

Geometrie 2

Úlohy na cvičení

Obsah

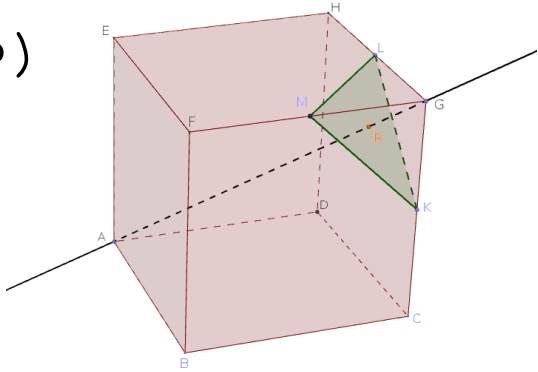
Úvodní příklad	1
Afinní geometrie	2
Afinní struktura	2
Afinní souřadnice	3
Afinní zobrazení	4
Vyjádření podprostorů	5
Vzájemné polohy	6
Příčky	7
Omezené podprostory, těžiště	8
Eukleidovská geometrie	9
Vzdálenosti	9
Obsahy a objemy	10
Odchylky	11
Bonusy	12

Poslední aktualizace 31. prosince 2020.

Rozpracování některých úloh je k dispozici v souboru `tabule_ze_cviceni.pdf`.

ÚVODNÍ PŘÍKLAD

(0)



A až H ... vrcholy krychle

α ... rovina KLM ,

kde K, L, M jsou např. středy stran...

n ... přímka PQ ,

kde P, Q jsou např. vrcholy A, G

URČETE NAPŘ.

- průnik (resp. vzájemnou polohu) n a α
- odchylku n a α , n a CG , ...
- vzdálenost G a α , C a n , ...
- těžiště $\triangle KLM$, $\diamond KLMG$, ...
- obsah $\triangle KLM$, objem $\diamond KLMG$, ...
- obrazy vrcholů krychle vzhledem k nějaké její symetrii s osou n ,
- a pod.

ŘEŠTE PŘEDCHOZÍ ÚLOHY

- bez souřadnic
- pomocí souřadnic
- pomocí jiných souřadnic

↑
↑
kartézských / afinních / barycentrických

AFINNÍ STRUKTURA

(1) Mají následující objekty strukturu AFINNÍHO PROSTORU?

- Dva navzájem různé body v nějakém af. prostoru,
- interval ve stand. af. prostoru \mathbb{R}^1 ,
- podmnožina $\{(x_1, x_2) \mid x_2 \geq x_1\}$ ve stand. af. prostoru \mathbb{R}^2 ,
- podmnožina $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = 1 + x_1 + x_2\}$ ve stand. af. prostoru \mathbb{R}^3 ,
- komplexní čísla \mathbb{C} uvažovaná nad tělesem \mathbb{R} ,
- reálná / racionální / celočíselná řešení soustavy rovnic

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3 \\ 4x_2 - 5x_4 = 1 \end{cases}$$

pro neznámé x_1, x_2, x_3, x_4 ,

- komplexní / reálná / ... řešení soustavy rovnic

$$\begin{cases} (x_1)^2 + 2x_2 = -3 \\ 4x_2 - 5x_4 = 1 \end{cases}$$

pro neznámé x_1, x_2, x_3, x_4 ,

- všechna / polynomiální / konstantní řešení dif. rovnice

$$y'' - 4y' + 5y = 10$$

s neznámou funkcí $y = f(x)$.

(2) Najděte / vymyslete další příklady af. struktur.

AFINNÍ SOUŘADNICE

(3) Pro následující soustavu rovnic s neznámými $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3 \\ 4x_2 - 5x_4 = 1 \end{cases}$$

- najděte dvě různé parametrizace množiny všech řešení,
- vyjádřete řešení $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = -1$ vzhledem k těmto parametrizacím,
- určete obecný vztah mezi těmito dvěma parametrizacemi.

(4) V úloze (0) ...

- zvolte nějak souř. soustavu a určete souřadnice pár bodů,
- zvolte jinak souř. soustavu a určete souřadnice týchž bodů,
- určete obecný vztah mezi těmito dvěma vyjádřeními.

