 3

Protože každá úsečka U_rV_r je homogenní, je jejím těžištěm střed této úsečky,[3] který označíme T_r. Podle Axiomu III můžeme každou úsečku U_rV_r zaměnit hmotným bodem T_r, jehož hmotnost je přímo úměrná délce úsečky U_rV_r. Proto těžiště T našeho modelu trojúhelníku ABC splývá s těžištěm soustavy hmotných bodů T_r, které vyplňují spojnici vrcholu A se středem A_0 strany BC. To ale znamená, že bod T leží na *těžnici* AA_0 (blíže konci A_0, neboť u tohoto konce mají body T_r větší hmotnost). Zopakujeme-li naši úvahu pro rozklad trojúhelníku na úsečky rovnoběžné se stranou AB respektive AC, dojdeme k závěru: Bod T leží na všech třech těžnicích AA_0, BB_0, CC_0 (obr. 4 vlevo). Jinými slovy, *tyto tři úsečky procházejí jedním bodem.*

Zdůrazněme, že předchozím výkladem jsme ještě neodpověděli na otázku, v jakém poměru se těžnice trojúhelníku navzájem dělí. Vyložme, jakým „trikem“ na ni našel odpověď Archimédes: *místo destičky ve tvaru trojúhelníku ABC uvážil soustavu tří hmotných bodů A, B, C o téže hmotnosti* (rovné určité jednotce). Takovou soustavu $\mathcal{S}$ budeme zapisovat následujícím způsobem

$$\mathcal{S} = \{1A, 1B, 1C\},$$

[3] Je-li hmotná soustava středově souměrná podle bodu X, je bod X jejím těžištěm. Tato vlastnost plyne z Axiomu III, neboť každou dvojici souměrných bodů o téže hmotnosti m lze zaměnit těžištěm této dvojice (s hmotností $2m$), kterým je však podle zákona páky právě bod X. Podobné tvrzení platí o soustavách, které mají osu (popř. rovinu) souměrnosti.



Obr. 4

kde kladné číslo před označením bodu značí jeho hmotnost. Zaměníme-li podle Axiomu III dvojici bodů $1B$, $1C$ hmotným bodem $2A_0$, zjistíme, že těžiště T soustavy $\mathcal{S}$ leží na úsečce AA_0 a přitom (podle zákona páky) $|AT| : |A_0T| = 2 : 1$ (obr. 4 vpravo). Podobně redukcí na soustavy $\{1B, 2B_0\}$ respektive $\{1C, 2C_0\}$ dospějeme k závěru: *Těžiště soustavy $\mathcal{S}$ leží na všech třech těžnicích AA_0, BB_0, CC_0 a dělí každou z nich v poměru* $2 : 1$ (ve směru od vrcholu ke straně). Zdůrazněme, že toto tvrzení jsme po vzoru Archiméda odvodili jednoduchou, leč pozoruhodnou úvahou o vhodné tříbodové hmotné soustavě $\mathcal{S}$, a to *nezávisle* na předchozím výkladu o modelu trojúhelníku, sestaveném z nekonečně mnoha hmotných úseček. Jazykem hmotných soustav lze také získat *množinový popis těžnic*, který jsme slíbili v úvodu článku v poznámce 1 pod čarou: Například těžnice AA_0 je množina těžišť těch hmotných soustav trojic bodů

$$\mathcal{S} = \{pA, qB, rC\},$$

ve kterých jsou body B a C „naděleny“ stejnými hmotnostmi $q = r$. V dalších oddílech článku ukážeme, jaké další poznatky o obecném trojúhelníku lze získat jinými vhodnými výběry trojic hmotností (p, q, r). (Pro lepší přehlednost budeme hmotnost bodu X zpravidla značit m_X.)

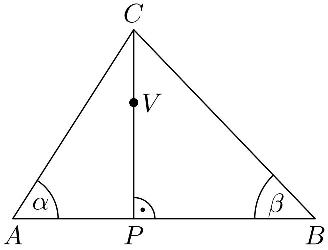
Úkol 1. Úvahou o čtveřici hmotných bodů $\{1A, 1B, 1C, 1D\}$ získejte základní poznatky o těžišti obecného čtyřstěnu $ABCD$. Nezapomeňte přitom na redukované soustavy typu $\{2E, 2F\}$, kde E a F jsou středy libovolné dvojice protilehlých hran čtyřstěnu $ABCD$.

Úkol 2. Je těžiště modelu obecného čtyřúhelníku vyrobeného z homogenního materiálu totožné s těžištěm čtveřice jeho vrcholů o téže hmotnosti? Pokud ne, charakterizujte ty čtyřúhelníky, pro které je odpověď na tuto otázku kladná.

