Fyzikální motivace pro výuku matematiky

Břetislav Fajmon
Jitka Panáčová

Email: fajmon@ped.muni.cz,
panacova@ped.muni.cz
Pedagogická fakulta Masarykovy univerzity, Brno 2018

Obsah

Úvod

Řada partií matematiky vyučovaných na střední a vysoké škole obsahuje systémy metod vhodných na úlohy z praxe – například z reality fyzikálního světa. Na druhé straně řada otázek a zpracování dat z fyzikálního světa přináší další témata, která je potřeba při jejich popisu matematicky zpracovat.

Se zřetelem na tuto vzájemnou souhru matematiky a fyziky je utvářen i tento text, který bude sloužit jako výukový text v předmětu Fyzikální motivace pro výuku matematiky 01 (kód předmětu MA 0034) na Pedagogické fakultě Masarykovy univerzity od roku 2019, ovšem je psán elementárním způsobem, takže doplněním o cvičení (které bude časem k textu připojeno) by jej bylo možné používat i při výuce matematiky a fyziky na střední škole, když ne jako výchozí metodický materiál, tak aspoň jako zdroj některých

- informací z fyziky, které odpovídají na otázky typu „k čemu nám to bude?“ studentů matematiky;
- informací z matematiky, které odpovídají na otázky typu „odkud ten učitel vyčaroval tento vzorec?“ studentů fyziky.

Celý předmět Fyzikální motivace pro výuku matematiky 01 (a navazující předmět 02 v následujícím semestru) je veden v seznamu předmětů jako volitelný předmět a klade si za cíl seznámit budoucí absolventy učitelského studia matematiky s některými základními příklady využití matematických metod ve fyzice – je tedy určen zejména pro ty studenty, kteří si nevybrali fyziku jako druhý předmět svého studia.

Nicméně i studenti učitelského oboru matematika–fyzika by mohli z výuky tohoto předmětu něco získat, a sice přístupy didaktického zaměření, které se zabývají otázkou, jakým způsobem provázat výuku matematiky a fyziky (zejména na střední škole), aby to bylo prospěšné studentům obou předmětů.

Cílem tohoto textu a předmětu je obrátit pozornost studentů ke vzájemné souhře matematiky a fyziky – obnovit pohled na to, že matematika, i když v jistém smyslu královna, je velkou pomocnicí pro fyziku, pro popis i porozumění světu kolem nás. I tento matematický popis nás obohacuje a pomáhá nám v tomto světě žít.

autoři, prosinec 2018

1 Měření fyzikálních veličin, převody jednotek

Fyzika se zabývá popisem zákonitostí viditelného i neviditelného světa kolem nás na základě veličin (= proměnných), které můžeme opakovaně měřit – např. veličin délky, času, hmotnosti, hustoty hmoty, apod. (v tomto krátkém úvodu se zaměříme pouze na veličiny uvedené v tabulce 1.1, tj. hmotnost, čas a délku – s dalšími veličinami se budeme postupně seznamovat při studiu fyziky).

Matematika na druhé straně není věda spojená výlučně s fyzikou. Někdy bývá označována za nástroj nebo jazyk fyziky, jindy o matematice mluvíme zase jako o královně věd – jako o způsobu logického uvažování a přesného vyjadřování, přístupu k životu. Podobný cíl – naučit jistému způsobu uvažování – si ovšem kladou i jiné předměty, například technická výchova nebo právě i fyzika, a mnoho dalších. Nemá smysl se tedy přít, která věda nebo obor lidského zkoumání a studia je nejdůležitější – podobně jako smyslem mezilidských vztahů je být si navzájem oporou a pomocí, i jednotlivé vědy a disciplíny studia jsou těmi nejlepšími králi a královnami, pokud současně slouží těm ostatním a berou si z nich inspiraci a témata ke studiu, aby spolu mohly vzájemně existovat v tomto světě a přispívat jedna druhé.

V tomto předmětu se budeme zabývat pouze vztahem mezi dvěma obory, a sice vztahem matematiky a fyziky. Kdybychom se zaměřili zatím pouze na jedinou veličinu, a sice délku, už u ní lze vypozorovat rozdíly v přístupu fyziky či matematiky při jejím popisu. Cílem tohoto textu bude upozorňovat na to, že tato vzájemná rozdílnost je důležitá, ale současně se budeme zaměřovat i na vzájemnou souhru matematiky a fyziky.

Fyzika při zkoumání délky objektů okolního světa klade důraz na jednotky – někdy nás budou zajímat objekty dlouhé několik desítek kilometrů (planety, hvězdy), jindy nás zajímá objekt délky 1,92 metru (člověk), a občas (při popisu tzv. mikrosvěta) se zaměřujeme na popis malých částic a organismů, které nedosahují ani délky jednoho milimetru. Jinými slovy, pro studium fyziky není důležitá jen veličina neboli proměnná, ale také velikost jednotky, kterou zrovna vynášíme na osu x našeho grafu funkce – zda je tato jednotka velká 1 kilometr, 1 metr nebo 1 milimetr. Proto je důležité používat ustálené označení těchto jednotek délky ve vztahu k té základní jednotce délky – délce jednoho metru. Přehled těch nejčastěji užívaných jednotek délky (a jejich označení) najdete v tabulce 1.2.

Na druhé straně, matematiku jednotky nezajímají až tolik – vynese na osu x jednotku a napíše k ní číslo 1, a napsat k této ose, jakou veličinu měříme, popřípadě v jakých jednotkách, někdy zapomene a jindy nepovažuje za důležité a záměrně nepíše. Zabývá se spíše tím, aby studenty naučila poznat, že při změně veličiny x na vodorovné ose je veličina y na svislé ose rostoucí či klesající, pro jistou hodnotu veličiny x nabývá veličina y (která je na veličině x závislá) svého lokálního maxima či lokálního minima, apod.

Musíme si přiznat, že on ten konflikt zájmů mezi matematikou a fyzikou nastává už při označení vodorovné osy zmiňované kartézské soustavy souřadnic v rovině: Fyzika by ji ráda označila písmenem t, jež tradičně označuje veličinu času – zajímá ji totiž velmi často, jak se veličina vynášená na svislé ose mění v závislosti na čase. Matematika by velmi ráda označila vodorovnou osu písmenem x a svislou osu písmenek y – nechce se totiž neustále soustředit na to, jakým písmenem označit kterou z os. Její cíl je jiný – chce naučit studenty, zda např. číslo 5 přečetli z grafu funkce na vodorovné ose (a jedná se tedy o hodnotu veličiny x), nebo na svislé ose (a jedná se o hodnotu veličiny y).Chce naučit studenty „číst z grafu funkce“.

A nyní je asi čestné říci, že i při mírných konfliktech zájmů matematiky a fyziky např. při popisu počtu ujetých kilometrů auta v závislosti na čase je důležitá i souhra těchto oborů: fyzika poskytne matematice názvy, velikosti a označení proměnných času a délky, a co je nejdůležitější, také funkci představující vztah (získaný z měření) polohy auta (= počtu ujetých kilometrů) na čase. Matematika se pokusí závislost polohy auta na čase popsat vzorcem – pokud se jí to podaří a jedná se o vzorec spojité funkce, je schopna dokonce vypočíst okamžitou rychlost auta v libovolném okamžiku uvažované dráhy (pokud si tedy vztáhne teoretický pojem derivace reálné funkce na vztah mezi polohou a rychlostí auta), nebo naopak pokud zná počáteční polohu a rychlost auta v každém okamžiku, vyjádřit i polohu auta v každém okamžiku (pokud jí není zatěžko vztáhnout teoretický pojem určitého integrálu na tentýž vztah mezi polohou auta a jeho rychlostí, když nyní naopak místo aby znala dráhu v každém okamžiku, zná jen rychlost v každém okamžiku uvažovaného časového intervalu). Jinými slovy, matematika a fyzika spolupracují na popisu pohybu auta v závislosti na rychlosti – každý z oborů dodává jiné kompetence (= jiné dovednosti).

Nutno říci, že tuto spolupráci výpočtů a fyzikální interpretace vykazovali v historii významní vědci označovaní dnes za fyziky – Kepler, Newton a Galilei při popisu pohybu nebeských těles. Až později se některé technické části tohoto popisu pohybu dostaly do oboru matematiky. To určitě přispělo tomu, že tyto technické otázky a metody přesného matematického popisu mohly být dále rozvíjeny, nicméně v průběhu historie se některé z motivací pro existenci jistých matematických metod z výuky matematiky ztratily. To dneska vede ke smutné, až paradoxní skutečnosti, že řada studentů (i absolventů) oboru matematiky nezná žádné souvislosti některých matematických metod a objektů s reálným světem – například neví, kde při popisu našeho světa se využívají poznatky z matematického studia kvadratické funkce, jejímž grafem je (v nedegenerovaném případě $y = ax^2 + bx + c$, kde $a \neq 0$) parabola.

Fyzika tedy popisuje svět pomocí tzv. fyzikálních veličin, některé základní fyzikální veličiny s příslušnými jednotkami uvádí, jak bylo již výše zmíněno, tabulka 1.1:

Poznámka 1.1 POZOR! - kolize v označení:

m - označení jednotky **metr**

m - označení veličiny **hmotnost**

Předpona před jednotkou pak usnadňuje samotný zápis fyzikální veličiny, příklad pro veličinu délky je ilustrován v tabulce 1.2:

Tabulka 1.1: Fyzikální veličiny

označení veličiny	veličina	název jednotky	označení jednotky
l (= length)	délka	metr	m
t (= time)	čas	sekunda	s
m (= mass)	hmotnost	kilogram	kg

Tabulka 1.2: Předpony jednotek pro veličinu délky

1 Tm	=	1 terametr	=	10^{12} m	=	1 000 000 000 000 m
1 Gm	=	1 gigametr	=	10^{9} m	=	1 000 000 000 m
1 Mm	=	1 megametr	=	10^{6} m	=	1 000 000 m
1 km	=	1 kilometr	=	10^{3} m	=	1 000 m
1 hm	=	1 hektometr	=	10^{2} m	=	100 m
1 dam	=	1 dekametr	=	10^{1} m	=	10 m
1 dm	=	1 decimetr	=	10^{-1} m	=	0,1 m
1 cm	=	1 centimetr	=	10^{-2} m	=	0,01 m
1 mm	=	1 milimetr	=	10^{-3} m	=	0,001 m
1 μm	=	1 mikrometr	=	10^{-6} m	=	0,000 001 m
1 nm	=	1 nanometr	=	10^{-9} m	=	0,000 000 001 m
1 pm	=	1 pikometr	=	10^{-12} m	=	0,000 000 000 001 m

2 Přímočarý pohyb

Motivační úloha:

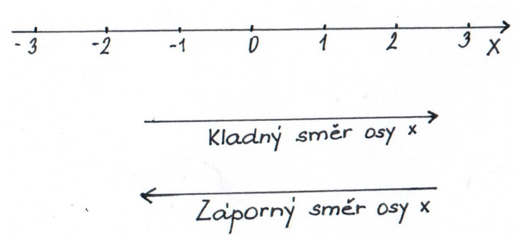
V roce 1977 vytvořila Kitty O´Neilová rekord v závodech dragsterů. Za pouhých 3,72 s dosáhla rychlosti 628,85 km/h. V roce 1958 vytvořil jiný rekord Eli Beeding při jízdě na saních s raketovým pohonem. Po startu dosáhly saně za dobu 0,04 s rychlosti 116 km/h. Lze vůbec nějakým způsobem porovnat tyto dva výkony, abychom měli představu, který z nich mohl přinést jezdci větší vzrušení nebo strach? Máme srovnávat dosaženou rychlost, dobu jízdy nebo nějakou jinou veličinu?

2.1 Pohyb

Kinematika je část fyziky, která se zabývá popisem pohybu těles. Při jeho zkoumání se nejdříve zaměříme na tzv. **přímočarý pohyb**, kterým rozumíme pohyb tělesa po přímce, ať už svislé (např. pád kamene) nebo vodorovné (např. jízda automobilu po přímé dálnici). Pokud se všechny části tělesa pohybují stejnou rychlostí a stejným směrem, nahradíme těleso tzv. **hmotným bodem**, přičemž uvažujeme jeho hmotnost, ale zanedbáme jeho rozměry.

2.2 Poloha a posunutí

Polohu hmotného bodu určujeme pomocí souřadnic vždy vzhledem k určitému vztažnému bodu, kterým je nejčastěji **počátek** souřadnicové osy x viz obrázek 2.1. Za **kladný směr** osy x považujeme směr rostoucí souřadnice, na obrázku 2.1 je kladný směr orientován vpravo; opačný směr nazýváme **záporný**.



Obr. 2.1: Souřadnicová osa x.

Posunutí chápeme jako změnu polohy z bodu o souřadnici x_1 do bodu o souřadnici x_2 (značíme $\triangle x$). Znak $\triangle$ bude většinou znamenat změnu dané veličiny:

$$\boxed{\triangle x = x_2 - x_1} \tag{2.1}$$

Posunutí[1] může být kladné, resp. záporné, pokud se odehrálo v kladném směru osy x (doprava), resp. záporném směru osy x (doleva). Posuneme-li například hmotný bod z polohy $x_1 = 2$ do polohy $x_2 = -3$, získáme záporné posunutí

$$\triangle x = -3 - 2 = -5.$$

Kontrola 1: Tři různá posunutí jsou dána následujícími počátečními a koncovými polohami na ose x

a) $x_1 = -3\ m$, $x_2 = 5\ m$,

b) $x_1 = -3\ m$, $x_2 = -7\ m$,

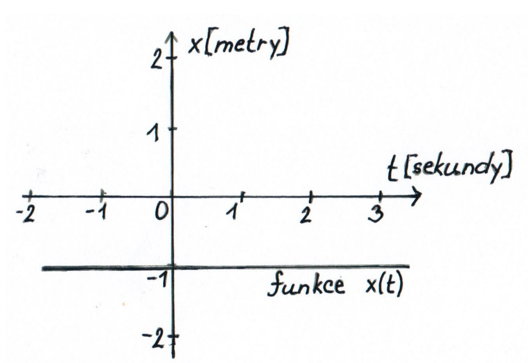
c) $x_1 = 7\ m$, $x_2 = -3\ m$.

Která z uvedených posunutí jsou záporná?

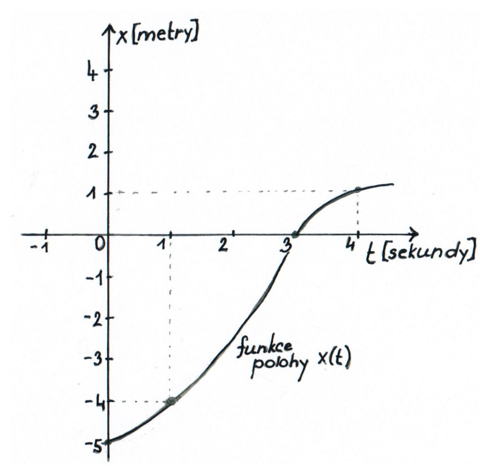
2.3 Průměrná rychlost

Informace o pohybu tělesa lze získat z grafu závislosti jeho polohy $x(t)$ na čase t.

Například graf na obrázku 2.2 popisuje králíka (nahradili jsme jej hmotným bodem), který sedí v poloze $x = -1\ m$, a nehýbá se.



Obr. 2.2: Pohyb králíka v klidu.



Obr. 2.3: Pohyb králíka daný funkcí $x(t)$.

Graf funkce osy x na obrázku 2.3 popisuje pohyb králíka, který se

- v čase $t = 0\ s$ nachází v poloze $x = -5\ m$,
- v čase $t = 1\ s$ nachází v poloze $x = -4\ m$,

[1] Posunutí je příklad **vektorové veličiny**, neboť je jako každý vektor charakterizováno velikostí a směrem. Vektorům je věnována kapitola 3. V tuto chvíli stačí si uvědomit, že posunutí po přímce má dvě charakteristiky: (1) velikost, tj. vzdálenost mezi počátečním a koncovým bodem, a (2) směr určený souřadnicovou osou orientovaný od počáteční ke koncové poloze a vyjádřený znaménkem plus nebo minus.

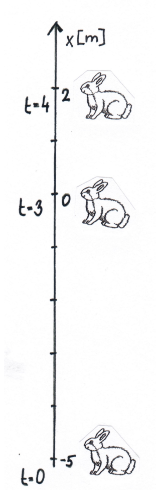
- pak se pohybuje směrem k počátku soustavy souřadnic $x = 0$, kterým proběhl v čase $t = 3\ s$ a pokračoval v běhu v kladném směru osy x.

Pohyb králíka podél osy x je zaznamenán na obrázku 2.4.

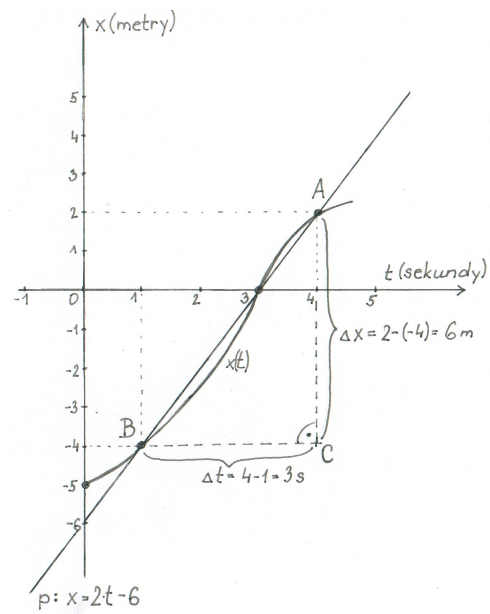
Graf funkce $x(t)$ na obrázku 2.3 ilustrující pohyb králíka je jistě zajímavější než obrázek 2.4, neboť obsahuje více informací o jeho poloze. Jednou z těchto informací je **průměrná** neboli **střední rychlost**, označení $\bar{v}$ (z anglického *velocity* = rychlost; pruh označuje průměrnou hodnotu rychlosti), kterou definujeme jako podíl posunutí $\triangle x$ v určitém časovém intervalu $\triangle t$ a délky tohoto intervalu:

$$\boxed{\bar{v} = \frac{\triangle x}{\triangle t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}. \tag{2.2}$$

Veličina $\bar{v}$ udává, jakou průměrnou rychlostí se králík pohyboval v časovém intervalu od okamžiku t_1 do okamžiku t_2.



Obr. 2.4: Pohyb králíka podél osy x.



Obr. 2.5: Pohyb králíka v časovém intervalu od okamžiku $t_1 = 1$ do $t_2 = 4$.

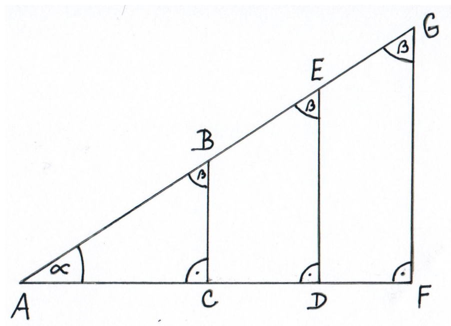
Například v časovém intervalu od $t_1 = 1\ s$ do $t_2 = 4\ s$, viz graf funkce $x(t)$ na obrázku 2.5, je průměrná rychlost králíka

$$\bar{v} = \frac{2 - (-4)}{4 - 1} = \frac{6\ m}{3\ s} = 2\ ms^{-1},$$

tj. 2 metry za sekundu.

Daná přímka p z obrázku 2.5 se nazývá **sečna** grafu funkce $x(t)$, protože jej protíná v alespoň dvou bodech $[t_1, x_1]$, $[t_2, x_2]$, v našem případě se jedná o body $A = [4; 2]$, $B = [1; -5]$.

Uvažujme pravoúhlý trojúhelník ABC (u vrcholu C je pravý úhel = úhel o velikosti $90°$), viz obrázek 2.6. Dále uvažujme pravoúhlé trojúhelníky ABC, AED, AGF, které jsou **podobné**, tj. úhly trojúhelníků při jejich vrcholech po řadě B, E, G, resp. C, D, F jsou shodné, přičemž trojúhleníky ABC, AED, AGF mají společný vrchol v bodě A.



Obr. 2.6: Podobné pravoúhlé trojúhelníky ABC, AED, AGF.

Odpovídající poměr délek dvou stran v každém z uvažovaných pravoúhlých trojúhelníků ABC, AED, AGF s pevně daným úhlem $\alpha \in (0, 90°)$ při vrcholu A, je vždy stejný:

a)

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|AE|} = \frac{|FG|}{|AG|} = \frac{\text{délka odvěsny protilehlé úhlu } \alpha}{\text{délka přepony}}.$$

Výše uvedený poměr délek pravoúhlého trojúhelníka závisí pouze na velikosti úhlu α a označuje se $\sin \alpha$ (čti sinus alfa).

b)

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AE|} = \frac{|AF|}{|AG|} = \frac{\text{délka odvěsny přilehlé úhlu } \alpha}{\text{délka přepony}}.$$

Výše uvedený poměr délek pravoúhlého trojúhelníka závisí pouze na velikosti úhlu α a označuje se $\cos \alpha$ (čti kosinus alfa).

c)

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|AD|} = \frac{|FG|}{|AF|} = \frac{\text{délka odvěsny protilehlé úhlu } \alpha}{\text{délka odvěsny přilehlé úhlu } \alpha}.$$

Výše uvedený poměr délek pravoúhlého trojúhelníka závisí pouze na velikosti úhlu α a označuje se $\operatorname{tg} \alpha$ (čti tangens alfa).

Ze základní školy víme, že v každém pravoúhlém trojúhelníku ABC platí Pythagorova věta:

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

kde $a = |BC|$, $b = |AC|$ jsou délky odvěsen a $c = |AB|$ je délka přepony pravoúhlého trojúhelníka ABC. Celou tuto rovnici vydělíme členem c^2 a získáme rovnost

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1,$$

kterou lze pomocí výše definovaného označení přepsat na

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

V uvažovaném pravoúhlém trojúhelníku ABC platí rovnost:

$$\text{tg } \alpha = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{\frac{|BC|}{|AB|}}{\frac{|AC|}{|AB|}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Poznámka 2.1 V uvažovaném pravoúhlém trojúhelníku ABC se definuje i tzv. kotangens úhlu α:

$$\text{cotg } \alpha = \frac{\text{délka odvěsny přilehlé úhlu } \alpha}{\text{délka odvěsny protilehlé úhlu } \alpha}.$$

Z uvedeného je patrno, že $\boxed{\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}}$.

Následující text je věnován **rovnici přímky ve směrnicovém tvaru**: Na přímce p v rovině (viz obrázek 2.7) leží body o souřadnicích $[t, x]$. Každou přímku p v rovině, která není rovnoběžná s osou x, lze vyjádřit ve tvaru

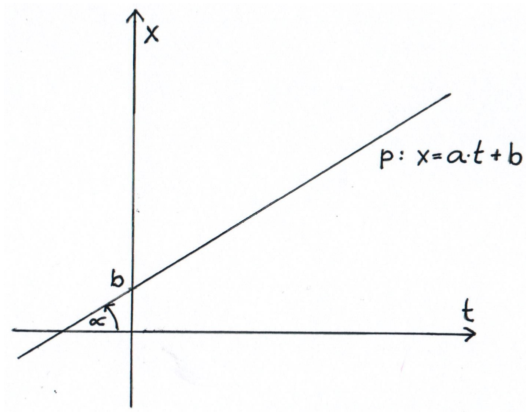
$$\boxed{x = a \cdot t + b},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$, bod $[0, b]$ je průsečík přímky p s osou x a $a = \text{tg } \alpha$. Hodnota a se nazývá **směrnice přímky** p; α je úhel, který svírá přímka p s kladným směrem osy t v kladném smyslu. Říkáme rovněž, že úhel α udává směr (nebo také sklon) přímky p vzhledem k soustavě souřadnic.

Vrátíme-li se k našemu popisu pohybu králíka, vidíme, že

$$\bar{v} = \frac{\triangle x}{\triangle t} = \frac{|AC|}{|BC|} = \text{tg } \alpha,$$

kde tg α je směrnice přímky p. Průměrná rychlost $\bar{v}$ pohybu králíka od okamžiku $t_1 = 1$ s do $t_2 = 4$ s je rovna směrnici sečny grafu zachycujícího pohyb králíka z obrázku 2.5, která prochází body $[t_1, x_1]$, $[t_2, x_2]$ ležícími na přímce p ve směrnicovém tvaru $p : x = 2 \cdot t - 6$. Z uvedeného je tedy patrno, že průměrná rychlost pohybu tělesa má svůj geometrický význam.



Obr. 2.7: Přímka ve směrnicovém tvaru $p : x = a \cdot t + b$.

Příklad 2.1 Nákladní dodávka jede po přímé silnici stálou rychlostí 86 km/h. Po ujetí 10,4 km náhle dojde palivo. Řidič pokračuje pěšky v původním směru. Po 27 minutách (= 0,45 h) dojde k čerpací stanici, vzdálené od odstavené dodávky 2,4 km. Jaká je průměrná rychlost řidiče od chvíle, kdy vyjel s dodávkou z výchozího místa až do okamžiku příchodu k čerpací stanici? Řešte výpočtem i graficky.

Řešení:

a) výpočtem: Při práci s vektorovou veličinou $\bar{v}$ si musíme nejprve uvědomit, který směr pohybu je kladný. Za kladný směr v tomto případě volíme směr jízdy. Celková dráha pohybu je 10,4 + 2,4 = 12,8 km. Celkový čas jízdy dodávky neznáme a určíme jej pomocí vztahu 2.2:

$$\triangle t = \frac{\triangle x}{\bar{v}} = \frac{10,4}{86} = 0,121\ h.$$

Celková doba cesty řidiče (jízdy i chůze) je tedy

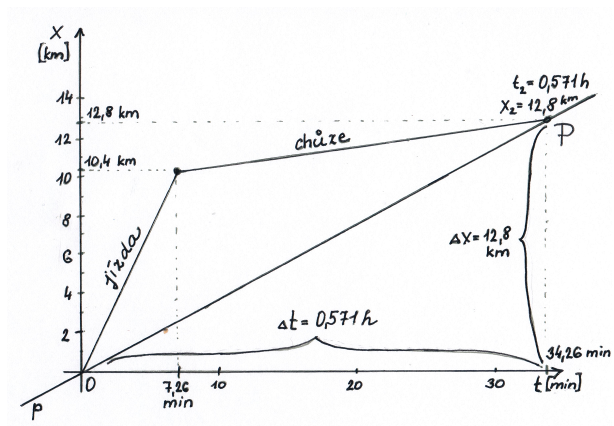
$$\triangle t = 0,121\ h + 0,45\ h = 0,571\ h.$$

Do rovnice 2.2 dosadíme hodnoty $\triangle x$ a $\triangle t$ a získáme průměrnou rychlost $\bar{v}$

$$\bar{v} = \frac{\triangle x}{\triangle t} = \frac{12,8\ km}{0,571\ h} = \underline{\underline{22,4\ km/h}}.$$

b) graficky: Počátek pohybu umístíme do počátku soustavy souřadnic $O = [0,0]$, tj. $t_1 = 0$, $x_1 = 0$, kdy směr pohybu dodávky bude kladný směr osy x, viz obrázek 2.8.

Poloha čerpací stanice na takto zvolené ose je $x_2 = 10,4\ km + 2,4\ km = 12,8\ km$. Pro zjištění průměrné rychlosti $\bar{v}$ narýsujeme graf funkce $x(t)$. Výchozí bod grafu splývá s počátkem a koncový bod je označen $P = [0,571\ h; 12,8\ km]$. Průměrná rychlost je směrnicí přímky procházející body O, P a má hodnotu $\bar{v} = \frac{12,8\ km}{0,571\ h} \doteq \underline{\underline{22,4\ km/h}}$.



Obr. 2.8: Grafické řešení příkladu 2.1.

Příklad 2.2 Návrat k dodávce trvá řidiči 35 minut. Musí nést nádobu s palivem, a proto jde pomaleji. Jaká je průměrná rychlost řidiče na celé trati od okamžiku výjezdu z výchozího místa až po návrat od čerpací stanice?

Řešení: Protože řidič se pěšky vracel v záporném směru pohybu, dostáváme

$$\triangle x = 10,4 - 0 = 10,4\ km,$$
$$\triangle t = 0,121 + 0,45 + 0,583 = 1,154\ h, \text{ tj.}$$
$$\bar{v} = \frac{10,4\ km}{1,154\ h} = \underline{\underline{9,01\ km/h}}.$$

Průměrná rychlost řidiče na celé trati je tedy $9,01\ km/h$.

Kontrola 2: Po doplnění paliva se dodávka vrací zpět do bodu, odkud vyjela, rychlostí $80\ km/h$. Jaká je průměrná rychlost na celé cestě? [$\triangle x = 0\ km$, tj. $\bar{v} = 0\ km/h$]

Kromě průměrné rychlosti v daném kladném směru se zavádí ještě **průměrná absolutní rychlost** $\bar{v}_{abs}$, která udává průměrnou rychlost bez ohledu na směr pohybu (tzn. dosazují se do ní jen nezáporné hodnoty):

$$\boxed{\bar{v}_{abs} = \frac{\text{délka celkové uražené dráhy}}{\text{délka celkové doby pohybu}}} \tag{2.3}$$

Příklad 2.3 Určete průměrnou absolutní rychlost z předchozích příkladů 2.1 a 2.2.

Řešení: Dosazením zadaných i získaných hodnot z příkladů 2.1 a 2.2 do vzorce 2.3 dostáváme

$\bar{v}_{abs} = \frac{10,4+2,4+2,4}{0,121+0,45+0,583} = \underline{\underline{13,17\ km/h}}.$

Všechny členy v čitateli i jmenovateli se při výpočtu $\bar{v}_{abs}$ uvažují s kladným znaménkem, tj. průměrná absolutní rychlost je vždy nezáporná.

Poznámka 2.2

1. Při výpočtech je důležité dosazovat odpovídající jednotky - např. počítáme-li rychlost v km/h, musíme dosazovat vzdálenosti v kilometrech a čas v hodinách.

2. Je důležité dobře číst z grafů - na vodorovnou osu jsme nanášeli čas (jeho hodnoty rostou směrem doprava), na svislou osu jsme nanášeli polohu hmotného bodu vzhledem k počátku soustavy souřadnic. Body grafu $[t, x]$ uvádějí, že v okamžiku t se sledovaný hmotný bod vyskytuje v poloze x.

2.4 Okamžitá rychlost

Vraťme se k našemu popisu pohybu králíka (obrázek 2.5). Budeme-li časový interval $\triangle t$, měřený od okamžiku t, zmenšovat bez omezení k nule, s poklesem hodnoty $\triangle t$ se bude průměrná rychlost $\bar{v}$ měřená v intervalu od t do $t + \triangle t$ blížit k jisté limitní hodnotě, která definuje rychlost v okamžiku t. Tuto rychlost nazýváme **okamžitou rychlostí** v, což je veličina, která udává, jak rychle a jakým směrem se králík pohybuje v daném okamžiku. Toto zkracování časového intervalu $\triangle t$ k nule se označuje jedním z následujících dvou zápisů:

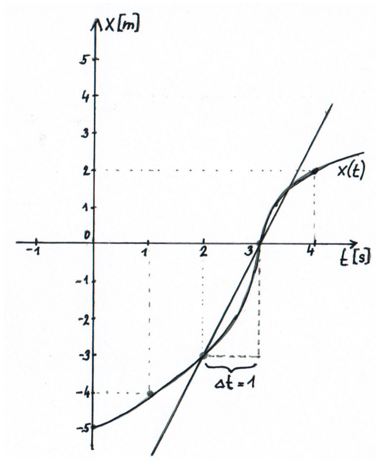
$$\boxed{v = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle x}{\triangle t} = \frac{dx(t)}{dt}} \tag{2.4}$$

Označení $\lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle x}{\triangle t}$ čteme: **limita** pro $\triangle t$ jdoucí k nule z výrazu $\frac{\triangle x}{\triangle t}$.
Označení $\frac{dx(t)}{dt}$ čteme: **derivace** funkce $x(t)$ vzhledem k proměnné t.

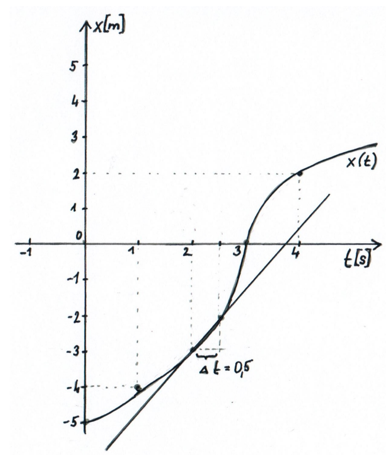
Poznámka 2.3 Chceme-li zjistit okamžitou rychlost králíka v čase $t = 2\ s$, sestrojujeme sečny protínající graf runkce $x(t)$ zachycující pohyb králíka v bodě $[2, x(2)]$ a $[2+\triangle t, x(2+\triangle t)]$ pro stále menší $\triangle t$ (viz obrázek 2.9 pro $\triangle t = 1$ a 2.10 $\triangle t = 0,5$).

Matematicky je okamžitá rychlost v čase t rovna směrnici tečny ke grafu funkce $x(t)$ v bodě $[t, x(t)]$ (viz obrázek 2.11). Pro $t = 2\ s$ je tedy $v(2) = \mathrm{tg}\ \alpha\ ms^{-1}$, kde α je úhel, který svírá tečna ke grafu funkce $x(t)$ s osou t. Popsanou situaci chápeme jako geometrický význam **derivace funkce** $x(t)$ pro $t = 2\ s$.

Derivace funkce $x(t)$ pro $t = 2\ s$ je tedy směrnicí tečny ke grafu funkce $x(t)$ v bodě $[2, x(2)]$, tedy $\frac{dx}{dt}(2) = v(2) = \mathrm{tg}\ \alpha$. Okamžitá rychlost králíka v čase $t = 2\ s$ je rovna derivaci funkce $x(t)$ pro $t = 2\ s$.

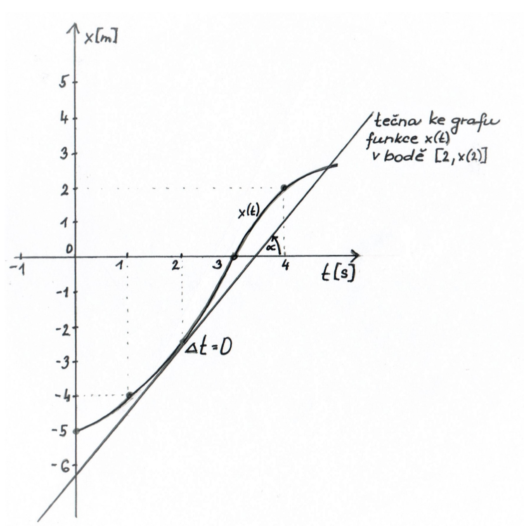


Obr. 2.9: Sečna a trojúhelník pro výpočet průměrné rychlosti na intervalu $\langle 2; 3\rangle$.