(5) V afinní souřadné soustavě na mapě jistého města je několik význačných míst určeno souřadnicemi

$$A = [1, -1], B = [1, 1], C = [3, 0], D = [5, 2], E = [4, 4].$$

Dva kolegové sledují dění ve městě tak, že kolega K. zaznamenává údaje vzhledem k souřadné soustavě s počátkem v místě A , kde má základnu, a bází (\vec{AB}, \vec{AC}) ; kolega L. pracuje se souřadnou soustavou s počátkem v D a bází (\vec{DC}, \vec{DE}) . Přesně v poledne začíná K. zaznamenávat rovnoměrný přímočarý pohyb podezřelé tramvaje a jeho zápis (v závislosti na čase t) vypadá takto:

$$\left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4}t, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \right]$$

V tomtéž čase také L. zaznamenává pohyb tramvaje jako:

$$\left[1 - \frac{1}{4}t, 1 - \frac{1}{4}t \right]$$

- Rozhodněte, zda oba kolegové pozorují tutéž tramvaj a zda je náhodou tramvaj neohrožuje.

AFINNÍ ZOBRAZENÍ

(6) Rozhodněte, zda následující zobrazení jsou Afinní:

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadané předpisem $f(x) = x^k + 1$, kde $k = 0, 1, 2, \dots$
- stejnolehlosti, resp. jejich složení,
- symetrie krychle, resp. jejich složení,

(7) Pokud je odpověď v předchozí úloze kladná,

- určete analytické vyjádření zobrazení vzhledem k nějaké souřadné soustavě.

(8) Afinní zobrazení v rovině je dáno obrazy bodů

$$A = [0, 0] \mapsto [5, 1] = A'$$

$$B = [2, 0] \mapsto [5, -1] = B'$$

$$C = [0, 2] \mapsto [7, 1] = C'$$

- Určete obraz obecného bodu $X = [x_1, x_2]$,
- popište (geometricky) toto zobrazení,
- vzhledem ke ztotožnění $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ vyjádřete pomocí operací v \mathbb{C} .

(9) Najděte / vymyslete další příklady afinních zobrazení.

VYJÁDRĚNÍ AF. PODPR.

(10) Vzhledem k volbám v úloze (4)

vyjádřete přímku π , rovinu α a pod., a to

- parametricky,
- rovnicově,
- jinak.

(11) Ve 4-dim af. prostoru ...

ozn. \mathcal{B} nejmenší podpr. obsahující body

$$A = [1, -1, 0, 2], \quad B = [4, 1, 0, 2], \quad C = [2, -1, 1, 1].$$

Určete:

- dimenzi \mathcal{B} ,
- parametrické vyjádření \mathcal{B} ,
- rovnicové vyjádření \mathcal{B} ,
- totéž nějak jinak.

(12) V předchozí úloze přidejte další bod ...

- a řešte znovu.

VZÁJEMNÉ POLOHY

- (13) Vzhledem k volbám v úloze (4) určete průnik, resp. vzájemnou polohu
- přímky π a roviny α ,
 - jiných podprostorů.

- (14) V 3-dim af. prostoru ...

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \quad \gamma = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- V závislosti na hodnotě $a \in \mathbb{R}$ určete vzájemnou polohu β a γ .
- Pozměňte zadání, abyste vyčerpali zbyteč možnosti.

- (15) Ve 4-dim af. prostoru ...

$$\beta = \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 4x_2 - x_3 = 10 \\ 2x_2 + x_4 = 11 \end{array} \right\}, \quad \gamma = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Určete vzájemnou polohu β a γ .
- Pozměňte zadání, abyste vyčerpali zbyteč možnosti.

- (16) Vymyslete konkrétní příklad

- třech navzájem mimoběžných podpr. γ
- mimoběžných podpr. se společnými směry,

PŘÍČKY

(17) V úloze (0) ...

- Určete příčky přímek AB a DH ,
 - která prochází *středem* kružle,
 - která je rovnoběžná s přímkou LM .
- Určete dvojici přímek,
 - které mají ∞ mnoho příček proch. *středem* kružle,
 - pro které neex. příčka rovnoběžná s přímkou LM .

(18) V 3-dim af. prostoru, pro

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \quad \gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\},$$

- určete příčku, která proch. bodem $M = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,
resp. má směr $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(19) Ve 4-dim af. prostoru, pro

$$\beta = \left\{ \begin{array}{l} x_2 - x_4 = 2 \\ x_3 = 1 \end{array} \right\}, \quad \gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\},$$

- určete příčku, která má směr $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

OMEZENÉ PODPROSTORY, TĚŽIŠTĚ

(20) Vzhledem k volbám v úloze (4) ukažte, že

- body A a G leží v opačných poloprostorech vzhledem k α ,
- průsečík $\mu \cap \alpha$ je těžištěm trojúhelníku KLM ,
- střed krychle neleží v konvexním obalu bodů K, L, T, G .

