

CÍLE (STAĽE STEJNÉ)

- něco UDĚLAT, něco NOVÉHO
- a to PORĀDNĚ! tj. SROZUMITELNĚ

PROCEŠ (STAĽE STEJNÝ)

- ↑ přetvářet a vytvářet
- | rozlišovat a vysvětlovat
- | pochopit a použít
- | zapamatovat a zopakovat

KULISY (GEOMETRIE ...)

- vloni konstrukční / elementární
- nyní počítač / vektorová

ROZLOŽENÍ

- Afinní geom.
- Eukleidovská geom.
- Projektivní rozšíření
- zobrazení blížeji

podzim '22

jaro '23

VÝUKA

- předseznámení
- vyjasnění
- užítí

doma

přednáška

cvičení

ZAKONČENÍ


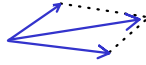
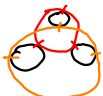

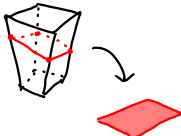
- samost. práce
- písemka
- ústní zkouška

aspoň 1/2 + spolupráce

aspoň 1/2

na d VLASTNÍMI výtvory

SHODY & ROZDÍLY

	MINULÝ SEMESTR	TENTO SEMESTR
PŘEDMĚT	geometrie	totež
CÍLE	opakování, rozšíření a organizace poznatků	totež
NAŠTOUJĚ	pravítko a kružítko 	lineární algebra  (::: ::)
PŘEDPOKLADY	zvědavost	totež + lineární algebra!
VÝHODY	jednoduchost, představitelnost apod.	jednotný popis, žádná představitelnost apod.
TYPICKÉ ÚLOHY	sestrojte ... <ul style="list-style-type: none">- dotykové úrohy - kvadratura - obecný průmět hranolu- řez hranolu- řez ve skutečné velikosti 	spočítejte ... X - } - } totéž - } (resp. něco velmi podobného) -

SHODY & ROZDÍLY

	MINULÝ SEMESTR	TENTO SEMESTR
ZÁKLADNÍ POJMY	bod, přímka, rovina	vektor
ZÁKLADNÍ VZTAHY	incidentnost, spojitost, rovnoběžnost, uspořádaní, shodnost	lineární (ne)závislost, (multi) lineárnost a pod.
ZÁKLADNÍ ÚLOHY	sestrojitelné veličiny průniky přímek, rovin vzdálenosti bodů obsahy, kvadratury a pod.	X soustavy lin. rovnic velikosti vektorů determinanty a pod.

VZPOMÍNKY (NA MATURITU)

Př. 13 Dokaž, že přímky $p \leftrightarrow AB$ a $q \leftrightarrow CD$, kde $A[1, 2, 0]$, $B[4, 3, -2]$, $C[2, 0, 1]$, $D[5, 3, -2]$, jsou mimoběžné, a urči jejich odchylku φ .

$$\overline{AB}(3, 1, -2); \overline{CD}(3, 3, -3) \parallel \vec{v}(1, 1, -1)$$

$$\frac{3}{3} \neq \frac{1}{3} \Rightarrow \overline{AB} \not\parallel \overline{CD} \Rightarrow p \not\parallel q.$$

$$p: \begin{cases} x=1+3t \\ y=2+t \\ z=-2t \end{cases}, t \in \mathbf{R} \quad q: \begin{cases} x=2+r \\ y=r \\ z=1-r \end{cases}, r \in \mathbf{R}$$

$$p \cap q: \begin{cases} 1+3t=2+r \\ 2+t=r \\ -2t=1-r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3t-r=1 \\ t-r=-2 \\ 2t-r=-1 \end{cases} \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} - \textcircled{2} \\ \textcircled{3} - \textcircled{2} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 2t=3 \\ t-r=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=1.5 \\ r=3.5 \end{cases}$$

Určíme směrové vektory přímek p, q a ověříme, že $p \not\parallel q$. (Vektory \overline{AB} a \overline{CD} mají stejnou první souřadnici; kdyby platilo $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, muselo by být $\overline{AB} = \overline{CD}$.)

Napišeme parametrické rovnice přímek p a q .

Připustíme, že přímky p, q mají společný bod.

Sečtením rovnic $\textcircled{1}$ a $\textcircled{3}$ vychází $t=2$, z rovnice $\textcircled{2}$ pak $r=4$.

Hodnoty $t=2$ a $r=4$ nevyhovují rovnici $\textcircled{3}$.

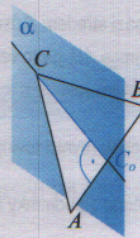
Odchylku přímek p, q určíme pomocí jejich směrových vektorů \overline{AB} a \vec{v} .