Obr. 2.10: Sečna a trojúhelník pro výpočet průměrné rychlosti na intervalu $\langle 2; 2{,}5\rangle$.

V následujícím textu uvedeme několik důležitých postřehů k pojmu derivace funkce. Pokud existuje k funkci $F(t)$ její derivace pro každé $t \in \mathbb{R}$ (viz obrázek 2.12), lze sestrojit tečnu ke grafu funkce $F(t)$ v bodě $[t, F(t)]$ pro každé t: $\frac{dF}{dt}(1) = \operatorname{tg} \alpha$, $\frac{dF}{dt}(2) = \operatorname{tg} \beta$; obecně tedy v každém bodě t: $\frac{dF}{dt}(t) = \operatorname{tg} \omega$.



Obr. 2.11: Tečna ke grafu funkce $x(t)$ v bodě $[2, x(2)]$.

Jinými slovy libovolné hodnotě $t \in \mathbb{R}$ lze k funkci $F(t)$ přiřadit derivaci $\frac{dF}{dt}(t)$. Toto přiřazení je rovněž funkce, označíme ji $f(t)$ a zapíšeme vztahem:

$$\boxed{f(t) = \frac{dF}{dt}(t)}.$$

Funkci $f(t)$ nazýváme **derivace** funkce $F(t)$. Ze souvislosti textu by mělo být vždy jasné, zda hovoříme o derivaci funkce pro jedinou hodnotu t (např. $\frac{dF}{dt}(t)$ v bodě $t = 2$) nebo máme na mysli celou funkci $\frac{dF}{dt}(t)$ (definovanou pro různé hodnoty proměnné $t \in \mathbb{R}$).

Proces, který pro funkci $F(t)$ najde její derivaci $f(t)$, se nazývá **derivování**. Opačný proces, který k funkci $f(t)$ najde funkci $F(t)$ tak, že $\frac{dF}{dt}(t) = f(t)$, se nazývá **integrování** (integrace). Zapisujeme

$$\boxed{F(t) = \int f(t)dt}$$

a říkáme, že funkce $F(t)$ je **neurčitý integrál** z funkce $f(t)$. Pro ilustraci je na obrázku 2.12 zakreslen vzájemný vztah mezi oběma procesy, tj. derivováním a integrováním.

Vraťme se nyní k pojmu derivace - při jejím výpočtu využíváme analytického zápisu vzorce s následujícím postupem: zapíšeme směrnici sečny $\frac{\triangle x}{\triangle t}$ ke grafu funkce $F(t)$. Hodnotu $\triangle t$ snižujeme až k nule a sledujeme, k jaké hodnotě se blíží celý podíl $\frac{\triangle x}{\triangle t}$. Tomuto procesu "přibližování" $\triangle t$ k jisté hodnotě, který byl již popsán výše, se říká limitní proces a nalezená hodnota se nazývá **limita** z výrazu $\frac{\triangle x}{\triangle t}$ pro $\triangle t$ jdoucí k nule.

Lze tedy konstatovat, že derivace funkce $x(t)$ pro $t = 2$ je rovna limitě směrnice sečny $\frac{\triangle x}{\triangle t}$ pro $\triangle t$ jdoucí k nule, tj. "sečna pro $\triangle t$ jdoucí k nule přešla v tečnu". Tedy

$$\frac{dx}{dt}(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle x}{\triangle t} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{x(t + \triangle t) - x(t)}{\triangle t},$$

kdy směrnice sečny je dána vztahem tg $\alpha = \frac{|AC|}{|BC|}$ viz obrázek 2.13.

Příklad 2.4 Vypočtěte derivaci funkce $x(t) = t^2$ v obecném bodě t.

Řešení:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}(t) &= \lim_{\triangle t \to 0} (\frac{x(t + \triangle t) - x(t)}{\triangle t}) = \lim_{\triangle t \to 0} (\frac{(t + \triangle t)^2 - t^2}{\triangle t}) = \\ &= \lim_{\triangle t \to 0} (\frac{t^2 + 2t \cdot \triangle t + (\triangle t)^2 - t^2}{\triangle t}) = \lim_{\triangle t \to 0} (2t + \triangle t) = 2t.\end{aligned}$$

Podobně by se spočítaly derivace následujících funkcí:

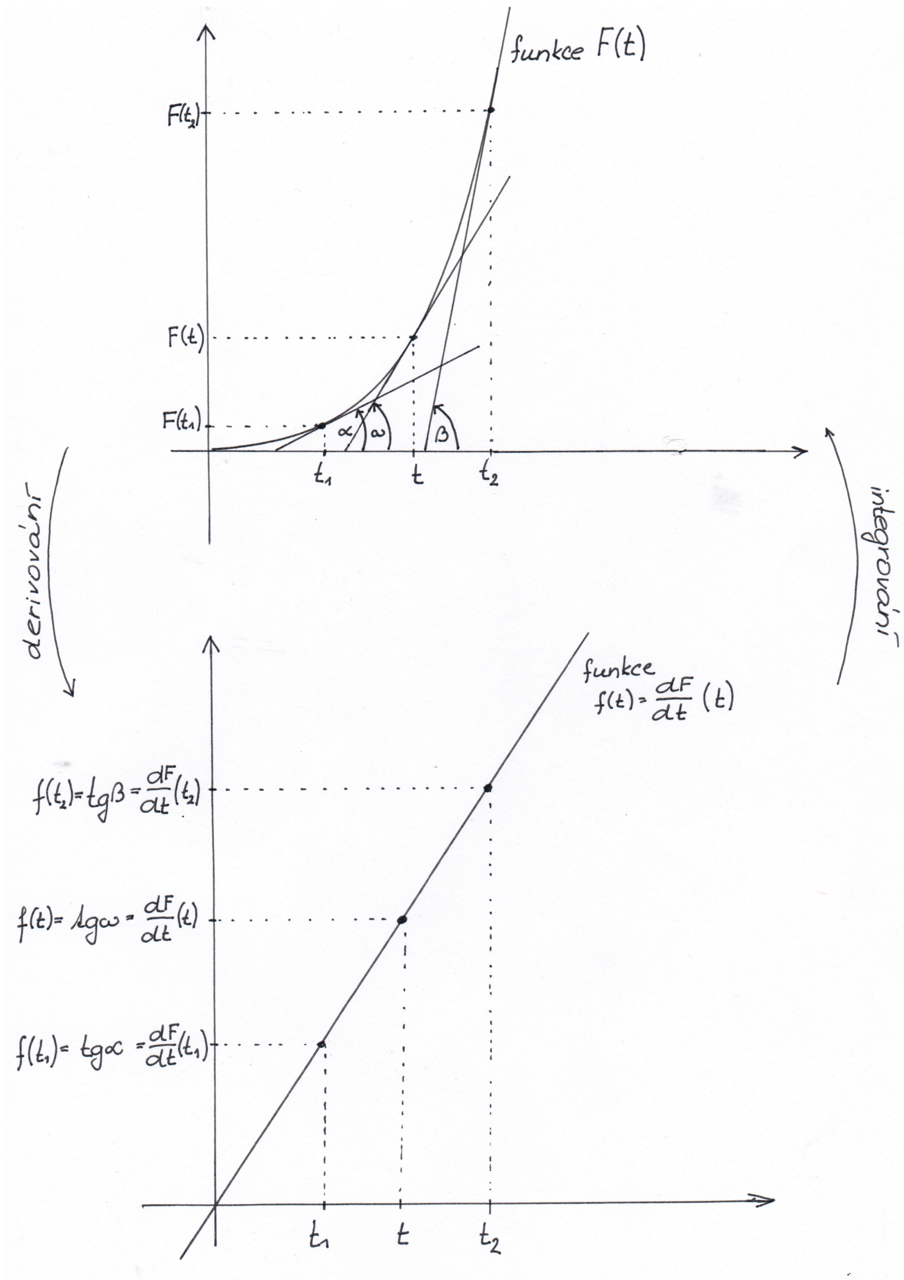
1. $x(t) = t^n$: $\boxed{\frac{d}{dt}(t^n) = n \cdot t^{n-1}}$ (D1)

2. $x(t) = c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta ($x(t) = c$ je konstantní funkce): $\boxed{\frac{d}{dt}(c) = 0}$ (D0)

tj. derivací konstanty je nula. Konstantu při derivování můžeme vytknout (před derivaci): $\boxed{\frac{d}{dt}(c \cdot x(t)) = c \cdot \frac{dx(t)}{dt}}$ (V1)

3. Součet funkcí derivujeme člen po členu:

$\boxed{\frac{d}{dt}(x(t) + y(t)) = \frac{dx(t)}{dt} + \frac{dy(t)}{dt}}$ (V2)

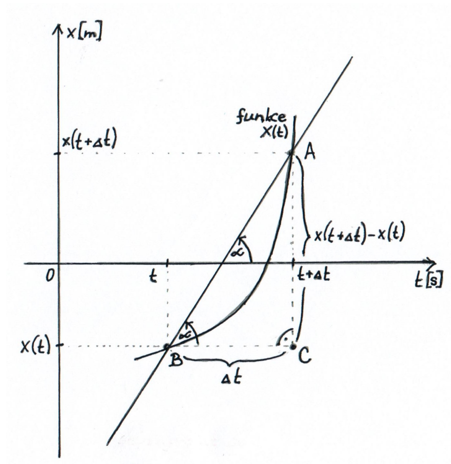


Obr. 2.12: Vztah mezi derivováním a integrováním.

Vzorce pro derivace dalších funkcí nebudeme vypisovat (lze je najít v tabulkách a budou uvedeny ve cvičení). Vzhledem k tomu, že integrování funkcí je proces opačný k derivování, vzorce pro integrování lze odvodit ze vzorců pro derivování, např.

$\boxed{\int t^{n-1} dt = \frac{t^n}{n} + c}$, kde $c \in \mathbb{R}$. (D1´)

V následujícím textu shrneme dosavadní matematické významy týkající se pojmu derivace:



Obr. 2.13: Okamžitá rychlost králíka - směrnice sečny grafu funkce $x(t)$.

1. Albebraický význam derivace: derivace je limita z jistého výrazu,

2. Geometrický význam derivace: derivace je tangens jistého úhlu (= směrnice tečny ke grafu dané funkce),

3. Fyzikální význam derivace: derivace je okamžitá rychlost změny jisté veličiny.

Příklad 2.5 Je dána funkce

$$x(t) = \begin{cases} 0 & : \quad t \leq 1 \\ t^2 - 2t + 1 & : \quad 1 < t \leq 3 \\ 4t & : \quad 3 < t \leq 8 \\ -2t^2 + 36t - 136 & : \quad 8 < t \leq 9 \end{cases}$$

udávající polohu kabiny výtahu v metrech. Kabina nejprve stojí v dolním patře, pak se začíná pohybovat vzhůru (v kladném směru svislé osy) a opět se zastaví. Nakreslete graf udávající závislost rychlosti $v(t)$ kabiny na čase t.

Řešení: Na obrázku 2.14 je zakreslen graf funkce $x(t)$ s krajními body zadaných intervalů:

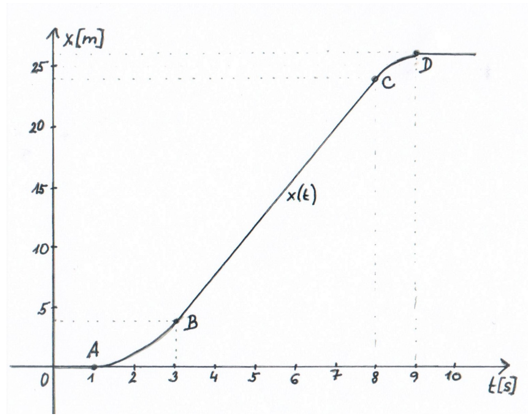
bod A: $x(1) = 0$,

bod B: $x(3) = 4$,

bod C: $x(8) = 24$,

bod D: $x(9) = 26$.

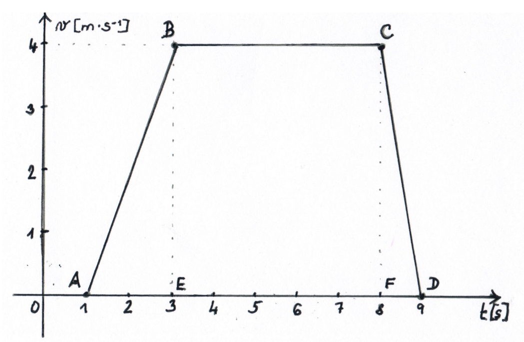
Podle výše popsané teorie lze rychlost $v(t)$ výtahu v okamžiku t spočítat jako derivaci dráhy $x(t)$ podle proměnné t:



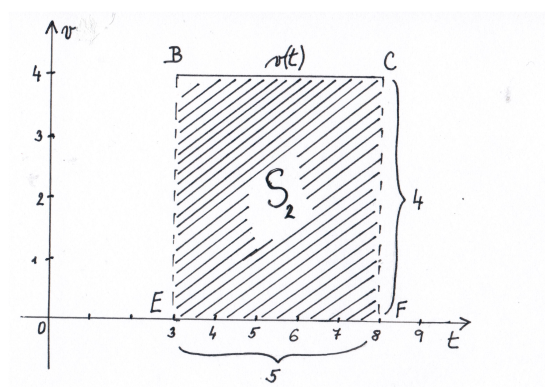
Obr. 2.14: Graf funkce $x(t)$ udávající polohu výtahu.

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \begin{cases} 0 & : \ t \leq 1, \\ 2t - 2 & : \ 1 < t \leq 3 \text{ rychlost roste,} \\ 4 & : \ 3 < t \leq 8 \text{ rychlost je konstantní,} \\ -4t + 36 & : \ 8 < t \leq 9 \text{ rychlost klesá.} \end{cases}$$

Závislost rychlosti $v(t)$ na čase t je zachycena na obrázku 2.15.



Obr. 2.15: Závislost rychlosti $v(t)$ na čase t.



Obr. 2.16: Situace na intervalu $\langle 3; 8\rangle$.

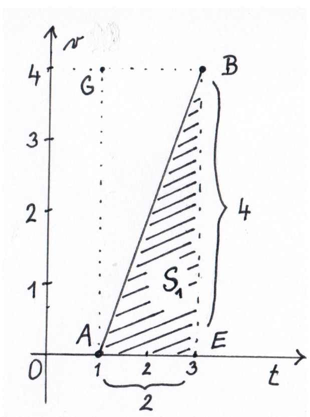
Kdybychom neznali funkci dráhy $x(t)$, ale znali funkci rychlosti $v(t)$, mohli bychom řešit "opačnou" úlohu, viz následující příklad 2.6:

Příklad 2.6 Jakou dráhu výtah urazí v okamžiku $t = 0$ s do okamžiku $t = 9$ s s ohledem na minulý příklad 2.5?

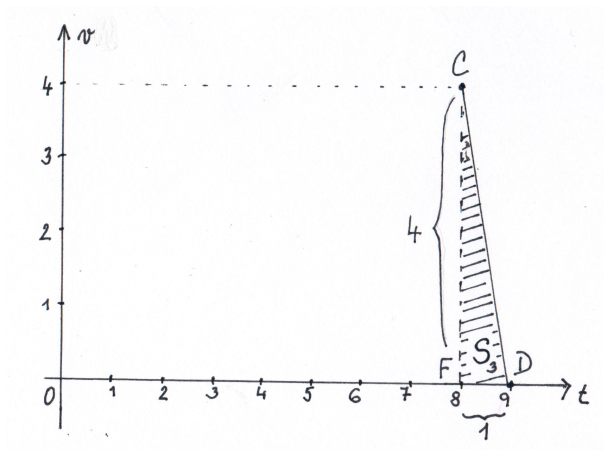
Řešení:

- situace na intervalu $\langle 0; 1\rangle$: vzhledem k tomu, že $v(t) = 0$, výtah zůstává na místě.

- situace na intervalu $\langle 3; 8\rangle$: výtah se zde pohybuje rychlostí $v(t) = 4\ ms^{-1}$ po dobu 5 sekund a urazí dráhu 20 m. V tomto případě stojí za povšimnutí, že velikost uražené dráhy výtahu je rovna velikosti obsahu S_2 obdélníka $EBCF$ viz obrázek 2.16 (velikost obsahu S_2 obdélníka $EBCF$ je rovna $4 \cdot 5 = 20\ m^2$).
- situace na intervalu $\langle 1; 3\rangle$: rychlost výtahu se rovnoměrně zvyšuje z hodnoty $v = 0\ ms^{-1}$ v čase $t = 1$ na hodnotu $v = 4\ ms^{-1}$ v čase $t = 3$. Ověříme, že velikost uražené dráhy výtahu je rovna velikosti obsahu S_1 pravoúhlého trojúhelníka AEB viz obrázek 2.17:



Obr. 2.17: Situace na intervalu $\langle 1; 3\rangle$.



Obr. 2.18: Situace na intervalu $\langle 8; 9\rangle$.

Velikost obsahu pravoúhlého trojúhelníka AEB je polovinou obsahu obdélníka $AEBG$, tj. $S_1 = \frac{1}{2}(2 \cdot 4) = 4\ m^2$, tzn. velikost uražené dráhy výtahu je rovna 4 m.

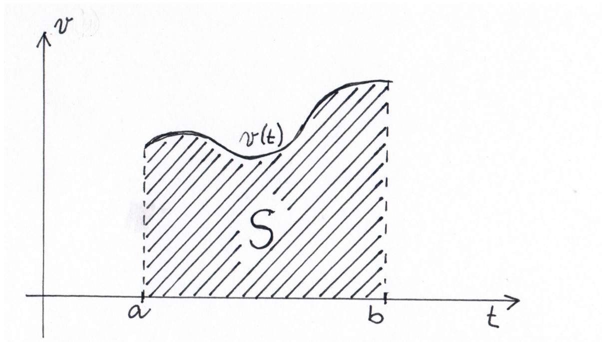
- situace na intervalu $\langle 8; 9\rangle$: rychlost výtahu $v = 4\ ms^{-1}$ se během jedné sekundy rovnoměrně zpomaluje na $v = 0\ ms^{-1}$. Uražená dráha výtahu činí 2 m, což je opět velikost obsahu S_3 pravoúhlého trojúhelníka CFD viz obrázek 2.18 ($S_3 = \frac{1}{2}(1 \cdot 4) = 2\ m^2$).
- Součtem velikostí obsahů jednotlivých útvarů získáme: $S_1 + S_2 + S_3 = 4 + 20 + 2 = \underline{\underline{26\ m^2}}$. Celkem tedy uražená dráha výtahu je rovna 26 m.

Nabízí se otázka, jak by se spočítal obsah S vybarveného útvaru na obrázku 2.19 (útvar omezený grafem funkce $v(t)$, osou t a přímkami $t = a$, $t = b$), kdyby funkce $v(t)$ byla složitější.

Tento obsah S označujeme symbolem $\int_a^b v(t)dt$, jenž udává dráhu uraženou od okamžiku $t_1 = a$ do okamžiku $t_2 = b$. Symbol $\int_a^b v(t)dt$ nazýváme **určitý integrál** z funkce $v(t)$ v mezích od a do b.

V následujícím textu budeme uvažovat určitý integrál z funkce $f(x)$, která je spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a; b\rangle$, tj. $0 \leq f(x)$ pro každé $x \in \langle a; b\rangle$[2].

[2]Připomeňme několik základních pojmů diferenciálního a integrálního počtu:



Obr. 2.19: Závislost rychlosti $v(t)$ na čase t.

Určitý integrál ze spojité a nezáporné funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a; b\rangle$ pak určíme jako limitu výrazu:

$$\boxed{V_{\triangle}(a,b) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1})},$$

kde

$\triangle = \frac{b-a}{n}$ je délka každého z intervalů $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$, na které rozdělíme interval $\langle a; b\rangle$ pro $i = 1, ..., n$,

Body $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + \triangle$, $x_2 = x_0 + 2\triangle$, …, $x_n = b$ nazýváme dělicí body intervalu $\langle a; b\rangle$,

$c_i \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle$ je libovolně zvolený bod z každého příslušného intervalu.

S ohledem na obrázek 2.20 tedy platí:

$\triangle = x_i - x_{i-1}$ pro $i = 1, ..., n$,

$f(c_i)$ … výška i-tého obdélníku s délkou $\triangle$,

$f(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$ … obsah i-tého obdélníku,

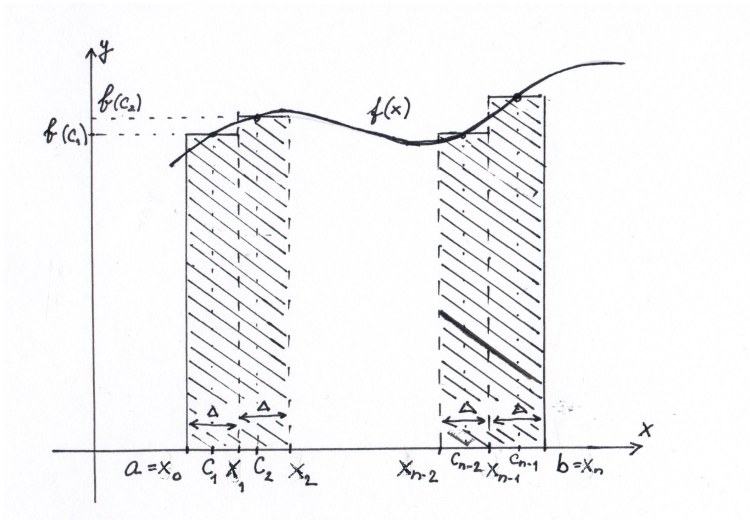
$\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$ … součet obsahů všech n obdélníků.

---

1. Funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a; b\rangle$, pokud je spojitá v každém bodě $x_0 \in (a; b)$ a v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva. (Jednoduše řečeno, grafem spojité funkce na intervalu $\langle a; b\rangle$ je "nepřerušená" křivka, tj. křivka, kterou lze nakreslit do obrázku jedním tahem.)

2. Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě a, jestliže k libovolně zvolenému okolí bodu $f(a)$ existuje takové okolí bodu a, že pro všechna x_0 z tohoto okolí bodu a patří hodnoty $f(x_0)$ do zvoleného okolí bodu $f(a)$.

3. Okolím bodu a rozumíme interval $(a - \delta; a + \delta)$, kde $\delta \in \mathbb{R}$ a $\delta > 0$.



Obr. 2.20: Obsah útvaru omezeného osou x, přímkami $x = a$, $x = b$ a grafem funkce $f(x)$.

Určitým Riemannovým integrálem z funkce $f(x)$ **na intervalu** $\langle a; b\rangle$ nazveme limitu

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx,$$

pokud tato limita existuje a nezávisí na výběru reprezentantů c_i z intervalů $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$.

Zobecnění geometrického názoru: výraz $\int_a^b f(x)dx$ udává obsah útvaru, který je ohraničen přímkami $x = a$, $x = b$ a grafy funkcí $f(x)$, $g(x)$, kde $f(x)$ je nezáporná funkce a $g(x) = 0$ na intervalu $\langle a; b\rangle$. Obecně $g(x)$ může být libovolná Riemanovsky integrovatelná funkce tak, že platí:

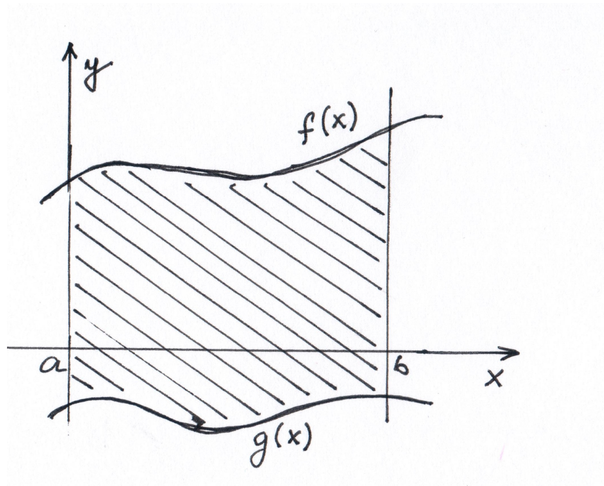
$$g(x) \leq f(x)$$

pro $x \in \langle a; b\rangle$. Pak obsah útvaru omezeného přímkami $x = a$, $x = b$ a grafy funkcí $f(x)$, $g(x)$ je roven určitému integrálu $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$ viz obrázek 2.21 (výška i-tého obdélníčku při odvození není rovna $f(c_i)$, ale je rovna hodnotě $f(c_i) - g(c_i)$).

V 17. století pánové Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz objevili vztah mezi určitým integrálem a teorií derivací:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dt = F(b) - F(a)}, \tag{2.5}$$

kde $\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$, resp. $F(x) = \int f(x)dx$. Tento vztah se nazývá **Newton-Leibnizova formule**. Tato formule říká, že změnu veličiny F lze určit jako určitý integrál (= obsah



Obr. 2.21: Obsah útvaru omezeného přímkami $x = a$, $x = b$ a grafy funkcí $f(x)$ a $g(x)$.

plochy rovinného útvaru) funkce f, která je její derivací (toto platí, pokud funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a; b\rangle$). Díky této formuli (= vzorci) můžeme počítat jako obsah plochy nejen změnu polohy $x(t)$, ale změnu jakékoli veličiny, pokud známe její derivaci.

K pojmu určitého integrálu shrnujeme:

1. Algebraický význam určitého integrálu: zápis $\int_a^b f(x)dx$ představuje limitu z jistého výrazu ("součet nekonečně mnoha nekonečně malých veličin"),

2. Geometrický význam určitého integrálu: zápis $\int_a^b f(x)dx$ představuje obsah plochy rovinného útvaru, který je ohraničen přímkami $x = a$, $x = b$, grafem funkce $f(x)$ a osou x,

3. Fyzikální význam určitého integrálu: zápis $\int_a^b v(t)dt = x(b) - x(a)$ značí integrál z rychlosti $v(t)$ změny veličiny $x(t)$ a je roven rozdílu hodnot veličiny $x(t)$ v okamžicích $t_2 = b$ a $t_1 = a$.

Vraťme se nyní k příkladu 2.5. Kdybychom znali rychlost $v(t)$, ale neznali polohu $x(t)$, byli bychom schopni počítat rozdíly polohy $x(b) - x(a)$ pro různé časové intervaly $\langle a; b\rangle$, ale nemůžeme nakreslit graf polohy $x(t)$. Ke konstrukci grafu $x(t)$ potřebujeme znát kromě $v(t)$ ještě přesnou polohu $x(t)$ v alespoň jednom bodě t (zpravidla $t = 0$). Pak

$$\boxed{x(t) = x(0) + \int_0^t v(u)du}, \tag{2.6}$$

kde $x(t)$ je poloha v obecném čase t, $x(0)$ je poloha v čase $t = 0$ a $\int_0^t v(u)du$ je posun (= změna) polohy mezi okamžikem $t = 0$ a obecným okamžikem t. Jedná se vlastně o Newton-Leibnizův vzorec 2.5, kde $x(0)$ je převedeno na opačnou stranu rovnosti.

Příklad 2.7 Poloha hmotného bodu, který se pohybuje po ose x, je dána vztahem

$$x(t) = 7,8 + 9,2t - 2,1t^3.$$

Určete jeho rychlost v okamžiku $t = 3,5\ s$. Je jeho rychlost stálá nebo se spojitě mění?

Řešení: Vyjádřeme rychlost $v(t)$ podle vztahu 2.4 jako derivaci polohy $x(t)$:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 0 + 9,2 - 2,1 \cdot 3 \cdot t^2 = 9,2 - 6,3 \cdot t^2.$$

Vidíme, že ve vztahu $v(t) = 9,2 - 6,3 \cdot t^2$ se vyskytuje proměnná t, tedy rychlost $v(t)$ se mění v závislosti na parametru t. V okamžiku $t = 3,5\ s$ se hmotný bod pohybuje rychlostí

$$v(3,5) = 9,2 - 6,3 \cdot 3,5^2 \doteq \underline{\underline{-68\ ms^{-1}}}.$$

Záporné znaménko výsledku naznačuje, že pohyb hmotného bodu se děje v záporném směru osy x.

Kontrola 3: Pro $t > 0$ je poloha částice dána vztahem

a) $x = 3t - 2$ metrů
b) $x = -4t^2 - 2$ metrů
c) $x = \frac{2}{t^2}$ metrů
d) $x = -2$ metrů

Čas t je zadán v sekundách. Ve kterém z uvedených případů je rychlost hmotného bodu

1) konstantní?

2) záporná?

3) kdy se pohyb hmotného bodu zpomaluje?

2.5 Zrychlení

Pokud se mění rychlost hmotného bodu, říkáme, že dochází ke **zrychlení**. Můžeme tak hovořit o zrychlení průměrném a okamžitém.

Průměrné zrychlení $\bar{a}(t)$ (označení pro zrychlení je převzato z anglického *acceleration* = zrychlení) za časový interval $\triangle t$ je dáno vztahem:

$$\boxed{\bar{a}(t) = \frac{\triangle v(t)}{\triangle t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}} \tag{2.7}$$

Okamžité zrychlení $a(t)$ v okamžiku t se opět získá jako směrnice tečny (derivace) vztahem

$$\boxed{a(t) = \frac{dv(t)}{dt}} \tag{2.8}$$

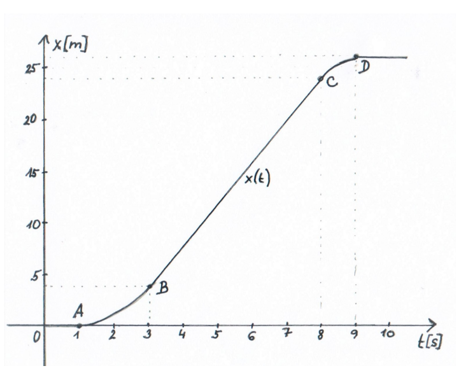
Spojením rovnic 2.4 a 2.8 dostáváme vztah mezi zrychlením $a(t)$ a polohou $x(t)$:

$$\boxed{a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}} \tag{2.9}$$

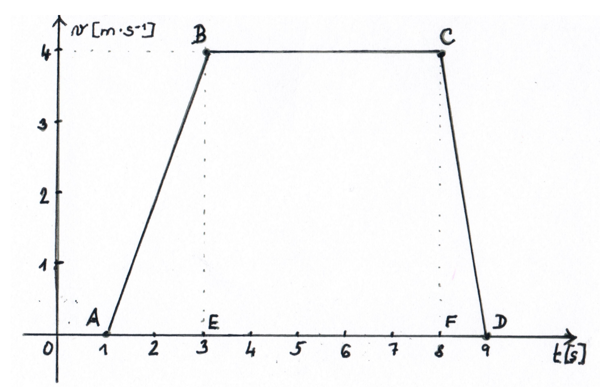
Zrychlení (okamžité) hmotného bodu je dáno druhou derivací polohy $x(t)$ podle času. Jednotkou zrychlení je $\frac{m \cdot s^{-1}}{s} = m \cdot s^{-2}$ (čti: metr sekunda na méně druhou). Tuto jednotku lze převádět i do jiných rozměrů, ale vždy se jedná o "délku $\times$ čas^{-2}" (např. $km \cdot h^{-2}$).

Vraťme se k příkladu 2.5 pohybu výtahu a přemýšlejme zde o zrychlení. Pro názornost si zopakujme jednotlivé grafy polohy $x(t)$ a rychlosti $v(t)$. Z obrázku 2.22 jsou zřejmé hodnoty polohy $x(t)$ v bodech A, B, C, D:

- bod A: $x(1) = 0\ m$,
- bod B: $x(3) = 4\ m$,
- bod C: $x(8) = 24\ m$,
- bod D: $x(9) = 26\ m$.



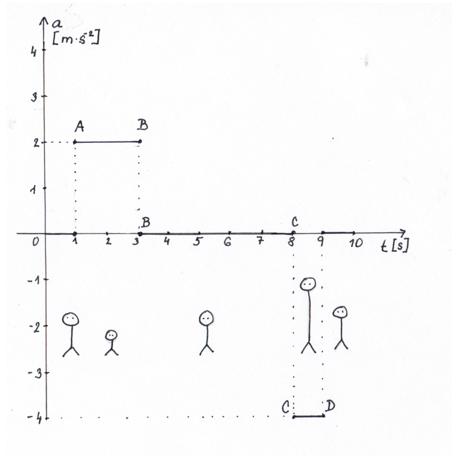
Obr. 2.22: Závislost polohy $x(t)$ na čase t.



Obr. 2.23: Závislost rychlosti $v(t)$ na čase t.

Z obrázku 2.23 jsou zřejmé hodnoty rychlosti $v(t)$ v jednotlivých úsecích:

- úsek AB: rychlost $v(t)$ roste,
- úsek BC: rychlost $v(t)$ je konstantní; $v(t) = 4\ ms^{-1}$,
- úsek CD: rychlost $v(t)$ klesá.



Obr. 2.24: Závislost zrychlení $a(t)$ na čase t.

Z obrázku 2.24 vidíme, že pro zrychlení $a(t)$ v jednotlivých úsecích platí:

- úsek AB: za 1 sekundu výtah zrychlil z 0 ms^{-1} na 2 ms^{-1}, tj. $a(t) = 2\ ms^{-2}$,
- úsek BC: rychlost je konstantní, tj. $a(t) = 0\ ms^{-2}$,
- úsek CD: za 1 sekundu výtah zpomalil z rychlosti 4 ms^{-1} na 0 ms^{-1}, tj. $a(t) = -4$ ms^{-2} (říkáme, že zrychlení je záporné).

Jak výmluvně napovídají postavičky na obrázku 2.24, v úseku AB jsme ve výtahu "tlačeni k zemi", v úseku CD "máme žaludek v krku". Pokud se výtah pohybuje konstatní rychlostí (úsek BC), nic zvláštního nepociťujeme. Na bezprostřední prožívání člověka působí zrychlení, nikoli rychlost - například při jízdě autem stálou rychlostí 90 km/h nebo letadlem stálou rychlostí 900 km/h si naše tělo pohyb vůbec neuvědomuje.

Zrychlení někdy vyjadřujeme v tzv. jednotkách "g", kde:

$$\boxed{1\ g = 9,80665\ ms^{-2} \doteq 9,8\ ms^{-2}}. \tag{2.10}$$

Jednotka 1 g (pravděpodobně z anglického *gravitation* = gravitace) je tzv. **normální tíhové zrychlení**, což udává rychlost tělesa volně padajícího v blízkosti zemského povrchu (v severní zeměpisné šířce 45° na úrovni mořské hladiny)[3].

Příklad 2.8 [4]

a) Kitty O´Neilová vytvořila rekord v závodech dragsterů, když dosáhla nejvyšší rychlosti 628,85 km/h v nejkratším čase 3,72 s. Jaké bylo průměrné zrychlení jejího auta?