(21) Pro lichoběžník se základnami AB a CD v poměru $1:3$

- určete těžiště hmotné soustavy tvořené body A, B, C, D se stejnými vahami,
- určete těžiště lichoběžníku $ABCD$,
- vymyslete konkrétní provedení v af. souřadnicích.

(22) Ve 4-dim af. prostoru . . .

$$A_1 = [1, -1, 0, 2], \quad A_2 = [3, -1, 2, 4], \quad A_3 = [3, 1, 0, 0],$$

$$A_4 = [5, 1, 2, 2], \quad A_5 = [3, 0, 1, 2], \quad A_6 = [4, -1, 0, 2].$$

- Pro $k = 2, 3, \dots$, určete barycentrické souř. A_k vzhledem k bodům A_1, \dots, A_{k-1} (pokud to je možné),
- rozhodněte, zda A_k leží v konvex. obalu $\{A_1, \dots, A_{k-1}\}$.

VZDALENOSTI

(23) V úloze (0) . . .

- zvolte KARTÉZSKOU souř. soustavu.

(24) Vzhledem k předch. volbám určete vzdálenost

- bodů A a L
- bodu L a přímky $p = AG$
- bodu G a roviny $\alpha = KLM$
- přímek $p = AG$ a $q = BC$

(25) Mezi nápady řešení předch. úlohy rozlište

- obecně (a zobecněte)
- specifické (a pojmenujte specifickou)

(26) V úloze (18) . . .

- určete všechny přímky délky ≤ 4
- vyberte tu nejkratší

(27) V úloze (19) . . .

- určete vzdálenost a vzájemnou polohu podprostorů.

OBSAHY A OBJEMY

(28) V úloze (o) určete objemy všech

- rovnoběžnostěnů, jejichž 4 z 8 vrcholů jsou K, L, M, G ,
- čtyřstěnů, jejichž 3 ze 4 vrcholů jsou K, L, M
a zbylý vrchol je vrcholem krychle.

(29) V 3-dim prostoru, pro

$$A = [0, 0, 1], \quad B = [2, 1, 1], \quad C = [1, 2, 1], \quad D = [1, 1, 2],$$

- určete bod E na přímce AD tak, aby simplex $ABCE$ měl objem 1.

(30) Ujistěte se, že jste se v předchozích úlohách seznámili se všemi dostupnými nápady:

- elementární úvahy
- vnější a vektorový součin
- kolmý průmět vektoru
- Gramův determinant

(31) Užijte některý z nových nápadů k řešení některých starších úloh, např.

- rovnice nadroviny,
- vzájemná poloha podprostorů, ...

ODCHYLKY

(32) V úloze (0) určete odchylky

- přímek BM a AG
- přímky AG a roviny BGE
- rovin BGE a KLM
- a pod.

(33) V úloze (19) . . .

- určete odchylku podprostorů.

(34) Vymyslete (pokud to je možné) konkrétní příklad podpr.:

- $\angle(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = 90^\circ$
- $\vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{C}}^\perp$
- $\vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{C}}^\perp$ a $\angle(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \neq 90^\circ$
- $\angle(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = 90^\circ$ a $\vec{\mathcal{B}} \not\subseteq \vec{\mathcal{C}}^\perp$ a $\vec{\mathcal{B}} \not\supseteq \vec{\mathcal{C}}^\perp$

BONUSY

- (A) Doplňte některý z předchozích výpočtů
- konstrukcí (pravítko a kružítka),
 - jiným výpočtem (af. souřadnice vs. af. kombinace bodů),
 - geoalgebrou (či jinou pomůckou).
- (B) Popište množinu společných přímek tří mimoběžek
(např. doplňte zadání (18) o $m = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \dots$).
- (C) Rozpoznejte (a upřesněte) mezi body v úloze (22)
jistý dobře známý útvar.
- (D) Řešte úlohu s ODCHYLKOU rovin bez spol. vektorů.
- (E) Prozkoumejte (pomocí vektorů) nějaký PRAVIDELNÝ
mnohoúhelník či mnohostěn.
- (F) Vymyslete VLASTNÍ úlohu, při jejímž řešení uplatníte co nejvíc z právě nabytých dovedností!