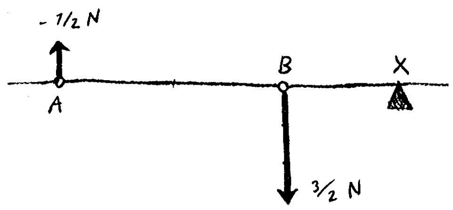
TĚŽIŠTĚ A POD.

- jiný pohled na af. kombinace bodů
- těžiště a těžišťové (= barycentrické) souřadnice
- typické užití a poznámky



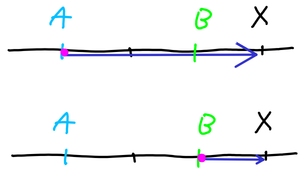
AFINNÍ KOMBINACE JINAK

- Známe:

$$X = \underset{t_0}{-\tfrac{1}{2}}A + \underset{t_1}{\tfrac{3}{2}}B \qquad \boxed{t_0 + t_1 = 1}\ !$$

$$= \left(1 - \tfrac{3}{2}\right)A + \tfrac{3}{2}B = A + \tfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$= -\tfrac{1}{2}A + \left(1 + \tfrac{1}{2}\right)B = B - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$



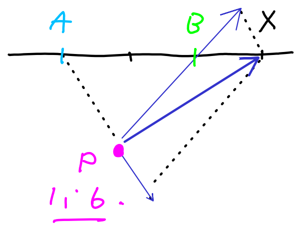
← obvyklé PARAMETRIZACE bodů na přímce

- Obecněji:

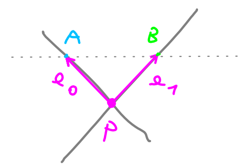
$$X = -\tfrac{1}{2}A + \tfrac{3}{2}B$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left(P + \overrightarrow{PA}\right) + \tfrac{3}{2}\left(P + \overrightarrow{PB}\right)$$

$$= \underbrace{\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\right)}_{1}P - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{PA} + \tfrac{3}{2}\overrightarrow{PB}$$



← přímka $t_0 + t_1 = 1$ v SOUŘADNICÍCH:

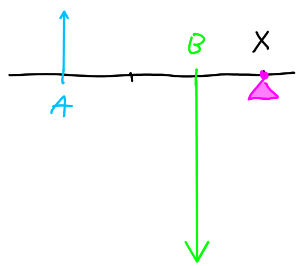


- Rovnováha:

$$X = -\tfrac{1}{2}A + \tfrac{3}{2}B$$

$$\underbrace{\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\right)}_{1}X = -\tfrac{1}{2}A + \tfrac{3}{2}B$$

$$0 = -\tfrac{1}{2}\overrightarrow{XA} + \tfrac{3}{2}\overrightarrow{XB}$$



← těžiště HMOTNÉ SOUSTAVY:

PŘEHLEDNĚ

- AFINNÍ KOMBINACE BODŮ:

$t_A A + t_B B$ A B

$t_A + t_B = 1$

t_A	…	2	$3/2$	1	$1/2$	0	$-1/2$	-1	$-3/2$
t_B	…	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1	$3/2$	2	$5/2$

$$\text{Přímka } AB = \{ t_A A + t_B B \mid t_A + t_B = 1 \}$$

$$\text{Polopřímka } AB = \{ t_A A + t_B B \mid t_A + t_B = 1,\ t_B \geq 0 \}$$

$$\text{Polopřímka } BA = \{ t_A A + t_B B \mid t_A + t_B = 1,\ t_A \geq 0 \}$$

$$\text{Úsečka } AB = \{ t_A A + t_B B \mid t_A + t_B = 1,\ t_A \geq 0,\ t_B \geq 0 \}$$

- BODOVÉ HMOTNÉ SOUSTAVY:

váhy

$m_A + m_B \neq 0$ $A(m_A)$ $B(m_B)$ $T(m_A + m_B)$

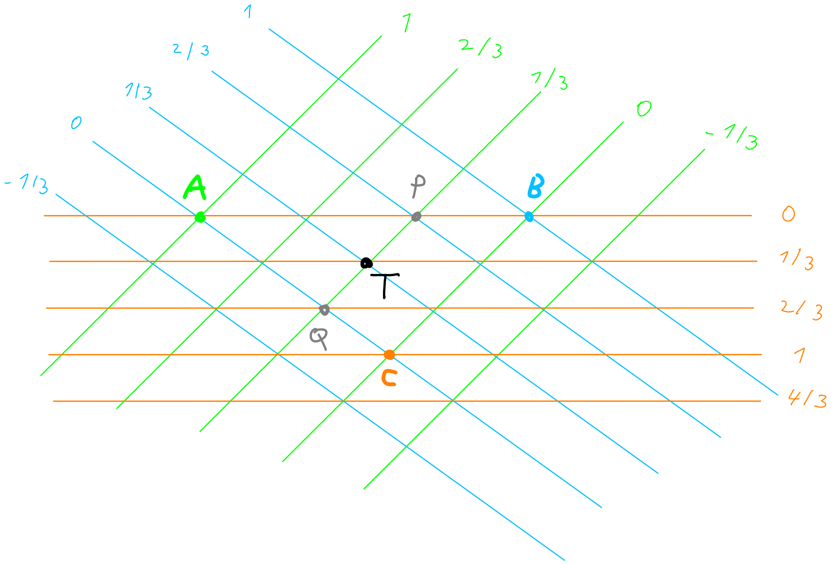
T = těžiště, pokud $m_A \overrightarrow{TA} + m_B \overrightarrow{TB} = 0$,

$$\text{tj. } T = \frac{m_A}{m_A + m_B} A + \frac{m_B}{m_A + m_B} B$$

barycentrické souřadnice

VÍC BODŮ

- AFINNÍ KOMBINACE BODŮ:

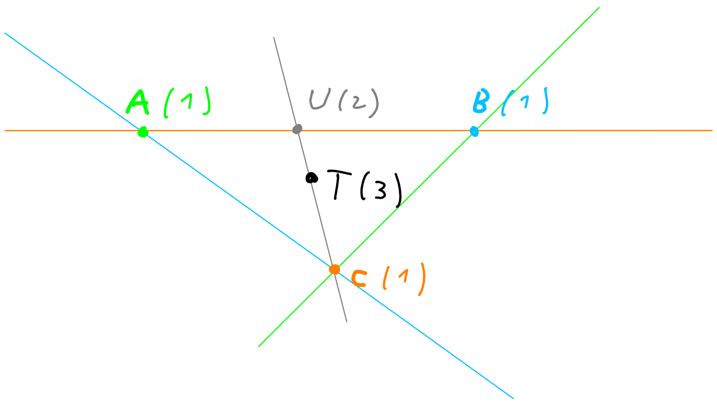


$$P = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$$

$$Q = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}C$$

$$T = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B + \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}C\right)$$
$$= \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$$

- BODOVÉ HMOTNÉ SOUSTAVY:



$$U = \frac{1}{1+1}A + \frac{1}{1+1}B$$
$$= \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$$

tj. $1\,\overrightarrow{UA} + 1\,\overrightarrow{UB} = 0$

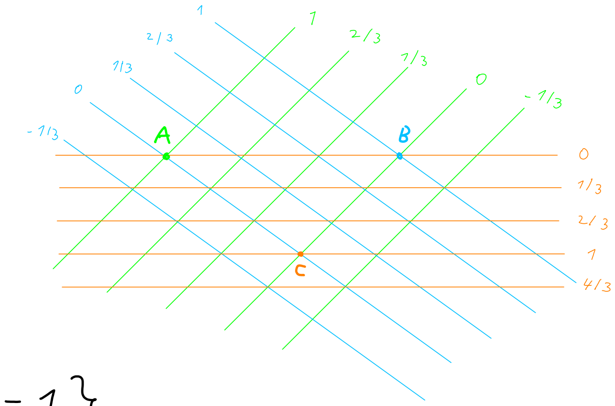
$$T = \frac{2}{1+2}U + \frac{1}{1+2}C$$
$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) + \frac{1}{3}C$$
$$= \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$$

tj. $2\,\overrightarrow{TU} + 1\,\overrightarrow{TC} = 0$

tj. $1\,\overrightarrow{TA} + 1\,\overrightarrow{TB} + 1\,\overrightarrow{TC} = 0$

VÍC BODŮ – PŘEHLEDNĚ

- AFINNÍ KOMBINACE BODŮ :