$\textcircled{3}: 2 \cdot 2 - 4 \neq -1; p \cap q = \emptyset \wedge p \not\parallel q \Rightarrow$ přímky p a q jsou mimoběžné.

$$\cos \varphi = \frac{|\overline{AB} \cdot \vec{v}|}{|\overline{AB}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1)|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{42}}{7}$$

$$\varphi \doteq 22^\circ 12'$$

Př. 19 Vypočítej obsah trojúhelníku ABC , kde $A[-3, -4, 1]$, $B[3, -1, -2]$, $C[2, -2, 1]$.



$$S = \frac{1}{2} \cdot z \cdot v;$$

$$\text{kde } z = |\overline{AB}|, v = |C, \leftrightarrow AB|$$

$$\overline{AB} = B - A = (6, 3, -3)$$

Obsah ΔABC určíme např. pomocí délky strany AB a výšky v z vrcholu C .

Vypočítáme délku strany AB .

Bod C_0 určíme jako průsečík roviny α , kolmé k přímce AB jdoucí bodem C , a přímky AB .

Najdeme obecnou rovnici roviny α .

Napišeme parametrické rovnice přímky AB .

Určíme průsečík roviny α a přímky AB .

Určíme vzdálenost bodů C a C_0 .

$$|\overline{AB}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{54} = 3 \cdot \sqrt{6} \text{ j}$$

$$|C, \leftrightarrow AB| = |CC_0|, \text{ kde } C_0 \text{ je pravouhlý průmět bodu } C \text{ na } \leftrightarrow AB$$

$$\vec{n}_\alpha \parallel \overline{AB} \Rightarrow \vec{n}_\alpha(2, 1, -1)$$

$$\alpha: 2x + y - z + d = 0; d = ?$$

$$C \in \alpha: 2 \cdot 2 + (-2) - 1 + d = 0 \Rightarrow d = -1$$

$$\alpha: 2x + y - z - 1 = 0$$

$$\leftrightarrow AB: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -4 + t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

$$C_0 \in \alpha \cap \leftrightarrow AB: 2 \cdot (-3 + 2t) + (-4 + t) - (1 - t) - 1 = 0$$

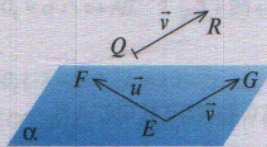
$$6t - 12 = 0 \Rightarrow t = 2$$

$$C_0[-3 + 2 \cdot 2, -4 + 2, 1 - 2] \Rightarrow C_0[1, -2, -1]$$

$$|CC_0| = \sqrt{(2-1)^2 + (-2+2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{ j}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot z \cdot v = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{5} \text{ j}^2 = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{30} \text{ j}^2$$

Př. 16 Napiš obecnou rovnici roviny α , v níž leží body $E[3, 1, 1]$, $F[1, 2, -1]$ a která je rovnoběžná s přímkou QR , kde $Q[-1, 4, -2]$ a $R[2, -2, 3]$.



$$\leftrightarrow QR \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{v} = \overline{QR} \parallel \alpha$$

$$\vec{u} = \overline{EF} = F - E = (-2, 1, -2)$$

$$\vec{v} = \overline{QR} = R - Q = (3, -6, 5)$$

$$u \parallel v \left(\frac{-2}{3} \neq \frac{-1}{6} \right)$$

$\vec{n}(a, b, c)$... normálový vektor α ; $\vec{n} \perp \vec{u}$; $\vec{n} \perp \vec{v}$

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow -2a + b - 2c = 0 \quad | \cdot 3 \quad \textcircled{1}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 3a - 6b + 5c = 0 \quad | \cdot 2 \quad \textcircled{2}$$

$$-9b + 4c = 0, b = 4 \Rightarrow c = 9$$

$$2a = b - 2c = 4 - 18 = -14 \Rightarrow a = -7$$

$$\alpha: -7x + 4y + 9z + d = 0; d = ?$$

$$E \in \alpha: -7 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow -8 + d = 0 \Rightarrow d = 8$$

$$\alpha: -7x + 4y + 9z + 8 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$\alpha: 7x - 4y - 9z - 8 = 0$$

Rovin

bod E a vektory $\vec{u} = \overline{EF}$ a $\vec{v} = \overline{QR}$.

Určíme vektory \vec{u} a \vec{v} a přesvědčíme se, že $u \not\parallel v$.


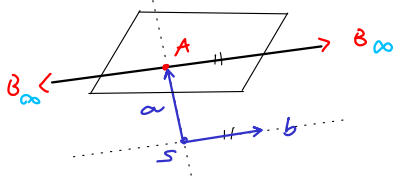
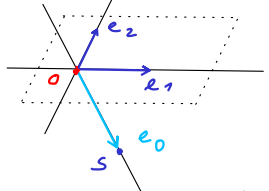

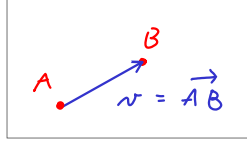
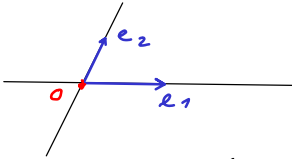


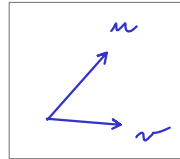
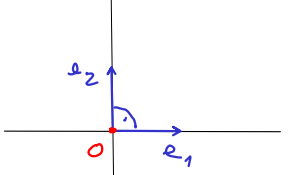
Najdeme normálový vektor \vec{n} roviny α , který je kolmý k vektorům \vec{u} a \vec{v} , tzn. $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ a $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.