[3] Jednotka 1 g přijata na 2. generální konferenci pro váhy a míry v roce 1901.

[4] Jedná se o motivační úlohu z počátku kapitoly 2.

b) Jaké bylo průměrné zrychlení saní Eliho Beedinga ml., který dosáhl rychlosti 116 km/h za 0,04 s?

Řešení:

a) Dosazením zadaných hodnot do vztahu 2.7 získáme rovnost

$$\bar{a} = \frac{\triangle v}{\triangle t} = \frac{(628,85 - 0)\ km/h}{(3,72 - 0)\ s} = \frac{174,68\ ms^{-1}}{3,72\ s} = \underline{\underline{47\ ms^{-2} \doteq 4,8\ g}}$$

Průměrné zrychlení auta Kitty O´Neilové bylo přibližně 4,8 g.

b) Dosazením zadaných hodnot do vztahu 2.7 získáme rovnost

$$\bar{a} = \frac{\triangle v}{\triangle t} = \frac{116\ km/h}{0,04\ s} = \frac{32,22\ ms^{-1}}{0,04\ s} = \underline{\underline{806\ ms^{-2} \doteq 82,1\ g}}$$

Průměrné zrychlení saní Eliho Beedinga ml. bylo 82,1 g.

Protože lidské tělo vnímá zrychlení, nikoli rychlost, mnohem větším výkonem je zrychlení 82,1 g Eliho, i když dosáhl menší rychlosti (kdyby zrychlení, kterému byl vystaven, trvalo delší dobu, bylo by smrtelné).

Mohlo by se zdát, že když je $a(t)$ kladné, tak těleso zrychluje, a když je záporné, tak zpomaluje. Ale to vždy nemusí být pravda. Pokud je například $v(t)$ záporné (těleso se pohybuje v záporném směru osy x) a $a(t)$ také záporné, znamená to, že těleso se stále rychleji pohybuje v záporném směru osy x.

Správnou interpretaci znaménka zrychlení lze tedy shrnout v následující poučce:

- Pokud mají hodnoty veličin $v(t)$, $a(t)$ stejná znaménka, těleso v čase t zrychluje.
- Pokud mají hodnoty veličin $v(t)$, $a(t)$ různá znaménka, těleso v čase t zpomaluje.

Kontrola 4: Pes běží podél osy x. Jaké znaménko má jeho zrychlení, pohybuje-li se pes

a) v kladném směru osy x a zrychluje?

b) v kladném směru osy x a zpomaluje?

c) v záporném směru osy x a zrychluje?

d) v záporném směru osy x a zpomaluje?

Příklad 2.9 Poloha částice pohybující se podél osy x je dána vztahem $x(t) = 4 - 27t + t^3$ metrů.

a) Určete $v(t)$, $a(t)$.

b) Je v některém okamžiku rychlost částice nulová?

c) Popište pohyb částice pro $t \geq 0$.

Řešení:

a) Vyjádřeme rychlost $v(t)$ podle vztahu 2.4 jako derivaci polohy $x(t)$:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \underline{\underline{-27 + 3t^2\ ms^{-1}}}.$$

Vyjádřeme zrychlení $a(t)$ podle vztahu 2.8 jako druhou derivaci polohy $x(t)$:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \underline{\underline{6t\ ms^{-2}}}.$$

b) Položíme výslednou rovnost z bodu a) rovnu nule:

$$\begin{aligned} -27 + 3t^2 &= 0 \\ 3t^2 &= 27 \\ t &= \pm 3 \ldots \text{ rychlost částice je nulová pro } t = -3 \text{ a pro } t = 3. \end{aligned}$$

c) Proveďme rozbor závislosti $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$:

- časový okamžik $t = 0\ s$:
  poloha částice v daném časovém okamžiku je $x(0) = 4\ m$,
  $v(0) = -27\ ms^{-1}$ … částice se pohybuje v záporném směru,
  $a(0) = 0\ ms^{-2}$ … zrychlení částice je nulové.
- časový interval $0\ s < t < 3\ s$, dosaďme například $t = 2$ sekundy:
  $x(2) = -42\ m$,
  $v(2) = -27 + 3 \cdot 2^2 = -15\ ms^{-1}$,
  $a(2) = 6 \cdot 2 = 12\ ms^{-2}$.
  V tomto časovém intervalu se částice stále pohybuje v záporném směru, avšak zpomaluje ($v(t)$, $a(t)$ mají rozdílná znaménka).
- okamžik $t = 3\ s$: v b) jsme určili, že $v(3) = 0$, tj. částice má nulovou rychlost.
  $x(3) = -50\ m$ … částice právě dosáhla nejvzdálenějšího bodu v záporném směru,
  $a(3) = 18\ ms^{-2}$ … zrychlení částice je kladné a roste.
- okamžik $t > 3$: $v(t)$ i $a(t)$ jsou kladné a rostou, částice se stále rychleji pohybuje v kladném směru osy x.

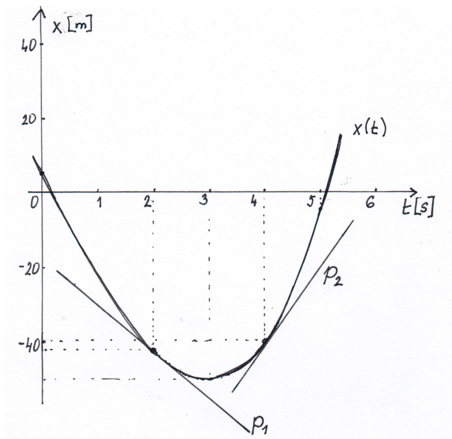
Pro naši představu lze nakreslit grafy funkcí $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$ viz obrázky 2.25, 2.26, 2.27.

Poznámka 2.4

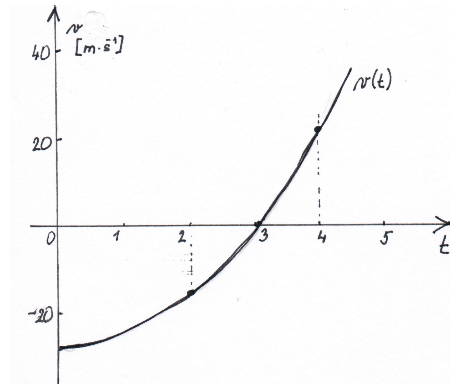
a) pro $t = 2\ s$ je tečna p_1 ke grafu $x(t)$ klesající $\Rightarrow$ $v(2)$ je záporná (viz obrázek 2.25),

b) pro $t = 4\ s$ je tečna p_2 ke grafu $x(t)$ rostoucí $\Rightarrow$ $v(4)$ je kladná (viz obrázek 2.25),

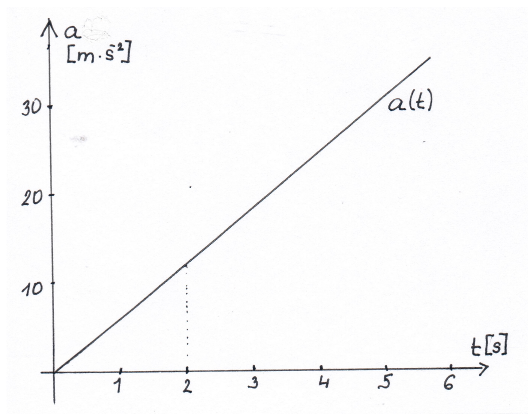
c) zrychlení $a(t)$ stále roste; nejprve to vede ke zpomalování pohybu částice v záporném směru, pak ke zrychlujícímu se pohybu v kladném směru.



Obr. 2.25: Graf funkce $x(t)$.



Obr. 2.26: Graf funkce $v(t)$.



Obr. 2.27: Graf funkce $a(t)$.

2.6 Pohyb rovnoměrně zrychlený/zpomalený - klasické odvození

O rovnoměrně zrychleném (zpomaleném) pohybu jsem se už zmínili v příkladu 2.5, kde výtah při rozjíždění rovnoměrně zrychloval, resp. při zastavování rovnoměrně zpomaloval (zrychlení zde nabývalo kladné, resp. záporné hodnoty).

Odvodíme nyní obecně rovnice pro rychlost $v(t)$ a polohu $x(t)$ tělesa při rovnoměrně zrychleném pohybu. Vyjdeme z následujícího označení:

x_0	…	poloha tělesa v čase $t = 0\ s$,
v_0	…	rychlost tělesa v čase $t = 0\ s$,
$x(t)$	…	poloha tělesa v obecném čase t,
$v(t)$	…	rychlost tělesa v obecném okamžiku t,
t	…	obecný časový okamžik ($t > 0$),
a	…	zrychlení (zpomalení), které je v časovém intervalu $\langle 0, t\rangle$ konstantní.

Klasický postup odvození vztahů pro veličiny $x(t)$, $v(t)$:

1) Při rovnoměrně zrychleném pohybu je okamžité zrychlení rovno průměrnému zrychlení, tj. přepsáním vzorce 2.7 získáme vztah:

$$a = \frac{v(t) - v_0}{t - 0},$$

ze kterého vyjádříme $v(t)$:

$$\boxed{v(t) = v_0 + a \cdot t}. \tag{2.11}$$

2) Vztah 2.2 pro průměrnou rychlost má při našem označení tvar

$$\bar{v} = \frac{x(t) - x_0}{t - 0},$$

odkud vyjádříme $x(t)$:

$$\boxed{x(t) = x_0 + \bar{v} \cdot t}. \tag{2.12}$$

3) Z rovnice 2.11 je vidět, že grafem funkce $v(t) = v_0 + a \cdot t$ je přímka (v_0, a jsou konstanty; rychlost rovnoměrně roste) $\Rightarrow$ v takovém případě pro průměrnou rychlost $\bar{v}$ na daném intervalu platí, že ji získáme jako průměr počáteční a koncové rychlosti časového intervalu $\langle 0, t \rangle$:

$$\boxed{\bar{v} = \tfrac{v_0 + v(t)}{2}}. \tag{2.13}$$

4) Pokud do 2.13 dosadíme za $v(t)$ ze vztahu 2.11, dostáváme

$$\boxed{\bar{v} = \tfrac{v_0}{2} + \tfrac{1}{2}(v_0 + a \cdot t) = v_0 + \tfrac{1}{2} a \cdot t}. \tag{2.14}$$

5) A konečně do 2.12 dosadíme za $\bar{v}$ ze vztahu 2.14 a získáme

$$x(t) = x_0 + (v_0 + \frac{1}{2} a \cdot t) \cdot t,$$

což lze psát ve tvaru

$$\boxed{x(t) - x_0 = v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} a \cdot t^2}. \tag{2.15}$$

Shrnutí: Pro lepší orientaci v odvozování výše uvedených vztahů je potřeba si uvědomit, že naším cílem bylo získat:

- rovnici 2.11 ... vztah pro rychlost $v(t)$,
- rovnici 2.15 ... vztah pro polohu $x(t)$.

Tyto dvě rovnice obsahují veškeré dostupné informace o rovnoměrně zrychleném přímočarém pohybu.

Poznámka 2.5 Je zajímavé, že vztah 2.11 získáme jako derivací vztahu 2.15, tj. rychlost $v(t)$ je derivací polohy $x(t)$.

2.7 Pohyb rovnoměrně zrychlený - odvození pomocí diferenciálního a integrálního počtu

Postup odvození vztahů pro rovnoměrně zrychlený pohyb:

1. Vyjdeme z definičního vztahu 2.8 pro zrychlení $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$. Tento vztah zintegrujeme od nuly do t podle Newton-Leibnizovy formule 2.5:

$$\int_0^t a(t)dt = \int_0^t dv(t).$$

a) Při rovnoměrně zrychleném pohybu je zrychlení $a(t)$ rovno konstantě a, kterou můžeme vytknout před integrál:

$$a \cdot \int_0^t dt = \int_0^t dv(t).$$

b) Integrací získáme:

$$a \cdot (t - 0) = v(t) - v_0.$$

- pro součin $a \cdot (t - 0)$ na levé straně výše uvedené rovnosti platí:
  $\int 1 = \int t^0 = \frac{t^1}{1} = t$ ... viz vzorec (D1´).
  Podle Newton - Leibnizovy formule 2.5 platí:
  $\int_0^t dt = t - 0.$
- pro rozdíl $v(t) - v_0$ na pravé straně výše uvedené rovnosti platí: integrál a derivace se navzájem "vyruší", protože to jsou inverzní operace:
  $\int dv(t) = v(t).$
  Podle Newton - Leibnizovy formule 2.5 platí:
  $\int_0^t dv(t) = v(t) - v(0)$, kde $v(0) = v_0$ dle našeho označení.

Získáváme tedy

$$\boxed{v(t) = v_0 + a \cdot t},$$

což je vztah 2.11.

2. Vyjdeme z definičního vztahu 2.4 pro rychlost: $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, který zintegrujeme od 0 do t:

   a) Nejprve dosadíme ze vztahu 2.11 za $v(t)$, získáme:

   $$v_0 + a \cdot t = \frac{dx(t)}{dt}.$$

   Tento vztah zintegrujeme od 0 do t:

   $$\int_0^t (v_0 + a \cdot t)dt = \int_0^t dx(t).$$

   b) Integrací dostáváme:

   $$v_0 \cdot \int_0^t dt + a \cdot \int_0^t tdt = \int_0^t dx(t),$$

   - kde $\int tdt = \int t^1 dt = \frac{t^2}{2}$ podle vzorce (D1´) ,
   - $\int_0^t dx(t)$ - derivace a integrál se navzájem "vyruší".

   Následně získáme

   $$v_0 \cdot (t - 0) + a \cdot (\frac{t^2}{2} - \frac{0^2}{2}) = x(t) - x_0,$$

   úpravou pak

   $$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}.$$

   Dospěli jsme tak ke vztahu 2.15.

   Z výše uvedeného je patrno, že jsme odvodili tytéž vztahy 2.11 a 2.15 jako v oddílu 2.6.

Kontrola 5: Které z funkcí popisují polohu při pohybu rovnoměrně zrychleném?

a) $x(t) = 3t - 4$,

b) $x(t) = -5t^3 + 4t^2 + 6$,

c) $x(t) = \frac{2}{t^2}3t - \frac{4}{t}$,

d) $x(t) = 5t^2 - 3$.

Pro popis polohy $x(t)$ a rychlosti $v(t)$ rovnoměrně zrychleného pohybu jsou tedy důležité rovnice 2.11 a 2.15. V těchto rovnicích se vyskytují následující hodnoty:

$$x(t), x_0, v_0, v(t), t, a.$$

Abychom byli schopni spočítat konkrétní příklad, musíme čtyři z těchto hodnot znát - po dosazení do 2.11 a 2.15 pak dostaneme dvě rovnice o dvou neznámých, které vyřešíme.

Příklad 2.10

a) Řidič spatří policejní vůz a začne brzdit. Na dráze 88 m zpomalí z rychlosti 75 km/h na rychlost 45 km/h. Určete konstantu zrychlení (resp. zpomalení) automobilu a dobu brzdění, pokud brzdění bylo rovnoměrné.

b) Řidič dále brzdí se stejným zrychlením $a = -1,58\ ms^{-2}$. Za jak dlouho od začátku brzdění se automobil zcela zastaví a jakou celkovou dráhu od začátku brzdění ujede do úplného zastavení?

c) Při další jízdě řidič opět potřebuje zastavit. Zpomaluje s konstantním zrychlením $a = -1,58\ ms^2$ a úplně zastaví na dráze 200 m. Počáteční rychlost v_0 neznáme. Jak dlouho trvalo brzdění?

Řešení:

a) Známe

$v_0 = 75\ kmh^{-1} = 20,83\ ms^{-1}$,

$v(t) = 45\ kmh^{-1} = 12,5\ ms^{-1}$,

$x_0 = 0\ m$ … počátek soustavy souřadnic umístíme do okamžiku, kdy auto začalo brzdit,

$x(t) = 88\ m$.

Známé hodnoty dosadíme do rovnic 2.11 a 2.15:

$$12,5 = 20,83 + a \cdot t,$$
$$88 = 0 + 20,83 \cdot t + \tfrac{1}{2} a \cdot t^2.$$

Tyto dvě rovnice o dvou neznámých a, t vyřešíme například tak, že z první rovnice vyjádříme proměnnou a:

$$a = \frac{12,5-20,83}{t} = \frac{-8,33}{t}.$$

Vyjádřenou proměnnou a nyní dosadíme do druhé rovnice a získáme rovnici o jedné neznámé t, kterou následně vyřešíme:

$$88 = 0 + 20,83 \cdot t + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{-8,33}{\cancel{t}} \cdot t^{\cancel{2}}.$$

$$88 = t(20,83 - \tfrac{8,33}{2})$$

$$88 = t \cdot 16,665$$

$$\underline{\underline{t = 5,28\ s}}$$

Zpětně vypočteme zrychlení a: $a = \frac{-8,33}{t} = \frac{-8,33}{5,28} \doteq \underline{\underline{-1,58\ ms^{-2}}}$.
Automobil při konstantním zrychlení $a = -1,58\ ms^{-2}$ snížil rychlost ze 75 km/h na 45 km/h za 5,28 s.

b) Známe

$x_0 = 0 \ldots$ stejný jako v bodě a),

$v_0 = 75\ kmh^{-1} = 20,83\ ms^{-1}$,

$v(t) = 0\ ms^{-1} \ldots$ řidič zcela zastaví,

$a = -1,58\ ms^{-2}$.

Známé hodnoty dosadíme do rovnic 2.11 a 2.15:

$$0 = 20,83 - 1,58 \cdot t$$

$$x(t) = 0 + 20,83 \cdot t - \tfrac{1}{2} \cdot 1,58 \cdot t^2$$

Vidíme, že z první rovnice můžeme vypočítat t a dosadit do druhé rovnice:

$$t = \tfrac{20,83}{1,58} = \underline{\underline{13,18\ s}}.$$

Po dosazení získáváme

$$x(13,18) = 20,83 \cdot 13,18 - \frac{1}{2} \cdot 1,58 \cdot 13,18^2 = \underline{\underline{137,31\ m}}.$$

Řidič zcela zastaví za 13,18 sekund od začátku brzdění a urazí přitom dráhu 137,31 metrů.

c) Známe

$x_0 = 0\ m \ldots$ zde opět volíme počátek soustavy souřadnic,

$x(t) = 200\ m$,

$v(t) = 0\ ms^{-1}$,

$a = -1,58\ ms^{-2}$.

Známé hodnoty dosadíme do vztahů 2.11 a 2.15:

$$0 = v_0 - 1,58 \cdot t,$$

$$200 = 0 + v_0 \cdot t - \tfrac{1}{2} \cdot 1,58 \cdot t^2.$$

Tyto dvě rovnice o dvou neznámých vyřešíme například vyjádřením proměnné v_0 z první rovnice:

$$v_0 = 1,58 \cdot t.$$

Vyjádřenou proměnnou v_0 dosadíme do druhé rovnice a získáme rovnici o jedné neznámé t, kterou vyřešíme:

$$200 = 1,58 \cdot t^2 - \tfrac{1,58}{2} \cdot t^2$$
$$200 = t^2 \cdot (1,58 - \tfrac{1,58}{2})$$
$$200 = t^2 \cdot 0,79$$
$$\tfrac{200}{0,79} = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\tfrac{200}{0,79}} = \underline{\underline{15,91\ s}}$$

Získanou hodnotu dosadíme do první rovnice:

$$v_0 = 1,58 \cdot 15,91 = 25,1378\ ms^{-1} = 90,5\ kmh^{-1}.$$

Brzdění trvalo 15,91 sekund a počáteční rychlost automobilu byla 90,5 kmh^{-1}.

Poznámka 2.6 Pokud se chceme ujistit, že jsme odvodili dobře danou rovnici, můžeme provést tzv. **rozměrovou zkoušku**, tzn. ověřit, zda každý člen rovnice má stejnou jednotku. Například u rovnice

$x - x_0 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ je výraz na levé straně uveden v metrech, a také

- $v_0 \cdot t$ má jednotku $m \cdot s^{-1} \cdot s = m$
- $\frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ má jednotku $m \cdot s^{-2} \cdot s^2 = m$,

čili i na pravé straně rovnice sčítáme veličiny stejných jednotek (tedy metry). Rozměrová zkouška tedy ověřuje, že každý člen dosazený do rovnice má stejnou fyzikální jednotku.

2.8 Svislý vrh

- Zabývejme se nyní popisem jistého rovnoměrně zrychleného pohybu, kterému se říká **svislý vrh**, tj. těleso vrháme svisle vzhůru nebo svisle dolů, přičemž při popisu pohybu zanedbáme vliv odporu prostředí (např. odpor vzduchu,…).

- Zvláštním případem svislého vrhu je **volný pád**, tj. vrh tělesa svisle dolů s nulovou pořáteční rychlostí (těleso volně pustíme z ruky a ono padá).

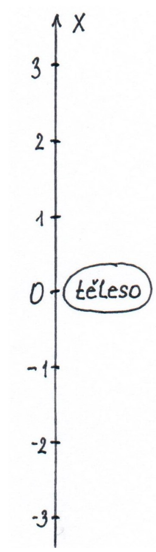
- Ve skutečnosti je vliv odporu vzduchu důležitý. Kdybychom pouštěli ze stejné výšky jablko a pírko ve vakuu (je vyčerpán vzduch), padají stejně rychle. V běžné atmosféře pírko padá pomaleji než jablko, protože vzduchový odpor u pírka je větší.

  Zatím se při popisu svislého vrhu omezíme na zanedbání odporu vzduchu. Přesné výpočty s odporovou silou provedeme až v kapitole 6, která se více zabývá působením sil na těleso.

- V tomto oddílu budeme uvažovat pouze sílu gravitační, která pohyb padajícího tělesa neustále zrychluje a udílí mu tzv. **tíhové zrychlení** $g = 9,80665\ ms^{-2}$ (viz 2.10).

- Při popisu svislého vrhu je důležité si stanovit orientaci osy x, podél které těleso vrháme.

  Počátek souřadné osy umístíme zpravidla do místa, odkud těleso vrháme. Kladný směr osy x budeme uvažovat svisle vzhůru, záporný směr osy x svisle dolů viz obrázek 2.28.



Obr. 2.28: Svislá osa x, podél které těleso vrháme.

  Tímto způsobem budeme vždy uvažovat osu x, ať už těleso vrháme z polohy 0 nahoru nebo dolů (tzn. kladné hodnoty polohy se budou vyskytovat nad úrovní počátku soustavy souřadnic, záporné hodnoty pod úrovní počátku soustavy souřadnic).

- Vzhledem k orientaci svislé osy x působí gravitační síla v záporném směru a udílí tělesu konstantní zrychlení $a = -g$. Pak rovnice popisující tento rovnoměrně zrychlený pohyb můžeme psát ve tvaru

$$v(t) = v_0 - g \cdot t, \tag{2.16}$$

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2. \tag{2.17}$$

Příklad 2.11 Opravář upustil klíč do výtahové šachty vysokého domu (jedná se o volný pád).

a) Jaká bude poloha klíče za 1,5 sekund?

b) Jaká bude rychlost klíče v okamžiku $t = 1,5\ s$?

Řešení:

a) Známe

$x_0 = 0\ m$ … počátek souřadné soustavy volíme v bodě puštění klíče,

$v_0 = 0\ ms^{-1}$ … opravář klíč volně upustil, nehodil jím,

$a = -g = -9,80665\ ms^{-2}$,

$t = 1,5\ s$.

Chceme určit $x(1,5)$, dosadíme tedy do vzorce 2.17:

$$x(1,5) = 0 + 0 \cdot 1,5 - \frac{1}{2} \cdot 9,80665 \cdot 1,5^2 \doteq \underline{\underline{-11\ m}}.$$

Za 1,5 sekundy klíč spadne 11 metrů svisle dolů pod bod spuštění.

b) Využijeme vztah 2.16:

$$v(1,5) = 0 - 9,80665 \cdot 1,5 \doteq \underline{\underline{-14,7\ ms^{-1}}}.$$

Za 1,5 sekundy klíč nabyde rychlosti -14,7 ms^{-1}. Rychlost klíče je záporná, protože padá v záporném směru osy x.

Podobně lze určit hodnoty veličin $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$ pro okamžiky $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$, $t = 4$:

$t = 0$	$x = 0\ m$	$v = 0\ ms^{-1}$	$a = -9,80665\ ms^{-2}$
$t = 1$	$x = -4,9\ m$	$v = -9,80665\ ms^{-1}$	$a = -9,80665\ ms^{-2}$
$t = 2$	$x = -19,6\ m$	$v = -19,6\ ms^{-1}$	$a = -9,80665\ ms^{-2}$
$t = 3$	$x = -44,1\ m$	$v = -29,4\ ms^{-1}$	$a = -9,80665\ ms^{-2}$
$t = 4$	$x = -78,5\ m$	$v = -39,2\ ms^{-1}$	$a = -9,80665\ ms^{-2}$

Příklad 2.12 (podle události z roku 1939) Hráč basebalu se pokouší překonat rekord v chytání basebalového míčku při pádu z co největší výšky. Z vrtulníku byl z výšky 240 m upuštěn míček (odpor vzduchu zanedbáme při popisu).

a) Určete dobu letu míčku.

b) Jaká byla rychlost míčku při dopadu?

Řešení:

a) Známe

$x_0 = 0\ m$ … umístíme do bodu spuštění míčku,

$x(t) = -240\ m$ … při dopadu se míček dostal 240 m "pod úroveň" bodu spuštění (x_0),

$a = -g = -9,80665\ ms^{-2}$,

$v_0 = 0\ ms^{-1}$.

Dosadíme do rovnice 2.15 a dostáváme:

$$\begin{aligned} -240 &= 0 + 0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9,80665 \cdot t^2 \\ 48,95 &= t^2 \\ t &= \pm 7 \ldots \text{ zajímá nás řešení } \underline{\underline{t = 7\ s}}, \text{ protože míček dopadl na zem až poté, co byl vypuš} \end{aligned}$$

Doba letu míčku, než dopadl na zem, činila 7 sekund.

b) Dosadíme $t = 7s$ do rovnice 2.11 a dostáváme:

$v(7) = 0 - 9,80665 \cdot 7 = \underline{\underline{-68,65\ ms^{-1}}}$.

Rychlost míčku při dopadu činila $-68,65\ ms^{-1}$.[5]

Příklad 2.13 Nadhazovač vyhodí basebalový míč svisle vzhůru rychlostí 12 m/s, viz obrázek 2.29.

a) Za jak dlouho dosáhne míč maximální výšky?

b) Jaká je maximální výška letu?

c) Za jak dlouho po vyhození dosáhne míč výšky 5 m?

Řešení:

a), b) Situace a), b) popisují jednu pozici letu míčku (pozici v maximální výšce), proto je budeme řešit najednou. Zvolíme

$x_0 = 0\ m$ … poloha míčku, kdy opouští ruku nadhazovače,

$v(t) = 0\ ms^{-1}$ … v nejvyšším bodě je rychlost míčku nulová,

$v_0 = 12\ ms^{-1}$,

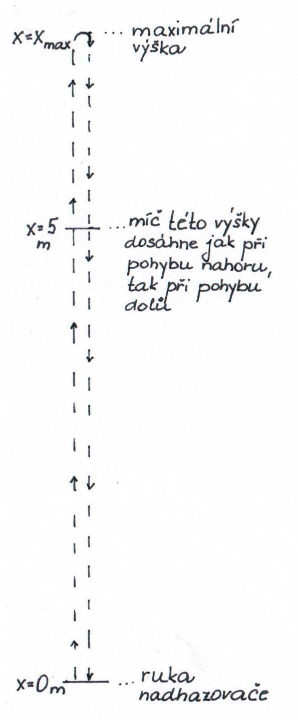
$a = -g = -9,80665\ ms^{-2}$ … jako vždy u svislého vrhu.

Dosadíme do rovnic 2.11, 2.15 a získáváme:

$0 = 12 - 9,80665 \cdot t$,

$x(t) = 0 + 12 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9,80665 \cdot t^2$

[5] Ve skutečnosti byla rychlost míčku vlivem odporu vzduchu menší, ale i přesto byl náraz tak obrovský, že ruka s rukavicí hráče udeřila do tváře, zlomila mu horní čelist na dvanácti místech, vyrazila pět zubů a hráč upadl do bezvědomí.



Obr. 2.29: Dráha vyhozeného míče.

Z první rovnice získáme $t = \frac{12}{9{,}80665} = \underline{\underline{1,22\ s}}$, které dosadíme do druhé rovnice a dostáváme:

$$x(1,22) = 0 + 12 \cdot 1,22 - \tfrac{1}{2} \cdot 9,80665 \cdot 1,22^2 = \underline{\underline{7,34\ m}}.$$

Míček tedy vystoupá do výšky 7,34 metrů za dobu 1,22 sekund.

c) Pokud $x(t) = 5\ m$, určíme t z rovnice 2.15:

$$5 = 0 + 12 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9,80665 \cdot t^2,$$

ve které převedeme všechny členy na levou stranu rovnice a získáme:[6]

$$\frac{9,80665}{2} \cdot t^2 - 12 \cdot t + 5 = 0,$$

tj.

$t_{1,2} = \frac{+12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9{,}80665 \cdot 5}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9{,}80665} = \frac{+12 \pm \sqrt{45{,}9335}}{9{,}80665}$, tedy

[6]Připomeňme, že kořeny kvadratické rovnice $a \cdot t^2 + b \cdot t + c = 0$ určíme ze vzorce $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$.

$t_1 \doteq \underline{\underline{0,53\ s}}$ a $t_2 \doteq \underline{\underline{1,91\ s}}$.

Míček prochází polohou $x(t) = 5\ m$ dvakrát. Jednou v okamžiku $t = 0,53\ s$ při letu nahoru, podruhé při letu dolů v okamžiku $t = 1,91\ s$.

Kontrola 6: Jaké je znaménko posunutí míče v příkladu 2.13

a) při vzestupu míče?

b) při pádu míče?

Jaké je zrychlení v jeho nejvyšším bodu letu?

2.9 Elementární částice

Až doposud jsme se zabývali popisem pohybu auta, míčku, králíka, výtahu apod. V historii se lidé pustili také do studia mikrosvěta, tj. světa objektů a částic, které jsou tak malé, že je nelze spatřit pouhým okem.

Položili si tak otázku, jaká je nejmenší částečka hmoty. Už kolem počátku letopočtu Řek Démokritos nazval jisté malé částečky **atomy** (atomos = nedělitelný). Později bylo zjištěno, že název "atom" neodpovídá obsahu, protože uvnitř něj existují ještě menší částice: atom je uvnitř tvořen **jádrem**, ve kterém se vyskytují **protony** a **neutrony**, a kolem jádra se rozprostírá **elektronový obal**, ve kterém se vyskytují **elektrony**.

Vědci se začali zabývat zkoumáním těchto malých částeček uvnitř atomu a snažili se objevit další druhy těchto mikročástic mechanickým rozbíjením atomů a mikroskopickým pozorováním. Soudržnost atomu je zajištěna vzájemným elektrickým přitahováním záporných elektronů (značíme $\ominus$) v elektronovém obalu s kladnými protony (značíme $\oplus$) obsaženými v jádře. Vzhledem k tomu, že protony se svými kladnými náboji navzájem odpuzují, jsou v jádru potřebné ještě neutrální neutrony, tj. bez náboje, aby se jádro nerozpadlo (popsaná situace obsahu atomu je znázorněna na obrázku 2.30).

Elektrony jsou jedním ze šesti typů částic tzv. **leptonů**. Vedle elektronů patří mezi leptiny ještě: miony, tauony, neutrino elektrony, neutrino miony, neutrino tauony. Ke každému z leptonů existuje tzv. antičástice. Antičástice k elektronu se nazývá **pozitron** (značíme e^+). Podle současných poznatků (výzkumy z r. 2000) se protony a neutrony od elektronů a dalších leptonů liší tím, že mají opět jistou vnitřní strukturu (proton i neutron se skládá ze tří tzv. **kvarků**):

neutron = D + D + U

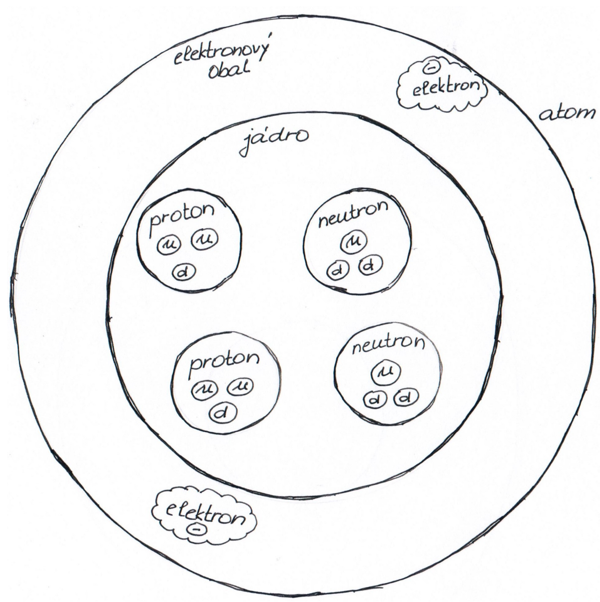
proton = D + U + U

Byly objeveny kvarky šesti typů:

D = down (dole)

U = up (nahoře)

C = charm (půvabný)



Obr. 2.30: Znázornění struktury atomu.

S = strange (podivný)

T = top (vršek)

B = bottom (spodek)

Ke každému ze šesti typů kvarků dále existuje ještě antičástice.

Fyzikové se zajímali o roztřídění atomů do různých skupin - tak vznikly **chemické prvky** (různé prvky se liší počtem protonů v jádře) - viz periodická soustava prvků. U každého prvku pak existují tzv. **izotopy** (různé izotopy téhož prvku se liší počtem neutronů v jádře). K některým otázkám souvisejícím s uvedenými částicemi mikrosvěta se ještě vrátíme.

2.10 Otázky k opakování kapitoly 2

Otázka 2.1 *Co je to kinematika?*

Otázka 2.2 *Co je to hmotný bod?*

Otázka 2.3 *Kdy můžeme při popisu pohybu těleso nahradit hmotným bodem?*

Otázka 2.4 *Co je to poloha hmotného bodu?*

Otázka 2.5 *Co je to posunutí a jak se počítá? (2.1)*

Otázka 2.6 *Co je to průměrná rychlost a jak se vypočítá? (2.2)*

Otázka 2.7 *Co je to sečna ke grafu funkce $f(x)$?*

Otázka 2.8 *Co jsou to podobné trojúhelníky?*

Otázka 2.9 *Co je odvěsna a přepona v trojúhelníku?*

Otázka 2.10 *Jak definujeme v pravoúhlém trojúhelníku* $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, *tg* α?