Návod: Dokažte nejprve, že polohy „plošného“ těžiště T_p a „vrcholového“ těžiště T_v libovolného konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ jsou určeny vektory $\boldsymbol{KT}_p = \frac{1}{3}\boldsymbol{KE'}$ a $\boldsymbol{KT}_v = \frac{1}{2}\boldsymbol{KL}$, kde bod K je střed úhlopříčky AC, bod L střed úhlopříčky BD, bod E průsečík těchto úhlopříček; konečně E' značí bod souměrně sdružený s bodem E podle středu L. (Stejná vyjádření platí i pro nekonvexní čtyřúhelníky $ABCD$ obsahující úhlopříčku AC.)

4. Ortocentrum trojúhelníku

Nechť CP je výška ostroúhlého trojúhelníku ABC s vnitřními úhly α,



Obr. 5

β, γ (obr. 5). Na rovnost

$$|AP| \cdot \operatorname{tg} \alpha = |BP| \cdot \operatorname{tg} \beta \,(= |CP|)$$

můžeme pohlédnout jako na zákon páky pro dvojici hmotných bodů A, B o hmotnostech $\operatorname{tg} \alpha$ resp. $\operatorname{tg} \beta$. Zvolíme-li proto hmotnosti vrcholů A, B, C jako

$$m_A = \operatorname{tg} \alpha, \quad m_B = \operatorname{tg} \beta, \quad m_C = \operatorname{tg} \gamma,$$

usoudíme, že těžiště této trojice hmotných bodů leží na *každé* ze tří výšek trojúhelníku ABC. Posuďte sami, jak efektně jsme právě dokázali netriviální tvrzení o tom, že výšky libovolného[4] trojúhelníku procházejí jedním bodem, zvaným *ortocentrem* daného trojúhelníku.[5] Navíc můžeme okamžitě doplnit, v jakém poměru se výšky navzájem dělí. Protože ortocentrum V je podle předchozího těžištěm dvojice bodů $\{\operatorname{tg} \gamma\, C, (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) P\}$, plyne ze zákona páky úměra

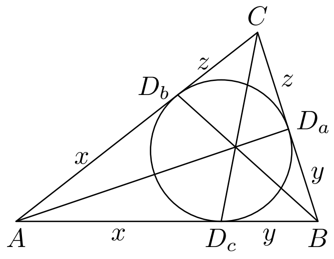
$$|CV| : |PV| = (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) : \operatorname{tg} \gamma.$$

[4] V případě tupoúhlého trojúhelníku je jedna z hmotností vrcholů záporná, v případě pravoúhlého trojúhelníku „nekonečně veliká“.

[5] Pokuste se sami o jiný důkaz. Čtyři možné důkazy najdete v [2].

5. Body dotyku vepsané kružnice

Do libovolného trojúhelníku ABC vepišme kružnici a označme D_a, D_b, D_c její body dotyku se stranami trojúhelníku (obr. 6). Obvod trojúhelníku ABC je těmito body rozdělen na tři dvojice shodných úseček, jejichž délky označíme takto:



Obr. 6

$$|AD_b| = |AD_c| = x, \quad |BD_c| = |BD_a| = y, \quad |CD_a| = |CD_b| = z.$$

Jestliže tedy „nadělíme“ vrcholům trojúhelníku hmotnosti

$$m_A = \frac{1}{x}, \quad m_B = \frac{1}{y}, \quad m_C = \frac{1}{z},$$

stane se bod D_a těžištěm dvojice bodů B, C, bod D_b těžištěm dvojice bodů A, C a konečně bod D_c těžištěm dvojice bodů A, B. Odtud plyne, že těžištěm celé trojice A, B, C bude společný bod úseček AD_a, BD_b a CD_c. Dokázali jsme tak toto tvrzení: *Spojíme-li každý vrchol daného trojúhelníku s bodem dotyku vepsané kružnice na protější straně, dostaneme tři úsečky, které procházejí jedním bodem.*

Tento průsečík se nazývá Gergonnův[6] bod daného trojúhelníku.

Úkol 3. Libovolnému trojúhelníku lze *připsat* tři kružnice tak, že každá z nich se dotýká jedné strany trojúhelníku a prodloužení dvou ostatních stran. Dokažte, že *tři úsečky, z nichž každá spojuje vrchol daného trojúhelníku s bodem dotyku připsané kružnice na protější straně, procházejí jedním bodem.*

Tento průsečík se nazývá Nagelův[7] bod daného trojúhelníku.