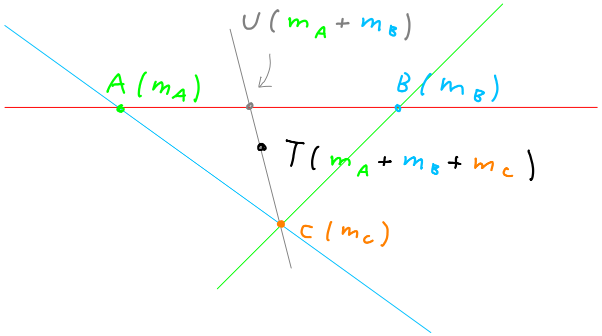
$$\text{Rovina } ABC = \{ t_A A + t_B B + t_C C \mid t_A + t_B + t_C = 1 \}$$

$$\text{Polorovina } AB + C = \{ t_A A + t_B B + t_C C \mid t_A + t_B + t_C = 1,\ t_C \geq 0 \}$$

$$\text{Úhel } ABC = \{ t_A A + t_B B + t_C C \mid t_A + t_B + t_C = 1,\ t_A \geq 0,\ t_C \geq 0 \}$$

$$\text{Trojúhelník } ABC = \{ t_A A + t_B B + t_C C \mid t_A + t_B + t_C = 1,\ t_A \geq 0,\ t_B \geq 0,\ t_C \geq 0 \}$$

- BODOVÉ HMOTNÉ SOUSTAVY :



$$U = \frac{m_A}{m_A + m_B} A + \frac{m_B}{m_A + m_B} B \qquad \text{tj. } m_A \overrightarrow{UA} + m_B \overrightarrow{UB} = 0$$

$$T = \frac{m_A + m_B}{m_A + m_B + m_C} U + \frac{m_C}{m_A + m_B + m_C} C = \dots \qquad \text{tj. } (m_A + m_B) \overrightarrow{TU} + m_C \overrightarrow{TC} = 0$$

$$= \frac{m_A}{m_A + m_B + m_C} A + \frac{m_B}{m_A + m_B + m_C} B + \frac{m_C}{m_A + m_B + m_C} C \qquad \text{tj. } m_A \overrightarrow{TA} + m_B \overrightarrow{TB} + m_C \overrightarrow{TC} = 0$$

OBECNĚ

- $\mathcal{A}$ = afinní prostor, $\mathcal{B}$ = afinní obal $\{A_0, \dots, A_k\}$, kde $\{A_0, \dots, A_k\}$ = množina bodů v OBECNÉ poloze.

- BARYCENTRICKÉ souřadnice bodu $X \in \mathcal{B}$ vzhledem k $(A_0, \dots, A_k)$ = souřadnice vektoru $\overrightarrow{PX}$ vzhledem k BÁZI $(\overrightarrow{PA_0}, \dots, \overrightarrow{PA_k})$, kde $P \notin \mathcal{B}$ lib. ...

  ... píšeme "$X = t_0 A_0 + \dots + t_k A_k$", kde NUTNĚ $\boxed{t_0 + \dots + t_k = 1}$!

  viz s. 41, 62

- $\{B_1, \dots, B_l\}$ = množina bodů $\subset \mathcal{A}$, $\{m_1, \dots, m_k\}$ = množina VAH $\subset \mathbb{R}$, $m_1 + \dots + m_l \neq 0$.

- T = TĚŽIŠTĚ bodové hmotné soustavy $\{B_1(m_1), \dots, B_l(m_l)\}$, pokud $\boxed{m_1 \overrightarrow{TB_1} + \dots + m_l \overrightarrow{TB_l} = 0}$.

  viz s. 63, 65 + INDUKCE

- PLATÍ

$$\boxed{T = \text{těžiště} \;-\!\!\text{"}\!\!-\; \iff T = t_1 B_1 + \dots + t_l B_l, \quad \text{kde } t_i = \frac{m_i}{m_1 + \dots + m_l}.}$$

OBECNĚ

- $\mathcal{A}$ = afinní prostor, $\mathcal{B}$ = afinní obal $\{A_0, \dots, A_k\}$, kde $\{A_0, \dots, A_k\}$ = množina bodů v OBECNÉ poloze.

- PLATÍ

$\mathcal{B}$ = af. obal $\{A_0, \dots, A_k\} = \{t_0 A_0 + \dots + t_k A_k \mid t_0 + \dots + t_k = 1\}$

Poloprostor $\mathcal{B}$ určený A_0 a hranicí obs. $\{A_1, \dots, A_k\} =$

$= \mathcal{B} \cap \{t_0 \geq 0\}$

konvexní obal $\{A_0, \dots, A_k\} = \mathcal{B} \cap \{t_0 \geq 0\} \cap \dots \cap \{t_k \geq 0\}$

viz s. 41, 63, 65 + INDUKCE

- HLAVNĚ

zobrazení $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ je AFINNÍ

$\iff$ zachovává AFINNÍ KOMBINACE bodů

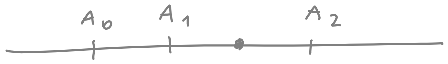
$\iff$ zachovává BARYCENTRICKÉ souř.