Otázka 2.11 *Dokažte vztah* $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Otázka 2.12 *Co je to rovnice přímky ve směrnicovém tvaru?*

Otázka 2.13 *Jaký je význam konstanty b v rovnici přímky $p : y = a \cdot x + b$?*

Otázka 2.14 *Co je to směrnice přímky a jaký je její geometrický význam?*

Otázka 2.15 *Jaký je vztah mezi průměrnou rychlostí a směrnicí přímky?*

Otázka 2.16 *Co je to průměrná absolutní rychlost a jak se spočítá? (2.3)*

Otázka 2.17 *Co je to okamžitá rychlost a jak se spočítá? (2.4)*

Otázka 2.18 *Jak čteme výraz* $\lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle x}{\triangle t}$?

Otázka 2.19 *Jak se čte výraz* $\frac{dx(t)}{dt}$?

Otázka 2.20 *Co je to tečna ke grafu funkce $f(x)$ v daném bodě?*

Otázka 2.21 *Jaký je vztah mezi okamžitou rychlostí a směrnicí přímky?*

Otázka 2.22 *Co je to derivování? (nakreslete obrázek pro obecný bod t ... $F(t)$, $f(t)$)*

Otázka 2.23 *Co je to integrování? Co je to neurčitý integrál z funkce $f(t)$?*

Otázka 2.24 *Jaký je fyzikální význam derivace funkce $F(t)$ v bodě t?*

Otázka 2.25 *Jaký je geometrický význam derivace funkce $F(t)$ v bodě t?*

Otázka 2.26 *Jaký je algebraický význam derivace funkce $F(t)$ v bodě t?*

Otázka 2.27 *Prostřednictvím limity vypočtěte derivaci funkce* $F(t) = \frac{1}{t}$.

Otázka 2.28 *Jaká je derivace funkcí* $F_1(t) = c_1$, $F_2(t) = t^2$? *(D0), (D1)*

Otázka 2.29 *Jaký je neurčitý integrál z funkcí* $f_1(t) = 0$, $f_2(t) = t^{n-1}$? *(D0´), (D1´)*

Otázka 2.30 *Jak se čte výraz* $\int_a^b f(t)dt$ *a co udává? Vysvětlete geometrický význam určitého integrálu včetně obrázku.*

Otázka 2.31 *Jak se vypočítá* $\int_a^b f(t)dt$ *pomocí limity? Vysvětlete algebraický význam určitého integrálu včetně obrázku.*

Otázka 2.32 *Jaký je vztah mezi určitým a neurčitým ingegrálem? (Newton-Leibnizova formule, 2.5)*

Otázka 2.33 *Jaký je fyzikální význam Newton-Leibnizovy formule? Vysvětlete fyzikální význam určitého integrálu. (2.6)*

Otázka 2.34 *Co je to průměrné zrychlení a jak se počítá? (2.7)*

Otázka 2.35 *Co je to okamžité zrychlení a jak se počítá? (2.8)*

Otázka 2.36 *Jaký je vztah mezi okamžitým zrychlením* $a(t)$ *a polohou* $x(t)$*? (2.9)*

Otázka 2.37 *Jaká je jednotka rychlosti a jednotka zrychlení?*

Otázka 2.38 *Co to je normální tíhové zrychlení a jak jej vyjadřujeme? (2.10)*

Otázka 2.39 *Znamená záporné zrychlení vždy zpomalení?*

Otázka 2.40 *Co je to rovnoměrně zrychlený pohyb a kterých šest veličin (hodnot) vystupuje při jeho popisu?*

Otázka 2.41 *Odvoďte rovnice pro popis rovnoměrně zrychleného pohybu bez použití diferenciálního počtu. (2.11 - 2.15)*

Otázka 2.42 *Odvoďte rovnice 2.11 a 2.15 užitím diferenciálního a integrálního počtu:*

a) definiční vztah pro zrychlení zintegrumeme od 0 do t podle 2.5:

$$a = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow a(t-0) = v(t) - v_0 \Rightarrow v(t) = v_0 + a \cdot t \qquad 2.11$$

b) do definičního vztahu pro rychlost dosadíme 2.11 a zintegrujeme od 0 do t:

$$v_0 + a \cdot t = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow v_0(t-0) + a\left(\frac{t^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = x(t) - x_0 \Rightarrow$$
$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \qquad 2.15$$

Otázka 2.43 *Co ověřuje rozměrová zkouška?*

Otázka 2.44 *Co je to svislý vrh a volný pád?*

Otázka 2.45 *Jak volíme orientaci osy x při svislém vrhu?*

Otázka 2.46 *Jaké jsou rovnice pro $x(t)$, $v(t)$ při svislém vrhu? (2.16, 2.17)*

Otázka 2.47 *Jaká je struktura atomu?*

Otázka 2.48 *Jak se liší atomy různých chemických prvků?*

Otázka 2.49 *Co je to izotop?*

Otázka 2.50 *Jaké máme druhy kvarků?*

Otázka 2.51 *Jaké známe druhy leptonů?*

Otázka 2.52 *Co je to pozitron?*

3 Vektory

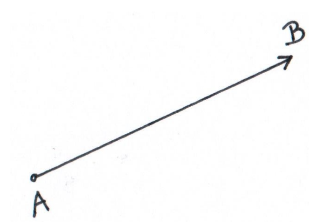
Speleologové se pohybují v jeskyni. Lze nějak jednoduše charakterizovat vzájemnou polohu startu a cíle jejich cesty, aniž bychom podrobně popisovali celou spletitou trasu?

3.1 Vektorové veličiny = vektory

Ve fyzice často u některých veličin potřebujeme zjistit jak její velikost, tak její směr. Budeme-li například na těleso působit nějakou silou, je pro výsledný pohyb tělesa podstatný směr, kterým síla na těleso působí. Proto síly znázorňujeme úsečkami, u nichž je určen počáteční a koncový bod - **orientovanými úsečkami**. Graficky znázorňujeme orientovanou úsečku jako úsečku opatřenou šipkou u koncového bodu, viz obrázek 3.31. Mezi orientované úsečky počítáme i úsečky, které mají totožné počáteční a koncové body a nazýváme je **nulovými orientovanými úsečkami**.
Fyzikálním veličinám, které jsou určeny **velikostí** a **směrem** říkáme **vektorové veličiny**. Vektorová veličina je ve fyzice popsána **vektorem**, který je matematicky definován jako množina všech orientovaných úseček, které mají stejnou velikost a stejný směr. **Nulový vektor** je pak množina všech nulových orientovaných úseček. Vektory budeme zapisovat malými písmeny, která budou při písemném zápisu opatřena šipkou, např. $\vec{u}$, $\vec{v}$,... Každá orientovaná úsečka určuje nějaký vektor, tedy i této úsečce budeme připisovat označení vektoru. Určuje-li orientovaná úsečka s počátečním bodem A a koncovým bodem B vektor $\vec{u}$, zapisujeme $\vec{u} = \vec{AB}$.

K fyzikálním veličinám, které mohou být popsány vektory, patří:

a) **posunutí v prostoru** ... veličina, která popisuje přesun částice v prostoru z bodu A do bodu B; lze ji znázornit orientovanou úsečkou (viz obrázek 3.31), jejíž směr udává, že došlo k přesunu částice z bodu A do bodu B (vektor posunutí značíme $\vec{\triangle r}$, rovněž také $\vec{AB}$).



Obr. 3.31: Orientovaná úsečka s počátečním bodem A a koncovým bodem B, taktéž posunutí z bodu A do bodu B.

b) **rychlost** pohybu částice nebo tělesa v prostoru ... lze ji znázornit orientovanou úsečkou, jejíž směr udává směr, ve kterém se v daném okamžiku částice pohybuje (vektor rychlosti značíme $\vec{v}$).

c) **síla** působící na těleso ... lze ji znázornit orientovanou úsečkou, jejíž směr udává směr, ve kterém síla na těleso působí (vektor síly značíme $\vec{F}$).

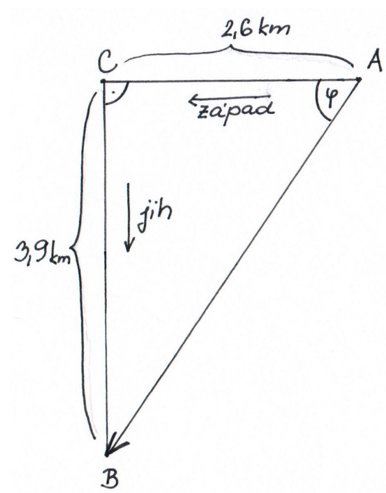
V této kapitole a v dalším studiu fyziky se seznámíme ještě s mnohými dalšími vektorovými veličinami. Mnohé fyzikální veličiny naopak vektorové nejsou, protože jim nelze přiřadit žádný směr (např. teplota, hmotnost,...). Veličinám, které jsou jednoznačně určeny pouze velikostí (a nikoli směrem), říkáme **skalární veličiny (= skaláry)**.

Příklad 3.1 Skupina speleologů, která v roce 1972 objevila spojení mezi Mamutí jeskyní a jeskyním systémem Flint Ridge, ušla od Austinova vstupu 2,6 km západním směrem, 3,9 km na jih a vystoupila o 25 m svisle vzhůru. Jaký vektor posunutí odpovídá této cestě?

Řešení: Nejprve zjistíme velikost posunutí ve vodorovném (= horizontálním) směru: Z pravoúhlého trojúhelníka ABC, viz obrázek 3.32, kde $|AC| = 2,6\ km$, $|BC| = 3,9\ km$, můžeme určit délku jeho přepony $|AB|$ pomocí Pythagorovy věty:

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2} = \sqrt{2,6^2 + 3,9^2} \doteq \underline{\underline{4,68722\ km}}$$

Pro přesný popis je užitečné zjistit také velikost úhlu φ, který svírají vektory posunutí $\vec{AB}$ a $\vec{AC}$, pro který platí:



Obr. 3.32: Velikost posunutí ve vodorovném směru.

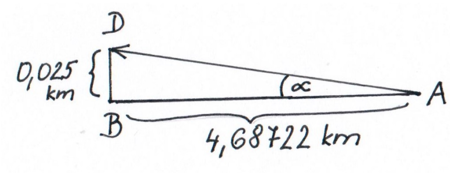
$$\text{tg } \varphi = \frac{\text{délka odvěsny protilehlé úhlu } \varphi}{\text{délka odvěsny přilehlé úhlu } \varphi} = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{3,9}{2,6} = 1,5.$$

Z rovnosti tg $\varphi = 1,5$ určíme velikost úhlu φ:[7]

$$\varphi = \text{arctg } 1,5 \doteq \underline{\underline{56,3^\circ}}.$$

[7]kalkulačka musí být přepnuta na DEG (*degres* = anglicky "stupně"), abychom získali výsledek ve stupních.

Z "bočního" pohledu určíme svislé (= vertikální) posunutí pomocí Pythagorovy věty analogickým způsobem jako v předchozím případě: trojúhelník ADB je také pravoúhlý (viz obrázek 3.33) s pravým úhlem při vrcholu B a délkami odvěsen $|AB| = 4,68722\ km$ a $|BD| = 0,025\ km$.



Obr. 3.33: Velikost posunutí ve svislém směru.

Tedy

$$|AD| = \sqrt{|AB|^2 + |BD|^2} = \sqrt{0,025^2 + 4,68722^2} \doteq \underline{\underline{4,68722\ km}}$$

Pro přesný popis je užitečné zjistit také úhel α, který svírají vektory posunutí $\vec{AB}$ a $\vec{AD}$ (úhel stoupání):

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{0,025}{4,68722} = 0,0053.$$

Tedy

$$\alpha = \mathrm{arctg}\ 0,0053 \doteq \underline{\underline{0,3^\circ}}.$$

Můžeme tedy uzavřít celkový popis posunutí: vektor posunutí $\vec{\triangle r}$, určující změnu polohy speleologické skupiny,

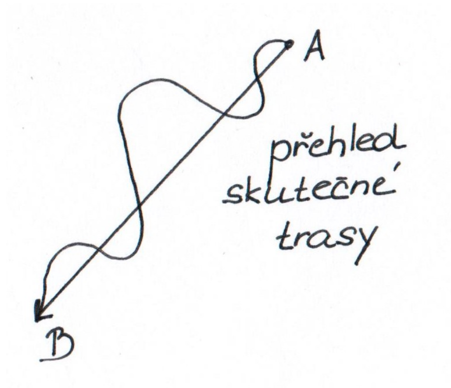
- má velikost $|\vec{\triangle r}| = |AD| = 4,68729\ km$,
- svírá se směrem "východ $\longrightarrow$ západ" úhel $\varphi = 56^\circ$ a od vodorovné roviny je odkloněn směrem vzhůru o úhel $\alpha = 0,3^\circ$.

Nutno dodat, že vektor posunutí $\vec{\triangle r}$ v předchozím příkladu nemusí přesně popisovat skutečnou trasu cesty. Vektorem je zadán pouze vztah mezi počáteční a koncovou polohou cesty - její skutečná trasa by mohla být "klikatější", jak ilustruje například obrázek 3.34.

3.2 Sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem - grafický přístup

3.2.1 Sčítání vektorů

Uvažujme částici, která se pohybuje nejprve z bodu A do bodu B, a pak z bodu B do bodu C viz obrázek 3.35.

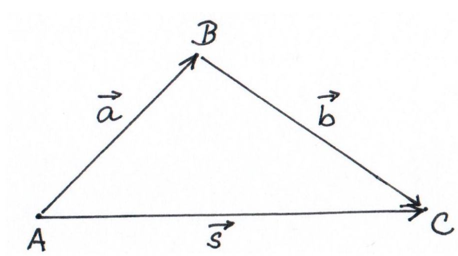


Obr. 3.34: Příklad skutečné trasy částice

Pak vektor celkového posunutí $\vec{s}$ z bodu A do bodu B uvažované částice je dán součtem vektorů dílčích posunutí $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{BC}$. Vztah mezi vektory zapisujeme tzv. vektorovou rovnicí

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \vec{s}} \tag{3.1}$$

Uvedený obrázek 3.35 je současně i návodem, jak sečíst vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ graficky:



Obr. 3.35: Pohyb částice z bodu A do bodu B a následně z bodu B do bodu C.

1. nakreslíme vektor $\vec{a}$ ve správné velikosti a směru,

2. nakreslíme vektor $\vec{b}$ tak, aby jeho počáteční bod byl současně koncovým bodem vektoru $\vec{a}$,

3. výsledný vektor $\vec{s}$ součtu vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ je spojnicí počátečního bodu A vektoru $\vec{a}$ s koncovým bodem C vektoru $\vec{b}$.

Z obrázku 3.35 je rovněž zřejmé, že výsledné posunutí $\vec{s}$ lze rovněž zapsat vektorovou rovnicí:

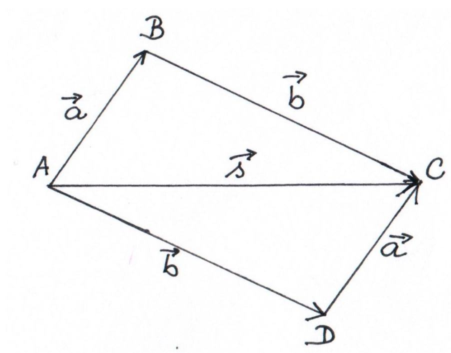
$$\boxed{\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}} \tag{3.2}$$

Právě definovaný součet vektorů má 4 důležité vlastnosti:

1. **Komutativní zákon**: výsledek součtu dvou libovolných vektorů nezávisí na pořadí sčítanců. Matematicky tuto skutečnost zapíšeme: pro každé dva vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ platí

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}}. \tag{3.3}$$

O platnosti tohoto pravidla se lze přesvědčit graficky, viz obrázek 3.36:



Obr. 3.36: Dva vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ lze sčítat v libovolném pořadí.

Stejný vektor $\vec{s}$ dostaneme, pokud nejprve z bodu A nakreslíme vektor $\vec{a}$ a pak k jeho koncovému bodu B přidáme vektor $\vec{b}$, nebo pokud nejprve z bodu A nakreslíme vektor $\vec{b}$ a pak k jeho koncovému bodu D přidáme vektor $\vec{a}$. Uvedenému pravidlu se někdy říká pravidlo rovnoběžníka, protože počáteční a koncové body A, B, C, D vytváří rovnoběžník.

2. **Asociativní zákon**: při sčítání více než dvou libovolných vektorů nezáleží na pořadí, v jakém jednotlivé operace "součtu dvou dílčích vektorů" provádíme, neboli je lhostejné, jak při sčítání více než dvou vektorů tyto vektory seskupíme. Matematický zápis tohoto pravidla je následující: pro každé tři vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ platí

$$\boxed{(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})}. \tag{3.4}$$

O platnosti zákona se lze přesvědčit z grafického názoru na obrázku 3.37:

Když sčítáme

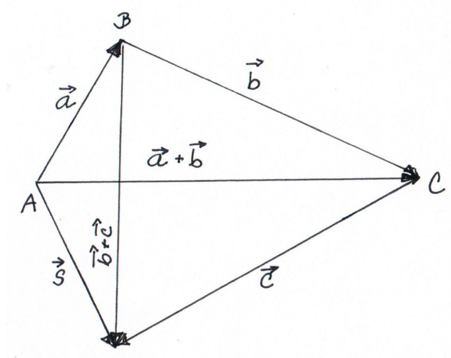
nejprve $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AC}$

a pak $\vec{AC} + \vec{c} = \vec{s}$,

dostáváme stejný výsledek jako v případě, kdy sčítáme

nejprve $\vec{b} + \vec{c} = \vec{BE}$

a pak $\vec{a} + \vec{BE} = \vec{s}$.



Obr. 3.37: Vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ lze při sčítání libovolně seskupit.

Jinými slovy, protože ve vztahu 3.4 nezáleží na pořadí uzávorkování, lze psát součet $\vec{s}$ bez závorek:

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

3. Existence neutrálního prvku: Nelze přehlédnout, že sčítání vektorů splňuje některá základní pravidla stejná jako sčítání reálných čísel. To však není samozřejmá věc - v matematice a fyzice totiž existují i operace, u kterých neplatí ve výsledku stejné vlastnosti, které u sčítání vektorů a reálných čísel splněny jsou.
Nyní zkoumejme podobnost sčítání vektorů a sčítání reálných čísel dále: množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$ obsahuje číslo 0. Výsledkem součtu čísla 0 s libovoným daným reálným číslem a je opět dané reálné číslo a[8]. O čísle 0 pak hovoříme jako o neutrálním prvku množiny $\mathbb{R}$ vzhledem ke sčítání. Otázkou je, zda něco podobného platí i u vektorů.
U vektorů jsme již výše zavedli **nulový vektor** $\vec{o}$, jehož

- velikost je rovna nule,
- směr není definován!!

Z hlediska vektorové veličiny posunutí je nulový vektor celkem logický: posunutí je rovno nulovému vektoru, pokud koncový bod posunutí je totožný s jeho počátečním bodem. Nulový vektor má tedy mezi vektory stejné postavení jako číslo 0 mezi reálnými čísly, tj. pro každý vektor $\vec{b}$ platí

$$\boxed{\vec{b} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{b} = \vec{b}}. \tag{3.5}$$

[8]Tedy $\forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = 0 + a = a$.

4. Existence inverzního prvku: Připomeňme, že v množině $\mathbb{R}$ existuje ke každému $a \in \mathbb{R}$ reálné číslo opačné $-a \in \mathbb{R}$ tak, že

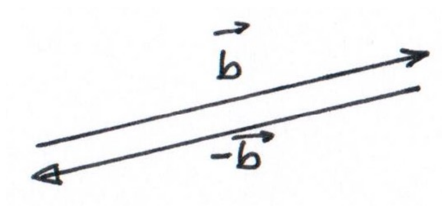
$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

Otázkou zůstává, zda platí něco podobného i u vektorů.
Pro vektory platí, že ke každému vektoru $\vec{b}$ existuje vektor $-\vec{b}$, který má

- stejnou velikost jako $\vec{b}$,
- opačný směr jako $\vec{b}$.

Tomuto vektoru $-\vec{b}$ se říká **opačný vektor** k vektoru $\vec{b}$ (viz obrázek 3.38) a platí

$$\boxed{\vec{b} + (-\vec{b}) = (-\vec{b}) + \vec{b} = \vec{o}}. \tag{3.6}$$

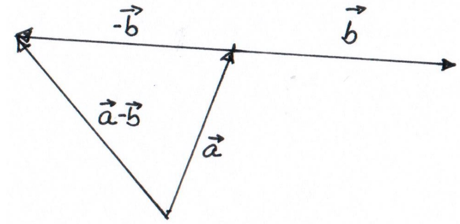


Obr. 3.38: Vektor $\vec{b}$ a k němu opačný vektor $-\vec{b}$.

Existenci opačného vektoru užijeme k definici operace **odčítání vektorů**:

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}). \tag{3.7}$$

Vektor $\vec{d}$ pak nazýváme **rozdílem** vektorů $\vec{a}$ a $(\vec{b})$.
Pokud tedy máme realizovat odčítání vektorů $\vec{a} - \vec{b}$, nakreslíme vektor $(-\vec{b})$ tak, aby počáteční bod vektoru $(-\vec{b})$ byl koncovým bodem vektoru $\vec{a}$. Pak provedeme grafický součet vektorů $\vec{a}$ a $(-\vec{b})$, viz obrázek 3.38, jak již známe z předchozího textu.



Obr. 3.39: Rozdíl vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$.

Kontrola 7: Dvě posunutí dané vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ mají velikosti $|\vec{a}| = 3\ m$, $|\vec{b}| = 4\ m$. Označme $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$. Jak je třeba volit úhel obou posunutí, aby velikost vektoru $\vec{c}$ byla

a) co největší?

b) co nejmenší?

V obou případech určete velikost vektoru $\vec{c}$.

Příklad 3.2 Při branném závodě je úkolem soutěžícího vzdálit se co možná nejvíce od startu třemi postupnými přímočarými přesuny:

a) první přesun je dán vektorem $\vec{a}$, kde $|\vec{a}| = 2\ km$, směrem na východ,

b) druhý přesun je dán vektorem $\vec{b}$, kde $|\vec{b}| = 2\ km$, severovýchodně pod úhlem 30° k místní rovnoběžce,

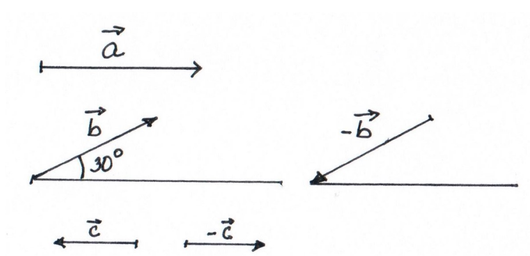
c) třetí přesun je dán vektorem $\vec{c}$, kde $|\vec{c}| = 1\ km$, směrem na západ.

Pořadí přesunů může závodník volit a kterýkoliv z přesunů $\vec{b}$, $\vec{c}$ může zaměnit přesunem opačným. Do jaké největší vzdálenosti od startu se lze tímto způsobem dostat?

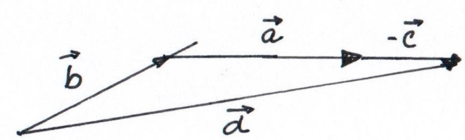
Řešení: Ve shodném měřítku (1 km odpovídá 1 cm) nakreslíme vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $(-\vec{b})$, $(-\vec{c})$, viz obrázek 3.40:
Vektor $\vec{a}$ nás navádí k tomu, abychom se "vydali" co nejdále východním směrem: dostáváme vektor $\vec{d} = \vec{b} + \vec{a} - \vec{c}$ (na pořadí a uzávorkování sčítanců přitom vzhledem ke komutativitě a asociativitě operace sčítání vektorů nezáleží). Změříme-li délku vektoru $\vec{d}$ z obrázku 3.41 a použijeme daného měřítka, dostaneme vzdálenost d v kilometrech:

$$|\vec{d}| = \underline{\underline{4,8\ km}}.$$

Závodník dosáhne největší vzdálenosti od startu, zvolí-li pro přesun trojici vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $-\vec{c}$.



Obr. 3.40: Vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $\vec{c}$ pro výběr povolené trojice posunutí.



Obr. 3.41: Výsledný vektor posunutí $\vec{d} = \vec{b} + \vec{a} - \vec{c}$.

3.2.2 Násobení vektoru skalárem

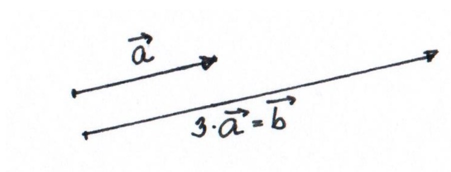
Představme si, že částice A_1 je třikrát rychlejší než částice A_2. Obě částice se pohybují stejným směrem. Pak za časový interval $\triangle t$ dojde k posunutí částice A_1 o vektor $\vec{a}$ a částice A_2 o vektor $\vec{b}$. Pro vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ platí vztah $\vec{b} = 3 \cdot \vec{a}$ (viz obrázek 3.42). Jedná se o příklad posunutí, ze kterého je možné vypozorovat následující vlastnosti násobení vektoru reálným číslem $r \in \mathbb{R}$ (= skalárem):

- směr vektoru $\vec{b}$, kde $\vec{b} = r \cdot \vec{a}$, je
  - stejný jako směr vektoru $\vec{a}$ pro $r > 0$,
  - opačný než směr vektoru $\vec{a}$ pro $r < 0$,
- velikost vektoru $|\vec{b}|$, kde $\vec{b} = r \cdot \vec{a}$, je rovna

  $$|\vec{b}| = |r| \cdot |\vec{a}|,$$

  kde $|r|$ je absolutní hodnota reálního čísla r a $|\vec{a}|$ je velikost vektoru $\vec{a}$.

Pro $r = 0$ získáme $0 \cdot \vec{b} = \vec{o}$, tj. násobením vektoru číslem nula získáme nulový vektor.



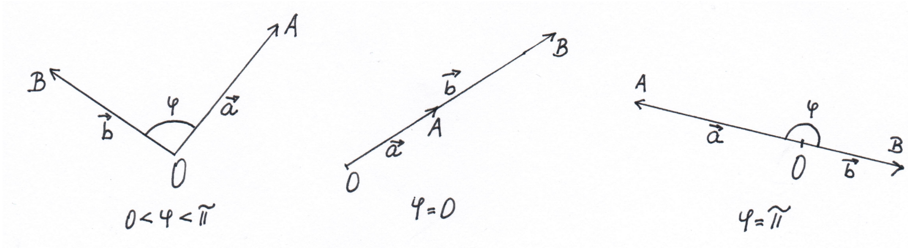
Obr. 3.42: Násobení vektoru skalárem.

3.2.3 Úhel dvou vektorů

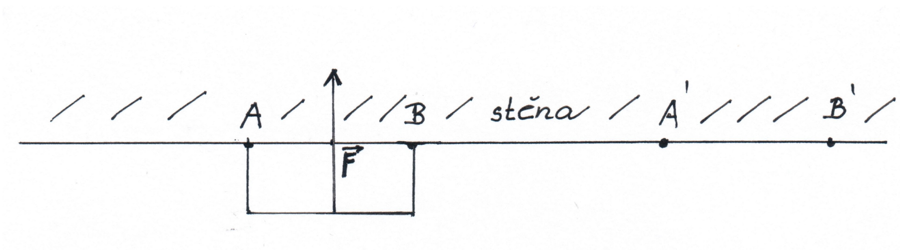
Uvažujme dva nenulové vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, které jsme umístili do úseček OA, OB. Pak velikost konvexního úhlu AOB se nazývá **úhel vektorů** $\vec{a}$, $\vec{b}$. Jsou-li přímky OA, OB kolmé, říkáme, že i vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ jsou kolmé a zapisujeme $\vec{a} \perp \vec{b}$. Úhel dvou vektorů, z nichž alespoň jeden je nulový, nezavádíme. Na obrázku 3.43 jsou vyznačeny možné polohy vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ a jejich úhel φ.

3.3 Rozklad vektoru na součet vektorů

V předcházejícím oddíle jsme se zabývali zejména operací součtu dvou vektorů - pro dva dané vektory $\vec{x}$, $\vec{y}$ jsme hledali vektor $\vec{s}$, který byl jejich součtem (tj. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{s}$). Nyní se budeme zabývat postupem v jistém smyslu opačným - je zadán jeden vektor $\vec{v}$ a naším úkolem je nalézt dva vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ tak, že zadaný vektor $\vec{v}$ je jejich součtem (tj. $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$). Této operaci se říká **rozklad vektoru $\vec{v}$ na součet vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$.**
Následující text ukáže situaci, ve které je potřeba hledat vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, když známe jejich



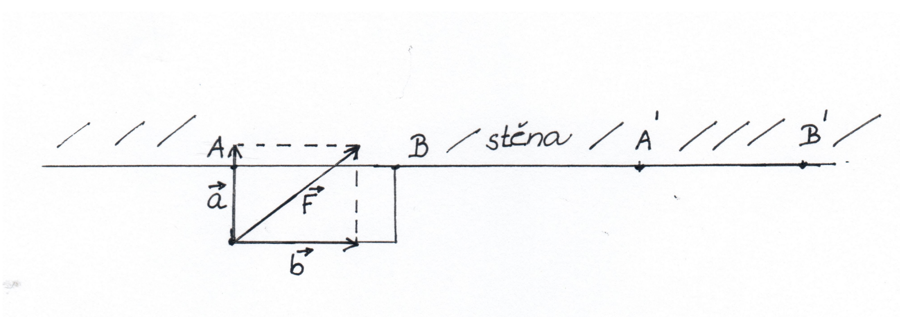
Obr. 3.43: Možné polohy vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ a jejich úhel φ.



Obr. 3.44: Na těleso působíme silou $\vec{F}$ kolmo proti stěně.

součet $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$. Představme si, že je potřeba posunout skříň podél stěny o 3 metry dále, než se zrovna nachází (tj. z bodu A do bodu A' viz obrázek 3.44).

Pokud na skříň budeme tlačit silou danou vektorem $\vec{F}$[9] (označení z anglického *force* = síla) kolmo ke stěně, skříň se nepohne podél stěny ani o centimetr, z čehož vyplývá, že práce vykonaná při posunutí skříně kolmo proti stěně, je nulová. Z uvedeného je patrno, že pro efektivní posunutí skříně z bodu A do bodu A' musí síla $\vec{F}$ působit "podél stěny", nikoliv kolmo proti stěně. Uvažujme tedy situaci na obrázku 3.45:



Obr. 3.45: Na těleso působíme silou $\vec{F}$ šikmo proti stěně.

Síla $\vec{F}$ působí v šikmém směru na roh skříně a lze ji chápat jako výslednici součtu

[9] V dalším textu budeme hovořit již jen o síle $\vec{F}$.

dvou sil daných vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, tj.

$$\vec{F} = \vec{a} + \vec{b},$$

kde

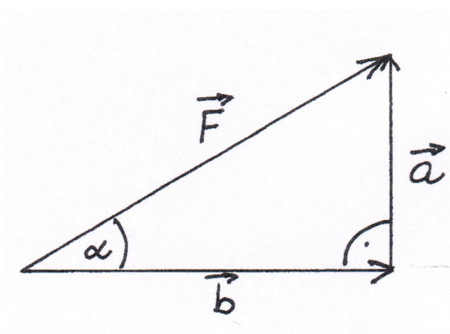
$\vec{a}$ je síla působící kolmo proti stěně (síla hloupého pomocníka, který nevykoná žádnou práci),

$\vec{b}$ je síla působící rovnoběžně se stěnou (síla chytrého pomocníka, který působí v tom nejvhodnějším směru).

Uvažujme, že síla $\vec{F}$ je konstantní po celou dobu posunutí skříně z bodu A do bodu A'.
Práci potřebnou na posunutí skříně vypočteme jako součin délky posunutí daného vektorem $\vec{AA'}$ a velikosti síly dané vektorem $\vec{b}$ působící ve směru posunutí:

$$\boxed{W = |\vec{AA'}| \cdot |\vec{b}|}, \tag{3.8}$$

kde veličina W označuje **práci** (označení z anglického *work* = práce). Výše uvedený vztah 3.8 osvětluje důvod rozkladu vektoru $\vec{F}$ - nezajímá nás ani tak přímo síla $\vec{F}$, ani vektor $\vec{a}$ (protože jím vykonaná práce je nulová), ale je pro nás důležitý vektor $\vec{b}$, pomocí něhož výslednou práci vypočteme.
Překresleme výše popsanou situaci do obrázku 3.46, ze kterého je možno dedukovat následující poznatky:

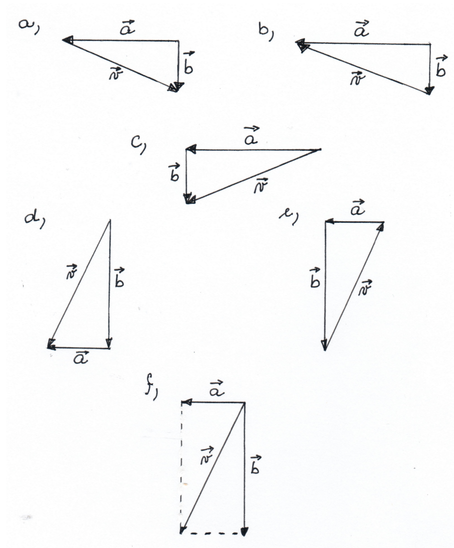


Obr. 3.46: $\vec{F} = \vec{a} + \vec{b}$.

- vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ jsou navzájem kolmé,
- z pravoúhlého trojúhelníka lze vyjádřit velikosti vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ pomocí vektoru $\vec{F}$:

$$\boxed{|\vec{a}| = |\vec{F}| \cdot \sin\alpha, |\vec{b}| = |\vec{F}| \cdot \cos\alpha}, \tag{3.9}$$

kde α je úhel, který svírají vektory $\vec{F}$, $\vec{b}$.



Obr. 3.47: Obrázek ke Kontrole 8.

Kontrola 8: Který z následujících obrázků 3.47 představuje správný rozklad vektoru $\vec{v}$ na součet vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$?

Příklad 3.3 Malé letadlo odstartovalo za nevlídného počasí. Později bylo spatřeno ve vzdálenosti 215 km od letiště v severovýchodním směru, svírajícím s místním poledníkem úhel 22°. Jaká byla jeho vzdálenost od letiště v severním směru a vzdálenost od letiště ve východním směru?

