Poměr, úměra, přímá a nepřímá úměrnost, trojčlenka

Irena Budínová

PdF MU

Poměr

- S pojmem poměr se setkáváme mnohokrát v životě.
- Jak můžeme porovnávat dvě čísla:
  a) pomocí **rozdílu** - $a - b$, ptáme se „o kolik více (méně)“
  b) pomocí **podílu** - $a: b$, ptáme se „kolikrát více (méně)“
- Např.: V jedné skupině je 24 žáků, v druhé 8 žáků.
  a) O kolik žáků je v první skupině více než ve druhé? $24 - 8 = 16$
  b) O kolik žáků je v druhé skupině méně než ve druhé?
  c) Kolikrát více žáků je v první skupině více než v druhé? $24: 8 = 3$
  d) Kolikrát méně žáků je ve druhé skupině méně než v první?
  e) V jakém poměru jsou počty žáků v obou skupinách? $24: 8 = 3: 1$

Definice pojmů

- Podíl $a: b$, kde $a > 0, b > 0$, nazýváme **poměr** čísel a, b. Číslo a nazýváme první člen poměru, číslo b je druhý člen poměru.
- Poměr můžeme krátit a rozšiřovat (oba členy poměru dělit nebo násobit nenulovým číslem). Pokud jsou oba členy poměru vyjádřeny nesoudělnými přirozenými čísly, říkáme, že je poměr v **základním tvaru**.
- **Převrácený poměr** k poměru $a: b$ je poměr $b: a$.

Posloupnost úloh pro téma poměr

1. Nejdříve volíme úlohy, které si žáci mohou vymodelovat pomocí kuliček, bonbonů, aj.
   - **Úloha 1:** Rozděl 6 kuliček tak, aby byly části v poměru 1:2.
   - **Úloha 2:** Můžeš rozdělit 12 kuliček tak, aby části byly v poměru a) 1:2, b) 2:3, c) 4:2, d) 2:4, e) 1:4? V kterých případech byl poměr možný? Které poměry odpovídaly stejné situaci?
2. Jestliže děti zvládnou fázi s modely, může se přejít k fázi bez modelů, postupně zvyšovat čísla.
   - **Úloha 3:** Rozdělte 52 v poměru 10:3.
   - **Úloha 4:** Určete všechny poměry ve tvaru 10:_, ve kterých lze rozdělit číslo 52.

Posloupnost úloh pro téma poměr

3. Zapojujeme také délkové jednotky.
   - **Úloha 5:** V jakých celočíselných poměrech lze rozdělit úsečku o délce 10 cm?
4. V další fázi je možno přistoupit k aplikačním úlohám a slovním úlohám.
   - **Úloha 6:** V jakém poměru je třeba zmenšit úsečku délky 1,25 m, abychom dostali úsečku délky 1 m?
   - **Úloha 7:** Zapište dvě trojciferná čísla, která jsou v poměru 3:5, a určete jejich rozdíl.
   - **Úloha 8:**V jakém poměru jsou obsahy dvou čtverců, jejichž obvody jsou v poměru 1:2?

Posloupnost úloh pro téma poměr

- Aplikační a problémové úlohy
  - **Úloha 9:** Tři čísla jsou v poměru 1:2:5. Trojnásobek nejmenšího čísla je o 6 větší než polovina největšího čísla. Urči všechna tři čísla.
  - **Úloha 10:** Neznámé číslo je rozděleno na čísla a,b v poměru 5:4. Kdyby číslo a bylo o 5 menší než je, bylo by rovno číslu b. Urči hodnotu neznámého čísla.

Postupný poměr; úměra

- **Postupný poměr** $a: b: c$ (nahrazuje poměry $a: b$, $b: c$).
- Např.: Chromová ocel na výrobu příborů: Fe:Cr:Ni = 37:9:4, bronz je slitina cínu, olova a mědi v poměru 1:1:8.
  - **Úloha 11:** Vnitřní úhly trojúhelníku jsou v poměru 1:2:3. V jakém poměru jsou vnější úhly těchto trojúhelníků?
- **Úměra** je zápis dvou sobě rovných poměrů, $a: b = c: d$. Členy a, d se nazývají vnější členy, členy c, d se nazývají vnitřní členy úměry.