$\iff$ zachovává TĚŽIŠTĚ bodových hmotných soustav.

viz definice s. 32–33, 41, 66

POZNÁMKY

např.



$X = -A_0 + 2A_1 = \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_2 = \dots$

- Pokud $\{A_0, \dots, A_k\}$ NEJSOU v obecné poloze, pak "souřadnice" $X = t_0 A_0 + \dots + t_k A_k \in \mathcal{B}$ NEJSOU určeny **jednoznačně** . . .

  . . . nicméně mnohé z předchozího má stále DOBRÝ VÝZNAM!

Např.:

- Obecně NEPLATÍ

  $X = t_0 A_0 + \dots + t_k A_k \in$ konvexní obalu $\{A_0, \dots, A_k\}$

  $\iff$ všechny $t_i \geq 0$,

- ale stále PLATÍ

  konvexní obal $\{A_0, \dots, A_k\} = \left\{ \sum_{i=0}^{k} t_i A_i \;\middle|\; \sum_{i=0}^{k} t_i = 1,\ t_i \geq 0 \right\}$.

- OBECNĚJI (Carathéodoryho věta)

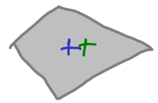
$$\boxed{\begin{array}{l} M \subseteq \mathcal{A}, \quad \mathcal{B} = \text{afinní obal } M, \quad k = \dim \mathcal{B}: \\ \text{konvexní obal } M = \left\{ \sum_{i=0}^{k} t_i A_i \;\middle|\; A_i \in M,\ \sum_{i=0}^{k} t_i = 1,\ t_i \geq 0 \right\} \end{array}}$$

POZNÁMKY

- TĚŽIŠTĚ bodové hmotné soustavy se STEJNÝMI VAHAMI

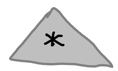
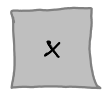
  NENÍ obecně totéž co

  TĚŽIŠTĚ konvexního obalu bodů!

  viz např. obecný čtyřúhelník 

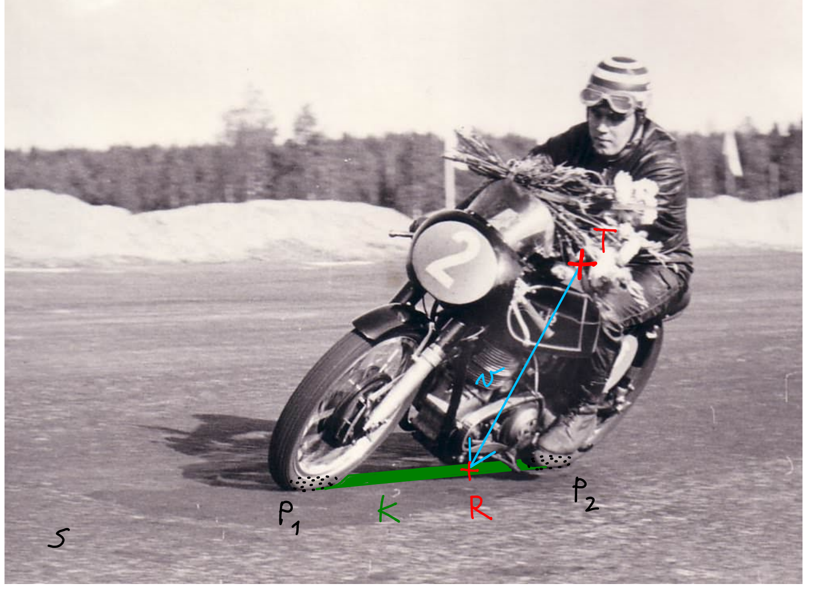
- ... SOUHLASÍ např. pro

  viz s. 63, 65 + INDUKCE

  - body v OBECNÉ POLOZE (v lib. dimenzi!) SIMPLEXY 
  - SYMETRICKÉ věci např. čtverec 
  - apod.

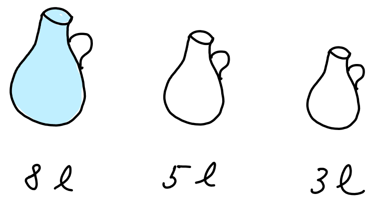
PŘÍKLAD — PROBLÉM STABILITY

- Hmotná soustava je STABILNÍ ...

