KoMáR

KoMáR je určen pro žáky druhého stupně základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií, kteří si rádi s matematikou hrají a nebojí se zajímavých příkladů.

Seminář organizují studenti Gymnázia Brno, tř. Kpt. Jaroše, pod záštitou Ústavu matematiky a statistiky Přírodovědecké fakulty Masarykovy Univerzity a navazuje na dlouholetou tradici semináře Pikomat.

Letos má KoMáR 5 sérií po 8 příkladech. Stejný tip příkladů pro starší žáky má BRKOS.

Zadání první série

Termín odevzdání: 31. října

Klavír kněze Jacoba zrovna dohrál své poslední smutné tóny. Všichni zúčastnění se zvedli z lavic a šouravým krokem zamířili k nově zhotovenému hrobu.

„Je ho škoda," pošeptal Moimerovi Pablo.

„To je, byl to ten nejlepší kápo, kterého jste si mohli přát."

„Bral tě jako vlastního, víš?"

Moimero se smutně pousmál. „Vím."

Řada před hrobem se posunula a Moimero se ocitnul přímo před majestátním náhrobkem. *Martini Lasagna*, četl stříbrný zdobený nápis. Datum úmrtí *1. 9. 2022*. Z černobílé fotografie na něj koukaly pronikavé oči zesnulého mafiánského bosse. Moimero se sklonil, aby na hrob položil bílé karafiáty svázané černou stuhou. Když vtom jeho oči spočinuly na dalších jménech na hrobě.

Úloha 0. *Z informací z doprovodného textu nakreslete rodokmen rodiny Lasagnů.*

Pablo se uklonil před hrobem svého dědečka a položil Moimerovi ruku na rameno.

„Máš oheň?" zeptá se ho Moimero.

Pablo udiveně pozvedne obočí. „Ty kouříš?"

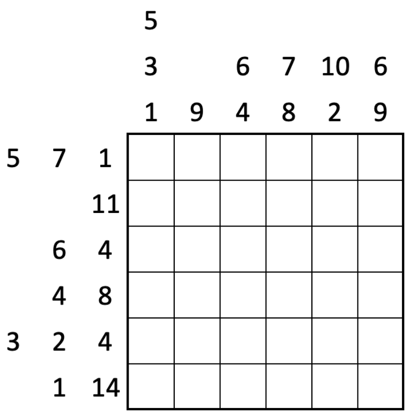
„Ne."

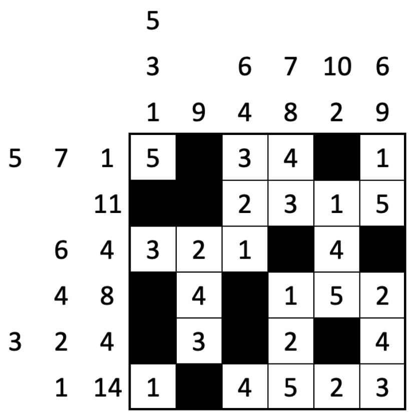
„Tak proč se ptáš?"

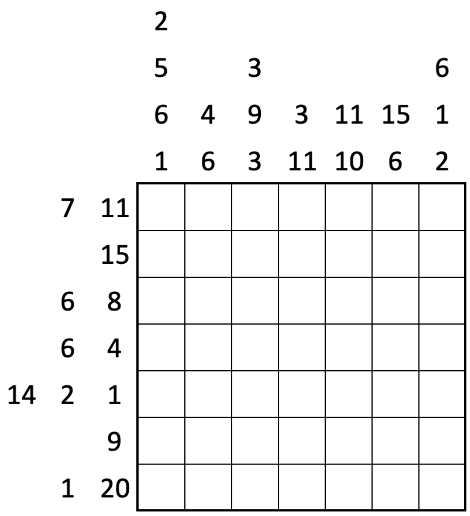
„Jen tak."