Návod: Vyjádřete délky šesti úseček, na které je rozdělen obvod trojúhelníku vrcholy a body dotyku, pomocí délek stran trojúhelníku. Tak zjistíte, že jde (jako v úvaze z oddílu 5) o tři dvojice shodných úseček.

[6] Joseph Diez Gergonne [žergon], 1771–1859, francouzský astronom a matematik.

[7] Christian August Nagel [nagel], 1821–1903, německý geodet a matematik.

6. Střed vepsané kružnice

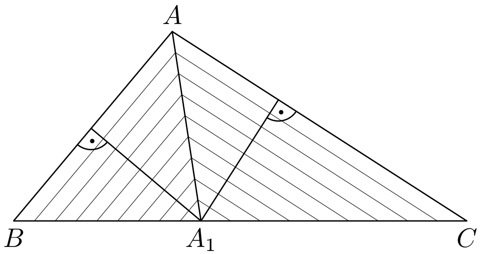
Uvažujme opět obecný trojúhelník ABC a položme si otázku, kde leží těžiště O trojice jeho vrcholů o hmotnostech

$$m_A = |BC|, \quad m_B = |AC|, \quad m_C = |AB|.$$

(Odpověď budeme potřebovat hned v následujícím oddílu 7.) Bod O je průsečík příček AA_1, BB_1 a CC_1, kde A_1, B_1, C_1 jsou ty body stran BC, AC resp. AB, pro které (podle zákona páky) platí úměra

$$\frac{|BA_1|}{|CA_1|} = \frac{|BA|}{|CA|}, \quad \frac{|CB_1|}{|AB_1|} = \frac{|CB|}{|AB|}, \quad \frac{|AC_1|}{|BC_1|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Vzhledem k tomu, že podíl $|BA_1| : |CA_1|$ udává poměr obsahů trojúhelníků BA_1A a CA_1A (mají totiž společnou výšku z vrcholu A, viz obr. 7), plyne z první rovnosti, že tyto dva trojúhelníky mají shodné výšky na

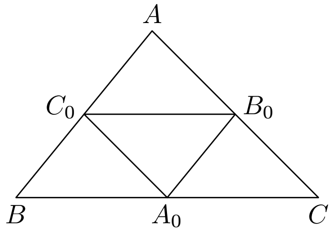


Obr. 7

strany AB a AC. Jinými slovy, bod A_1 má od stran AB a AC stejnou vzdálenost, takže přímka AA_1 je osa úhlu BAC. To znamená, že bod O je *středem kružnice vepsané* trojúhelníku ABC.

7. Těžiště obvodu trojúhelníku

Na základě předchozího výsledku teď snadno odpovíme na otázku, kde leží těžiště tenkého homogenního drátu, který je vytvarován do obvodu daného trojúhelníku ABC. Jde vlastně o soustavu tří homogenních hmotných úseček AB, AC a BC o hmotnostech, které jsou přímo úměrné jejich délkám. Těžiště každé této úsečky leží v jejím středu. Označme tyto středy A_0, B_0 a C_0 (obr. 8).



Obr. 8

Podle Axiomu III můžeme naši soustavu tří hmotných úseček zaměnit trojicí bodů A_0, B_0, C_0 o hmotnostech

$$m_{A_0} = k \cdot |BC|, \quad m_{B_0} = k \cdot |AC|, \quad m_{C_0} = k \cdot |AB|,$$

kde $k > 0$ je libovolná konstanta. (Poznamenejme na tomto místě, že těžiště hmotné soustavy se nezmění, vynásobíme-li hmotnosti všech jejích prvků stejným kladným číslem. Vysvětlete sami, jak tato vlastnost plyne z Archimédových axiomů.) Zvolíme-li $k = \frac{1}{2}$, dostaneme trojici vrcholů trojúhelníku $A_0B_0C_0$ o hmotnostech rovných délkám protějších stran. Podle předchozího příkladu je hledaným těžištěm *střed kružnice vepsané* trojúhelníku $A_0B_0C_0$.

