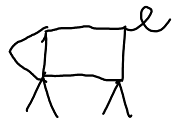
AFINNÍ ZOBRAZENÍ

= zobrazení zachovávající AFINNÍ STRUKTURU . . .

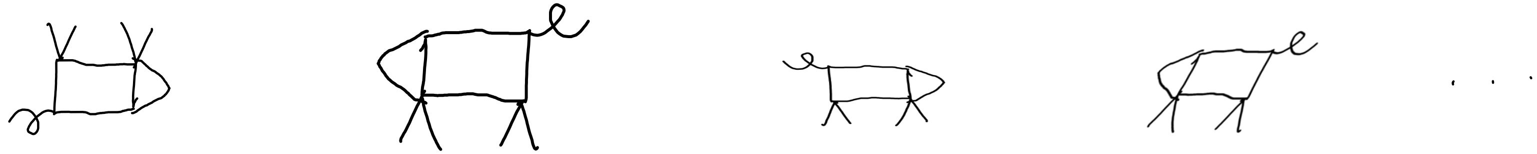
- příklady z dřívějška
- upřesnění
- ZÁKLADNÍ VĚTY
- výhledy

PŘÍKLADY Z LOŇSKA

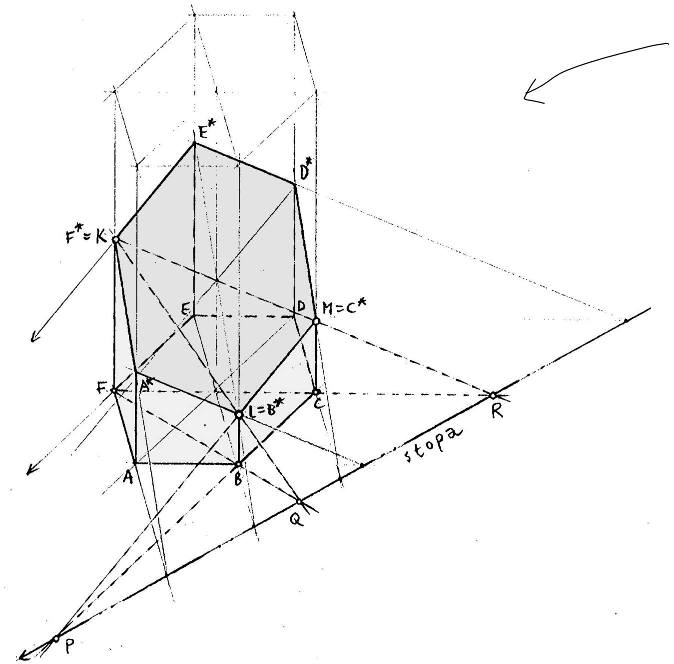
VZOR



OBRAZ



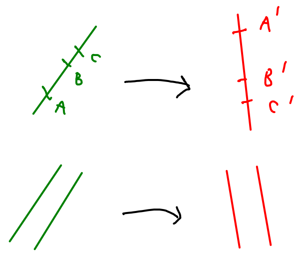
"otočení" "zvětšení" "zmáčknutí" "naklonění" . . .



"rovnob. průmět hranolu a jeho řezu"

VÍME, ŽE ZACHOVÁVÁ:

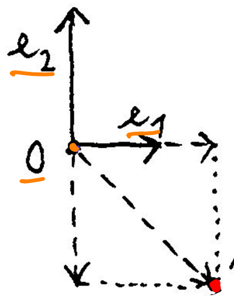
- kolineárnost
- poměry trojic kolin. bodů
- rovnoběžnost



. . . kdykoli to je možné

(může degenerovat)

PŘÍKLADY Z LETOŠKA

- 

$A = 0 + \frac{3}{2}e_1 - e_2$

souřadnice A vzhledem k $0, e_1, e_2$ ... $[\frac{3}{2}, -1]$

- a = { řešení dif. rovnice $\boxed{y'' - 4y' + 5y = 10}$ } =

$$= \{ y = 2 + C_1 e^{2x}\cos x + C_2 e^{2x}\sin x \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \}$$
$$\cong$$
$$\{ [C_1, C_2] \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \} =$$
$$= \text{stand. af. prostor } \mathbb{R}^2$$