Pablo jen nevěřícně zakroutil hlavou a provedl kamaráda malým náměstíčkem na hřbitově. Náměstíčko bylo vydlážděno velkými čtverci z mramoru a obsidiánu poskládaných ve specifickém vzorci.

Úloha 1. *Náměstíčko mělo tvar čtverce* 7×7*. Vložte do políček tabulky číslice* $1-6$ *tak, aby se stejné číslice neopakovaly v žádném řádku ani sloupci. Některá pole mohou zůstat prázdná – tato políčka vybarvěte černě. Čísla okolo tabulky udávají součty skupin číslic v řádcích a sloupcích (skupiny jsou vždy odděleny jedním či více prázdnými políčky) v takovém pořadí, v jakém se vyskytují v příslušných řádcích a sloupcích. Skupinou může být myšlena i jediná číslice. V jednom řádku nebo sloupci mohou být maximálně 4 mezery. Příklad vyplnění tabulky* 6×6 *čísly* $1-5$*:*







„Jak to zvládá Santia?“ zeptal se starostlivě Moimero.

Pablo pokynul hlavou směrem k postarší ženě v černém šátku s černými rukavičkami. „Babi? Podle nás se z dědovy smrti pominula. Neustále tvrdí, že pořád žije a jenom si z ní tropí žerty.“

„Třeba na tom něco bude,“ pousmál se Moimero, „co si pamatuju, tak Santia vždycky věděla, která bije.“

„Ještě ji v tom podporuj!“

„No, co víš? Nám, když umřela kočka...“

Pablo otráveně mávnul rukou. „Ale běž už s tou vaší kočkou! Nicméně, důležitější otázka, jak vlastně plánuješ získat peníze na svatbu s mojí sestrou?“

„Neboj, mám to promyšlené. Část dodá Theresia. Pak mám od mé pramáti nějaké zdobené nádobí, které vyměním u naší sousedky za koberce, které pak prodám strýcovi, z toho by mohlo kápnout pár stoveček. Pak hodlám z mléka naší staré Dorky udělat nějakou mozarellu, po níž se můžou chlapi utlouct…“

Úloha 2. *Rozluštěte, co znamenají tři „nové“ operace, které lze popsat pomocí čtyř základních operací $+ - \times :$)*
Příklad: $5\$4 = 6 \qquad 12\$17 = 7$
Řešení: $ je operace, která vynásobí první číslo dvěma a odečte druhé číslo

- $8@3 = 19 \qquad 15@12 = 42 \qquad 3@1 = 7 \qquad 9@9 = 27 \qquad 5@6 = 16$
- $5\#5 = 30 \qquad 5\#7 = 36 \qquad 3\#7 = 30 \qquad 12\#8 = 60 \qquad 7\#17 = 72$
- $3\&4 = 19 \qquad 2\&5 = 17 \qquad 3\&6 = 27 \qquad 10\&5 = 65 \qquad 1\&1 = 3$

Pablo Moimera přerušil: „No, jestli jen víš, co děláš. Ale nemysli si, že Theresia dostane nějaké velké dědictví po dědovi.“

„Proč by ne?“

„No, tak dědí nás opravdu hodně. Něco dostane babi Santia. Pak musí něco dostat strejda Luca s tetou Annie, jejich syn Giovanni, pak mamka, no, a já s Theresií!“ Pablo počítal na prstech ruky. „A když po dědovi zbylo nějakých 16 milionů, tak se to bude i dost špatně dělit!“

Moimero se zasmál. „Kolik má vlastně vaše rodina členů?“

Úloha 3. *Kolik existuje různých možných počtů dědiců po dědovi Martinim (počet dědiců musí být přirozené číslo), rozdělí-li se mezi ně 16 milionů rovným dílem, počet milionů, jež každý z dědiců dostane, bude kladné desetinné číslo, které má před desetinnou čárkou i po ní právě jednu cifru?*

„A to budeme vlastně rádi, pokud naše část rodiny něco dostane. Nevím, jestli můžeme něco dědit po smrti táty. Protože máma Petronella vlastně není přímý potomek dědy, no a já s Theresií… Jestli nám Luca vlastně něco nechá!“

To už ale Moimero dávno pozor nedával. Kolem totiž zrovna prošla Theresia, jeho nastávající. Na sobě měla černé šaty a kolem krku řetěz perel.