8. Barycentrické souřadnice

Zkušenosti z předchozích příkladů napovídají, že vhodnou volbou hmotností vrcholů daného trojúhelníku ABC můžeme získat soustavu tří hmotných bodů, jejímž těžištěm je předem zvolený bod X tohoto trojúhelníku. Důkaz je snadný: označíme-li Y průsečík přímky AX se stranou BC, je bod X těžištěm trojice hmotných bodů A, B a C, právě když pro jejich hmotnosti platí

$$m_B : m_C = |CY| : |BY| \quad \text{a zároveň} \quad m_A : (m_B + m_C) = |YX| : |AX|.$$

(Vysvětlete sami.) Je dobře vidět, že taková trojice (m_A, m_B, m_C) vždy existuje a je pro daný bod X jediná, nerozlišujeme-li trojice

$$(m_A, m_B, m_C) \quad \text{a} \quad (km_A, km_B, km_C),$$

kde $k > 0$ je libovolná konstanta. Doplníme-li „normalizační“ podmínku

$$m_A + m_B + m_C = 1,$$

stane se přiřazení $X \mapsto (m_A, m_B, m_C)$ jednoznačné. Čísla m_A, m_B, m_C se pak nazývají *barycentrické souřadnice* bodu X.[8] Zavedl je poprvé německý matematik August Ferdinand Möbius (1790–1868), který s jejich pomocí podal výklad projektivní geometrie. Zdůrazněme, že barycentrická soustava souřadnic je závislá na volbě výchozího trojúhelníku ABC. Je nám rovněž jasné, že těmito souřadnicemi můžeme popisovat nejen vnitřní body trojúhelníku ABC, ale všechny body jeho roviny (na obvodu trojúhelníku ABC je aspoň jedna ze souřadnic m_A, m_B, m_C nulová, vně trojúhelníku ABC aspoň jedna záporná). V našem století našly barycentrické souřadnice uplatnění v algebraické topologii.

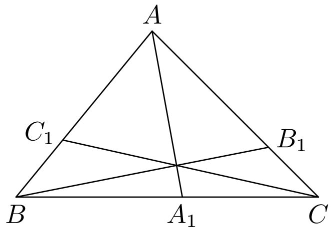
Úkol 4. Který významný bod trojúhelníku ABC je těžištěm trojice jeho vrcholů o hmotnostech

$$m_A = \sin 2\alpha, \quad m_B = \sin 2\beta, \quad m_C = \sin 2\gamma$$

při obvyklém označení vnitřních úhlů?

9. Variace hmot

Víme už, že každou trojici příček AA_1, BB_1, CC_1, které procházejí jedním bodem trojúhelníku ABC (obr. 9), můžeme interpretovat jako těžnice (tj. přímky procházející těžištěm) soustavy vrcholů A, B, C s vhodnými hmotnostmi m_A, m_B, m_C. Je jasné, že každá *změna* těchto hmotností (přesněji řečeno, změna poměrů $m_A : m_B : m_C$) obvykle vyvolá změnu směrů těchto těžnic. Pro nás je teď na tom zajímavé to, že některým změnám (říkejme *variacím*) hmotností odpovídají změny těžnic s jasnou geometrickou interpretací. Jakmile takovou interpretaci objevíme, získáme okamžitě pěkný geometrický výsledek. Vysvětlíme to na následujícím příkladu.



Obr. 9

[8] Řecké slovo $\beta\alpha\varrho\iota\sigma$ [baris] značí *tíha*.

Ze zákona páky plyne toto pravidlo: je-li bod T těžiště soustavy dvou bodů $\{pA, qB\}$ a bod T' těžiště soustavy $\{qA, pB\}$, pak body T a T' jsou souměrné podle středu úsečky AB. Dodejme, že těžiště druhé soustavy $\{qA, pB\}$ je totožné s těžištěm soustavy $\{\frac{1}{p}A, \frac{1}{q}B\}$ (srovnej poměr hmotností), která vznikne z první soustavy $\{pA, qB\}$ „převrácením“ (tj. zobrazením $x \mapsto 1/x$) hmotností jejích prvků. Víme proto, jaká změna těžnic nastane při přechodu od trojice hmotností (m_A, m_B, m_C) k nové trojici (m'_A, m'_B, m'_C) určené předpisem

$$m'_A = \frac{1}{m_A}, \quad m'_B = \frac{1}{m_B}, \quad m'_C = \frac{1}{m_C}.$$

Dostáváme tak následující výsledek.