Přímá úměrnost

- Přímou úměrnost můžeme postupně uvádět v souvislosti s výukou násobení. Např.: Jeden rohlík stojí 2 Kč. Kolik stojí 2, 3, 4, 5, 6 rohlíků? Později je možno zobecňovat – kolik stojí n rohlíků? Učíme postupně žáky zapisovat data do tabulky.
- U přímé úměrnosti nepoužíváme vyjádření „čím – tím“, ale: **kolikrát** se zvětší (zmenší) hodnota x, **tolikrát** se zvětší (zmenší) hodnota y.
- Grafem přímé úměrnosti je obecně **přímka** procházející počátkem soustavy souřadnic. 7. ročník - pracujeme pouze s **podmnožinami přímky**, tj. buď polopřímkou, nebo úsečkou, případně izolovanými body (pokud je definičním oborem množina přirozených čísel).
- Přímá úměrnost jako zvláštní případ lineární funkce se probírá v 9. ročníku v tématu Funkce.

Nepřímá úměrnost

- Nepřímou úměrnost můžeme uvést úlohou: Jeden stroj vykoná práci za 12 hodin. Za jako dlouho vykonají práci 2, 3, 4, 5, 6 strojů?
- Žáci si zapíší údaje do tabulky, údaje se učí zaznamenat do grafu. (7. ročník)
- Závislost je nyní tato: Kolikrát se zvětší (zmenší) hodnota v prvním řádku tabulky, tolikrát se zmenší (zvětší) hodnota v druhém řádku. Součin v prvním a druhém řádku je stále stejný.
- V 7. ročníku pracujeme s tabulkami a vedeme žáky k obecnému zápisu, např. $č = \frac{12}{n}$. V 8. ročníku se může přidat grafické znázornění. V 9. ročníku se zavádí funkce nepřímá úměrnost $y = \frac{k}{x}, k > 0, x > 0$.

Aplikační úlohy

- Čtyři stroje vykonají určitou práci za 8 hodin. Kolik strojů by bylo potřeba, kdyby bylo nutné práci vykonat za 3 hodiny?
- Jede-li auto rychlostí 50 km/h, projede určitou dráhu za 2 hodiny. Za jakou dobu projede stejnou dráhu auto rychlostí 40 km/h, 60 km/h, 80 km/h?
- Obsah obdélníku je 24 cm^2. Zapište do tabulky, jak se mění jeho šířka v závislosti na jeho délce.

Graf nepřímé úměrnosti

- Grafem nepřímé úměrnosti je **rovnoosá hyperbola**. Vzhledem k definičnímu oboru se v 7. ročníku rýsuje pouze v 1. kvadrantu souřadnicové soustavy. Podobně jako u přímé úměrnosti, pokud je definičním oborem množina přirozených čísel, je grafem množina izolovaných bodů, které leží na hyperbole.
- Nepřímá úměrnost jako funkce se probírá v 9. ročníku.

Trojčlenka

- Trojčlenku potřebuje každý člověk v běžném životě. Příklady využívající přímou nebo nepřímou úměrnost nás potkávají každý den.
- V historii trojčlenka vznikla v souvislosti s kupeckými počty. Vznikaly různé mechanické předpisy pro práci s veličinami přímo nebo nepřímo úměrnými.
- **Trojčlenkou** nazýváme úlohu, která obsahuje dvojice na sobě závislých veličin (přímo nebo nepřímo), z nichž tři údaje jsou známé, a čtvrtý je třeba vypočítat.
- Trojčlenku můžeme řešit různými způsoby, nejčastější je pomocí **úměry** nebo „**přes jednotku**“.

Složená trojčlenka

- Obsahuje-li úloha více daných dvojic přímo nebo nepřímo úměrných, lze ji řešit pomocí jedné složené trojčlenky.
  - **Úloha:** Za 8 hodin omítne zedník 21,2 m^2 hladké plochy. Za jak dlouho omítnou 3 stejně výkonní zedníci 89 m^2 hladké plochy?
- **Navazující téma:** měřítko plánu a mapy