„Theresio! Amore mio!“ zavolal na ni Moimero. Theresia se na něj otočila a věnovala mu okouzlující úsměv. Užuž se chystala jít za Moimerem, když její jméno zavolal Luca a musela ho poslechnout.

„Kdo vás teď povede, když je Martini mrtvý?“ zeptal se Moimero, aniž by spustil oči z Theresie.

„Strýc Luca. Je přímým dědovým potomkem a zároveň nejstarším mužem v rodině.“

„Jaký je?“

„Myslím, že to brzo zjistíš,“ poukázal na přicházejícího muže Pablo.

„Moimero!“ rozpřáhnul ruce Luca a políbil Moimera na obě tváře. „Pojď, projdi se se mnou.“
Moimero střihl kradmý pohled na svého kamaráda a neochotně následoval nového mafiánského bosse ven ze hřbitova, do drobného parčíku.

„Jsem unavený. Že bychom se posadili?“ navrhnul Luca mávnutím ruky.

Úloha 4. *Máme v rovině čtyři stolečky – první, druhý, třetí a čtvrtý. Vzdálenost mezi prvním a druhým je 5 m, mezi druhým a třetím 6 m, mezi třetím a čtvrtým opět 6 m a mezi prvním a čtvrtým je 4 m. Jaká je nejmenší a největší možná vzdálenost mezi prvním a třetím stolečkem? Velikost stolečků zanedbejte*

„Támhleten vypadá, že by mohl být nejblíž,“ ukázal Moimero na dvě proti sobě natočené stoličky se stolečkem uprostřed. S Lucou se shodli a zamířili směrem k nim. Celou cestu je následoval Lucův syn Giovanni. Zaujímal pozici Lucova ochránce, což bylo samo o sobě legrační, neboť svalu by na jeho těle nenašli.

Posadili se na vybrané stoličky a Moimero uviděl, že na stole je naznačená šachovnice. Této skutečnosti si povšimnul i Luca a pousmál se.

„Hraješ šachy?“ zeptal se Luca. A bez toho, aby počkal na Moimerovu odpověď, začal na ni dávat šachové figurky. Ten ho bedlivě pozoroval. Mafiánskému kápovi se v očích zrcadlila škodolibost. Moimero se bál, co přijde.

Úloha 5. *Do šachovnice 5×4 jsou po řádcích vepsána přirozená čísla od jedničky (viz obrázek). S tabulkou můžeme provést tyto tahy:*

- *ke všem číslům na šachovnici přičíst nebo odečíst nějaké celé číslo,*
- *číslo na nějakém políčku přepsat na číslo jiného stejně barevného políčka,*
- *všechna políčka jedné barvy vynásobit nějakým celým číslem.*

Může dojít k situaci, kdy bude součet všech čísel v tabulce roven jedné?

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

„Hrát šachy mě naučil můj otec," pousmál se smutně Luca a posunul si klobouk hlouběji do čela. Moimero si vzpomněl na Lucova geniálního otce, jehož epitaf před chvílí četl na hrobě.

K jejich posezení došla Lucova žena Annie. Posadila se na opěradlo Lucovy lavice a ovinula svoje paže kolem manželových ramen. „Co děláte?" zeptala se.

„Hrajeme šachy, drahá."

Annie se usmála a pohladila Lucu ve vlasech. „Omluv ho, Moimero, on moc rád hraje šachy. Za jak dlouho, že má být ta tvoje svatba?"

„Za měsíc."

„Ach," pokýval hlavou Luca a zapálil si doutník, „to je ještě dost času tu svatbu zrušit."

Moimero se zakuckal z kouře z Lucova doutníku. „Zrušit?!"