Dostaneme soustavu 2 rovnic o 3 neznámých. Najdeme její libovolné nenulové řešení. Zvolíme např. $b = 4$.

Souřadnice normálového vektoru \vec{n} jsou koeficienty a, b, c v obecné rovnici $ax + by + cz + d = 0$ roviny α . Koeficient d určíme z podmínky $E \in \alpha$.

Rovnici roviny zapisujeme zpravidla tak, že koeficient a není záporný.

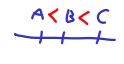
PŘEHLED / VÝHLED

ZOBRAZENÍ	ÚLOHY	PROSTORY	ALG. VYMEZENÍ	POČÍTÁNÍ
 <p>projektivní</p>	<p>polohové</p>	<p>projektivní</p>	<p>$P = a \cup \{\infty\}$</p>  <p>pomocí $W \supset V$</p>	<p>homogenní souř.</p>  <p>= rozšířené</p>
 <p>afinní</p>		<p>afinní</p>	<p>$a \times a \rightarrow V$</p>  <p>body vektor</p>	<p>afinní souř.</p>  <p>= libovolné</p>
 <p>ekvi-afinní</p> <p>podobná</p>  <p>shodná</p>	<p>měřicové</p>	<p>eukleidovské</p>	<p>$\mathcal{E} = a + \text{skalární součin}$</p>  <p>..... $n \cdot m$</p> <p>vektory číslo</p>	<p>kartézské souř.</p>  <p>= orto-normální</p>

TRÍDĚNÍ


EUKLEIDOVSKÁ G.


AFINNÍ G.


uspořádaní 


PROJEKTIVNÍ G.


bod \cdot přímka $/$


rovina 

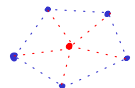
přímky 


úsečky 


incidence 

oměry 


dvoj měry 

tížiště 

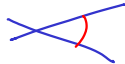
konvexní množiny 


rovnoběžnost 

shodnost

vzdálenost 

podobnost

odchylka 

obsah / objem 

UKA'2KA

Grafický náhled 3D

$D_r = (-8.95, -1.46, 9.52)$

$B_r = (-3.91, -4.03, 4.87)$

$A_r = (-6.38, -6.5, 2.47)$

Algebraické okno

- $k_D = 0$
- Mnohoúhelník
 - podstava = 21.04
 - rez = 34.25 obsah
 - rez' = 34.25
- Polopřímka
 - $AB_1: X = (-8.92, -9.05, 0) + \lambda (5.02, 5.02, 0)$
 - $AB_2: -2.47x + 2.54y = 22.03$
 - $AB_r: X = (-8.92, -9.05, 0) + \lambda (2.54, 2.54, 2.47)$
 - $AD_0: X = (-5.48, -8.27, 0) + \lambda (-0.9, 1.77, 2.47)$
 - $AD_1: X = (-5.48, -8.27, 0) + \lambda (-0.9, 1.77, 0)$
 - $AD_2: -2.47x - 0.9y = 13.53$
 - $AD_r: X = (-5.48, -8.27, 0) + \lambda (-0.9, 1.77, 2.47)$
 - $BD_0: X = (1.37, -6.72, 0) + \lambda (-5.28, 2.69, 4.87)$
 - $BD_1: X = (1.37, -6.72, 0) + \lambda (-5.28, 2.69, 0)$
 - $BD_2: X = (1.37, 0) + \lambda (-5.28, 4.87)$
 - $BD_r: X = (1.37, -6.72, 0) + \lambda (-5.28, 2.69, 4.87)$
- Pětúhelník
 - nadstava' = 21.04
 - podstava' = 21.04
- Přímka
 - stopa₁: $X = (1.51, -6.69, 0) + \lambda (23.58, 5.33, 0)$ $\rho \cap \Pi_1$
 - stopa₂: $X = (2.31, 0, 8.16) + \lambda (18.81, 0, -5.33)$
 - stopa₂: $-2.78x - 9.82y = -86.56$
- Rovina
 - $\Pi_1: z = 0$ rovina podstavu
 - $\Pi_2: y = 0$
 - $\kappa_A: 23.58x + 5.33y = -185.1$
 - $\kappa_B: 23.58x + 5.33y = -113.61$
 - $\kappa_D: 23.58x + 5.33y = -218.82$
 - $\rho: -5.33x + 23.58y - 18.81z = -165.87$ rovina ABD
 - $\rho': -5.33x + 23.58y - 18.81z = -165.87$
- Trojúhelník
 - mnohoúhelník1 = 11.79
 - trojuhelník = 15.32
 - trojuhelník' = 15.32
 - trojuhelník₁ = 9.41
- Úhel
 - alef = 127.89°
 - bet = 0°
 - max = 127.89°
- Úsečka
 - $U_{D2} = 9.52$
 - $U_{Dr} = 9.52$
 - $U_{oD0} = 12.06$
 - $U_{oD1} = 7.4$
 - $a = 3.5$
 - $a'_0 = 7.32$