Věta. *Nechť AA_1, BB_1, CC_1 jsou tři příčky trojúhelníku ABC, které procházejí jedním bodem. Nechť bod A_2 je souměrný s bodem A_1 podle středu strany BC, bod B_2 je souměrný s bodem B_1 podle středu strany AC a bod C_2 je souměrný s bodem C_1 podle středu strany AB. Potom příčky AA_2, BB_2, CC_2 rovněž procházejí jedním bodem.*

Úkol 5. Zjistěte, jaký geometrický význam má variace hmot

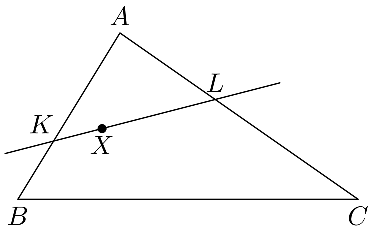
$$m'_A = \frac{|BC|^2}{m_A}, \quad m'_B = \frac{|AC|^2}{m_B}, \quad m'_C = \frac{|AB|^2}{m_C}.$$

10. Štěpení a lepení

Nechť bod X je těžištěm soustavy tří hmotných bodů

$$\mathcal{S} = \{pA, qB, rC\}.$$

Dosud jsme zkoumali jen ty těžnice soustavy $\mathcal{S}$, které procházejí jedním z vrcholů A, B nebo C. Chceme-li pracovat například s těžnicí, která protíná strany AB a AC ve vnitřních bodech K a L (obr. 10), je možné

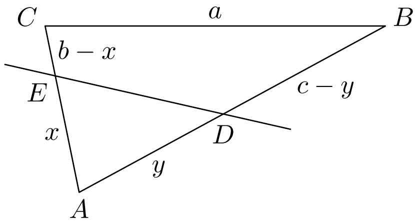


Obr. 10

„rozštěpit“ hmotný bod $\{pA\}$ na dva body $\{p_1A\}$ a $\{p_2A\}$ tak, aby bod K byl těžištěm dvojice $\{p_1A, qB\}$, aby bod L byl těžištěm dvojice $\{p_2A, rC\}$ a aby samozřejmě platilo $p = p_1 + p_2$. Někdy je výhodný i opačný postup: dva nebo více hmotných bodů, které „sídlí“ ve stejném místě, dohromady „slepit“. Uveďme jednu ukázku.

Příklad. Dokažte, že každá přímka, která dělí obsah i obvod daného trojúhelníku ve stejném poměru, prochází středem kružnice jemu vepsané.

Řešení: Předpokládejme, že některá přímka má popsanou vlastnost a protíná strany AB a AC zadaného trojúhelníku ABC v bodech D a E (obr. 11). Označme strany trojúhelníku obvyklým způsobem a, b, c



Obr. 11

a odvoďme, jaká je závislost mezi délkami $x = |AE|$ a $y = |AD|$. Rovnost poměrů

$$\frac{S(AED)}{S(ABC)} = \frac{|AE| + |AD|}{|AC| + |AB| + |BC|}$$

(S značí obsah) můžeme přepsat ve tvaru

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot xy \cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin\alpha} = \frac{x+y}{a+b+c},$$

což je ekvivalentní s rovností

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{a+b+c}{bc}.$$

Zvolme hmotnosti bodů B a C takto: $m_B = b$ a $m_C = c$. (Proč volíme takové hmotnosti, pochopíte, podíváte-li se zpět na oddíl 6.) Podle zákona páky je bod D těžištěm dvojice $\{bB, a_1A\}$, právě když číslo a_1 splňuje podmínku $a_1y = b(c-y)$, neboli

$$a_1 = \frac{b(c-y)}{y}.$$

Podobně bod E je těžištěm dvojice $\{cC, a_2A\}$, právě když pro číslo a_2 platí

$$a_2 = \frac{c(b-x)}{x}.$$

Vzhledem k odvozené závislosti mezi čísly x a y se lehce ověří, že čísla a_1 a a_2 definovaná předchozími rovnostmi splňují podmínku $a_1 + a_2 = a$. To jsme právě potřebovali, neboť naším úmyslem je hmotné body a_1A a a_2A slepit. Protože tedy platí

$$\{bB, a_1A\} \cup \{cC, a_2A\} = \{aA, bB, cC\}$$

(jistě chápete, co znamená sjednocení „disjunktních“ hmotných soustav), můžeme na základě Axiomu III tvrdit, že těžiště soustavy $\{aA, bB, cC\}$ (což je, jak víme podle oddílu 6, střed O kružnice vepsané) splývá s těžištěm dvojice bodů E, D o hmotnostech

$$m_D = a_1 + b, \quad m_E = a_2 + c.$$

Tak jsme dokázali, že střed O skutečně na přímce DE leží.