Řešení: Vektorem $\vec{v}$ označme vektor posunutí letadla z letiště do místa jeho aktuální polohy. Známe skutečnou vzdálenost letadla od letiště $|\vec{v}| = 215\ km$, pro určení "severní" a "východní" vzdálenosti letadla od letiště vyjdeme z obrázku 3.48:

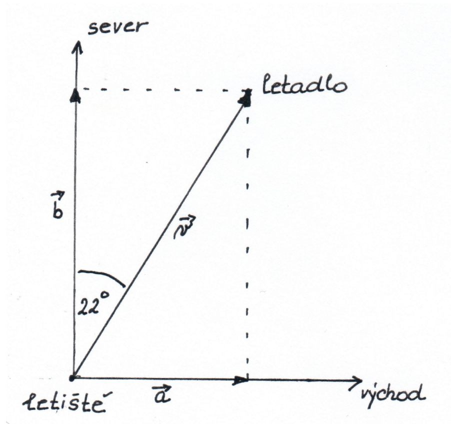
"Severní" vzdálenost letadla od letiště je dána: $|\vec{b}| = |\vec{v}| \cdot \cos 22^\circ \doteq \underline{\underline{199,3\ km}}$,

"Východní" vzdálenost letadla od letiště je dána: $|\vec{a}| = |\vec{v}| \cdot \sin 22^\circ \doteq \underline{\underline{80,5\ km}}$.

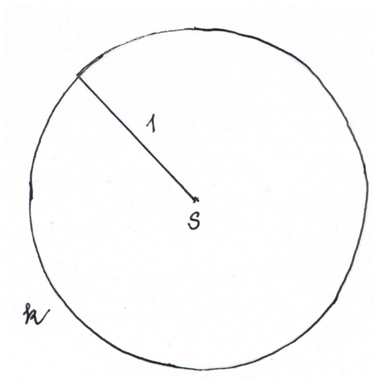
3.3.1 Velikost úhlu v míře stupňové a v míře obloukové

V následujícím textu se budeme věnovat problematice úhlů, stupňů, volbě DEG a RAD na kalkulačkách, neboť s tím velmi úzce souvisí vlastnosti funkcí $\sin x$, $\cos x$, tg x, cotg x a osvětlíme je na tzv. stupňové a obloukové míře velikosti úhlů:
Uvažujeme jednotkovou kružnici k se středem S a poloměrem 1. Délka této kružnice je 2π, viz obrázek 3.49. Z následujícího obrázku 3.50 je pak patrné, že délka oblouku $\widehat{AB}$ kružnice k, kde velikost úhlu ASB je 1 stupeň, je $\frac{2\pi}{360}$ neboli $\frac{\pi}{180}$.

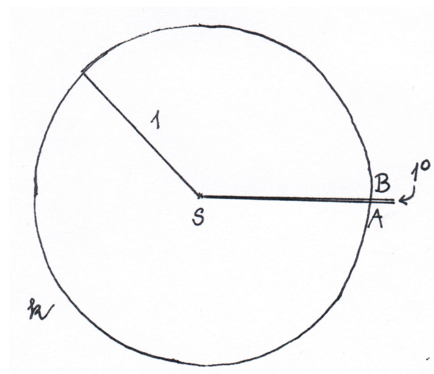
Jestliže velikost úhlů zapisujeme ve stupních, říkáme, že užíváme **stupňovou míru úhlů**, ve které se kromě jednotky 1 **stupeň** (zkratka 1°) používají i menší jednotky 1



Obr. 3.48: $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$.



Obr. 3.49: Jednotková kružnice k.



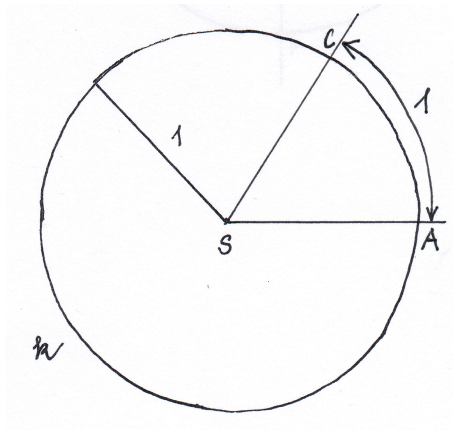
Obr. 3.50: Velikost úhlu ASB je 1°.

minuta (zkratka $1'$) pro jednu šedesátinu stupně a 1 **vteřina** (zkratka $1''$) pro jednu šedesátinu minuty. Oproti tomu **radián** je jednotkový úhel v tzv. **obloukové míře**, přesněji středový úhel, který přísluší na jednotkové kružnici oblouku o délce 1, viz obrázek 3.51.

Následujícím textem směřujeme k pojmu orientovaný úhel, k jehož pochopení předpokládáme znalost pojmu úhel, konvexní i nekonvexní, vrchol úhlu, ramena úhlu, vnitřek úhlu a vnějšek úhlu[10]. Dosavadní znalosti o konvexním a nekonvexním úhlech však nevystačí v matematice a technické praxi, tento nedostatek odstraníme zavedením orientovaného úhlu:

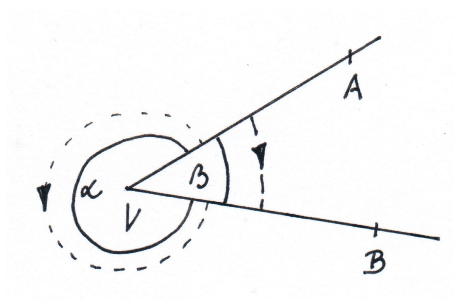
Uspořádaná dvojice polopřímek VA, VB se společným počátkem V se nazývá **orientovaný úhel** AVB, který zapisujeme symbolem $A\hat{V}B$. Polopřímka VA, resp. VB se nazývá **počáteční**, resp. **koncové rameno** orientovaného úhlu $A\hat{V}B$, bod V **vrchol** orientovaného úhlu $A\hat{V}B$. Orientovaný úhel si takto můžeme představit jako počáteční a koncovou polohu polopřímky, která se otáčí kolem svého počátku v jednom ze dvou navzájem opačných smyslů, tedy proti pohybu hodinových ručiček, resp. po směru ho-

[10] Úhel konvexní i nekonvexní chápeme jako jistou podmnožinu množiny všech bodů dané roviny, kde pořadí ramen v tomto úhlu je nepodstatné



Obr. 3.51: Velikost úhlu ASC je 1 rad.

dinových ručiček, kdy mluvíme o **kladném smyslu**, resp. **záporném smyslu** otáčení. Tato představa otáčení polopřímky je postačující k zavedení velikosti orientovaného úhlu $A\hat{V}B$. Polopřímky VA, VB rozdělí rovinu na dva úhly α, β, viz obrázek 3.52, přičemž jejich velikosti označíme též α, β. Z obrázku 3.52 je pak zřejmé, že platí $\beta = 2\pi - \alpha$, resp. $\beta = 360° - \alpha$ (polopřímka při svém otočení z počátečního ramene VA do koncového ramene VB opíše právě jeden z těchto úhlů α, β.) Velikost toho z úhlů α, β, který opíše polopřímka při otočení z počátečního ramene VA do koncového ramene VB v kladném smyslu, se nazývá **základní velikost orientovaného úhlu** $A\hat{V}B$. Z obrázku 3.52 je rovněž zřejmé, že základní velikostí orientovaného úhlu $A\hat{V}B$, resp. $B\hat{V}A$ je úhel α, resp. β.

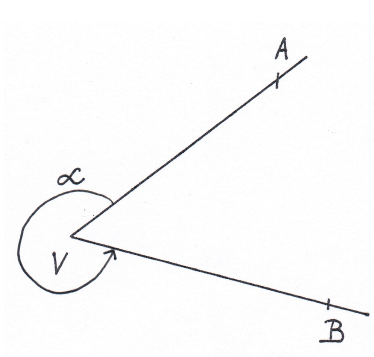


Obr. 3.52: Orientovaný úhel $A\hat{V}B$, resp. $B\hat{V}A$.

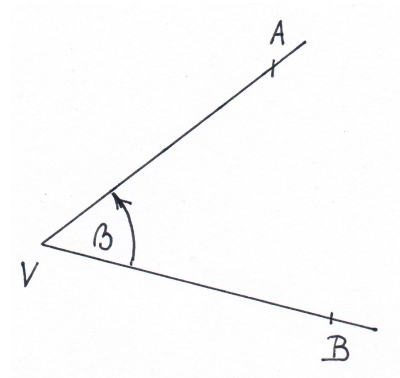
Tuto situaci znázorňujeme graficky tak, jak je uvedeno na obrázcích 3.53, resp. 3.54. Obloukem se šipkou je vyznačeno, že jde o orientovaný úhel, přičemž α, resp. β udává jeho základní velikost.[11]

Pro základní velikost α každého orientovaného úhlu je $0 \leq \alpha < 2\pi$, resp. $0° \leq \alpha < 360°$. Při svém otáčení z počátečního ramene VA do koncového ramene VB nemusí polo-

[11] V případě, že polopřímka VA je totožná s polopřímkou VB, hovoříme o **nulovém orientovaném úhlu** $A\hat{V}B$ - jeho základní velikost pokládáme rovnu 0 (rad), resp. 0°.



Obr. 3.53: Orientovaný úhel $A\hat{V}B$.

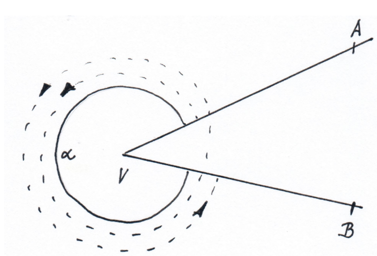


Obr. 3.54: Orientovaný úhel $B\hat{V}A$.

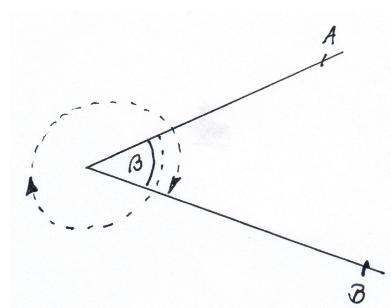
přímka opsat jen úhel α, ale může se otáčet dále kolem vrcholu V v témž smyslu (lze si představit jako pohyb hmotného bodu po kružnici). Otočení polopřímky znázorněné na obrázku 3.55 přiřadíme velikost $\alpha + 2\pi$ ("plné otočce" je přiřazeno kladné číslo 2π, neboť jde o otáčení v kladném smyslu). Po každé další "plné otočce" polopřímky v kladném smyslu budeme příslušným otočením přiřazovat velikosti $\alpha + 4\pi$, $\alpha + 6\pi$, $\alpha + 8\pi$, atd.

Jestliže polopřímka opíše z polohy VA do polohy VB úhel β, viz obrázek 3.56, tj. otáčí se v **záporném smyslu**, přiřadíme tomuto otáčení velikost $-\beta$, čili $\alpha - 2\pi$. Polopřímka na obrázku 3.56 opsala kolem bodu V úhel β a dále vykonala jednu "plnou otočku" v **záporném smyslu**. Velikost otočení pak vyjádříme číslem $-\beta - 2\pi$, což je totéž jako $\alpha - 4\pi$. Po dalších "plných otočkách" budeme přiřazovat příslušným otočením polopřímky velikosti $-\beta - 4\pi$, resp. $-\beta - 6\pi$, resp. $-\beta - 8\pi$ atd neboli $\alpha - 6\pi$, resp. $\alpha - 8\pi$, resp. $\alpha - 10\pi$ atd.

Velikostí orientovaného úhlu $A\hat{V}B$, jehož základní velikost v obloukové míře, resp. ve stupňové míře je α, se nazývá každé číslo $\alpha + k \cdot 2\pi$, resp. $\alpha + k \cdot 360°$, kde k je libovoné celé číslo. Každému orientovanému úhlu tedy přísluší nekonečně mnoho velikostí. Přitom každé dvě velikosti daného orientovaného úhlu se liší o celistvý násobek 2π, resp. $360°$.



Obr. 3.55: Velikost orientovaného úhlu $A\hat{V}B$ je $\alpha + 2\pi$.



Obr. 3.56: Velikost orientovaného úhlu $B\hat{V}A$ je $-\beta$, čili $\alpha - 2\pi$.

Vzhledme k tomu, že oblouková míra je hodně důležitá pro práci s funkcemi $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, tg α, cotg α, jsou v následující tabulce 3.3 uvedeny některé důležité úhly v obou úhlových mírách. Přitom:

$\alpha = 1\ rad \ldots$ úhel, jehož délka oblouku je rovna 1,

Tabulka 3.3: Převodní tabulka mezi úhlovými mírami

stupně	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
radiány	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

$\beta = \pi\ rad \ldots$ tzv. **přímý úhel** (= ramena úhlu leží v jedné přímce),

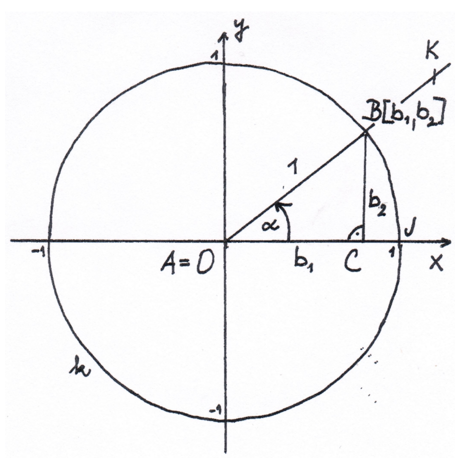
$\gamma = 2\pi\ rad \ldots$ tzv. **plný úhel** (tj. $360° = 2\pi\ rad$).

Ze vztahu pro plný úhel ve stupňové i obloukové míře plynou vzorce pro převod[12]:

$$\boxed{1° = \left(\tfrac{2\pi}{360}\right) rad, \quad 1\ rad = \left(\tfrac{360}{2\pi}\right)°} \tag{3.10}$$

3.3.2 Rozšířená definice funkcí sinus a kosinus

Na obrázku 3.57 je v kartézské soustavě souřadnic zakreslena jednotková kružnice k se středem v počátku soustavy souřadnic O. Dále je zde vyznačen pravoúhlý trojúhelník ABC, v němž velikost vnitřního úhlu při vrcholu A je α. Následující text směřuje k vyjádření $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$ pomocí souřadnic b_1, b_2 bodu $B = [b_1, b_2]$, viz obrázek 3.57.



Obr. 3.57: Jednotková kružnice v kartézské souřadné soustavě.

V souřadné soustavě Oxy sestrojíme jednotkovou kružnici k se středem O. Uvažujme orientované úhly, jejichž vrchol je bod O a počáteční rameno kladná poloosa x, tj. polopřímka OJ, viz obrázek 3.57. Uvažujme orientovaný úhel $J\hat{O}K$, jehož počáteční rameno je OJ a jedna z jeho velikostí je α. Koncové rameno úhlu $J\hat{O}K$ protne jednotkovou kružnici

[12]Kalkulačka počítá v radiánech, pokud ji máme přepnutou na volbu RAD. Každá kalkulačka obsahuje obvykle funkci převádějící stupňovou hodnotu úhlu na radiánovou a naopak.

v bodě $B = [b_1, b_2]$. Tímto způsobem přiřadíme každému reálnému číslu α jednoznačně určené číslo b_1, resp. b_2, tj. první, resp. druhou souřadnici bodu B. Funkce **sinus**, resp. **kosinus** je funkce na množině všech reálných čísel, která každému $\alpha \in \mathbb{R}$ přiřadí číslo b_2, resp. b_1.
Při práci s nově zavedenými funkcemi sinus a kosinus budeme používat zápisy $\sin\alpha$, resp. $\cos\alpha$ případně $\sin x$, resp. $\cos x$.

Z pravoúhlého trojúhelníka ABC na obrázku 3.57 tedy platí:

- $\sin\alpha = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|BC|}{1} = |BC| = b_2$ ... tj. $\sin\alpha$ je y - ová souřadnice bodu B,
- $\cos\alpha = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AC|}{1} = |AC| = b_1$ ... tj. $\cos\alpha$ je x - ová souřadnice bodu B.

Z uvedeného vyplývá, že $B = [\cos\alpha, \sin\alpha]$.

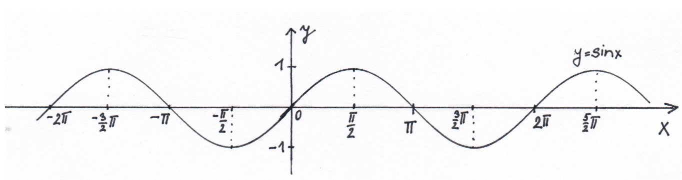
Výše uvedeným způsobem jsme rozšířili definici funkcí $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ pro jakýkoli úhel $\alpha \in \mathbb{R}$.

Toto rozšíření definice funkcí $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ provedl již Leonard Euler (1707 - 1783)[13].

V dalším textu uvedeme některé základní vlastnosti zmíněných funkcí v jejich rozšířené definici (při nákresech jednotlivých funkcí je vhodné používat pravítko pro kreslení funkcí).

funkce $f : y = \sin x$

S ohledem na rozšířenou definici (hodnota $\sin x$ udává hodnotu y-ové souřadnice bodu B ležícího na jednotkové kružnici, viz obrázek 3.57) se hodnoty funkce $f : y = \sin x$ periodicky opakují a kolísají v rozmezí intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Graf funkce $f : y = \sin x$ je uveden na obrázku 3.58.



Obr. 3.58: Graf funkce $f : y = \sin x$.

- $D(f) = \mathbb{R}$ ... definiční obor funkce $f : y = \sin x$ je množina všech reálných čísel, tj. $\sin x$ je definováno pro každé $x \in \mathbb{R}$.
- $H(f) = \langle -1, 1\rangle$ ... obor funkčních hodnot funkce $f : y = \sin x$ je množina všech hodnot intervalu $\langle -1, 1\rangle$, kterých může funkce $\sin x$ nabývat.
- Funkce $f : y = \sin x$ je **lichá**, tj. pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\boxed{\sin(-x) = -\sin x}, \tag{3.11}$$

např. $-1 = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -\sin(+\frac{\pi}{2}) = -1$.

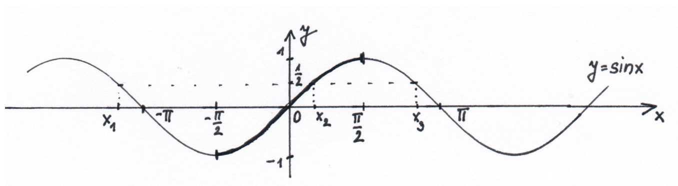
[13]S prvním fyzikálním využitím této rozšířené definice se setkáme v kapitole 4 při popisu rovnoměrného pohybu tělesa po kružnici.

- Funkce $f : y = \sin x$ je **periodická**, tj. její funkční hodnoty se periodicky opakují do nekonečna a pro každé $x \in \mathbb{R}$ a pro každé $k \in \mathbb{Z}$ platí:

$$\sin x = \sin(x + k \cdot 2\pi),$$

kde 2π je délka nejmenší periody. Odtud vyplývá, že na základě studia funkce sinus na intervalu $\langle 0, 2\pi)$ získáme dostatečný přehled o průběhu těchto funkcí na celém jejím definičním oboru, tj. na množině $\mathbb{R}$. Stačí tedy, abychom dále sledovali jen funkci $f : y = \sin x$ pro $x \in \langle 0, 2\pi)$.

- V některých případech známe funkční hodnoty y funkce $f : y = \sin x$ a potřebujeme určit x, pro které $y = \sin x$. Například pro $y = \frac{1}{2}$ hledáme x, pro které platí $\frac{1}{2} = \sin x$. Z obrázku 3.59 je patrno, že hledaných x je nekonečně mnoho, z nichž uvedeme následující:



Obr. 3.59: Graf funkce $f : y = \sin x$, hodnoty x pro $y = \frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2} = \sin x_1 = \sin(-\frac{7\pi}{6})$
$\frac{1}{2} = \sin x_2 = \sin \frac{\pi}{6}$
$\frac{1}{2} = \sin x_3 = \sin \frac{5\pi}{6}$
atd.

Všechna uvedená řešení jsou správná, ovšem kalkulačka najde pouze jedno z nich, a sice úhel x_2 z intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Tento úhel je označován $\frac{\pi}{6} = x_2 = \arcsin \frac{1}{2}$ (čteme: arkussinus jedné poloviny).

- Funkce $f^{-1} : x = \arcsin y$ se nazývá **inverzní funkcí** k funkci $f : y = \sin x$[14]. Platí tedy:

  $D(f^{-1}) = \langle -1, 1 \rangle$
  $H(f^{-1}) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

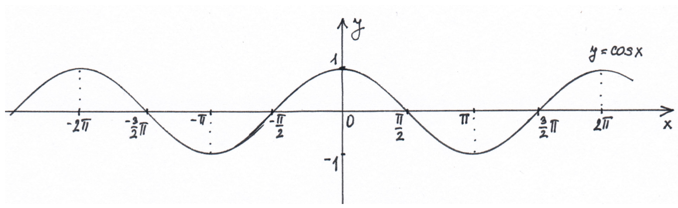
[14]Připomeňme pojem inverzní funkce k funkci f:

- **Inverzní funkce** k *prosté* funkci f je funkce f^{-1}, pro kterou platí
  1. $D_{f^{-1}} = H_f$,
  2. Každému $y \in D_{f^{-1}}$ je přiřazeno právě to $x \in D_f$, pro které je $f(x) = y$.
- Funkce f se nazývá **prostá** právě tehdy, když pro všechna $x_1, x_2 \in D_f$ platí: Je-li $x_1 \neq x_2$, pak $f(x_1) \neq f(x_2)$.

.

funkce $\underline{\underline{f : y = \cos x}}$

S ohledem na rozšířenou definici (hodnota $\cos x$ udává hodnotu x-ové souřadnice bodu B ležícího na jednotkové kružnici viz obrázek 3.57) se funkční hodnoty funkce $f : y = \cos x$ periodicky opakují a kolísají v rozmezí intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Graf funkce $f : y = \cos x$ je uveden na obrázku 3.60.



Obr. 3.60: Graf funkce $f : y = \cos x$.

- $D(f) = \mathbb{R}$ … definiční obor funkce $f : y = \cos x$ je množina všech reálných čísel, tj. $\cos x$ je definováno pro každé $x \in \mathbb{R}$.
- $H(f) = \langle -1, 1\rangle$ … obor hodnot funkce $f : y = \cos x$ je množina všech hodnot intervalu $\langle -1, 1\rangle$, kterých může funkce $\cos x$ nabývat. (Oproti funkci $\sin x$ jsou funkční hodnoty funkce $\cos x$ "posunuty", tj. $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, ale $\sin \frac{\pi}{2} = 1$). Grafy funkcí $\sin x$, $\cos x$ jsou vůči sobě posunuty ve směru osy x o $\frac{\pi}{2}$, tj.

$$\boxed{\cos x = \sin(x + \tfrac{\pi}{2})}. \tag{3.12}$$

- Funkce $f : y = \cos x$ je **sudá**, tj. pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

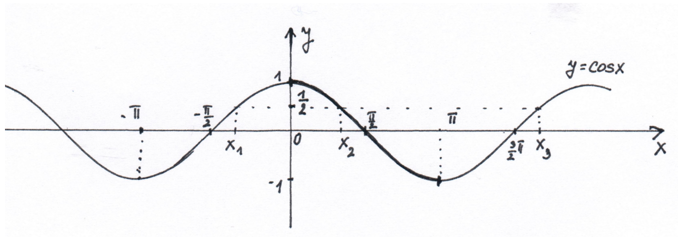
$$\boxed{\cos(-x) = \cos x}, \tag{3.13}$$

  např. $0 = \cos(-\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.
- Funkce $f : y = \cos x$ je **periodická**, tj. její funkční hodnoty se periodicky opakují do nekonečna a pro každé $x \in \mathbb{R}$ a pro každé $k \in \mathbb{Z}$ platí:

  $\cos x = \cos(x + k \cdot 2\pi)$,

  kde 2π je délka nejmenší periody. Analogicky jako v případě funkce $f : y = \sin x$ tedy stačí, abychom dále sledovali jen funkci $f : y = \cos x$ pro $x \in \langle 0, 2\pi)$.
- V některých případech známe funkční hodnoty y funkce $f : y = \cos x$ a potřebujeme určit x, pro které $y = \cos x$. Například pro $y = \frac{1}{2}$ hledáme x, pro které platí $\frac{1}{2} = \cos x$. Z obrázku 3.61 je patrno, že hledaných x je nekonečně mnoho, z nichž uvedeme následující:

  $\frac{1}{2} = \cos x_1 = \cos(-\frac{\pi}{3})$
  $\frac{1}{2} = \cos x_2 = \cos \frac{\pi}{3}$



Obr. 3.61: Graf funkce $f : y = \cos x$, hodnoty x pro $y = \frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2} = \cos x_3 = \cos \frac{5\pi}{3}$
atd.

Všechna uvedená řešení jsou správná, ovšem kalkulačka najde pouze jedno z nich, a sice úhel x_2 z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Tento úhel je označován $\frac{\pi}{3} = x_2 = \arccos \frac{1}{2}$ (čteme: arkuskosinus jedné poloviny).

- Funkce $f^{-1} : x = \arccos y$ je inverzní funkcí k funkci $f : y = \cos x$, platí tedy:
  $D(f^{-1}) = \langle -1, 1 \rangle$
  $H(f^{-1}) = \langle 0, \pi \rangle$.

funkce $f : y = \mathbf{tg}\ x$

Podobně jako u funkcí $\sin x$, $\cos x$ lze využít rozšířenou definici funkce $f : y = \text{tg}\ x$:

$$\text{tg}\ x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

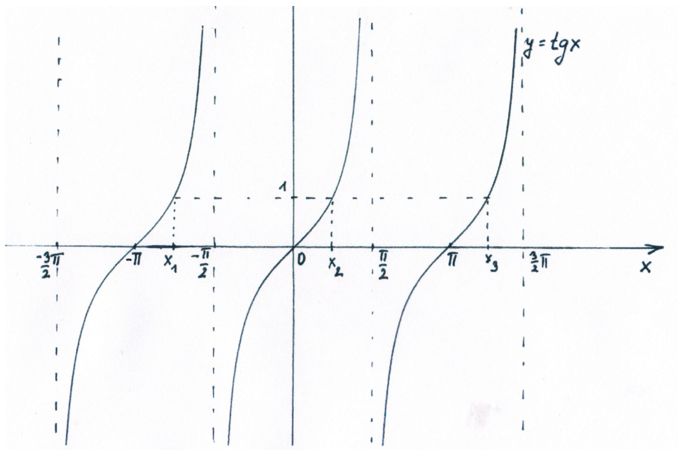
Z uvedeného vztahu je patrno, že pro $\cos x = 0$ není funkce $f : y = \text{tg}\ x$ definována. Tedy na rozdíl od funkcí $\sin x$, $\cos x$ není $\text{tg}\ x$ definováno např. v bodech $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, atd. Graf funkce $f : y = \text{tg}\ x$ je uveden na obrázku 3.62.

- $D(f) = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\}$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Funkce $f : y = \text{tg}\ x$ není tedy definována v bodě $\frac{\pi}{2}$ a v každém bodě, který se od $\frac{\pi}{2}$ liší o celočíselný násobek periody π.
- $H(f) = \mathbb{R}$ ... obor hodnot funkce $f : y = \text{tg}\ x$ je množina všech reálných čísel.
- Funkce $f : y = \text{tg}\ x$ je **lichá**, tj. pro každé reálné číslo $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, kde $k \in \mathbb{Z}$, platí

$$\boxed{\text{tg}\ (-x) = -\text{tg}\ x}. \tag{3.14}$$

  Tuto skutečnost ověříme: $\text{tg}\ (-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\text{tg}\ x$.

- Funkce $f : y = \text{tg}\ x$ je **periodická**, tj. její funkční hodnoty se periodicky opakují do nekonečna a pro každé reálné číslo $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, a pro každé $k \in \mathbb{Z}$, platí:



Obr. 3.62: Graf funkce $f : y = \text{tg } x$.

$\text{tg } x = \text{tg } (x + k \cdot \pi)$,

kde π je délka nejmenší periody funkce $f : y = \text{tg } x$.

- V některých případech známe funkční hodnoty y funkce $f : y = \text{tg } x$ a potřebujeme určit x, pro které $y = \text{tg } x$. Například pro $y = 1$ hledáme x, pro které platí $1 = \text{tg } x$. Z obrázku 3.62 je patrno, že hledaných x je nekonečně mnoho, z nichž uvedeme následující:

  $1 = \text{tg } x_1 = \text{tg } (\frac{\pi}{4} - \pi)$
  $1 = \text{tg } x_2 = \text{tg } \frac{\pi}{4}$
  $1 = \sin x_3 = \text{tg } (\frac{\pi}{4} + \pi)$
  atd.

  Všechna uvedená řešení jsou správná, ovšem kalkulačka najde pouze jedno z nich, a sice úhel $x_2 = \frac{\pi}{4}$ z intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Tento úhel je označován $\frac{\pi}{4} = x_2 = \text{arctg } 1$ (čteme: arkustangens jedné).

- Funkce $f^{-1} : x = \text{arctg } y$ se nazývá inverzní funkcí k funkci $f : y = \text{tg } x$ a platí:

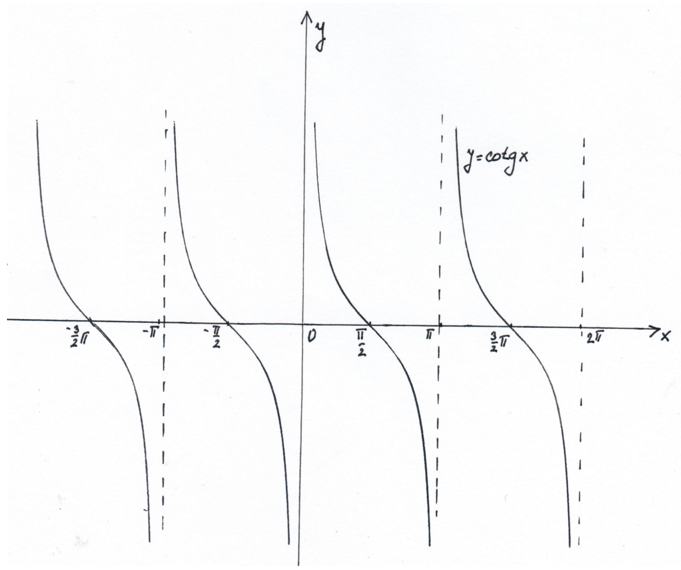
  $D(\text{arctg } y) = \mathbb{R}$
  $H(\text{arctg } y) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

funkce $f : y =$ cotg x

Funkci $f : y = \text{cotg } x$ definujeme vztahem:

$$\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Z uvedeného vztahu je patrno, že pro $\sin x = 0$ není funkce $f : y = \text{cotg } x$ definována. Tedy na rozdíl od funkcí $\sin x$, $\cos x$ není cotg x definováno např. v bodech $-\pi$, 0, π, 2π, atd. Graf funkce $f : y = \text{cotg } x$ je uveden na obrázku 3.63.



Obr. 3.63: Graf funkce $f : y = \text{cotg } x$.

- $D(f) = \mathbb{R} - k \cdot \pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Funkce $f : y = \text{cotg } x$ není tedy definována v bodě π a v každém bodě, který se od π liší o celočíselný násobek periody π.
- $H(f) = \mathbb{R} \ldots$ obor hodnot funkce $f : y = \text{cotg } x$ je množina všech reálných čísel.
- Funkce $f : y = \text{cotg } x$ je **lichá**, tj. pro každé reálné číslo $x \neq k \cdot \pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, platí

$$\boxed{\text{cotg } (-x) = -\text{cotg } x}. \tag{3.15}$$

Tuto skutečnost ověříme: $\text{cotg } (-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{-\cos(x)}{\sin(x)} = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = -\text{cotg } x$.

- Funkce $f : y = \text{cotg } x$ je **periodická**, tj. její funkční hodnoty se periodicky opakují do nekonečna a pro každé reálné číslo $x \neq k \cdot \pi$, a pro každé $k \in \mathbb{Z}$, platí:

  $\text{cotg } x = \text{cotg } (x + k \cdot \pi)$,

  kde π je délka nejmenší periody funkce $f : y = \text{cotg } x$.

- Funkce $f^{-1} : x = \text{arccotg } y$ (čteme: arkuskotangens) se nazývá inverzní funkcí k funkci $f : y = \text{cotg } x$ a platí:

  $D(\text{arccotg } y) = \mathbb{R}$

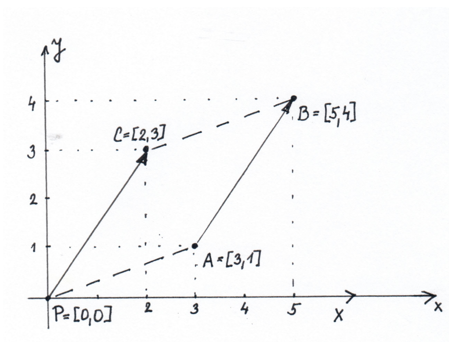
  $H(\text{arccotg } y) = (0, \pi)$.

Funkce $\sin x$, $\cos x$, $\text{tg } x$ a $\text{cotg } x$ se nazývají **goniometrické funkce**, k nim inverzní funkce $\arcsin y$, $\arccos y$, $\text{arctg } y$ a $\text{arccotg } y$ se nazývají **cyklometrické funkce**.

3.4 Souřadnice vektoru

V následujícím textu si popíšeme způsob zavedení souřadnic vektoru určeného orientovanou úsečkou $\vec{AB}$ v rovině, zkráceně vektoru $\vec{AB}$. Uvažujme, že je v rovině zavedena kartézská soustava souřadnic s počátkem v bodě P a souřadnými osami x, y, které prochází bodem P a jsou na sebe kolmé (orientace souřadných os je pravotočivá). V zadané **souřadné soustavě** popíšeme vektor $\vec{AB}$ tím, že mu přiřadíme souřadnice. Tento krok lze provést v rovině třemi způsoby:

a) Chceme určit souřadnice vektoru $\vec{AB}$, viz obrázek 3.64, kde $A = [3, 1]$, $B = [5, 4]$.



Obr. 3.64: Určení souřadnic vektoru $\vec{AB}$ v rovině.

Úsečku AB doplníme na rovnoběžník $ABCP$, kde P je počátek souřadné soustavy, a vektory $\vec{AB}$ a $\vec{PC}$ mají stejný směr i velikost, tj. $\vec{AB} = \vec{PC}$. Pak souřadnice vektoru $\vec{AB}$ jsou stejné jako souřadnice vektoru $\vec{PC}$ a tudíž stejné, jako souřadnice bodu $C = [2, 3]$. Tedy $\vec{AB} = (2, 3)$.
Z výše popsaného zavedení souřadnic vektoru $\vec{AB}$ plyne:

- Stejnými souřadnicemi popisujeme všechny vektory, které mají stejnou velikost a směr jako vektor $\vec{PC}$, tj. souřadnice vektoru závisí na jeho poloze vzhledem ke zvolené kartézské souřadné soustavě.
- Na souřadnice v rovině lze pohlížet dvojím způsobem:
  - hranatými závorkami určujeme souřadnice bodu, např. souřadnice bodu $C = [2, 3]$,
  - kulatými závorkami určujeme souřadnice vektoru, např. souřadnice vektoru $\vec{PC} = (2, 3)$.