„Ano. Moimero, musíš pochopit, že to není nic osobního. Ale znám pro naši Theresii spoustu lepších nápadníků, než jsi ty. Spoustu nápadníků, kteří by mohli být pro naši rodinu, řekněme, *lukrativnější*."

„Theresia si ale chce vzít mě!" zakroutil hlavou nevěřícně Moimero.

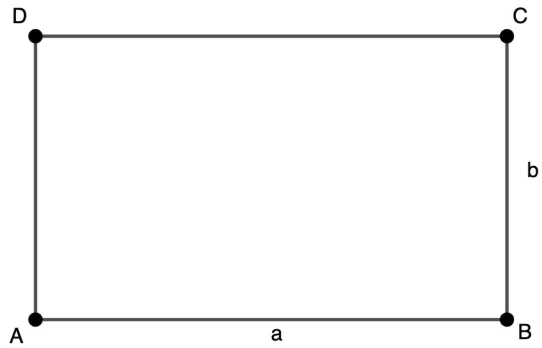
Luca se nahlas zasmál, až odhalil třpytivý zlatý zub. „Pobavil jsi mě, vskutku pobavil. Theresia je poslušná dívka, která je ochotná hájit zájmy naší rodiny."

Moimero se odmítal vzdát. „Ale já mám kontakty, dobrou práci, uvidíte, že můžu být pro vaši rodinu užitečný!"

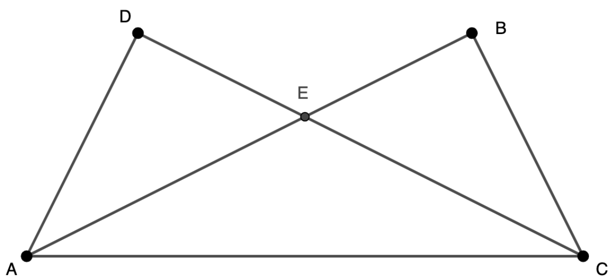
„Hmmm," zabručel lišácky Luca, „co myslíš drahá? Mohl by být užitečný?"

Annie se souhlasně zazubila. Luca vyndal z kapsy svého drahého saka papír.

Úloha 6. *Luca vyndal obdélníkový kus papíru $ABCD$ o délkách stran $|AB| = a$, $|BC| = b$.*



Papír byl přeložen podle jeho úhlopříčky AC tak, že vypadal jako na obrázku.



Určete délku úsečky EB pomocí délek a a b.

Luca papír rozložil a Moimero se zadíval na velký obrázek jedlíka celého umaštěného od rajčatové omáčky. „Eh," podivil se Moimero, „co to má být?"

„Někdo," vyslovil se Luca, „ukradl naší rodině recept na boloňskou omáčku. A tohle" – ukázal na obrázek na papíře – „nám tam nechal."

Moimero potlačil vlastní smích. „To je ovšem velice hrozné," řekl s předstíranou vážností.

„To není vůbec zábavné, Moimero. Prodej boloňské omáčky živí naši rodinu už po generace!" pokáral ho Luca a položil na šachovnici poslední figurku. Moimero sklopil zrak před Lucovým spalujícím pohledem a upřel ho na figurky položené na šachovnici. Všechny byly jezdci.

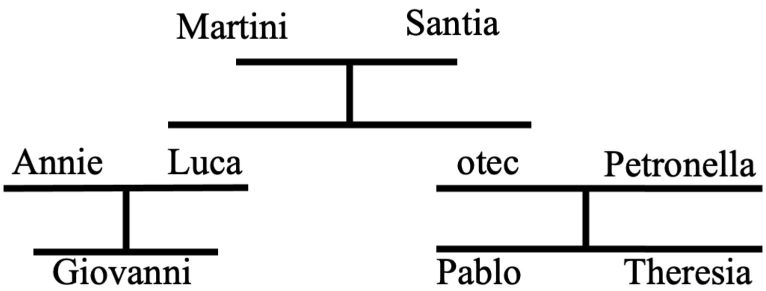
Úloha 7. *Kolik nejvíce jezdců jsme schopni umístit na klasickou šachovnici 8×8 tak, aby se vzájemně neohrožovali? Dokažte, že vámi zvolený počet lze na* *šachovnici umístit, a zároveň ukažte, proč nemůžeme (i při jiném rozmístění) na šachovnici umístit více jezdců – zkuste si šachovnici vhodně rozdělit.*

„A proč mi to celé říkáte?“ zeptal se Moimero.