Úkol 6. Metodou hmotných bodů dokažte, že v libovolném trojúhelníku ABC platí: *Osa vnitřního úhlu při vrcholu A, střední příčka trojúhelníku rovnoběžná se stranou AC a spojnice dvou bodů, ve kterých se vepsaná kružnice dotýká stran AC a BC, procházejí jedním bodem.*

NÁVOD: Vrcholům „nadělte“ hmotnosti $m_A = b - c$, $m_B = b$, $m_C = c$ (a, b, c jsou obvykle značené délky stran) a využijte postupně výsledek oddílu 6, pak „štěpení“ bodu B podle rovnosti $m_B = (b-c)+c$ a konečně „štěpení“ bodu C způsobem

$$m_C = \frac{b(a+c-b)}{a+b-c} + \frac{(b-c)(b+c-a)}{a+b-c}.$$

11. Shrnutí

Předchozí příklady ukazují, že některé geometrické věty je možno získat úvahou o vhodných soustavách hmotných bodů. Zamyslíme-li se nad tím, co mají tyto příklady společné, zjistíme, že všechny jsou založeny na jednoduché (až geniální) myšlence: *K těžišti celé soustavy se můžeme „dostat“ více způsoby, a to tak, že budeme opakovaně uplatňovat redukční princip z Axiomu III k různým podsoustavám výchozí soustavy.*

Této myšlenky si byl Archimédes dobře vědom. V jednom dopise Eratosthenovi[9] napsal (přeloženo podle [1]):

> *Považoval jsem za nutné Ti napsat, abych vyložil zvláštní metodu, která umožňuje objevovat některé matematické věty. Jsem přesvědčen, že tato metoda nebude o nic méně užitečná ani při důkazu těchto vět.*

Archimédes tedy správně vytušil, že metoda hmotných bodů není pouhá pomůcka pro objevování vět, ale že v sobě skrývá i myšlenkový potenciál, který bude možné rozvinout do dokonalé matematické teorie. (Za dob Archiméda byla jedinou takovou dokonalou teorií ta, kterou svými *Základy* vytvořil Eukleides.) Tato Archimédova představa se naplnila až v novověku se vznikem vektorové algebry. Popišme nyní, jak taková teorie vypadá.

12. Formalizace

Hmotný bod v n-rozměrném eukleidovském prostoru, který budeme značit E_n, je libovolná uspořádaná dvojice (m, A), kde m je reálné číslo a A je bod prostoru E_n. Není nutné předpokládat, že číslo m, které nazveme hmotností bodu A, je kladné. Připouštíme tedy body s nulovou i zápornou hmotností.[10] Je-li

$$\mathcal{S} = \big\{(m_1, A_1), (m_2, A_2), \ldots, (m_N, A_N)\big\}$$

libovolná konečná soustava hmotných bodů v E_n, pak bod $T \in E_n$ nazveme jejím těžištěm, pokud

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \cdot \boldsymbol{TA}_k = \boldsymbol{0}. \qquad (*)$$

Vidíme, že taková definice nezávisí na pořadí jednotlivých prvků soustavy $\mathcal{S}$. Není rovněž nutné, aby body A_k byly různé, což umožňuje hmotné body „štěpit“ nebo naopak „slepovat“. Z následující věty plyne, že každá soustava $\mathcal{S}$ sestavená jen z bodů kladných hmotností má právě jedno těžiště (Archimédův Axiom I).

[9] Eratosthenes z Kyrény, asi 275–195 př.n.l., řecký astronom, matematik a geograf. Autor známé metody vyhledávání prvočísel (Eratosthenovo síto).

[10] Význam mají i situace, kdy hmotnosti bodů jsou komplexní čísla, viz [1].

Věta A. *Těžiště T soustavy $\mathcal{S}$ existuje a je jediné, je-li součet hmotností všech jejích bodů různý od nuly. Poloha těžiště T je pak určena rovností*

$$\left(\sum_{k=1}^{N} m_k\right) \cdot \boldsymbol{PT} = \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot \boldsymbol{PA}_k,$$

kde P je libovolně zvolený bod prostoru E_n. (Bod T pochopitelně na volbě bodu P nezávisí.)

DŮKAZ je snadný: Protože $\boldsymbol{TA}_k = \boldsymbol{PA}_k - \boldsymbol{PT}$, je vidět, že definiční rovnost $(*)$ je ekvivalentní s rovností z formulace dokazované věty. Je-li součet všech hmotností různý od nuly, lze z této rovnosti vypočíst

$$\boldsymbol{PT} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} m_k \cdot \boldsymbol{PA}_k}{\sum\limits_{k=1}^{N} m_k},$$

takže těžiště T existuje a je jediné. Tím je celý důkaz hotov.