  Tedy uspořádané dvojice (obecně n-tice) popisují jak body, tak vektory v rovině, přičemž popis jednotlivých objektů rozlišujeme pouze závorkami.

b) Následující způsob zavedení souřadnic vektoru $\vec{AB}$ využívá **jednotkového vektoru ve směru souřadné osy**. Jednotkové vektory $\vec{i}$, resp. $\vec{j}$ určují kladné směry souřadnicových os x, resp. y, jsou navzájem kolmé a mají jednotkovou velikost:

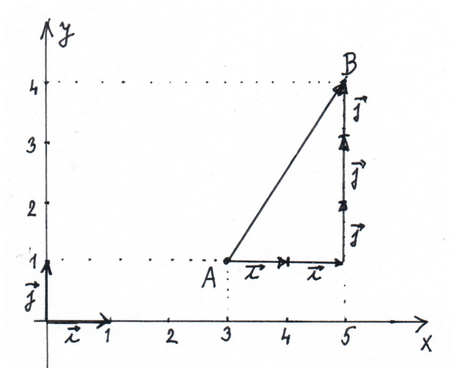
$\vec{i} = (1, 0)$ ... jednotkový vektor v kladném směru osy x,

$\vec{j} = (0, 1)$ ... jednotkový vektor v kladném směru osy y.

Pomocí kolmých jednotkových vektorů $\vec{i}$, $\vec{j}$ můžeme snadno vyjádřit každý další vektor, tedy i vektor $\vec{AB} = (a, b)$:

$$\vec{AB} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}.$$

Pro konkrétní příklad z obrázku 3.65 vyplývá, že $\vec{AB} = 2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j}$, tj. $\vec{AB} = (a, b) = (2, 3)$.



Obr. 3.65: Určení souřadnic vektoru $\vec{AB}$ v rovině prostřednictvím jednotkových vektorů $\vec{i}$, $\vec{j}$.

c) Z výše uvedených úvah je zřejmé, že oba předchozí způsoby zavedení souřadnic vektoru jsou ekvivalentní, tj. souřadnice vektoru $\vec{AB}$ se odlišnými přístupy jejich zavedení nemění. Třetí způsob zavedení souřadnic vektoru $\vec{AB}$ je následující:
Je-li vektor $\vec{u}$ určen orientovanou úsečkou $\vec{AB}$, kde $A = [a_1, a_2]$, B $= [b_1, b_2]$, viz obrázek 3.64, jsou čísla $a = b_1 - a_1$, $b = b_2 - a_2$ v rovině nazývána sořadnicemi vektoru $\vec{AB}$, přičemž tuto skutečnost zapisujeme:

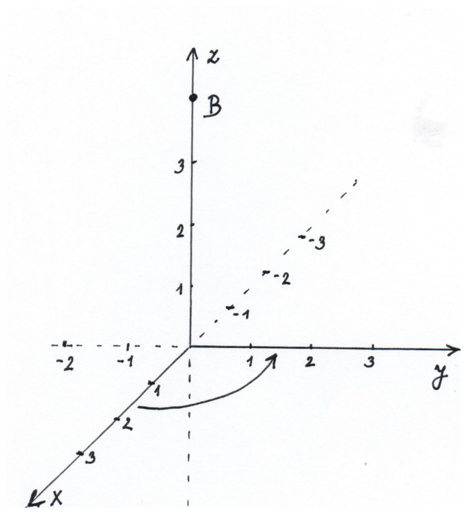
$$\boxed{A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2] \Rightarrow \vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (a, b)}. \tag{3.16}$$

Z výše popsaného vyplývá, že souřadnice vektoru $\vec{AB}$ jsou dány rozdílem souřadnic koncového a počátečního bodu vektoru $\vec{AB}$. Pro $A = [3, 1]$, $B = [5, 4]$ je tedy $\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (5-3, 4-1) = (2, 3)$. Zápis souřadnice vektoru pomocí bodů vede k tomu, že vektor $\vec{u}$ určený orientovanou úsečkou $\vec{AB}$ zapisujeme symbolicky ve tvaru $\vec{u} = B - A$ a bod B zapisujeme symbolicky ve tvaru $B = A + \vec{u}$.

d) Předchozí tři přístupy můžeme využít pro zavedení souřadnic vektoru v prostoru. Uvažujme, že je v trojrozměrném prostoru zavedena kartézská soustava souřadnic s počátkem v bodě P a souřadnými osami x, y, z, které prochází bodem P a jsou na sebe navzájem kolmé (orientace souřadných os je pravotočivá, tj. díváme-li se z bodu B, který leží v kladné části osy z, jak se otáčí osa x směrem k ose y, vidíme otáčení v kladném smyslu, tj. proti směru hodinových ručiček, viz obrázek 3.66). V trojrozměrném prostoru platí pro vektor daný orientovanou úsečkou $\vec{UV}$ vztah analogický vztahu 3.16:

$$\boxed{U = [u_1, u_2, u_3], V = [v_1, v_2, v_3] \Rightarrow \vec{UV} = (v_1 - u_1, v_2 - u_2, v_3 - u_3)}. \tag{3.17}$$

Například pro $U = [2, 1, 0]$, $V = [3, 3, 2]$ máme $\vec{UV} = (3 - 2, 3 - 1, 2 - 0) = (1, 2, 2)$ viz obrázek 3.67.



Obr. 3.66: Pravotočivý souřadný systém.

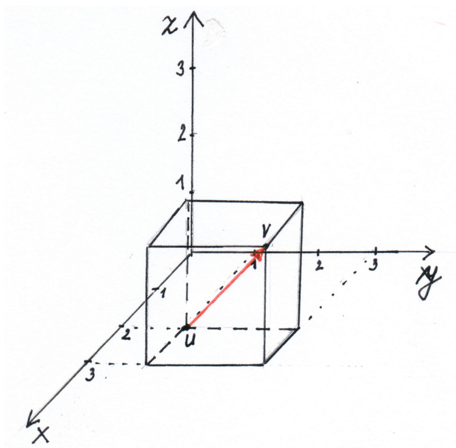
Uvažujme v trojrozměrném prostoru jednotkové vektory $\vec{i}$, resp. $\vec{j}$, resp. $\vec{k}$ určující kladné směry souřadnicových os x, resp. y, resp. z, které jsou navzájem kolmé a mají jednotkovou velikost:

$\vec{i} = (1, 0, 0)$ … jednotkový vektor v kladném směru osy x,
$\vec{j} = (0, 1, 0)$ … jednotkový vektor v kladném směru osy y,
$\vec{k} = (0, 0, 1)$ … jednotkový vektor v kladném směru osy z.

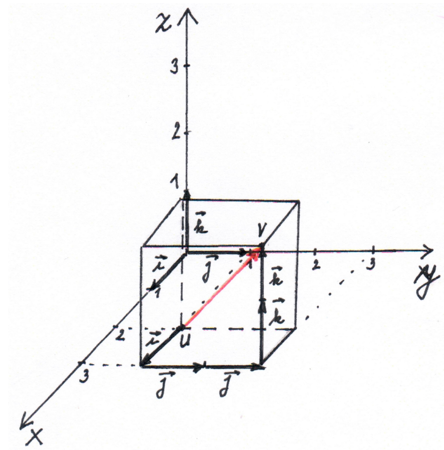
Pomocí kolmých jednotkových vektorů $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ můžeme snadno v trojrozměrném prostoru vyjádřit každý další vektor, tedy i vektor daný orientovanou úsečkou $\vec{UV} = (a, b, c)$ takto:

$$\vec{UV} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k},$$

kde $a = v_1 - u_1$, $b = v_2 - u_2$, $c = v_3 - u_3$, viz obrázek 3.68. Z obrázků 3.67 a 3.68 je patrno, že $\vec{UV} = 1 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k} = (1, 2, 2)$.



Obr. 3.67: Určení souřadnic vektoru $\vec{UV}$ v prostoru.



Obr. 3.68: Určení souřadnic vektoru $\vec{UV}$ v prostoru prostřednictvím jednotkových vektorů $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Poznámka 3.1 Souřadnice vektoru nemusí být vždy celočíselné. Vraťme se k příkladu 3.1 a zvolme soustavu souřadnic tak, aby

- její počátek P splýval s počátečním bodem A cesty,
- směrem jižním uvažujeme jednotkový vektor $\vec{i}$,
- směrem východním uvažujeme jednotkový vektor $\vec{j}$,
- směrem svislým uvažujeme jednotkový vektor $\vec{k}$,

viz obrázek 3.69. Potom $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1\ km$ a

$$\vec{d} = \vec{AD} = \vec{AC} + \vec{CB} + \vec{BD} = a \cdot \vec{j} + b \cdot \vec{i} + c \cdot \vec{k},$$

kde

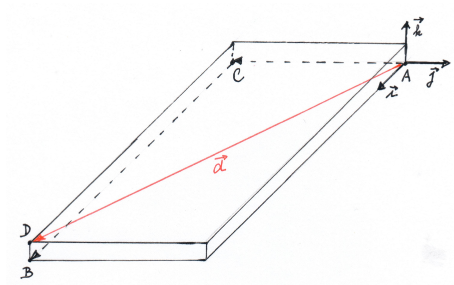
$a = -2,6 \ldots$ hodnota a je záporná, protože vektor $\vec{AC}$ má opačný směr než jednotkový vektor $\vec{j}$,

$b = 3,9 \ldots$ hodnota b je kladná, protože vektor $\vec{CB}$ má stejný směr jako jednotkový vektor $\vec{i}$,

$c = 0,025 \ldots$ hodnota c je kladná, protože vektor $\vec{BD}$ má stejný směr jako jednotkový vektor $\vec{k}$.

Vektor $\vec{d} = \vec{AD}$ je tedy dán souřadnicemi

$$\underline{\underline{\vec{d}}} = a \cdot \vec{j} + b \cdot \vec{i} + c \cdot \vec{k} = -2,6 \cdot \vec{j} + 3,9 \cdot \vec{i} + 0,025 \cdot \vec{k} = \underline{\underline{(3,9; -2,6; 0,025)}}.$$

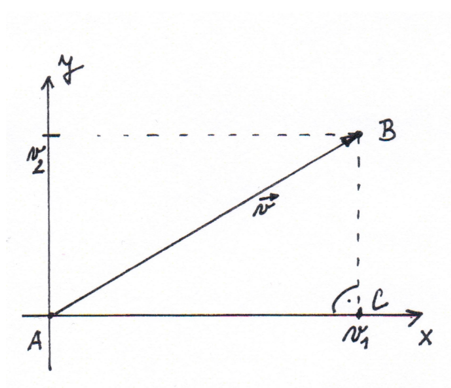


Obr. 3.69: $\vec{AD} = \vec{AC} + \vec{CB} + \vec{BD}$.

Pojem souřadnice vektoru bude v následujícím textu využit pro objasnění vztahu mezi velikostí vektoru a jeho souřadnicemi. **Velikostí vektoru** $\vec{v}$ rozumíme velikost jakékoli orientované úsečky $\vec{AB}$ určující vektor $\vec{v}$. Velikost vektoru $\vec{v}$ označujeme symbolicky $|\vec{v}|$. Jestliže $|\vec{v}| = 1$, hovoříme o **jednotkovém vektoru**.

a) pro velikost $|\vec{v}|$ vektoru $\vec{v} = (v_1, v_2)$ v rovině platí:

$$\boxed{|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \tag{3.18}$$



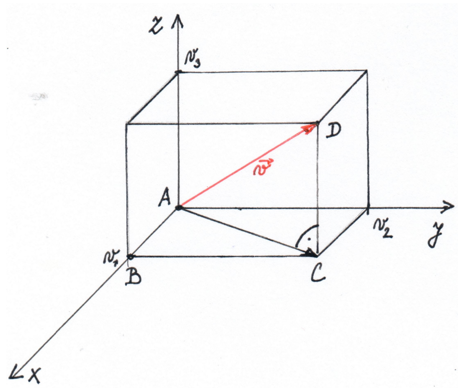
Obr. 3.70: Velikost vektoru $\vec{v}$ v rovině.

Tento vztah vyplývá z Pythagorovy věty, viz obrázek 3.70: posuneme-li počáteční bod A vektoru $\vec{v}$ do počátku soustavy souřadnic, velikosti souřadnic v_1, v_2 vektoru $\vec{v}$ jsou délky odvěsen v pravoúhlém trojúhelníku ABC.

b) pro velikost $|\vec{v}|$ vektoru $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ v prostoru platí analogicky:

$$\boxed{|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \tag{3.19}$$

Tento vztah rovněž plyne z Pythagorovy věty, viz obrázek 3.71, kterou v tomto případě použijeme dvakrát:



Obr. 3.71: Velikost vektoru $\vec{v}$ v prostoru.

Pro pravoúhlý trojúhelník ABC, kde $\vec{AC} = (v_1, v_2, 0)$, platí:

$$|\vec{AC}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Pro pravoúhlý trojúhelník ACD, kde $\vec{v} = \vec{AD} = (v_1, v_2, v_3)$ a $\vec{CD} = (0, 0, v_3)$, platí:

$$|\vec{AD}| = \sqrt{|\vec{AC}|^2 + |\vec{CD}|^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2},$$

což je hledaný vztah pro velikost vektoru $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

3.5 Sčítání vektorů a násobení vektorů skalárem - algebraický přístup

Algebraický přístup sčítání vektorů $\vec{a} + \vec{b}$ a násobení vektoru skalárem $t \cdot \vec{a}$, kde $t \in \mathbb{R}$, vychází ze znalosti jejich souřadnic (není třeba pak vektory graficky sestrojovat). Pro libovolné vektory $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ a libovolné $t \in \mathbb{R}$ platí:

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)} \tag{3.20}$$

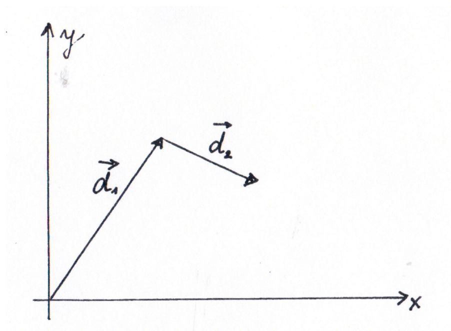
$$\boxed{t \cdot \vec{a} = (t \cdot a_x, t \cdot a_y, t \cdot a_z)}. \tag{3.21}$$

Kontrola 9:

a) Jaká znaménka mají x-ové souřadnice vektorů $\vec{d_1}$, $\vec{d_2}$ na obrázku 3.72?

b) Jaká znaménka mají y-ové souřadnice vektorů $\vec{d_1}$, $\vec{d_2}$ na obrázku 3.72?

c) Jaká jsou znaménka x-ové a y-ové souřadnice vektoru $\vec{d_1} + \vec{d_2}$ na obrázku 3.72?

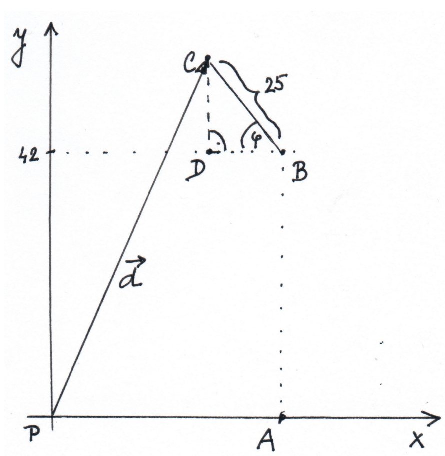


Obr. 3.72: Vektory $\vec{d_1}$, $\vec{d_2}$ a $\vec{d_1} + \vec{d_2}$.

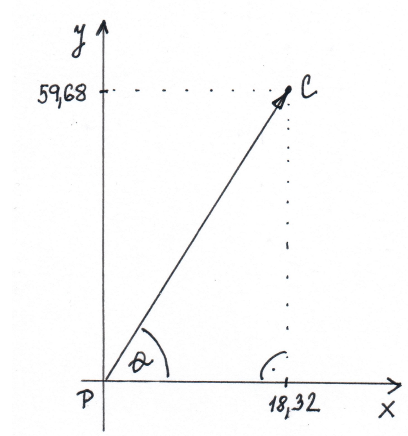
Příklad 3.4 Trasa mototuristické soutěže je vymezena následujícími pokyny: "Od místa startu P jeďte po nejbližší silnici ke kontrolnímu stanovišti A, které je od startu vzdáleno 36 km východním směrem. Další kontrola B leží 42 km severně od A. Cíl C je od stanoviště B vzdálen 25 km na severozápad.

a) Vyjádřete vektor posunutí $\vec{d} = (d_x, d_y)$ z místa startu P na stanoviště C pomocí souřadnic dle obrázku 3.73.

b) Určete velikost a směr vektoru posunutí $\vec{d}$ (směrem vektoru $\vec{d}$ rozumíme úhel θ, který svírá vektor $\vec{d}$ s kladným směrem osy x) dle obrázku 3.74.



Obr. 3.73: Souřadnice vektoru $\vec{d}$.



Obr. 3.74: Velikost a směr vektoru $\vec{d}$.

Řešení:

a) Souřadnice vektoru $\vec{d} = \vec{PC} = (d_x, d_y)$ určíme pro zvolenou kartézskou souřadnou soustavu s počátkem P (v místě startu) a souřadnými osami x, y znázorněnými na obrázku 3.73 (jednotka = 1 km).

Souřadnici d_x vektoru $\vec{d}$ určíme:

$$d_x = 36 + 0 - 25 \cdot \cos 45° = 36 + 0 - 17,68 = 18,32\ km.$$

Podobně určíme souřadnici d_y vektoru $\vec{d}$:

$$d_y = 0 + 42 + 25 \cdot \sin 45° = 0 + 42 + 17,68 = 59,68\ km.$$

Výsledný vektor je $\underline{\underline{\vec{d} = (18,32; 59,68)}}$.

b) Z obrázku 3.74 je patrno, že

$$\underline{\underline{|\vec{d}|}} = |\vec{PC}| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{18,32^2 + 59,68^2} = \underline{\underline{62,43\ km}},$$

$$\text{tg}\ \theta = \frac{d_x}{d_y} = \frac{59,68}{18,32} = 3,26 \Rightarrow \underline{\underline{\theta}} = \text{arctg}\ 3,26 = \underline{\underline{72,9° = 1,27\ rad}}.$$

Příklad 3.5 V souřadnicové rovině xy jsou dány vektory

$\vec{a} = 4,2 \cdot \vec{i} - 1,6 \cdot \vec{j}$,

$\vec{b} = -1,6 \cdot \vec{i} + 2,9 \cdot \vec{j}$,

$\vec{c} = -3,7 \cdot \vec{j}$.

Určete vektor $\vec{r} = \vec{a} + 2 \cdot \vec{b} + 3 \cdot \vec{c}$.

Řešení: Grafický přístup by byl v tomto případě zdlouhavý, takže s výhodou využijeme toho, že jednotlivé vektory jsou zadány prostřednictvím jednotkových vektorů:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{a} + 2 \cdot \vec{b} + 3 \cdot \vec{c} = \\ &= 4,2 \cdot \vec{i} - 1,6 \cdot \vec{j} + 2 \cdot (-1,6 \cdot \vec{i} + 2,9 \cdot \vec{j}) + 3 \cdot (-3,7 \cdot \vec{j}) = \\ &= (4,2 - 2 \cdot 1,6 + 3 \cdot 0) \cdot \vec{i} + (-1,6 + 2 \cdot 2,9 - 3 \cdot 3,7) \cdot \vec{j} = \vec{i} - 6,9 \cdot \vec{j}. \end{aligned}$$

Tedy $\underline{\underline{\vec{r} = (1; -6,9)}}$.

3.6 Skalární a vektorový součin vektorů

3.6.1 Skalární součin vektorů

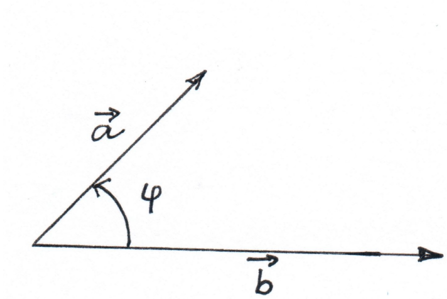
Skalární součin vektorů má zcela jiný význam než násobení vektoru $\vec{a}$ skalárem $t \in \mathbb{R}$. Při násobení vektoru $\vec{a}$ skalárem $t \in \mathbb{R}$ (viz 3.2 a 3.5) je výsledkem vektor $t \cdot \vec{a}$. Výsledkem skalárního součinu dvou vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ je reálné číslo $r \in \mathbb{R}$. Skalární součin dvou vektorů zapisujeme $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Skutečnost, že výsledkem skalárního součinu dvou vektorů je reálné číslo r, zapisujeme $\vec{a} \cdot \vec{b} = r$. Základní vlastnosti **skalárního součinu** dvou vektorů jsou následující:
Pro každé vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (v rovině nebo prostoru) a každé reálné číslo t platí:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$,

2. $(t\vec{a}) \cdot \vec{b} = t(\vec{a} \cdot \vec{b})$,

3. $\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b}$.

V případě vlastnosti $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ hovoříme o tom, že pro skalární součin vektorů platí komutativní zákon.
V následujícím textu nastíníme princip skalárního součinu vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$. Vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ svírají úhel φ viz obrázek 3.75. Pro objasnění skalárního součinu nejdříve najdeme pravoúhlý průmět vektoru $\vec{a}$ do směru vektoru $\vec{b}$ (tj. promítneme vektor $\vec{a}$ do směru vektoru $\vec{b}$) viz obrázek 3.76:

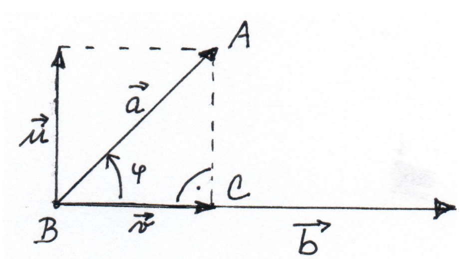


Obr. 3.75: Vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ svírají úhel φ.

a) vektor $\vec{a}$ rozložíme na součet vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ (tj. $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$) tak, aby

$\vec{u} \perp \vec{b}$, tj. vektor $\vec{u}$ je kolmý na vektor $\vec{b}$,

vektor $\vec{v}$ je násobkem vektoru $\vec{b}$, tedy pravoúhlý průmět vektoru $\vec{a}$ do směru vektoru $\vec{b}$.



Obr. 3.76: Pravoúhlý průmět vektoru $\vec{a}$ do směru vektoru $\vec{b}$.

Pro skalární součin navzájem kolmých vektorů $\vec{u}$ a $\vec{b}$ platí: $\vec{u} \cdot \vec{b} = 0$. Pokud vektory $\vec{v}$ a $\vec{b}$ mají stejný směr, platí pro jejich skalární součin: $\vec{v} \cdot \vec{b} = |\vec{v}| \cdot |\vec{b}|$, tj. jejich skalární součin je roven součinu jejich velikostí.
Pro skalární součin vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ tedy dostáváme:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{b} = \vec{u} \cdot \vec{b} + \vec{v} \cdot \vec{b} = \vec{v} \cdot \vec{b} = |\vec{v}| \cdot |\vec{b}|.$$

Z pravoúhlého trojúhelníka ABC platí: $\cos\varphi = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{a}|}$, tedy $|\vec{v}| = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi$. Vztah pro skalární součin vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ je následující:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi}, \tag{3.22}$$

kde φ je úhel, který svírají vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$.

b) Výsledek skalárního součinu dvou vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ nezávisí na vektoru z dané dvojice, v jehož směru hledáme pravoúhlý průmět. V případě, že budeme hledat pravoúhlý průmět vektoru $\vec{b}$ ve směru vektoru $\vec{a}$ (tj. promítneme vektor $\vec{b}$ do směru vektoru $\vec{a}$), výsledek skalárního součinu vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ bude stejný. Vektor $\vec{b}$ nyní rozložíme na součet vektorů $\vec{k}$, $\vec{l}$, tj. $\vec{b} = \vec{k} + \vec{l}$ tak, aby

$\vec{l} \perp \vec{a}$, tj. vektor $\vec{l}$ je kolmý na vektor $\vec{a}$,

vektor $\vec{k}$ je násobkem vektoru $\vec{a}$, tedy pravoúhlý průmět vektoru $\vec{b}$ do směru vektoru $\vec{a}$

Pro skalární součin navzájem kolmých vektorů $\vec{l}$ a $\vec{a}$ platí: $\vec{l} \cdot \vec{a} = 0$. Pokud vektory $\vec{k}$ a $\vec{a}$ mají stejný směr, platí pro jejich skalární součin: $\vec{k} \cdot \vec{a} = |\vec{k}| \cdot |\vec{a}|$, tj. jejich skalární součin je roven součinu jejich velikostí.
Pro skalární součin vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ tedy dostáváme:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\vec{k} + \vec{l}) = \vec{a} \cdot \vec{k} + \vec{a} \cdot \vec{l} = \vec{a} \cdot \vec{k} = |\vec{a}| \cdot |\vec{k}|.$$

Z pravoúhlého trojúhelníka OPQ dle obrázku 3.77 platí: $\cos\varphi = \frac{|\vec{k}|}{|\vec{b}|}$, tedy $|\vec{k}| = |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$. Znovu získáváme vztah

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

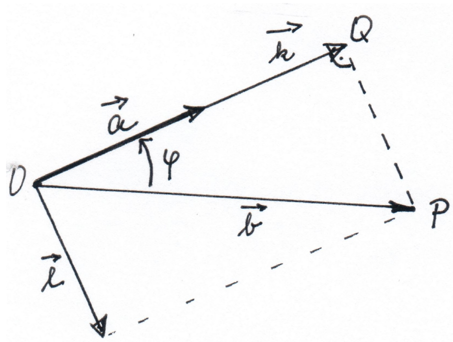
kde φ je úhel, který svírají vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$.

- Vztahu 3.22 považujeme za definici skalárního součinu vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$. Je z něj patrné využití skalárního součinu ve fyzice. S promítáním jednoho vektoru do směru vektoru druhého jsme se setkali již při výpočtu práce: Uvažujme situaci, že posouváme těleso ve směru daném vektorem $\vec{d}$ z místa A do místa B a působíme na něj silou $\vec{F}$. Pro zjištění velikosti práce W při tomto posunutí nalezneme pravoúhlý průmět vektoru $\vec{F}$ do směru posunutí vektoru $\vec{d}$ viz obrázek 3.78, přičemž platí

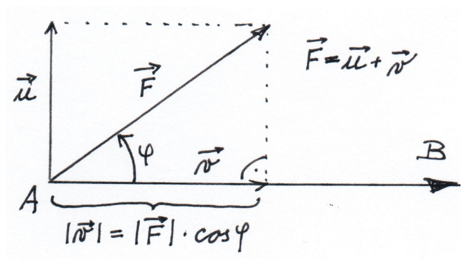
$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{d} = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos\varphi}, \tag{3.23}$$

kde $\vec{F} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} \perp \vec{v}$, $|\vec{v}| = |\vec{F}| \cdot \cos\varphi$; vektor $\vec{u}$ je kolmý na směr posunutí daného vektorem $\vec{d}$ a nemá vliv na vykonanou práci W, vektor $\vec{v}$ je kolmý průmět vektoru $\vec{F}$ do směru $\vec{d}$.

S dalšími oblastmi využití skalárního součinu se seznámíme v pozdějších kapitolách.



Obr. 3.77: Pravoúhlý průmět vektoru $\vec{b}$ do směru vektoru $\vec{a}$.



Obr. 3.78: $\vec{F} = \vec{u} + \vec{v}$.

- Dosud byl skalární součin představen pouze z pozice velikosti a směru vektorů. V následujícím textu si přiblížíme určení skalárního součinu vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ v prostoru daných souřadnicemi $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Pro odvození skalárního součinu vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ daných souřadnicemi využijeme jednotkových vektorů $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ve směru souřadných os x, y, z kartézské souřadné soustavy. Ze vztahů

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}, \\ \vec{b} &= b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}\end{aligned}$$

vyplývá

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \cdot (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = \\ a_x \cdot b_x \cdot \vec{i} \cdot \vec{i} + a_x \cdot b_y \cdot \vec{i} \cdot \vec{j} + a_x \cdot b_z \cdot \vec{i} \cdot \vec{k} + \\ a_y \cdot b_x \cdot \vec{j} \cdot \vec{i} + a_y \cdot b_y \cdot \vec{j} \cdot \vec{j} + a_y \cdot b_z \cdot \vec{k} \cdot \vec{j} + \\ a_z \cdot b_x \cdot \vec{k} \cdot \vec{i} + a_z \cdot b_y \cdot \vec{k} \cdot \vec{j} + a_z \cdot b_z \cdot \vec{k} \cdot \vec{k}.\end{aligned}$$

Jednotkové vektory jsou navzájem kolmé, tedy platí: $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$. Dosadíme-li tento vztah do předchozí rovnosti, získáme vztah pro skalární součin vektorů $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ v prostoru v závislosti na jejich souřadnicích.

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}. \tag{3.24}$$

Pro jednotkové vektory dále platí $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$, tj. $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$.

Kontrola 10: Jsou dány velikosti vektorů $|\vec{c}| = 3$, $|\vec{d}| = 4$. Jaký úhel tyto vektory svírají, jestliže pro jejich skalární součin platí:

a) $\vec{c} \cdot \vec{d} = 0$,

b) $\vec{c} \cdot \vec{d} = 12$,

c) $\vec{c} \cdot \vec{d} = -12$?

Příklad 3.6 Jaký úhel svírají vektory $\vec{a} = 3 \cdot \vec{i} - 4 \cdot \vec{j}$, $\vec{b} = -2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{k}$ v prostoru?

Řešení: Využijeme dvojího způsobu výpočtu skalárního součinu $\vec{a} \cdot \vec{b}$:

a) Určíme nejdříve skalární součin vektorů $\vec{a} \cdot \vec{b}$ daných souřadnicemi $\vec{a} = (3, -4, 0)$, $\vec{b} = (-2, 0, 3)$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-2) - 4 \cdot 0 + 0 \cdot 3 = \underline{\underline{-6}}$$

b) V dalším kroku určíme velikost vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ daných souřadnicemi $\vec{a} = (3, -4, 0)$, $\vec{b} = (-2, 0, 3)$ dle 3.18:

$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

$|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + (0)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

Výsledné hodnoty pak dosadíme do vztahu 3.22 a získáme:

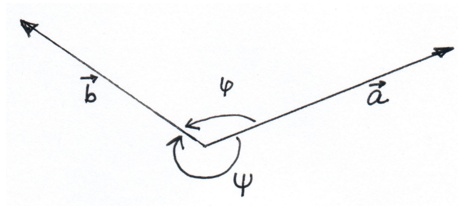
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = \underline{\underline{5 \cdot \sqrt{13} \cdot \cos\varphi}}$$

c) Platí $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6$. Dosazením do rovnosti viz výše dostáváme $-6 = 5 \cdot \sqrt{13} \cdot \cos\varphi$, tj.

$$\underline{\underline{\varphi}} = \arccos\left(\frac{-6}{5 \cdot \sqrt{13}}\right) = \arccos(-0,3328) = \underline{\underline{1,91\ rad = 109,44^\circ}}$$

Vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ svírají úhel $1,91\ rad$, což je $109,44^\circ$.

Poznámka 3.2 Pod úhlem, který vektory svírají, máme vždy na mysli menší z úhlů φ, ψ (viz obrázek 3.79). Kalkulačka vždy pro funkci arccos nalezne menší z hodnot, neboť vybírá hodnoty z intervalu $\langle 0, 180^\circ \rangle$, tj. z $\langle 0, \pi \rangle$.



Obr. 3.79: Vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ svírají úhel φ.

3.6.2 Vektorový součin vektorů

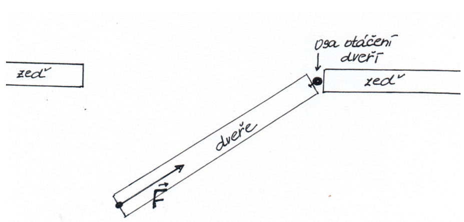
Seznámili jsme se v předchozím textu se skalárním součinem dvou vektorů - pravidlem, které každým dvěma vektorům přiřadilo číslo (skalár). Nyní zavedeme vektorový součin, který každým dvěma vektorům v prostoru přiřadí opět vektor v prostoru. Vektorový součin zavedeme pomocí geometrických vlastností a později si ukážeme, jak se jeho souřadnice vypočítají ze souřadnic uvažovaných vektorů.
Vektorový součin dvou vektorů, které leží na jedné přímce, je nulový vektor. Vektorový součin dvou vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ neležících na jedné přímce je vektor $\vec{w}$, který má následující vlastnosti:

1. vektor $\vec{w}$ je kolmý k oběma vektorům $\vec{u}$, $\vec{v}$,

2. vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ tvoří pravotočivou bázi,

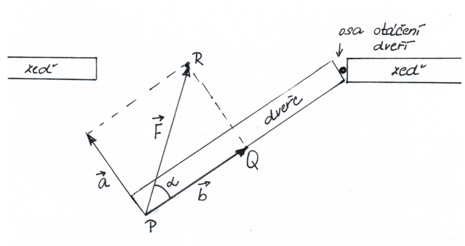
3. $|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\alpha$, kde α je úhel vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$. Vektorový součin $\vec{w}$ vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ značíme $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.

Výše uvedená definice vektorového součinu je uvedena z pohledu matematického. Následující motivující případ vysvětlí tento pojem z fyzikálního hlediska.



Obr. 3.80: Síla $\vec{F}$ působí v rovině dveří.

Uvažujme těleso, které se otáčí kolem své osy - například dveře, které se otáčí kolem svých pantů. Dveře jsou otevřené a chceme je zavřít, viz obrázek 3.80. Položme si následující otázku: "Co se stane, pokud budeme do dveří působit silou $\vec{F}$ přímo směrem k ose otáčení, tj. síla $\vec{F}$ bude působit v rovině dveří?" Odpověď se v tomto případě jeví zřejmá: nestane se nic, ač působíme směrem k ose otáčení silou hodně velkou. Jinými slovy, dveře se nepohnou, neboť schopnost síly $\vec{F}$ dveřmi otočit (= moment síly vzhledem k otáčení)



Obr. 3.81: Síla $\vec{F}$ působí mimo rovinu dveří.

je nulová. Aby došlo k pootočení dveří, musí síla $\vec{F}$ působit nikoli směrem k ose otáčení, ale mimo rovinu dveří.