„Protože, milý Moimero,“ zazubí se Luca, „chceš-li si vzít Theresii, najdi mi toho, kdo nám ten recept ukradl.“

Řešení první série

Úloha 0. *Z informací z doprovodného textu nakreslete rodokmen rodiny Lasagnů.*



Úloha 1. *Náměstíčko mělo tvar čtverce 7×7. Vložte do políček tabulky číslice $1-6$ tak, aby se stejné číslice neopakovaly v žádném řádku ani sloupci. Některá pole mohou zůstat prázdná – vybarvěte černě. Čísla okolo tabulky udávají součty skupin číslic v řádcích a sloupcích (skupiny jsou vždy odděleny jedním či více prázdnými políčky) v takovém pořadí, v jakém se vyskytují v příslušných řádcích a sloupcích. Skupinou může být myšlena i jediná číslice. V jednom řádku nebo sloupci mohou být maximálně 4 mezery. Příklad vyplnění tabulky 6×6 čísly $1-5$:*

			5					
			3		6	7	10	6
			1	9	4	8	2	9
5	7	1						
		11						
	6	4						
	4	8						
3	2	4						
	1	14						

			5					
			3		6	7	10	6
			1	9	4	8	2	9
5	7	1	5		3	4		1
		11			2	3	1	5
	6	4	3	2	1		4	
	4	8		4		1	5	2
3	2	4		3		2		4
	1	14	1		4	5	2	3

			2						
			5		3				6
			6	4	9	3	11	15	1
			1	6	3	11	10	6	2
	7	11							
		15							
	6	8							
	6	4							
14	2	1							
		9							
	1	20							

Řešení:

			2						
			5		3				6
			6	4	9	3	11	15	1
			1	6	3	11	10	6	2
	7	11	2	4	1	■	5	6	■
		15	■	■	2	3	6	4	■
	6	8	5	1	■	■	■	2	6
	6	4	■	2	4	■	1	3	■
14	2	1	6	3	5	■	2	■	1
		9	■	■	■	5	3	1	■
	1	20	1	■	3	6	4	5	2

Úloha 2. *Rozluštěte, co znamenají tři "nové" operace. (Nápověda - lze je popsat pomocí čtyř základních operací $+ - \times /$)*
Příklad: $5\$4 = 6 \qquad 12\$17 = 7$
Řešení: \$ je operace, která vynásobí první číslo dvěma a odečte druhé číslo

- $8@3 = 19 \qquad 15@12 = 42 \qquad 3@1 = 7 \qquad 9@9 = 27 \qquad 5@6 = 16$
- $5\#5 = 30 \qquad 5\#7 = 36 \qquad 3\#7 = 30 \qquad 12\#8 = 60 \qquad 7\#17 = 72$
- $3\&4 = 19 \qquad 2\&5 = 17 \qquad 3\&6 = 27 \qquad 10\&5 = 65 \qquad 1\&1 = 3$

Řešení:

- Operace @ první číslo vynásobí dvěma a poté přičte druhé číslo.
- Operace # obě čísla sečte a výsledek vynásobí třemi.
- Operace & dává součet součtu a součinu obou čísel.