Je jasné, že definice $(*)$ pro dvojici hmotných bodů

$$m_1 \cdot \boldsymbol{TA_1} + m_2 \cdot \boldsymbol{TA_2} = \boldsymbol{0}$$

je vektorovým zápisem zákona páky, který jsme uvedli jako Axiom II. Zbývá ověřit redukční princip z Axiomu III. Zřejmě stačí ukázat, že těžiště T libovolné soustavy $\mathcal{S}$ s výše uvedeným popisem je stejné jako těžiště redukované soustavy

$$\mathcal{S}' = \big\{(m', T'), (m_{r+1}, A_{r+1}), (m_{r+2}, A_{r+2}), \ldots, (m_N, A_N)\big\},$$

kde T' je těžiště soustavy prvních r bodů z $\mathcal{S}$ a m' součet jejich hmotností. To je ale snadné: pro tuto soustavu r bodů použijeme dokázanou Větu A, přitom za bod P zvolíme bod T. Dostaneme rovnost

$$m' \cdot \boldsymbol{TT}' = \left(\sum_{k=1}^{r} m_k\right) \cdot \boldsymbol{TT}' = \sum_{k=1}^{r} m_k \cdot \boldsymbol{TA}_k,$$

podle které můžeme nahradit prvních r sčítanců na levé straně $(*)$, a dostat tak ekvivalentní rovnost

$$m' \cdot \boldsymbol{TT}' + \sum_{k=r+1}^{N} m_k \cdot \boldsymbol{TA}_k = \boldsymbol{0},$$

která podle definice (∗) znamená právě to, že bod T je těžištěm soustavy $\mathcal{S}'$.

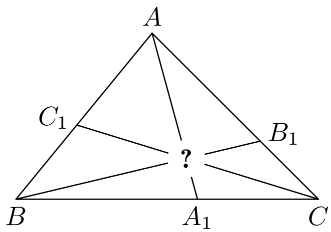
S pomocí aparátu vektorové algebry jsme tedy definovali pojem těžiště (konečných) soustav hmotných bodů a dokázali jsme platnost Archimédových axiómů. *Tím se stal jeho „hmotnostní“ přístup ke geometrickým situacím, který jsme ilustrovali předchozími příklady, z hlediska požadavků, kladených dnes na fundamenty matematických teorií, exaktní.*

13. Dvě významné věty na závěr

Při výběru příkladů jsme se většinou omezili na situace, ve kterých k uplatnění Archimédovy metody stačilo nalézt vhodnou *trojici* hmotných bodů; vícebodové soustavy jsme uvedli jen v Úkolech 1 a 2. Tvrzení o těžišti trojice hmotných bodů je skryto v následující známé a užitečné poučce.

Cévova[11] věta. *Příčky AA_1, BB_1, CC_1 libovolného trojúhelníku ABC procházejí jedním bodem (obr. 12), právě když platí rovnost*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1. \tag{C}$$



Obr. 12

Důkaz Archimédovou metodou: Procházejí-li příčky AA_1, BB_1, CC_1 bodem, který je těžištěm trojice vrcholů A, B, C o hmotnostech m_A, m_B, m_C, pak podle zákonu páky platí

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{m_B}{m_A}, \quad \frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{m_C}{m_B}, \quad \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{m_A}{m_C}.$$

[11] Giovanni Céva [čeva], 1648–1734, italský inženýr a matematik.

Odtud plyne rovnost (C). Obráceně, platí-li (C), je vhodné zvolit hmotnosti vrcholů například takto:

$$m_A = 1, \quad m_B = \frac{|AC_1|}{|C_1B|}, \quad m_C = \frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|}.$$

Díky (C) jsou pak rovnosti poměrů z první části důkazu opět splněny. To ale znamená, že příčky AA_1, BB_1 a CC_1 procházejí jedním bodem, a to těžištěm trojice vrcholů A, B, C se zvolenými hmotnostmi. Celý důkaz je tak hotov.

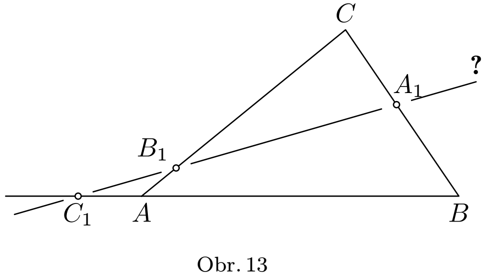
Dodejme, že Cévova věta se obvykle formuluje pro obecnější situaci, kdy body A_1, B_1, C_1 jsou libovolné body *přímek* BC, CA resp. CB (různé od bodů A, B, C). Pak je třeba rovnost (C) zapsat v obecnějším tvaru

$$\frac{\boldsymbol{AC_1}}{\boldsymbol{C_1B}} \cdot \frac{\boldsymbol{BA_1}}{\boldsymbol{A_1C}} \cdot \frac{\boldsymbol{CB_1}}{\boldsymbol{B_1A}} = 1, \tag{C$'$}$$

přičemž „podílem“ dvou nenulových, lineárně závislých vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ rozumíme to číslo $p \neq 0$, pro které $\boldsymbol{u} = p\boldsymbol{v}$. Stejným způsobem lze „adaptovat“ i předchozí důkaz. Možná víte, že činitelům na levé straně (C$'$) říkáme *dělicí poměry trojic bodů* (viz [4], kde je uveden i odlišný důkaz Cévovy věty, založený na skládání stejnolehlostí).