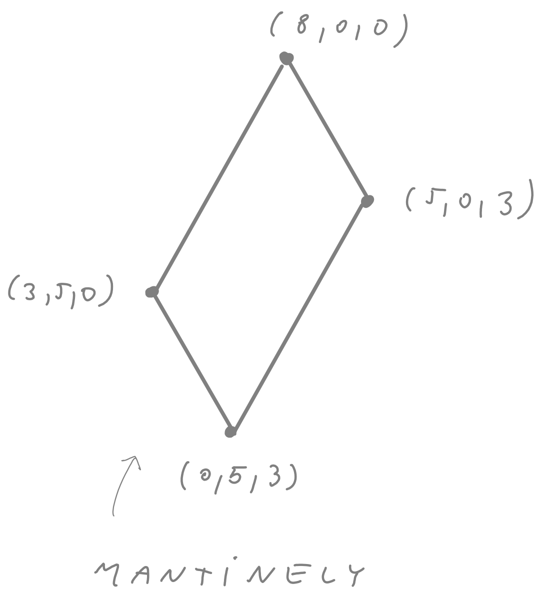


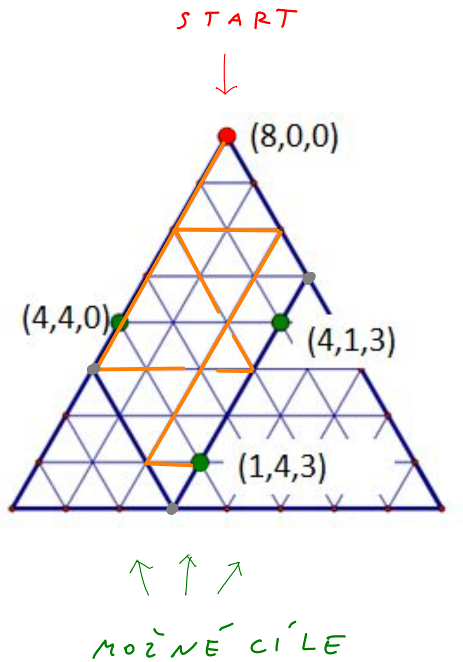
... pokud průmět (R)
těžiště (T) hmotné soustavy
ve směru výslednice ($\vec{v}$) všech působících sil
do opěrné roviny (S)
leží v konvexním obalu (K)
opěrných prvků ($P_1 \cup P_2$).

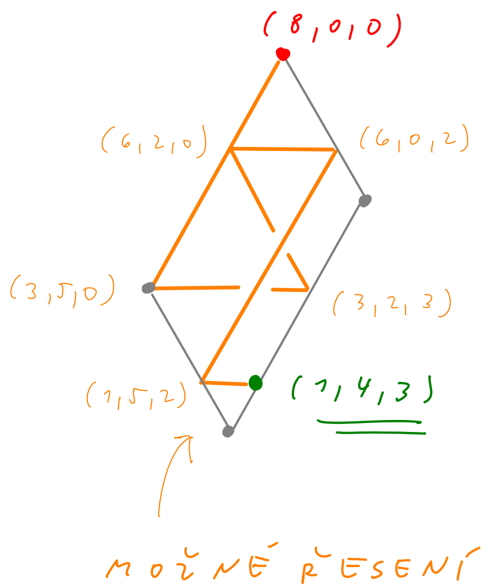
PŘÍKLAD — PROBLÉM TŘÍ DŽBÁNŮ



- UMÍME: přeléváním zcela naplnit (polo)prázdné nádoby.
- CHCEME: přesně 4 l.
- POSTŘEH: součet vody v nádobách je pořád STEJNÝ!
- MOŽNÉ ŘEŠENÍ:







SHRNUTÍ

af. přímka

reálná čísla

- ztotožnění ——————— $\cong$ $\mathbb{R}$

  $\rightsquigarrow$ uspořádání, ÚSEČKA, POLO-prostor, KONVEXNÍ množina

- k popisu předchozích omezení se hodí afinní KOMBINACE bodů

- afinní kombinace bodů souvisí s TĚŽIŠTI

- těžiště soustavy HMOTNÝCH BODŮ
  obecně NENÍ totéž co
  těžiště jejich KONVEXNÍHO OBALU

- předchozí věci se zachovávají při AFINNÍCH zobrazeních ...
  ... některé charakterizují af. zobr. ÚPLNĚ

  af. kombinace / baryc. souřadnice