Úloha 3. *Kolik existuje různých možných počtů dědiců po dědovi Martinim (počet dědiců musí být přirozené číslo), pokud rozdělí-li se mezi ně 16 milionů rovným dílem, počet milionů, co každý z dědiců dostane, bude kladné desetinné číslo, které má před desetinnou čárkou i po ní právě jednu cifru?*

Řekněme, že x je možný počet dědiců, a y je počet milionů, který každý dědic dostane, neboli $y = 16/x$. Pokud tuto rovnici vynásobíme 10, vyjde nám že $10y = 160/x$. Jelikož počet dědiců x splňoval zadanou podmínku, musí mít y po desetinné čárce právě jednu cifru, a tedy $10y$ je celé. Takže pro každé číslo x splňující zadanou podmínku platí, že $160/x$ je celé číslo, a tedy každé číslo x splňující zadanou podmínku je dělitelem 160.

Zároveň ale platí, že pokud nějaké číslo x je dělitelem 16, nesplňuje zadanou podmínku, protože $16/x$ by bylo celé, a tedy nemělo cifru za desetinnou čárkou.

Takže zadanou podmínku splňují čísla, která jsou děliteli 160, ale ne 16. Víme že $160 = 16 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$. Pokud dělitel 160 nemá být dělitelem 16, musí buďto být dělitelný 5, nebo při rozložení na prvočísla mít pět dvojek (protože 16 při rozložení na prvočísla má čtyři dvojky). První pravidlo splňuje 5, $5 \cdot 2 = 10$, $5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$, $5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 40$, $5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 80$ a $5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 160$, druhé pravidlo splňuje $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ a $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 160$.

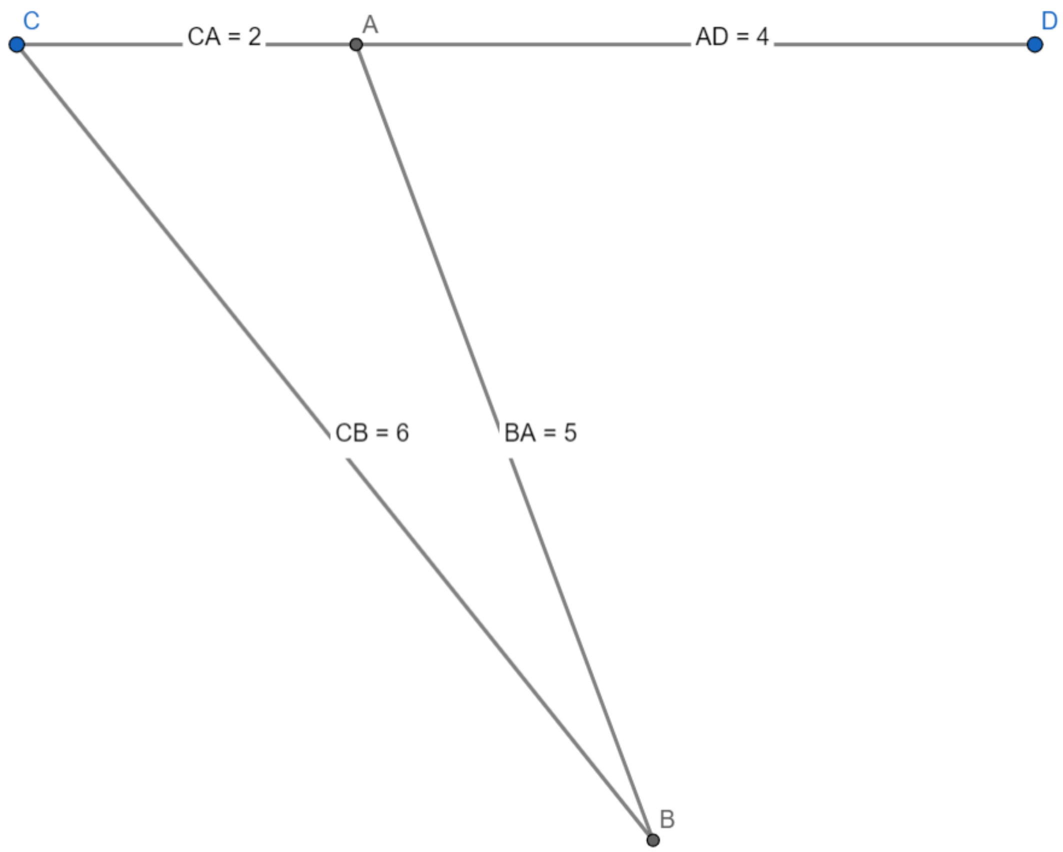
Zároveň snadno ověříme, že když 16 vydělíme těmito čísly, vyjde nám číslo které má i před desetinnou čárkou jednu cifru, což je druhá podmínka ze zadání.