Uvažujme situaci na obrázku 3.81. Síla daná vektorem $\vec{F}$ působí rovnoběžně s podlahou (tj. v rovině ρ, která je kolmá na osu otáčení) na dveře mimo směr osy otáčení. Sílu $\vec{F}$ uvažujeme jako výslednici součtu dvou sil daných vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, kde

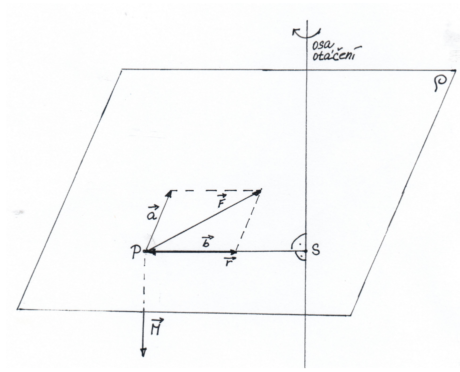
- vektor $\vec{b}$ reprezentuje sílu působící v rovině ρ směrem k ose otáčení, tj. v rovině dveří (vektor $\vec{b}$ je pravoúhlým průmětem síly $\vec{F}$ do směru kolmého na osu otáčení v rovině dveří); otáčivý moment síly $\vec{b}$ je nulový,

- vektor $\vec{a}$ reprezentuje sílu působící v rovině ρ, který je kolmý na vektor $\vec{b}$; síla daná vektorem $\vec{a}$ dává dveřím největší otáčivý moment.

Z obrázku 3.81 je navíc zřejmé, že $|\vec{a}| = |\vec{F}| \cdot \sin\alpha$, což vyplývá z pravoúhlého trojúhelníka PQR, v němž orientované úsečky PQ, resp. PR, resp. QR reprezentují vektory sil $\vec{b}$, resp. $\vec{F}$, resp. $\vec{a}$ a α je úhel při vrcholu P, který svírají vektory sil $\vec{b}$, $\vec{F}$.
Následující text směřuje k formulaci **momentu síly vzhledem k ose otáčení**. Vyjděme z obrázku 3.82, na kterém je vyobrazen bod P, který se volně otáčí v rovině ρ kolem pevné osy kolmé k rovině ρ. Na bod P působí v rovině ρ síla $\vec{F}$. Rovina ρ protíná osu otáčení v bodě S. Vektor s počátečním bodem S a koncovým bodem P označíme $\vec{r}$. Vektory $\vec{r}$ a $\vec{F}$ svírají úhel α. Uvažujme dále vektor síly $\vec{F}$ jako součet dvou vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ v rovině ρ, kde $\vec{b}$ je kolmý průmět vektoru $\vec{F}$ do směru vektoru $\vec{r}$ (tzv. radiální složka síly $\vec{F}$) a vektor $\vec{a}$ je kolmý na vektor $\vec{b}$ (tzv. tečná složka síly $\vec{F}$, která způsobí otáčení bodu P okolo osy). Schopnost síly $\vec{F}$ otáčet bodem P závisí na velikosti tečné složky síly $\vec{F}$, ale i na vzdálenosti bodu P od bodu S. Vektorová veličina, která bere oba tyto vlivy v úvahu se nazývá **moment síly** $\vec{M}$ vzhledem k ose otáčení. Velikost momentu síly $|\vec{M}|$ definujeme vztahem:

$$\boxed{|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin\alpha}, \tag{3.25}$$

kde $|\vec{a}| = |\vec{F}| \cdot \sin\alpha$. Zároveň platí, že čím je větší vzdálenost bodu P od osy otáčení, tím je větší i moment síly $\vec{M}$ (z toho důvodu se klika dveří umisťuje co nejdále od osy otáčení).

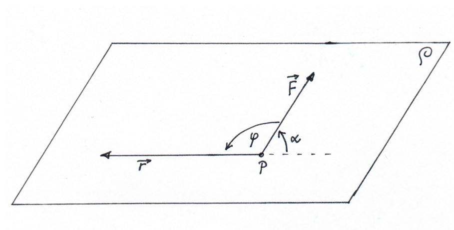


Obr. 3.82: Moment síly $\vec{M}$.

Umístíme-li vektory $\vec{r}$, $\vec{a}$ do stejného počátečního bodu P (obrázek 3.83), můžeme psát

$$|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin\varphi,$$

kde φ je úhel, který svírají vektory $\vec{r}$, $\vec{F}$.



Obr. 3.83: Vektory $\vec{r}$, $\vec{F}$ svírají úhel φ.

Poznámka 3.3 V následujícím textu uvedeme důležité pravidlo:

směr vektoru $\vec{M}$ je rovnoběžný s osou otáčení a je orientován tak, aby vektory $\vec{r}$, $\vec{F}$, $\vec{M}$ tvořily tzv. pravotočivý systém.

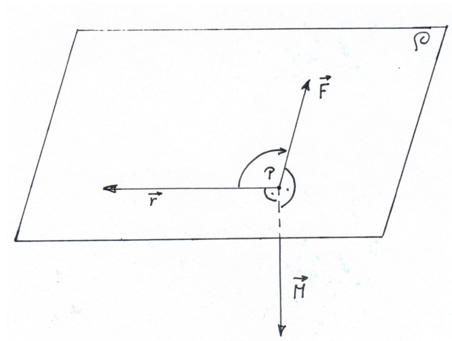
V tomto případě záleží na pořadí vektorů $\vec{r}$, $\vec{F}$, $\vec{M}$, jejichž počáteční bod je bod P, viz obrázek 3.84. Díváme-li se z koncového bodu vektoru $\vec{M}$, musíme pozorovat otáčení od 1. vektoru ($\vec{r}$) k 2. vektoru ($\vec{F}$) v kladném smyslu.

Zjednodušeně řečeno, pokud se osa otáčí v kladném, resp. záporném smyslu, vektor $\vec{M}$ směřuje nahoru, resp. dolů.

Definici momentu síly vzhledem k ose otáčení z 3.25 lze zapsat i ve tvaru vektorového součinu:

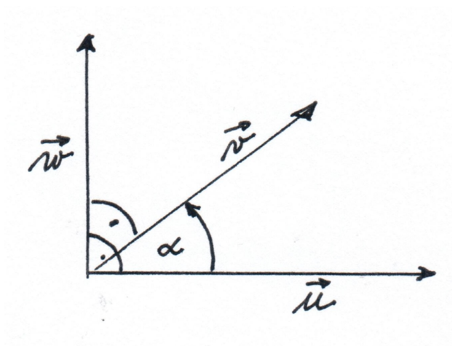
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{3.26}$$

Směr momentu síly jako vektorové veličiny je podle 3.26 kolmý k rovině vektorů $\vec{r}$, $\vec{F}$. Jeho velikost je dána vztahem 3.25 a orientaci určuje pravidlo pravé ruky.

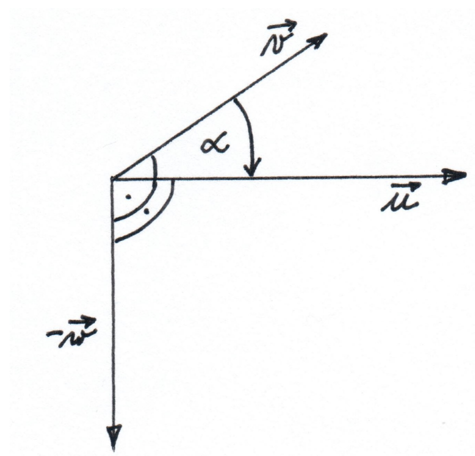


Obr. 3.84: Vektory $\vec{r}$, $\vec{F}$, $\vec{M}$ tvoří pravotočivý systém.

- Z výše uvedeného je patrno, že vektorový součin vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ záleží na jejich pořadí. Šipky na obrázku 3.85 a 3.86 ukazují směr otáčení od prvního vektoru ke druhému.



Obr. 3.85: Otočení vektoru u směrem k vektoru v.



Obr. 3.86: Otočení vektoru v směrem k vektoru u.

Zaměníme-li pořadí vektorů ve vektorovém součinu, velikost výsledku zůstává stejná, ale změní se směr výsledného vektoru. Na rozdíl od skalárního součinu dvou vektorů neplatí pro vektorový součin dvou vektorů tzv. komutativní zákon, tedy

$$\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{v} \times \vec{u}.$$

A obecně platí:

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{u} \times \vec{v}.$$

- Výpočet vektorového součinu $\vec{u} \times \vec{v}$, jsou-li vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ trojrozměrného prostoru zadány v kartézské souřadné soustavě souřadnicemi $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, je následující:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Výrazu na pravé straně rovnosti se obecně říká **determinant řádu** n (v našem případě se determinant skládá ze tří řádků a tří sloupců, hovoříme tedy o determinantu řádu 3). V tuto chvíli se nebudeme zabývat samotným pojmem determinantu a jeho využití, uvedeme si však pravidlo pro výpočet determinantu 3. řádu, tzv. **Sarusovo pravidlo**:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + a_2 \cdot b_3 \cdot c_1 + a_3 \cdot b_1 \cdot c_2 - a_3 \cdot b_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot b_3 \cdot c_2 - a_2 \cdot b_1 \cdot c_3.$$

Sarusovo pravidlo použijeme pro výpočet vektorového součinu vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot u_2 \cdot v_3 + \vec{j} \cdot u_3 \cdot v_1 + \vec{k} \cdot u_1 \cdot v_2 - v_1 \cdot u_2 \cdot \vec{k} - v_2 \cdot u_3 \cdot \vec{i} - v_3 \cdot u_1 \cdot \vec{j}.$$

Na pravé straně rovnosti vytkneme jednotkové vektory a získáme

$$\begin{aligned} &\vec{i} \cdot u_2 \cdot v_3 + \vec{j} \cdot u_3 \cdot v_1 + \vec{k} \cdot u_1 \cdot v_2 - v_1 \cdot u_2 \cdot \vec{k} - v_2 \cdot u_3 \cdot \vec{i} - v_3 \cdot u_1 \cdot \vec{j} = \\ &\quad \vec{i} \cdot (u_2 \cdot v_3 - v_2 \cdot u_3) + \vec{j} \cdot (u_3 \cdot v_1 - v_3 \cdot u_1) + \vec{k} \cdot (u_1 \cdot v_2 - v_1 \cdot u_2). \end{aligned}$$

Je potřeba si zde uvědomit, že získané hodnoty v závorkách z předchozího vztahu, tj. $u_2 \cdot v_3 - v_2 \cdot u_3$, $u_3 \cdot v_1 - v_3 \cdot u_1$, $u_1 \cdot v_2 - v_1 \cdot u_2$, jsou reálná čísla. Do posledně uvedeného vztahu dosadíme za jednotkové vektory jejich souřadnice $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ a získáváme:

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot (u_2 \cdot v_3 - v_2 \cdot u_3) + \vec{j} \cdot (u_3 \cdot v_1 - v_3 \cdot u_1) + \vec{k} \cdot (u_1 \cdot v_2 - v_1 \cdot u_2) &= \\ (1, 0, 0) \cdot (u_2 \cdot v_3 - v_2 \cdot u_3) + (0, 1, 0) \cdot (u_3 \cdot v_1 - v_3 \cdot u_1) + (0, 0, 1) \cdot (u_1 \cdot v_2 - v_1 \cdot u_2) &= \\ (u_2 \cdot v_3 - v_2 \cdot u_3, u_3 \cdot v_1 - v_3 \cdot u_1, u_1 \cdot v_2 - v_1 \cdot u_2)&. \end{aligned}$$

Nyní ještě shrneme všechny předchozí poznatky do vztahu:

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 \cdot v_3 - v_2 \cdot u_3, u_3 \cdot v_1 - v_3 \cdot u_1, u_1 \cdot v_2 - v_1 \cdot u_2)} \tag{3.27}$$

Kontrola 11: Jsou dány vektory $\vec{c}$, $\vec{d}$, kde $|\vec{c}| = 3$, $|\vec{d}| = 4$. Jaký úhel svírají vektory $\vec{c}$, $\vec{d}$, je-li dáno

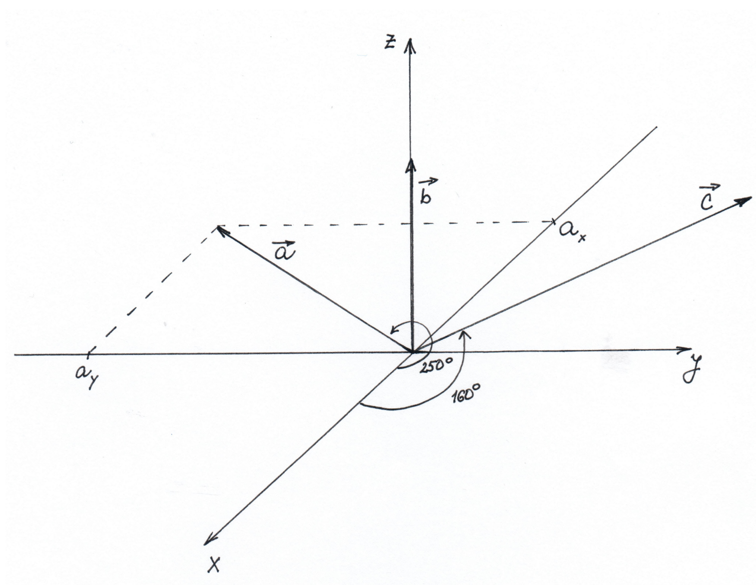
a) $\vec{c} \times \vec{d} = \vec{o}$,

b) $|\vec{c} \times \vec{d}| = 12$.

Příklad 3.7 Na obrázku 3.87 je dána kartézská souřadná soustava s navzájem kolmými osami x, y, z, které reprezentují jednotkové vektory $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. V rovině dané osami x a y je dán vektor $\vec{a}$, který s kladným směrem osy x svírá úhel 250° a $|\vec{a}| = 18$ jednotek. Dále je dán vektor $\vec{b}$, který je násobkem jednotkového vektoru $\vec{k}$ reprezentujícího osu z a $|\vec{b}| = 12$ jednotek. Vypočtěte

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$,

b) $\vec{a} \times \vec{b}$.



Obr. 3.87: Ilustrace k příkladu 3.7.

Řešení:

a) Vzhledem k tomu, že vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ jsou kolmé, platí $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

b) Označme $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$. Musí platit

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin 90° = 18 \cdot 12 \cdot 1 = 216 \text{ jednotek.}$$

Vektor $\vec{c}$ musí být kolmý na rovinu určenou vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ (zejména $\vec{b} \perp \vec{c}$, tj. vektor $\vec{c}$ bude ležet v rovině určené osami x, y a svírat s kladným směrem osy x úhel o 90° menší než svírá vektor $\vec{a}$.

Pro odlišný způsob výpočtu využijeme souřadnic:

$$
\begin{aligned}
&a_x = |\vec{a}| \cdot \cos 250° = 18 \cdot (-0,342) \doteq -6,156,\\
&a_y = |\vec{a}| \cdot \sin 250° = 18 \cdot (-0,939) \doteq -16,914,\\
&a_z = 0 \ldots \text{ vektor } \vec{a} \text{ totiž leží v rovině určené osami } x,\ y \Rightarrow\\
&\vec{a} = (-6,156; -16,914; 0),\ \vec{b} = (0,0,12).
\end{aligned}
$$

Pak

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6,156 \cdot 0 - 16,914 \cdot 0 + 0 \cdot 12 = 0$

b)

$$
\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6,156 & -16,914 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = -\vec{i} \cdot 12 \cdot -16,914 + \vec{o} + \vec{o} - \vec{o} - \vec{o} - \vec{j} \cdot 12 \cdot (-6,156) =
$$

$$
(12 \cdot 16,914; 12 \cdot 6,156; 0) = \underline{\underline{(202,968; 78,72; 0)}}
$$

Příklad 3.8 Určete vektorový součin $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ v prostoru, kde $\vec{a} = 3 \cdot \vec{i} - 4 \cdot \vec{j}$, $\vec{b} = -2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{k}$

Řešení: $\vec{a} = (3, -4, 0)$, $\vec{b} = (-2, 0, 3)$, tj.

$$
\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -12 \cdot \vec{i} + \vec{o} + \vec{o} - 8 \cdot \vec{k} - \vec{o} - 9 \cdot \vec{j} = \underline{\underline{(-12; -9; -8)}}.
$$

Jiný možný způsob zápisu je $\vec{c} = -12 \cdot \vec{i} - 9 \cdot \vec{j} - 8 \cdot \vec{k}$.

3.7 Otázky k opakování kapitoly 3

Otázka 3.1 *Jaký je rozdíl mezi vektorem a skalárem?*

Otázka 3.2 *Uveďte příklady vektorových a skalárních veličin.*

Otázka 3.3 *Jak lze graficky sečíst vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$?*

Otázka 3.4 *Jaký je princip komutativního zákona pro sčítání vektorů?* 3.3

Otázka 3.5 *Jaký je princip asociativního zákona pro sčítání vektorů?* 3.4

Otázka 3.6 *Jak lze graficky provést odčítání vektorů $\vec{a} - \vec{b}$?*

Otázka 3.7 *Jak lze graficky vynásobit vektor $\vec{a}$ skalárem s?*

Otázka 3.8 *Jak se spočítá práce potřebná na posunutí skříně podél stěny?* 3.8

Otázka 3.9 *Vyjádřete práci z předchozí úlohy, pokud $\vec{F}$ svírá se stěnou úhel α.* 3.9

Otázka 3.10 *Co je to kartézská soustava souřadnic v rovině, resp. v prostoru?*

Otázka 3.11 *Uveďte rozšířenou definici funkcí* $\sin x$*,* $\cos x$ *(v úhlové nebo obloukové míře).*

Otázka 3.12 *Co je to plný a přímý úhel? Jakou má velikost v úhlové i v obloukové míře?*

Otázka 3.13 *Co je jednotkou stupňové, resp. obloukové míry?*

Otázka 3.14 *Jak lze převést stupně na radiány a naopak? (3.10)*

Otázka 3.15 *Nakreslete graf funkce* $\sin x$*.*

Otázka 3.16 *Uveďte některé vlastnosti funkce* $\sin x$ *(*$D(f)$*,* $H(f)$*,* $\sin(-x)$*,...).*

Otázka 3.17 *Uveďte vlastnosti inverzního procesu funkce* $\arcsin y$ *(*$D(f)$*,* $H(f)$*, obrázek,...).*

Otázka 3.18 *Nakreslete graf funkce* $\cos x$*.*

Otázka 3.19 *Uveďte některé vlastnosti funkce* $\cos x$ *(*$D(f)$*,* $H(f)$*,* $\cos(-x)$*,...).*

Otázka 3.20 *Uveďte vlastnosti inverzního procesu funkce* $\arccos y$ *(*$D(f)$*,* $H(f)$*, obrázek,...).*

Otázka 3.21 *Nakreslete graf funkce tg* x*.*

Otázka 3.22 *Uveďte některé vlastnosti funkce tg* x *(*$D(f)$*,* $H(f)$*, tg* $(-x)$*,...).*

Otázka 3.23 *Uveďte vlastnosti inverzního procesu funkce arctg* y *(*$D(f)$*,* $H(f)$*, obrázek,...).*

Otázka 3.24 *Nakreslete graf funkce cotg* x*.*

Otázka 3.25 *Uveďte některé vlastnosti funkce cotg* x *(*$D(f)$*,* $H(f)$*, cotg* $(-x)$*,...).*

Otázka 3.26 *Uveďte vlastnosti inverzního procesu funkce arccotg* y *(*$D(f)$*,* $H(f)$*, obrázek,...).*

Otázka 3.27 *Jakým způsobem definujeme souřadnice vektoru v dané kartézské soustavě? (3.16)*

Otázka 3.28 *Co jsou to jednotkové vektory* $\vec{i}$*,* $\vec{j}$*,* $\vec{k}$*?*

Otázka 3.29 *Jak se počítá velikost vektoru* $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$*? (3.18)*

Otázka 3.30 *Jak provedeme algebraicky sčítání dvou vektorů* $\vec{a}$*,* $\vec{b}$*?*

Otázka 3.31 *Jak provedeme algebraicky násobení vektoru* $\vec{a}$ *skalárem* $t \in \mathbb{R}$*?*

Otázka 3.32 *Jak definujeme skalární součin vektorů* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *(pomocí úhlu* φ*, který vektory* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *svírají)? (3.22)*

Otázka 3.33 *Jak lze určit práci při posunutí skříně pomocí skalárního součinu vektorů* $\vec{a}$, $\vec{b}$*? (3.23)*

Otázka 3.34 *Je skalární součin vektorů* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *komutativní operace?*

Otázka 3.35 *Jak lze spočítat skalární součin vektorů* $\vec{a}$, $\vec{b}$*, jsou - li zadány jejich souřadnice, tj.* $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$*? (3.24)*

Otázka 3.36 *Jak lze určit úhel, který svírají vektory* $\vec{a}$, $\vec{b}$*?*

Otázka 3.37 *Jak lze určit moment síly* $\vec{F}$ *vzhledem k ose otáčení?*

Otázka 3.38 *Jak definujeme vektorový součin vektorů* $\vec{u}$, $\vec{v}$*?*

Otázka 3.39 *Je vektorový součin vektorů* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *komutativní operací?*

Otázka 3.40 *Jak vypočteme determinant 3. řádu pomocí Sarusova pravidla?*

Otázka 3.41 *Odvoďte vektorový součin* $\vec{u} \times \vec{v}$*. (3.27)*

Otázka 3.42 *Jak lze určit moment síly pomocí vektorového součinu?*

4 Dvojrozměrný a trojrozměrný pohyb

Jeden z cirkusových kousků rodiny Zacchiniových spočíval v tom, že se jeden z nich nechal vystřelit z děla, přeletěl tři ruská kola v zábavním parku a překonal vzdálenost 68,6 m. Nabízí se otázka, jak mohl Emanuel Zacchini vědět,

- že dosáhne takové výšky, aby ruská kola přeletěl?
- kam umístit záchrannou síť?

4.1 Dvojrozměrný a trojrozměrný pohyb

V kapitole 2 jsme se zabývali popisem přímočarého pohybu - nyní rozšíříme tyto úvahy a pojmy na popis pohybu částice v rovině nebo prostoru. Nejdůležitější pojmy, které se pohybu částice týkají, jsou: poloha, rychlost a zrychlení. Tyto pojmy převezmeme z kapitoly 2, ovšem pro jejich rozšíření ve vícerozměrných prostorech využijeme vektorové algebry z kapitoly 3, která je umožňuje přehledně popsat.

4.2 Poloha a posunutí

Při pohybu hmotného bodu (částice) po přímce jsme využívali pro popis jeho polohy v čase t funkci $x(t)$. Polohu hmotného bodu při obecném pohybu v prostoru popisujeme jeho **polohovým vektorem** $\vec{r}$, který spojuje předem zvolený vztažný bod (obvykle počátek souřadné soustavy) s tímto hmotným bodem. V kartézské souřadné soustavě pak vektor $\vec{r}$ zapisujeme ve tvaru

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

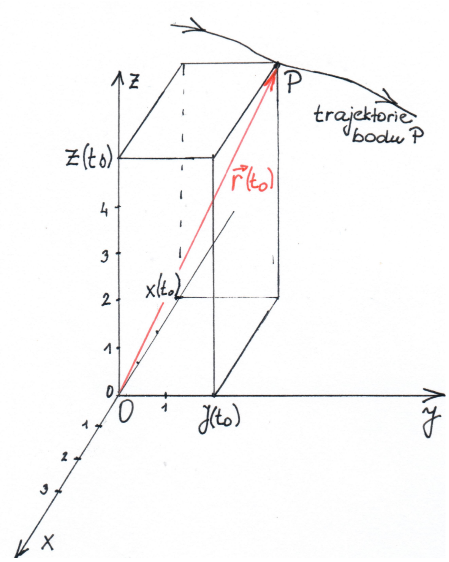
kde $x\vec{i}$, $y\vec{j}$, $z\vec{k}$ jsou kolmé průměty vektoru $\vec{r}$ do souřadných os a hodnoty x, y, z jsou jeho souřadnice. Koeficienty x, y, z tedy udávají polohu hmotného bodu vzhledem ke zvolené souřadné soustavě zadané počátkem a souřadnými osami. Řekneme také, že částice nacházející se v určitém čase v bodě P má kartézské souřadnice x, y, z a zapisujeme $P = [x, y, z]$.

Při pohybu hmotného bodu po trajektorii (= dráze) se v čase mění i jeho polohový vektor $\vec{r}$. Koncový bod vektoru $\vec{r}$ se pohybuje spolu s hmotným bodem a počáteční bod splývá trvale s počátkem soustavy souřadnic. Za účelem popisu pohybu hmotného bodu zavedeme vektorovou funkci $\vec{r}(t)$ jako polohu hmotného bodu v čase t, která zároveň udává polohu hmotného bodu vzhledem k počátku soustavy souřadnic.

Označme

$$\boxed{\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))}. \tag{4.1}$$

Protože poloha hmotného bodu se s časem t mění, jednotlivé souřadnice $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ vektoru $\vec{r}(t)$ se také mění. Hodnoty $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ polohového vektoru jsou tedy funkcemi času a polohový vektor $\vec{r} = \vec{r}(t)$ je vektorovou funkcí času. Na obrázku 4.88 je částice v čase t_0 v bodě $P = [-3, 2, 5]$, tedy $\vec{r}(t_0) = (-3, 2, 5)$. Oproti kapitole 2 budeme hmotný bod popisovat pomocí tří funkcí $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ proměnné t.



Obr. 4.88: Částice v čase t_0 v bodě P.

Vektor polohy $\vec{r}(t)$ se také nazývá **průvodič** (z anglického *radius* = poloměr kulové plochy se středem v počátku, na níž leží daný bod). Průvodič tedy spojuje pohybující se částici s počátkem soustavy souřadnic.
Je-li poloha hmotného bodu v okamžiku t_1 dána průvodičem $\vec{r}(t_1) = (x_1, y_1, z_1)$ a v následujícím okamžiku t_2 dána průvodičem $\vec{r}(t_2) = (x_2, y_2, z_2)$, je **posunutí** $\triangle\vec{r}$ hmotného bodu v časovém intervalu $t_2 - t_1$ dáno rozdílem

$$\boxed{\triangle\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}. \tag{4.2}$$

Dosazením souřadnic jednotlivých průvodičů do vztahu 4.2 dostáváme

$$\boxed{\triangle\vec{r} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)}. \tag{4.3}$$

Tedy i posunutí v prostoru je vektorovou veličinou. V souladu s kapitolou 2 budeme označovat

$\triangle x = x_2 - x_1,$

$\triangle y = y_2 - y_1,$

$\triangle z = z_2 - z_1,$

$\triangle t = t_2 - t_1$, tedy $\triangle\vec{r} = (\triangle x, \triangle y, \triangle z)$.

Příklad 4.1 Určete posunutí částice v časovém intervalu od t_1 do t_2, je-li počáteční poloha částice dána polohovým vektorem

$$r(\vec{t_1}) = -3 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{i} + 5 \cdot \vec{k},$$

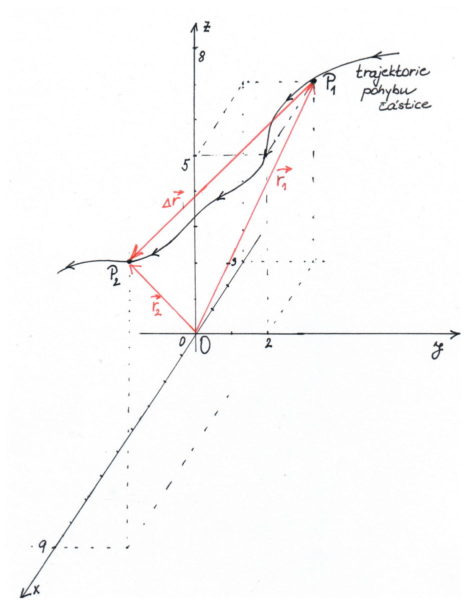
a koncová poloha částice je dána polohovým vektorem

$$r(\vec{t_2}) = 9 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{i} + 8 \cdot \vec{k}.$$

Řešení: Zapíšeme vektory $r(\vec{t_1})$ a $r(\vec{t_2})$ pomocí souřadnic $r(\vec{t_1}) = (-3, 2, 5)$, $r(\vec{t_2}) = (9, 2, 8)$. Pak podle vztahu 4.3

$$\underline{\underline{\triangle\vec{r}}} = (9 - (-3), 2 - 2, 8 - 5) = \underline{\underline{(12, 0, 3)}}.$$

Situace je znázorněna na obrázku 4.89, z něhož je patrno, že vektor $\triangle\vec{r}$ nezobrazuje skutečnou trajektorii, pouze informuje o posunutí částice z bodu P_1 do P_2. Pojem posunutí je přirozený: vektor posunutí $\triangle\vec{r}$ má počáteční bod P_1 (poloha částice v okamžiku t_1) a koncový bod P_2 (poloha částice v okamžiku t_2).



Obr. 4.89: Posunutí $\triangle\vec{r}$ spojuje koncové body vektorů $r(\vec{t_1})$ a $r(\vec{t_2})$.

Přímka procházející body P_1 a P_2 je daná směrovým vektorem $\triangle\vec{r}$ a je rovnoběžná se souřadnicovou rovinou xz (y - ová souřadnice vektoru $\triangle\vec{r}$ je rovna 0).

Kontrola 12:

a) Netopýr vyletěl z místa daného bodem o souřadnicích $P_1 = [-2, 4, -3]$ a po chvíli usedl v místě daném bodem o souřadnicích $P_2 = [6, -2, -3]$. Vyjádřete vektor $\triangle\vec{r}$ pomocí jednotkových vektorů $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

b) Zjistěte, zda přímka daná směrovým vektorem $\triangle\vec{r}$ je rovnoběžná s některou souřadnicovou rovinou nebo osou.

4.3 Průměrná a okamžitá rychlost

Při přímočarém pohybu (jednorozměrném případě) jsme definovali **průměrnou rychlost** částice vztahem 2.2:

$$\bar{v} = \frac{\triangle x}{\triangle t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

V případě pohybu v trojrozměrném prostoru získáme vztah podobný.
Průměrnou rychlost částice v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$, kde $t_1 \neq t_2$, $\triangle t = t_2 - t_1$, označme $\overline{\vec{v}}$; částici v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ přísluší vektor posunutí $\triangle\vec{r}$. Průměrnou rychlost částice pak určíme ze vztahu

$$\boxed{\overline{\vec{v}} = \frac{\triangle\vec{r}}{\triangle t}}. \tag{4.4}$$

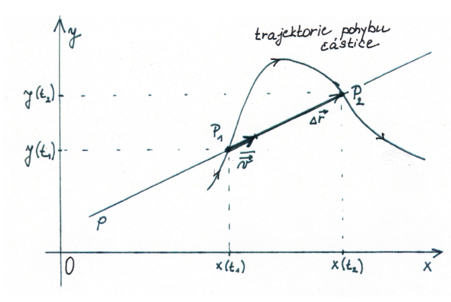
Protože posunutí je vektorová veličina, i průměrná rychlost je vektorová veličina. Dosadíme-li do vztahu 4.4 souřadnice vektoru $\triangle\vec{r} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, získáváme

$$\boxed{\overline{\vec{v}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)}. \tag{4.5}$$

- Ve vztazích 4.4 a 4.5 se jedná o násobení vektoru reálným číslem (= skalárem), výsledkem je tedy vektor $\overline{\vec{v}}$, jehož souřadnice jsou dány vztahem:

$$\overline{\vec{v}} = \left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}, \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}, \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1}\right).$$ [15]

- Ze vztahů 4.4 a 4.5 lze vypozorovat, že hodnota $\frac{1}{t_2 - t_1}$ je vždy kladná ($t_2 > t_1$), tedy vektor průměrné rychlosti $\overline{\vec{v}}$ je kladným násobkem (přesněji skalárním násobkem) vektoru posunutí $\triangle\vec{r}$. To znamená, že oba vektory $\overline{\vec{v}}$ a $\triangle\vec{r}$ mají stejný směr, viz obrázek 4.90.



Obr. 4.90: Vektory $\overline{\vec{v}}$ a $\triangle\vec{r}$ mají stejný směr.

Uvažujme následující situaci:

P_1 je bod zachycující polohu částice v rovině xy v okamžiku $t_1 = 1$,

P_2 je bod zachycující polohu částice v rovině xy v okamžiku $t_2 = 5$.

Z uvedeného vyplývá, že $\triangle t = t_2 - t_1 = 4$, tedy

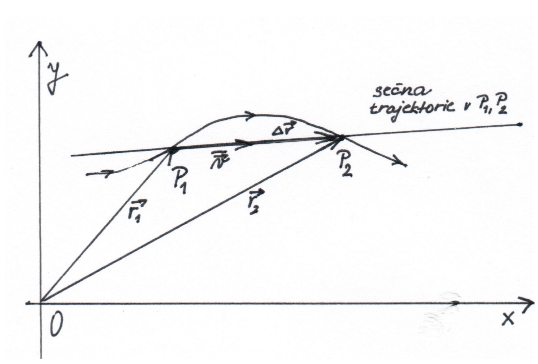
$$\overline{\vec{v}} = \frac{1}{5-1} \cdot \triangle\vec{r} = \frac{1}{4} \cdot \triangle\vec{r},$$

tj. vektor průměrné rychlosti $\overline{\vec{v}}$ má stejný směr jako vektor posunutí $\triangle\vec{r}$, ale je "čtyřikrát kratší" (vektor $\triangle\vec{r}$ je čtyřnásobkem vektoru $\overline{\vec{v}}$).

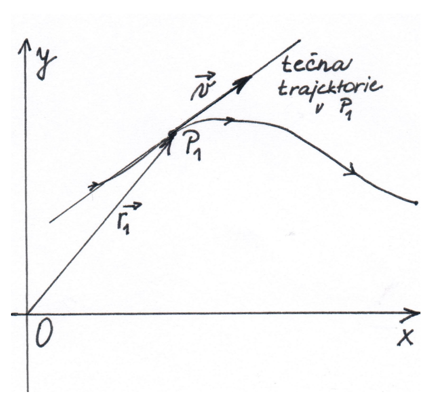
- Z obrázku 4.90 je dále patrno, že stejně jako v případě přímočarého pohybu zde můžeme uvažovat přímku p procházející body P_1, P_2, která je sečnou grafu zachycujícího trajektorii pohybu částice. Tato skutečnost nám může připomenout situaci přímočarého pohybu, kdy sečna protínala graf funkce polohy $x(t)$ v závislosti na čase t (králík se pohyboval po souřadné ose x). Podobně vektor průměrné rychlosti $\overline{\vec{v}}$ má směr sečny grafu určujícího trajektorii pohybu částice.

  Analogicky jako u přímočarého pohybu částice budeme zkracovat časový interval $\triangle t$. Při poklesu délky časovéhi intervalu $\triangle t$ k nule si můžeme všimnout následujícího chování vektorů charakterizujících pohyb částice: vektor $\vec{r_2}$ se přibližuje k vektoru $\vec{r_1}$ a $\triangle\vec{r}$ vektoru nulovému a směr vektoru $\triangle\vec{r}$ a s ním i směr průměrné rychlosti $\overline{\vec{v}}$ se sklánějí ke směru tečny k trajektorii v bodě P_1 a konečně průměrná rychlost $\overline{\vec{v}}$ se blíží k okamžité rychlosti $\vec{v}$. Pro $\triangle t \to 0$ je $\overline{\vec{v}} \to \vec{v}$. Vektor okamžité rychlosti $\vec{v}$ je tedy tečný k trajektorii v bodě P_1. Popsaná situace je vyobrazena na obrázcích 4.91 a 4.92. Okamžitá rychlost částice $\vec{v}$ má vždy směr tečny k trajektorii, přičemž platí:

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle\vec{r}}{\triangle t} = \frac{d\vec{r}}{dt}} \tag{4.6}$$



Obr. 4.91: Sečna trajektorie v bodech P_1, P_2.