- volba souř. soustavy $\rightsquigarrow$ $a \cong \mathbb{R}^n$

bod $A \overset{1:1}{\longmapsto}$ souřadnice A

rozdíl $a \times a \to V$ odp. stand. rozdílu po složkách

... AFINNÍ IZOMORFISMUS

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

= zobrazení zachovávající LINEÁRNÍ STRUKTURU,

tj. strukturu VEKT. PROSTORU,

tj. LINEÁRNÍ KOMBINACE VEKTORŮ,

tj. $f: V \longrightarrow V'$ takové, že

$$f(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots) = c_1 f(v_1) + c_2 f(v_1) + \dots$$

pro lib. $v_1, v_2, \dots \in V$ a $c_1, c_2, \dots \in \mathbb{R}$.

- f je LINEÁRNÍ $\iff$ lze vyjádřit pomocí MATIC takto:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}} \cdot \boxed{\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}} = \boxed{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}}$$

matice zobrazení ... | souřadnice vzoru ... | souřadnice obrazu ...

vzhledem k nějakým bázím

AFINNÍ ZOBRAZENÍ

= zobrazení zachovávající AFINNÍ STRUKTURU,

tj. strukturu AFINNÍHO PROSTORU,

$V = \vec{a}$

tj. $f : a \longrightarrow a'$ takové, že

$$f(A + c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots) = f(A) + c_1 \vec{f}(v_1) + c_2 \vec{f}(v_1) + \dots$$

pro lib. $A \in a$ a $v_1, v_2, \dots \in V$ a $c_1, c_2, \dots \in \mathbb{R}$,

kde $\vec{f} : V \longrightarrow V'$ je nějaké (LINEÁRNÍ) zobrazení.

- f je AFINNÍ $\iff$ lze vyjádřit pomocí MATIC takto:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}} + \boxed{\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}} \cdot \boxed{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}} = \boxed{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}}$$

obraz počátku ...

matice lin. zobrazení $\vec{f}$ ...

souřadnice vzoru ...

souřadnice obrazu ...

vzhledem k nějakým af. reperům

AFINNÍ ZOBRAZENÍ

- stručně

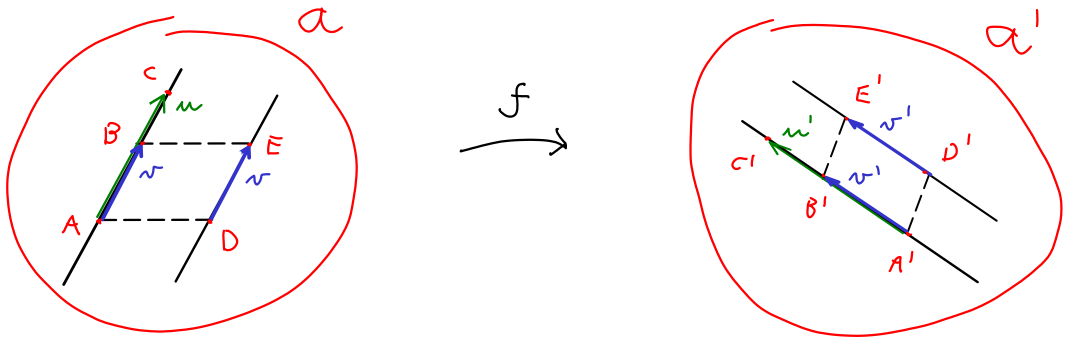
$f : a \to a'$ je AFINNÍ $\Longleftrightarrow$ indukuje $\vec{f} : V \to V'$ LINEÁRNÍ

takové, že $f(A+v) = f(A) + \vec{f}(v)$,

resp. $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$, pro lib. $A, B \in a$

a $v \in V = \vec{a}$.