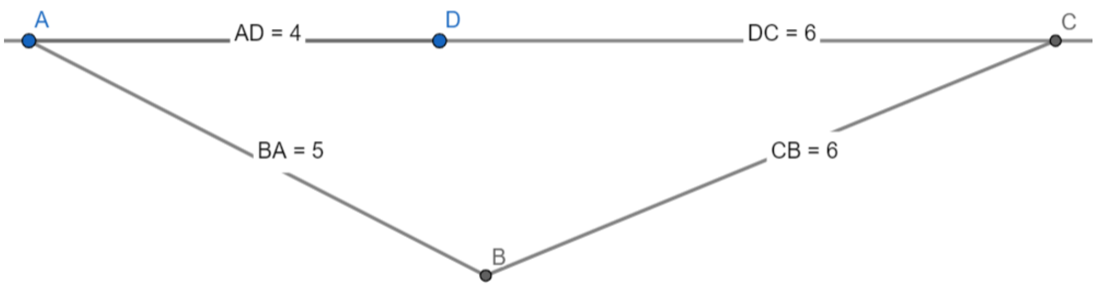
Takže dědiců může být 5, 10, 20, 32, 40, 80 nebo 160)

Úloha 4. *Máme v rovině čtyři stolečky – první, druhý, třetí a čtvrtý. Vzdálenost mezi prvním a druhým je 5 m, mezi druhým a třetím 6 m, mezi třetím a čtvrtým opět 6 m a mezi prvním a čtvrtým je 4 m. Jaká je nejmenší a největší možná vzdálenost mezi prvním a třetím stolečkem?*

Označíme si první stoleček jako bod A, druhý B, třetí C a čtvrtý D. Jelikož bod D je od bodu C vzdálený 6 m, a od bodu A je vzdálený 4 m, nemůže být vzdálenost mezi body A a C menší než $6 - 4 = 2$ m. Zároveň ale nemůže být vzdálenost mezi nimi větší než $6 + 4 = 10$ m. Tyto vzdálenosti to být můžou, vzdálenosti bodu B od bodů A, C nám v ani jednom případě nedělají problémy.

Takže nejmenší možná vzdálenost mezi prvním a třetím stolečkem je 2 m, největší možná je 10 m.





Úloha 5. *Do šachovnice 5×4 jsou po řádcích vepsána přirozená čísla od jedničky (viz obrázek). S tabulkou můžeme provést tyto tahy:*

- *ke všem číslům na šachovnici přičíst nebo odečíst nějaké celé číslo,*
- *číslo na nějakém políčku přepsat na číslo jiného stejně barevného políčka,*
- *všechna políčka jedné barvy vynásobit nějakým celým číslem.*

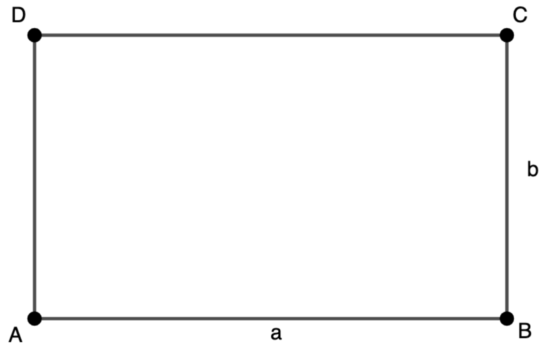
Může dojít k situaci, kdy bude součet všech čísel v tabulce roven jedné?