Obr. 4.92: Tečna trajektorie v bodě P_1.

Okamžitá rychlost $\vec{v}$ je tedy stejně jako u přímočarého pohybu derivací polohy částice podle času. Protože $\vec{r}(t)$ je polohový vektor, i okamžitá rychlost $\vec{v}(t)$ je vektor určený

- směrem, tj. udává, v jakém směru se částice v daném okamžiku pohybuje,
- velikostí, tj. udává rychlost pohybu částice.

Vektor okamžité rychlosti $\vec{v}(t)$ má směr tečny k trajektorii $\vec{r}(t)$ v okamžiku t. Označme souřadnice vektoru $\vec{v}(t)$:

$$\boxed{\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))}. \tag{4.7}$$

Ze vztahu 4.6 dostáváme pro $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ následující rovnost:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}(x(t), y(t), z(t)) = (\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}),$$

čili platí

$$\boxed{v_x(t) = \tfrac{dx(t)}{dt}, v_y(t) = \tfrac{dy(t)}{dt}, v_z(t) = \tfrac{dz(t)}{dt}}. \tag{4.8}$$

Souřadnice vektoru okamžité rychlosti dostaneme derivací souřadnic polohového vektoru $\vec{r}(t)$.

- Vraťme se k obrázkům 4.91 a 4.92. V rovině xy mají vektory polohy $\vec{r}(t)$ a okamžité rychlosti $\vec{v}(t)$ dvě souřadnice:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)),$$
$$\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t)).$$

Jak bylo naznačeno v kapitole 3, souřadnice $v_x(t)$ a $v_y(t)$ vektoru $\vec{v}(t)$ mají také svůj geometrický význam. Vektor okamžité rychlosti $\vec{v}(t)$ částice určené bodem P lze totiž zapsat jako součet násobků jednotkových vektorů, tj. lze jej zapsat jako rozklad do složek $v_x(t) \cdot \vec{i}$, $v_y(t) \cdot \vec{j}$:

$$\vec{v}(t) = v_x(t) \cdot \vec{i} + v_y(t) \cdot \vec{j} = v_x(t) \cdot (1, 0) + v_y(t) \cdot (0, 1).$$

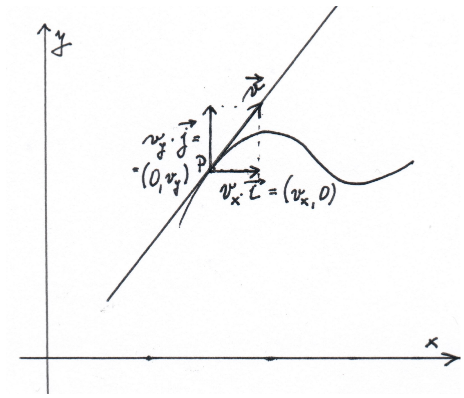
S ohledem na výše uvedený vztah zavedeme terminologii, kterou budeme v dalším textu používat:

- reálné hodnoty v_x, resp. v_y jsou x-ová, resp. y-ová souřadnice vektoru $\vec{v}$,
- vektory $v_x \cdot \vec{i}$, resp. $v_y \cdot \vec{j}$ jsou x-ová, resp. y-ová složka vektoru $\vec{v}$ (= vektor),
- vektor $\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j}$ lze zapsat jako součet dvou složek (= vektorů).

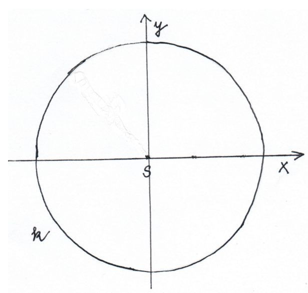
Na obrázku 4.93 je zakreslena rychlost částice P a její rozklad do složek.
Upozornění: Někdy se pojem složky a souřadnice zaměňuje, význam těchto pojmů je však rozdílný.

Kontrola 13: Částice se pohybuje po kružnici

a) ve směru otáčení hodinových ručiček,



Obr. 4.93: Rozklad vektoru v do složek $v_x \cdot \vec{i}$, $v_y \cdot \vec{j}$.



Obr. 4.94: Pohyb po kružnici.

b) proti směru otáčení hodinových ručiček.

V jistém okamžiku má částice rychlost $\vec{v} = (2\ ms^{-1}, -2\ ms^{-1})$. Určete, ve kterém bodě na kružnici k na obrázku 4.94 se částice v daném okamžiku nachází.

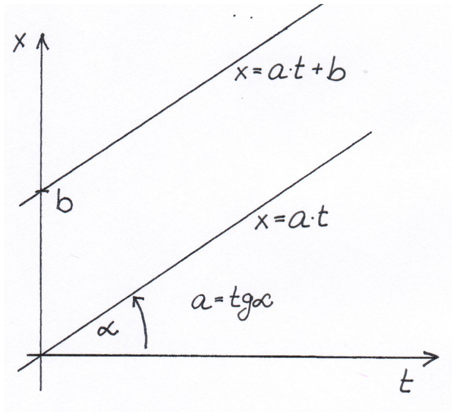
Na tomto místě bude užitečné se zmínit o tzv. **parametrickém** a **obecném vyjádření přímky v rovině**. V kapitole 2 jsme se seznámili se směrnicovým tvarem přímky $p : x = a \cdot t + b$ v rovině s proměnnými t, x, kde $a, b \in \mathbb{R}$, viz obrázek 4.95. V rovině s proměnnými x, y uvažujeme tvar přímky $p : y = a \cdot x + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, viz obrázek 4.96.

Parametrické vyjádření přímky v rovině

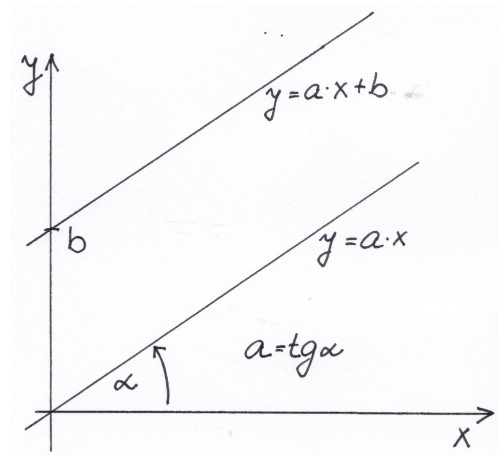
Víme, že každé dva různé body A, B jednoznačně určují přímku, kterou označíme p. Přímka p je rovněž jednoznačně určena jediným svým bodem $A = [a_1, a_2]$a vektorem $\vec{u} = B - A = \vec{AB}$, který nazýváme **směrový vektor přímky** p, viz obrázek 4.97. Rovnice

$$X = A + t \cdot \vec{u},$$

kde $t \in \mathbb{R}$ a bod X je libovolný bod ležící na přímce p, se nazývá parametrické vyjádření přímky p určené bodem A a směrovým vektorem $\vec{u}$. Proměnná t se nazývá parametr. Uvažujme souřadnice vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2)$. Parametrické vyjádření souřadnic bodu $X =$



Obr. 4.95: Přímka daná směrnicovým tvarem $x = a \cdot t + b$.

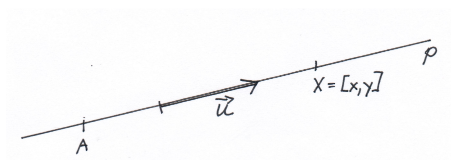


Obr. 4.96: Přímka daná směrnicovým tvarem $y = a \cdot x + b$.

$[x, y] \in p$ je následující:

$$\boxed{x = a_1 + t \cdot u_1, y = a_2 + t \cdot u_2}$$

Směrový vektor přímky p lze uvažovat libovolný nenulový násobek vektoru $\vec{u}$. Z uvedeného vyplývá, že pro jednu přímku existuje více navzájem různých parametrických vyjádření.



Obr. 4.97: Přímka p daná bodem A a směrovým vektorem $\vec{u}$

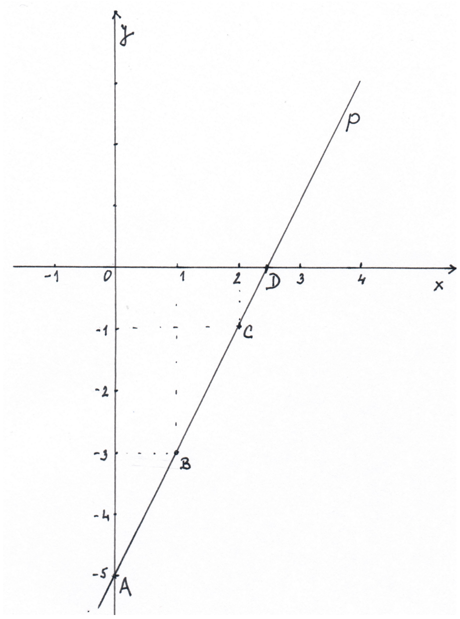
K dané přímce p existuje její jednoznačné vyjádření ve směrnicovém tvaru, např. $p : y = 2x - 5$. Parametrických vyjádření přímky p, která prochází současně body A, B, C, D však existuje nekonečně mnoho. Z obrázku 4.98 jich lze určit hned několik:

a) body $A = [0, -5]$ a $B = [1, -3]$ určují přímku p. Přímka p je rovněž určena bodem $A = [0, -5]$ a vektorem $\vec{AB} = (1 - 0, -3 + 5) = (1, 2)$. Parametrické vyjádření přímky p pak získáme ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= 0 + t \cdot 1, \\ y &= -5 + t \cdot 2, \end{aligned}$$

kde $t \in \mathbb{R}$.

b) body $A = [0, -5]$ a $C = [2, -1]$ rovněž určují přímku p. Přímka p je tedy také určena bodem $A = [0, -5]$ a vektorem $\vec{AC} = (2-0, -1+5) = (2, 4)$. Parametrické vyjádření



Obr. 4.98: Přímka p procházející současně body A, B, C, D.

přímky p pak získáme ve tvaru

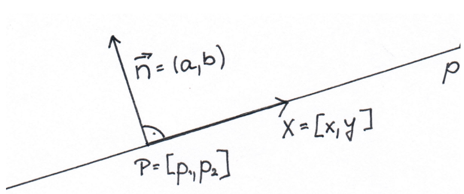
$$\begin{aligned} x &= 1 + t \cdot 2, \\ y &= -3 + t \cdot 4, \end{aligned}$$

kde $t \in \mathbb{R}$.

Směrové vektory $\vec{AB}$ a $\vec{AC}$ přímky p v různých parametrických vyjádřeních přímky p se liší o násobek, v našem případě $\vec{AC} = 2 \cdot \vec{AB}$.

Obecné vyjádření přímky v rovině

Přímku p můžeme také určit jedním bodem P a nenulovým vektorem $\vec{n}$, který je kolmý ke směrovému vektoru $\vec{u}$ přímky p, tj. $\vec{n} \perp \vec{u}$. Vektor $\vec{n} = (a, b)$ nazýváme **normálový vektor** přímky p (obrázek 4.99).



Obr. 4.99: Přímka p a její normálový vektor $\vec{n}$.

Pro každé dva body $X = [x, y]$ a $P = [p_1, p_2]$ ležící na přímce p platí, že vektory $\vec{n}$, $\vec{PX}$ jsou kolmé, tj. jejich skalární součin lze zapsat:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{PX} &= 0 \\ (a, b) \cdot (x - p_1, y - p_2) &= 0 \\ a \cdot x - a \cdot p_1 + b \cdot y - b \cdot p_2 &= 0. \end{aligned}$$

Označíme-li $c = -ap_1 - bp_2$, dostáváme **obecné vyjádření** neboli **obecná rovnice** přímky p:

$$\boxed{ax + by + c = 0}.$$

Z obecného vyjádření přímky p je patrno, že koeficienty a, b u neznámých x, y jsou zároveň souřadnice normálového vektoru $\vec{n}$ přímky p.

V následujícím textu popíšeme způsob, jakým se určí obecná rovnice přímky p v rovině procházející body $A = [1, 3]$, $B = [-2, 1]$.

1) určíme směrový vektor $\vec{u}$ přímky p: $\vec{u} = \vec{AB} = (-3, -2)$,

2) určíme normálový vektor $\vec{n}$ přímky p. Víme, že $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ (pro rychlé určení souřadnic vektoru $\vec{n}$ zaměníme pořadí souřadnic vektoru $\vec{u}$ a u libovolné z nich změníme znaménko). Získáme $\vec{n} = (2, -3)$, tj. obecná rovnice přímky p je tvaru $2x - 3y + c = 0$,

3) určíme konstantu c z poslední rovnosti dosazením souřadnic libovolného bodu přímky p do rovnice $2x - 3y + c = 0$. Uvažujme například bod $A = [1, 3] \in p$. Dosadíme-li souřadnice bodu A do rovnice $2x - 3y + c = 0$ přímky p, získáváme rovnost:

$$2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 + c = 0 \Rightarrow \underline{c = 7},$$

tj. obecná rovnice přímky p je dána vztahem $p : 2x - 3y + 7 = 0$. Obecná rovnice přímky p je však rovněž dána vztahem $p : 4x - 6y + 14 = 0$. Z uvedeného vyplývá, že obecná rovnice libovolné přímky p je určena jednoznačně až na svůj násobek.

4.4 Průměrné a okamžité zrychlení

Podobně jako u přímočarého pohybu budeme definovat pojmy **průměrné zrychlení** a **okamžité zrychlení.**

Předpokládejme, že v průběhu časového intervalu od t_1 do t_2 dojde ke změně rychlosti částice z $\vec{v_1}$ na $\vec{v_2}$. Podíl

$$\boxed{\overline{\vec{a}} = \frac{\triangle \vec{v}}{\triangle t} = \frac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{t_2 - t_1}}, \tag{4.9}$$

kde $\triangle t = t_2 - t_1$, nazveme **průměrným zrychlením** v tomto časovém intervalu. Zavedeme-li souřadnice vektorů $\vec{v_1} = (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z})$ a $\vec{v_2} = (v_{2x}, v_{2y}, v_{2z})$, dostaneme vyjádření průměrného zrychlení

$$\boxed{\overline{\vec{a}} = \frac{\triangle \vec{v}}{\triangle t} = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot (v_{2x} - v_{1x}, v_{2y} - v_{1y}, v_{2z} - v_{1z})}. \tag{4.10}$$

Při přechodu $\triangle t \to 0$ se průměrné zrychlení blíží svému limitnímu případu, takzvanému **okamžitému zrychlení** $\vec{a}$:

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle \vec{v}}{\triangle t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\frac{dv_x(t)}{dt}, \frac{dv_y(t)}{dt}, \frac{dv_z(t)}{dt})}. \tag{4.11}$$

Tedy u obecného pohybu v prostoru jsou okamžité zrychlení i průměrné zrychlení zastoupeny vektory. Označíme-li u okamžitého zrychlení

$$\boxed{\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)}, \tag{4.12}$$

z předchozích vztahů 4.11 a 4.12 plyne

$$\boxed{a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt}, a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt}, a_z(t) = \frac{dv_z(t)}{dt}}. \tag{4.13}$$

V následujícím textu zmíníme konkrétní případy vektoru okamžitého zrychlení a jeho rozkladu do složek.

Příklad 4.2 Králík vběhl na parkoviště, kde si předtím hrály děti a nakreslily zde křídou dvě kolmé přímky (lze je považovat za souřadné osy x, y). Okamžitá poloha králíka vzhledem ke zvolené soustavě souřadnic daná vektorem $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ je popsána následujícím vztahem:

$x(t) = -0,31t^2 + 7,2t + 28,$

$y(t) = 0,22t^2 - 9,1t + 30.$

Čas t je měřen v sekundách a souřadnice $x(t)$, $y(t)$ v metrech.

a) Určete velikost a směr polohového vektoru $\vec{r}(t)$ v okamžiku $t = 15\ s$,

b) určete polohu králíka v okamžicích $t = 0\ s$, $5\ s$, $10\ s$, $20\ s$ a $25\ s$ a schematicky zakreslete jeho trajektorii.

Řešení:

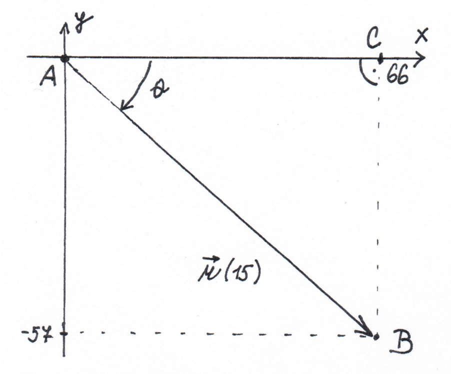
a) Hodnotu $t = 15\ s$ dosadíme do zadaných vztahů pro souřadnice vektoru $\vec{r}(t)$ a získáme $\vec{r}(15) = (66,25; -57)$. Odtud pak určíme velikost vektoru $\vec{r}(15)$, tj.

$$\underline{\underline{|\vec{r}(15)|}} = \sqrt{66,25^2 + (-57)^2} \doteq \underline{\underline{87,4\ m}}.$$

Z pravoúhlého trojúhelníka ABC, viz obrázek 4.100, získáme vztah pro výpočet úhlu θ při vrcholu A:

$\mathrm{tg}\ \theta = \frac{|\vec{BC}|}{|\vec{AC}|} = \frac{57}{66} = 0,864.$

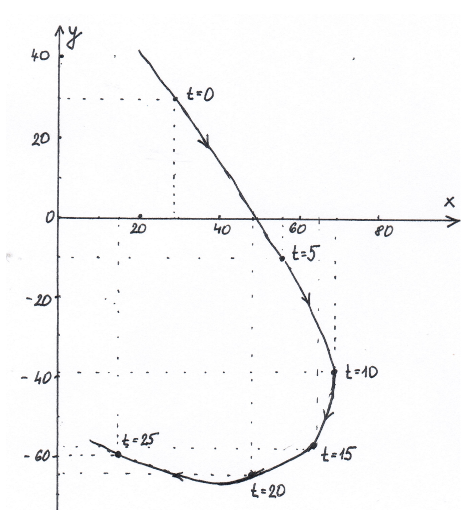
Úhel θ je však v záporném smyslu vzhledem k ose x, tedy $\underline{\underline{\theta = -40,8°}}$.



Obr. 4.100: Směr polohového vektoru $\vec{r}(t)$ v okamžiku $t = 15$ s.

Tabulka 4.4: Hodnoty t, $x(t)$, $y(t)$.

t	$x(t)$	$y(t)$
0	28	30
5	56,25	-10
10	69	-39
15	66,25	-57
20	48	-64
25	14,25	-60



Obr. 4.101: Trajektorie pohybu králíka v zadaných časových okamžicích t.

b) Dosazením zadaných časových okamžiků za t analogicky jako v případě a) získáme souřadnice vektoru $\vec{r}(t)$. Tyto hodnoty jsou uvedené v tabulce 4.4:

Pro každý ze zadaných časových okamžiků t nalezneme koncové body $X = [x(t), y(t)]$ vektoru $\vec{r}(t)$. Tyto získané koncové body určují přibližnou trajektorii pohybu králíka (obrázek 4.101).

Příklad 4.3 Určete velikost a směr

a) vektoru rychlosti $\vec{v}(t)$ pohybu králíka z příkladu 4.2 v okamžiku $t = 15\ s$.

b) vektoru zrychlení $\vec{a}(t)$ pohybu králíka z příkladu 4.2 v okamžiku $t = 15\ s$.

Řešení:

a) Podle vztahu 4.8 dostaneme souřadnice vektoru rychlosti $\vec{v}(t)$ v závislosti na parametu t:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \frac{d}{dt}(x(t), y(t)) = (\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}) =$$
$$= (\frac{d}{dt}(-0,31t^2 + 7,2t + 28), \frac{d}{dt}(0,22t^2 - 9,1t + 30)) =$$
$$= (-0,62 \cdot t + 7,2; 0,44 \cdot t - 9,1).$$

Pro $t = 15$ máme

$$\underline{\underline{\vec{v}(15)}} = (-0,62t + 7,2; 0,44t - 9,1) = \underline{\underline{(-2,1\ ms^{-1}, -2,5\ ms^{-1})}},$$

tedy $v_x(15) = -2,1\ ms^{-1}$, $v_y(15) = -2,5\ ms^{-1}$. Výše uvedený výsledek bychom mohli interpretovat tak, že ve směru osy x, resp. y je rychlost králíka $-2,1\ ms^{-1}$, resp. $-2,5\ ms^{-1}$. Rychlost $\vec{v}$ králíka v okamžiku $t = 15\ s$ má směr tečny AB k trajektorii v místě, kde se králík právě nachází (v bodě A). Celou situaci interpretuje obrázek 4.102, kde je rovněž zakreslen vektor rychlosti $\vec{v} = \vec{AB}$ v okamžiku $t = 15\ s$ a jeho složky.

Velikost úhlu θ vektoru $\vec{v}(15)$ (směrový vektor tečny AB) od kladného směru osy x určíme jedním z následujících dvou způsobů:

(i) Pro úhel θ platí vztah

$$\text{tg}\ \theta = \frac{v_y(15)}{v_x(15)} = \frac{-2,5}{-2,1} = 1,19,$$

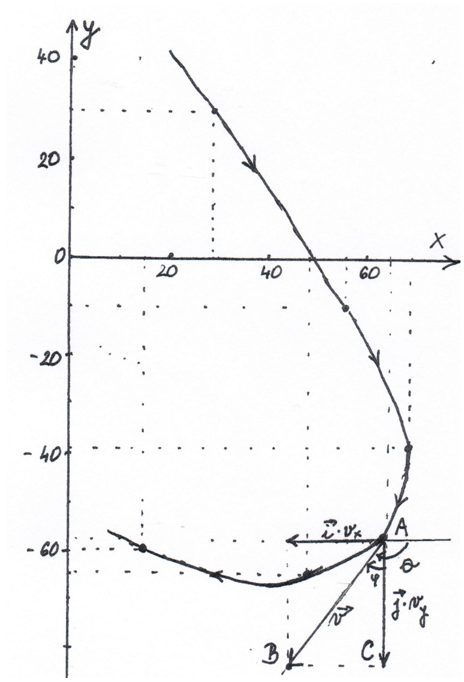
tedy $\underline{\underline{\theta = -130,03°}}$.

(ii) z pravoúhlého trojúhelníka ABC, viz obrázek 4.102, určíme nejprve úhel φ

$$\varphi = \text{arctg}\ \frac{|\vec{BC}|}{|\vec{AC}|} = \text{arctg}\ \frac{2,1}{2,5} = 40,03°.$$

Úhel θ je v záporném smyslu vzhledem k ose x, tj.

$$\underline{\underline{\theta}} = -90° - \varphi = -90° - 40,03° = \underline{\underline{-130,03°}}.$$



Obr. 4.102: Vektor rychlosti $\vec{v} = \vec{AB}$ v okamžiku $t = 15\ s$ a jeho rozklad na složky.

Upozorňujeme zde na skutečnost, že souřadnice vektoru $\vec{v}(15)$ mají jiné jednotky (ms^{-1}) než osy x, y (m).

Velikost vektoru $\vec{v}(15)$ určíme pomocí jeho souřadnic:

$$\underline{\underline{|\vec{v}(15)|}} = \sqrt{(-2,1)^2 + (-2,5)^2} = \underline{\underline{3,26\ ms^{-1}}}.$$

Králík se tedy v okamžiku $t = 15$ pohybuje rychlostí $3,26\ ms^{-1}$ směrem $\theta = -130,03°$ vzhledem k souřadnicové ose x.

b) Podle vztahu 4.11 pro vektor zrychlení $\vec{a}(t)$ platí:

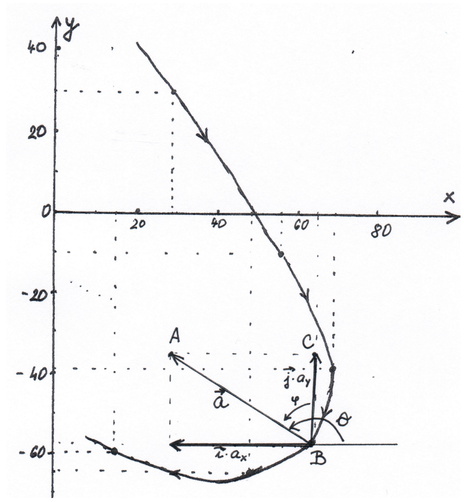
$$\underline{\underline{\vec{a}(t)}} = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = (\frac{d}{dt}(-0,62t + 7,2); \frac{d}{dt}(0,44t - 9,1)) =$$
$$= \underline{\underline{(-0,62\ ms^{-2}; 0,44\ ms^{-2})}},$$

tedy $a_x(15) = -0,62\ ms^{-2}$, $v_y(15) = 0,44\ ms^{-2}$. Výše uvedený výsledek bychom mohli interpretovat tak, že ve směru osy x, resp. y je zrychlení $-0,62\ ms^{-2}$, resp. $0,44\ ms^{-2}$. Z výsledku vidíme, že zrychlení $\vec{a}(t)$ nezávisí na čase, je konstatntní pro každé t. Celou situaci interpretuje obrázek 4.103.

(i) Směr zrychlení $\vec{a}$ králíka v okamžiku $t = 15\ s$ je dán úhlem θ, pro který platí:

$$\text{tg}\ \theta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{0,44}{-0,62} = -0,710,$$

tedy $\underline{\underline{\theta = 144,64°}}$.



Obr. 4.103: Vektor zrychlení $\vec{a}$ v okamžiku $t = 15\ s$.

(ii) Z pravoúhlého trojúhelníka ABC, viz obrázek 4.103 určíme nejprve úhel φ:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{|\vec{AC}|}{|\vec{BC}|} = \operatorname{arctg} \frac{0,62}{0,44} = 54,64°.$$

Pak $\underline{\underline{\theta}} = 90° + \varphi = \underline{\underline{144,64°}}$.

Velikost vektoru $\vec{a}$ určíme snadno pomocí souřadnic:

$\underline{\underline{|\vec{a}|}} = \sqrt{(-0,62)^2 + 0,44^2} = \underline{\underline{0,76\ ms^{-2}}}$.

Králík má při svém pohybu konstatní zrychlení $0,76\ ms^{-2}$ ve směru $\theta = 144,64°$ vzhledem k souřadnicové ose x.

Kontrola 13: Následující vztahy popisují možnosti pohybu hokejového kotouče po ledové ploše ležící v souřadnicové rovině xy (poloha kotouče je zadána v metrech):

a) $x = -3t^2 + 4t - 2$, $y = 6t^2 - 4t$

b) $x = -3t^2 - 4t$, $y = -5t^2 + 6$

c) $\vec{r} = 2t^2 \cdot \vec{i} - (4t + 3) \cdot \vec{j}$

d) $\vec{r} = (4t^3 - 2t) \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j}$

V jednotlivých případech rozhodněte, zda je některá ze složek vektoru zrychlení $\vec{a}$ konstantní. Je v některém z nich konstantní vektor zrychlení $\vec{a}$?

Příklad 4.4 Částice se pohybuje v souřadnicové rovině xy s konstantním zrychlením $\vec{a} = (a_x, a_y)$. Vektor zrychlení $\vec{a}$ má velikost $3\ ms^{-2}$ a svírá s kladným směrem osy x úhel $\theta = 130°$. V okamžiku $t_0 = 0$ se částice pohybuje rychlostí $\vec{v_0} = -2 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j}$ (v metrech za sekundu). Určete

a) vektor $\vec{a}$ pomocí souřadnic a_x, a_y,

b) rychlost částice $\vec{v}(t)$ v okamžiku $t = 2\ s$ vyjádřete pomocí jednotkových vektorů $\vec{i}$, $\vec{j}$,

c) určete velikost a směr rychlosti částice $\vec{v}(t)$.

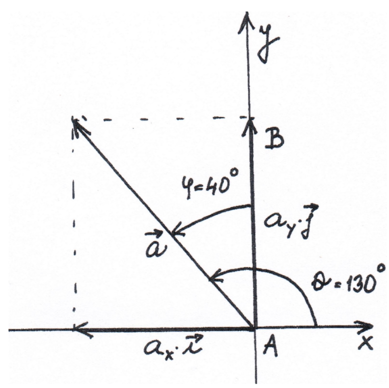
Řešení: Celou situaci interpretuje obrázek 4.104. Určíme nejdříve

a) - souřadnici a_x vektoru $\vec{a}$:

$$\underline{\underline{a_x}} = |\vec{a}| \cos\theta = 3 \cdot \cos 130° = \underline{\underline{-1,92\ ms^{-2}}},$$

- souřadnici a_y vektoru $\vec{a}$:

$$\underline{\underline{a_y}} = |\vec{a}| \sin\theta = 3 \cdot \sin 130° = \underline{\underline{2,31\ ms^{-2}}}.$$



Obr. 4.104: Ilustrace k příkladu 4.4 a).

Souřadnice vektoru $\vec{a} = (-1,92; 2,31)$.

b) V kapitole 2 jsme řešili analogické příklady pro pohyb částice po přímce. V našem případě se nyní sice jedná o pohyb v rovině, ale ten lze rozložit na pohyb ve směru osy x a na pohyb ve směru osy y. Budeme vycházet ze vztahu 2.11

$$v(t) = v_0 + a \cdot t$$

a využijeme jej pro každou souřadnici vektoru $\vec{v}$ zvlášť:

- Pohyb částice ve směru osy x pro $t = 2\ s$:

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x \cdot t$$
$$\underline{\underline{v_x(2)}} = -2 - 1,92 \cdot 2 = \underline{\underline{-5,84\ ms^{-1}}}.$$

- Pohyb částice ve směru osy y pro $t = 2\ s$:

$$v_y(t) = v_{0y} + a_y \cdot t$$
$$\underline{\underline{v_y(2)}} = 4 + 2,31 \cdot 2 = \underline{\underline{8,62\ ms^{-1}}}.$$

Získali jsme tedy souřadnice rychlosti částice $\vec{v}(t)$ pro $t = 2\ s$ ve směrech souřadných os x, y, tj. $\underline{\underline{\vec{v}(2) = -5,84 \cdot \vec{i} + 8,62 \cdot \vec{j}}}$.

c) Pro určení směru rychlosti $\vec{v}(2)$ využijeme jednoho ze dvou způsobů:

(i) Pro směr rychlosti $\vec{v}(2)$ platí

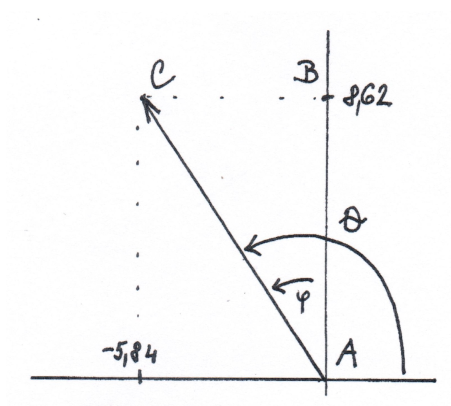
$$\text{tg}\ \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{8,62}{-5,84} = -1,458,$$

tedy $\underline{\underline{\theta = 124,12^\circ}}$.

(ii) s využitím pravoúhlého trojúhelníka ABC viz obrázek 4.105:

$$\varphi = \text{arctg}\ \frac{|\vec{BC}|}{|\vec{AB}|} = \text{arctg}\ \frac{5,84}{8,62} = \text{arctg}\ 0,68 = 34,12^\circ.$$

Tedy $\underline{\underline{\theta}} = 90^\circ + \varphi = 90^\circ + 34,12^\circ = \underline{\underline{124,12^\circ}}$.



Obr. 4.105: Ilustrace k příkladu 4.4 c).

Velikost vektoru $\vec{v}(2)$ získáme ze vztahu: $|\vec{v}(2)| = \sqrt{(-5,84)^2 + 8,62^2} \doteq 10,41\ ms^{-1}$. Částice se ve směru úhlu $\theta = 124,12^\circ$ pohybuje rychlostí $10,41\ ms^{-1}$.

Kontrola 14: Poloha kuličky je zadána vektorem $\vec{r}(t) = (4t^3 - 2t;\ 3)$. Čas je zadán v sekundách, poloha v metrech. V jakých jednotkách jsou zadány koeficienty 4, -2, 3?

4.5 Otázky k opakování kapitoly 4

Otázka 4.1 *Jak se definuje poloha hmotného bodu v prostoru? (vztah 4.1)*

Otázka 4.2 *Co je to posunutí? (vztahy 4.2 a 4.3)*

Otázka 4.3 *Jak se definuje průměrná rychlost? (vztahy 4.4 a 4.5) Jaký je její geometrický význam vzhledem k trajektorii?*

Otázka 4.4 *Jaký je vztah mezi vektorem průměrné rychlosti a vektorem posunutí?*

Otázka 4.5 *Jak se definuje okamžitá rychlost v prostoru? (vztahy 4.6, 4.7 a 4.8) Jaký je její geometrický význam vzhledem k trajektorii?*

Otázka 4.6 *Uveďte příklad parametrického vyjádření přímky v rovině a vysvětlete význam všech konstant a proměnných v tomto vyjádření.*

Otázka 4.7 *Parametrické vyjádření přímky v rovině není určeno jednoznačně - co musí splňovat dvě různá parametrická vyjádření téže přímky?*

Otázka 4.8 *Uveďte příklad obecného vyjádření přímky v rovině a vysvětlete význam všech koeficientů u proměnných x, y.*

Otázka 4.9 *Najděte obecné i parametrické vyjádření přímky v rovině zadané dvěmi různými body.*

Otázka 4.10 *Jak se definuje průměrné a okamžité zrychlení? (vztahy 4.9, 4.11, 4.12 a 4.13)*

Otázka 4.11 *Co je to kvadrant a jakým způsobem kvadranty číslujeme?*

Otázka 4.12 *Jak najdeme úhel průvodiče určeného bodem $X = [x, y]$ podle toho, v jakém kvadrantu se nachází?*

Literatura

[1] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J. *Fyzika. Mechanika.* Brno: VUT v Brně, VUTIUM, 2000.

[2] Odvárko, O. *Matematika pro gymnázia. Goniometrie*. Praha: Prometheus, 2016.

[3] Kočandrle, M., Boček, L. *Matematika pro gymnázia. Analytická geometrie*. Praha: Prometheus, 2017.

[4] Hrubý, D., Kubát, J. *Matematika pro gymnázia. Diferenciální a integrální počet*. Praha: Prometheus, 2015.