Levá strana rovnosti (C$'$) má význam také při posuzování otázky, zda body A_1, B_1, C_1 (zvolené jako dříve na přímkách BC, CA resp. CB) jsou *kolineární*, tj. zda leží na jedné přímce.

Menelaova[12] **věta.** *Nechť A_1, B_1, C_1 jsou libovolné body přímek BC, CA respektive CB (různé od vrcholů A, B, C daného trojúhelníku ABC,*



Obr. 13

[12] Menelaos Alexandrijský, řecký matematik a astronom z 1. stol. n.l. V arabských překladech se nám zachovaly jeho práce ze sférické trigonometrie.

obr. 13). Tyto tři body leží na jedné přímce, právě když platí rovnost

$$\frac{\boldsymbol{AC_1}}{\boldsymbol{C_1B}} \cdot \frac{\boldsymbol{BA_1}}{\boldsymbol{A_1C}} \cdot \frac{\boldsymbol{CB_1}}{\boldsymbol{B_1A}} = -1. \tag{M}$$

Důkaz: I nyní (pro čtenáře možná překvapivě) uplatníme Archimédovu metodu, doplněnou o známé „štěpení" a „lepení". Reálná čísla p, q, r z rovností

$$\boldsymbol{AC_1} = p \cdot \boldsymbol{C_1B}, \quad \boldsymbol{BA_1} = q \cdot \boldsymbol{A_1C}, \quad \boldsymbol{CB_1} = r \cdot \boldsymbol{B_1A}$$

(žádné z nich není ani 0, ani -1) jsou činiteli na levé straně rovnosti (M). Protože součet $q\boldsymbol{A_1C} + \boldsymbol{A_1B}$ je nulový vektor, je bod A_1 těžištěm soustavy $\{1B, qC\}$, tedy i soustavy $\{pB, pqC\}$, tedy i soustavy

$$\mathcal{S} = \{1A, pB, (-1)A, pqC\},$$

ve které bod A „lepením anihiluje", tj. zmizí z rovnosti (∗), kterou je těžiště obecně definováno. Rozdělme soustavu $\mathcal{S}$ na dvě podsoustavy

$$\mathcal{S}_1 = \{1A, pB\} \quad \text{a} \quad \mathcal{S}_2 = \{(-1)A, pqC\}.$$

Protože bod C_1 je zřejmě těžištěm podsoustavy $\mathcal{S}_1$ a bod A_1 je těžištěm celé soustavy $\mathcal{S}$, je těžištěm podsoustavy $\mathcal{S}_2$ nutně ten bod přímky AC, který zároveň leží na přímce A_1C_1; označíme ho B_1'. (Upozorněme čtenáře, že těžiště $\mathcal{S}_2$ existuje, jen když $(-1) + pq \neq 0$, což je ovšem možné s ohledem na symetrii podmínky (M) předpokládat. Případ $pq = pr = qr = 1$, tedy $p = q = r = 1$, není totiž pro Menelaovu větu zajímavý.) Bod B_1 je zřejmě těžištěm soustavy $\{rA, 1C\}$. Porovnáme-li ji se soustavou $\mathcal{S}_2$, zjistíme, že rovnost $B_1' = B_1$ nastane, právě když $r : 1 = (-1) : pq$, neboli $pqr = -1$. Tím je celý důkaz ukončen. (Osvojíte-li si dobře Archimédovu metodu, pak možná seznáte, že vyložený důkaz není vůbec „trikový", nýbrž je naopak velmi přirozený.)

Literatura:

[1] Balk M. B. a Boltjanskij V. G.: *Геометрия масс.* Nauka, Moskva, 1987.
[2] Kuřina F.: *Umění vidět v matematice.* SPN, Praha, 1990.
[3] Prasolov V. V.: *Задачи по планиметрии,* díl I a II. Nauka, Moskva, 1986.
[4] Švrček J. a Vanžura J.: *Geometrie trojúhelníka.* SNTL, Praha, 1988.