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

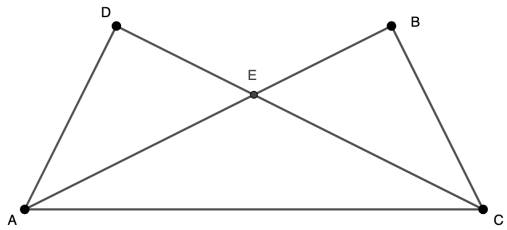
Důležité je si všimnout, že všechna čísla na políčcích jedné barvy mají vždy stejnou paritu, tedy jsou buď všechna lichá, nebo sudá. Ať už provedeme kterýkoli z tahů, tohle se nikdy nezmění – když od nich odečteme stejné číslo, změní to buď paritu všech čísel (pokud bude liché), nebo ani jednoho (když bude sudé), pokud některé číslo přepíšeme na jiné číslo stejné barvy, na daném políčku stále bude číslo s původní paritou, a pokud všechna čísla vynásobíme nějakým celým číslem, opět se může změnit pouze u všech těchto čísel (to když budeme lichá čísla násobit sudým).

Ve všech bílých políčcích, kterých je právě deset, tedy budou čísla stejné parity a ve zbylých deseti černých také. Pokud sečteme deset sudých čísel, určitě nám vyjde číslo sudé, stejně tak pokud sečteme deset lichých čísel. Součet jednotlivých barev tak musí být vždy sudý, a proto i součet všech čísel na šachovnici. Ten se tedy jedné rovnat nemůže.

Úloha 6. *Luca vyndal obdélníkový kus papíru $ABCD$ o délkách stran $|AB| = a$, $|BC| = b$.*



Papír byl přeložen podle jeho úhlopříčky AC tak, že vypadal jako na obrázku.



Určete délku úsečky EB pomocí délek a a b.

$|EB|$ si označíme jako x. $|AE| = |AB| - |EB| = a - x$. Díky symetrii platí, že $|EB| = |DE|$ a $|AE| = |EC|$. Úhel ABC je vnitřní úhel obdélníku a tak je pravý. Nyní můžeme použít Pythagorovu větu v trojúhelníku EBC.

$$\begin{aligned} |EB|^2 + |BC|^2 &= |EC|^2 \\ x^2 + b^2 &= (a - x)^2 \\ x^2 + b^2 &= a^2 - 2ax + x^2 \\ 2ax &= a^2 - b^2 \\ x &= (a^2 - b^2)/2a \end{aligned}$$

Úloha 7. *Kolik nejvíce jezdců jsme schopni umístit na klasickou šachovnici* 8×8 *tak, aby se vzájemně neohrožovali? Dokažte, tzn. ukažte, že vámi zvolený počet lze umístit, a zároveň ukažte, proč nemůžeme (i při jiném rozmístění) na šachovnici umístit více jezdců – zkuste si šachovnici nějak vhodně rozdělit.*

32. Stojí-li jezdec na bílém poli, ohrožuje pouze černá pole. Stojí-li na černém poli ohrožuje pouze bílá pole. Je tedy zřejmé, že pokud jezdce postavíme jen na jednu barvu, třeba všechny na bílá pole, nebudou se navzájem ohrožovat.

Proč ale není řešením 33 nebo víc?

Podívejme se jenom na výřez šachovnice 4x4 a ten si dále ještě rozdělme do 8 dvojic černých a bílých polí, na kterých se jezdci budou vzájemně ohrožovat:

1	2	4	3
8	7	1	2
6	5	3	4
7	8	6	5

Na každou z dvojic polí označených stejným číslem můžeme dát nejvýše jednoho jezdce. A protože jsme schopni rozdělit celou šachovnici na 32 disjunktních dvojic (nemají společný průnik), můžeme dát na šachovnici nejvíce 32 jezdců. Důkaz je tímto hotov.