- názorně



f je AFINNÍ $\Longleftrightarrow$ zachovává
- kolineárnost
- poměry trojic kolin. bodů
- rovnoběžnost

... kdykoli to je možné (může degenerovat $\nparallel \to \parallel$)

ZÁKLADNÍ VĚTA AFINNÍ GEOMETRIE

- Dosud zmiňované vlastnosti af. zobrazení jsou svázány víc než se zdá:

- **ZÁKLADNÍ VĚTA**

> Pro BIJEKTIVNÍ $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ mezi af. prostory $\dim \geq 2$ platí:
>
> f je AFINNÍ $\iff$ zachovává KOLINEÁRNOST.

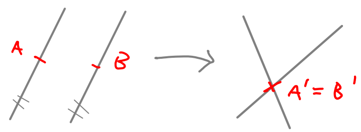
- Implikace "$\Rightarrow$" je zřejmá.

- **Myšlenky důkazu** implikace "$\Leftarrow$" jsou:

a) na přímku se nezobrazuje víc než přímka

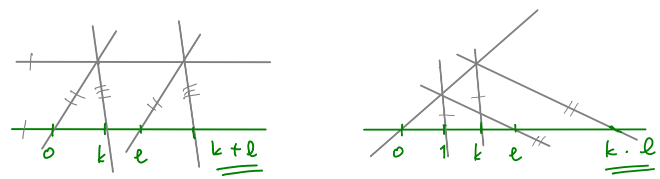
... spor se SURJEKTIVNOSTÍ

b) zachovává se rovnoběžnost



... spor s INJEKTIVNOSTÍ

c) zachovávají se poměry ...



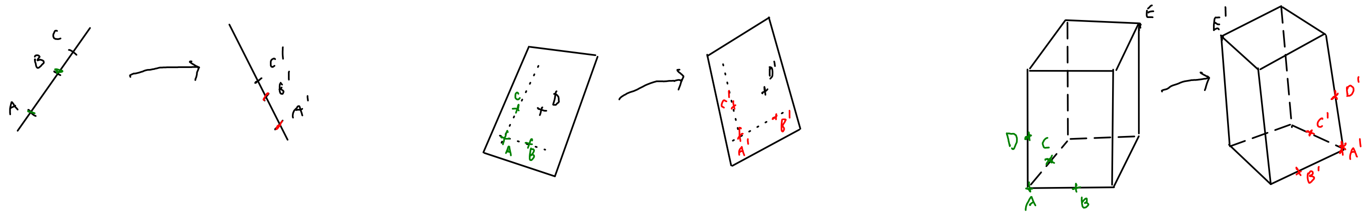
... pomocí // lze realizovat + a · v $\mathbb{R}$

VĚTA O URČENOSTI

- z minulého semestru víme, že

> PROSTÉ (resp. ne příliš degenerované) AFINNÍ zobrazení z prostoru dim n je určeno obrazy $n+1$ bodů v obecné poloze.

- Dokazovali jsme konstruktivně a induktivně pro $n = 1, 2, 3 \dots$



- Nyní víme, že

> Libovolné AFINNÍ zobrazení z prostoru dim n je určeno obrazy $n+1$ bodů v obecné poloze.

- **Důkaz:**

AFINNÍ $f : a \to a'$ je určeno obrazem 1 bodu a LINEÁRNÍM $\vec{f} : \vec{a} \to \vec{a}'$,
LINEÁRNÍ $\vec{f} : \vec{a} \to \vec{a}'$ je určeno obrazem BÁZE,
BÁZE má n prvků.

SHRNUTÍ / VÝHLEDY

- Máme několik **ekvivalentních** vymezení AFINNÍCH zobr.
- Některé vlastnosti plynou z jiných, **další** budeme přidávat..
- Diskuzi o zobrazeních budeme **zjemňovat / rozšiřovat** podle vzoru . . .

$$
\begin{tikzcd}[arrows=-]
 & \text{PROJEKTIVNÍ} \arrow[d] & \\
 & \text{AFINNÍ} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{EKVIAF.} \arrow[dr] & & \text{PODOBNÁ} \arrow[dl] \\
 & \text{SHODNÁ} &
\end{tikzcd}
$$

- Základní věta AFINNÍ geom. se bude rýmovat se **základní větou** PROJEKTIVNÍ geometrie,
- což v důsledku bude znamenat, že

„VŠECHNO SE VLEZE DO NĚJAKÉ **MATICE**!“