73. ročník Matematické olympiády (2023/24)

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z5

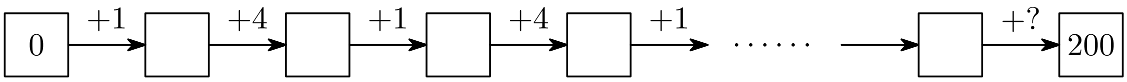
Z5–I–1

Zajíc běží závod na 2024 metrů. Při startu se odrazil levou nohou a po celou dobu závodu pravidelně střídá levou, pravou a obě nohy. Když se zajíc odrazí levou nohou, skočí 35 dm, když se odrazí pravou nohou, skočí 15 dm, a když se odrazí oběma nohama, skočí 61 dm.

Kolik skoků zajíc udělá, než dorazí do cíle? A kterou nohou se bude odrážet před cílovým skokem? *(L. Hozová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Doplňte chybějící čísla (ve čtverečcích i místo otazníku) v následujícím hadu. Přičítání 1 a 4 se pravidelně střídá:



N2. Potřebujeme 100 žárovek. Ty však prodávají jen v baleních po 6 kusech. Kolik balení musíme koupit?

N3. Mravenec ušel za minutu 15 cm. Cvrček ušel za minutu o 1 dm víc než mravenec. Kobylka za minutu naskákala o 2 m větší vzdálenost než ušel cvrček. Kolikrát byla kobylka rychlejší než mravenec?

N4. Libor a Robert dávali do mísy zrnka rýže. Pravidelně se střídali takto: Libor dal do mísy 3 zrnka, pak dal Robert 1 zrnko, Libor znovu dal 3 zrnka atd. Kdo poslední dával zrnka do mísy, jestliže počet zrnek v míse je udán číslem

a) končícím nulou,

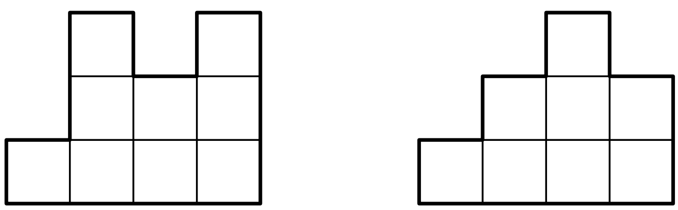
b) končícím devítkou?

D1. Taška unese celkem 19 kg. Můžeme do ní dát melouny, nejvíce tři ananasy a nevíce dvě manga. Melouny váží 6 kg, ananasy váží 4 kg a manga váží 1 kg. Kolik nejvíce kusů ovoce můžeme do tašky dát? Uveďte všechny možnosti.

Z5–I–2

Zuzka postavila ze šestnácti stejně velkých kostek čtverec o rozměrech 4×4 kostky. S dalšími stejnými kostkami pokračovala ve stavění. Kostky na sebe stavěla tak, že každé dvě sousední kostky měly společnou celou stěnu. Výsledná stavba vypadala ze dvou různých stran jako na následujícím obrázku.

Zjistěte, kolik nejvíce a kolik nejméně kostek Zuzka na svou stavbu mohla použít. *(E. Novotná)*

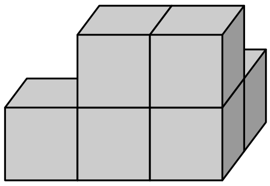


Návodné a doplňující úlohy

N1. Kolik krychlí o hraně 1 cm potřebujeme na sestavení velké krychle o hraně 7 cm?

N2. Předchozí velkou krychli obarvíme modře. Kolik z jednotkových krychlí má právě dvě stěny modré?

N3. Na obrázku je stavba z kostek o hraně 1 cm, která zbyla z kvádru o rozměrech $3 \times 2 \times 2$ cm. Kolik kostek jsme mohli z tohoto kvádru odebrat, aby vznikla uvedená stavba?

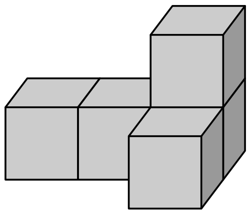


N4. Kolika způsoby můžeme doplnit ke stavbě z pěti krychlí na následujícím obrázku jednu krychli, jestliže

a) nepoužíváme lepidlo, ale krychle přikládáme celými stěnami k sobě,

b) používáme lepidlo, krychle lepíme k sobě celými stěnami.

Předpokládáme, že stavba leží na podložce, tedy k spodním stěnám krychlí v dolní vrstvě krychli nedoplňujeme.

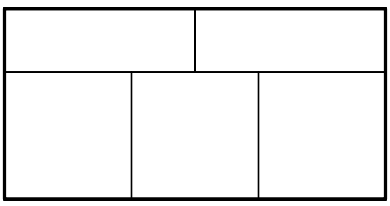


D1. Jakou nejvyšší stavbu (tj. stavbu s nejvíce patry) můžeme postavit ze 100 stejných krychlí, jestliže krychle klademe stěnami na sebe ve vrstvách a v každé vrstvě je alespoň o 3 krychle méně než ve vrstvě pod ní?

Z5–I–3

Katka měla na zahrádce pět záhonů rozmístěných jako na obrázku. Záhony chtěla osadit česnekem, mrkví a ředkvičkou tak, aby na každém záhonu byl jen jeden druh zeleniny a aby žádné dva záhony se stejnou zeleninou nesousedily.

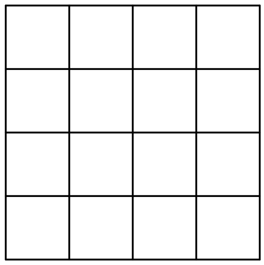
Kolika způsoby mohla Katka záhony osázet? *(L. Hozová)*



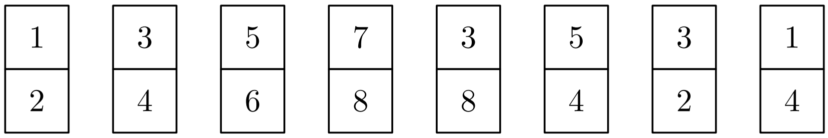
Návodné a doplňující úlohy

N1. Rozdělte čtverec na šest polí stejného tvaru, která pak obarvíte dvěma barvami tak, aby pole stejné barvy spolu nesousedila žádným bodem své hranice.

N2. Následující obrazec sestává ze 16 shodných čtvercových polí. Kolik nejméně barev potřebujeme na jeho obarvení, aby se stejně obarvená pole nedotýkala stranami?



N3. Můžeme předchozí obrazec pokrýt následujícími osmi dominovými kostkami, aby spolu stranou nesousedila dvě pole se sudými čísly, ani dvě pole s lichými čísly?



N4. Obrazec z úlohy N2 rozdělte podél vyznačených úseček na čtyři stejné části tak, aby se všechny části navzájem dotýkaly alespoň jedním vrcholem. Najděte tři řešení.

N5. Obrazec z úlohy N2 rozdělte podél vyznačených úseček na tři obdélníky (nikoli čtverce). Najděte všechna řešení, přičemž řešení lišící se jen umístěním obdélníků považujeme za stejná.

Z5–I–4

V zahrádkářské osadě měl pan Jahoda ve svém sudu 16 litrů vody. Soused pan Malina měl ve svém sudu třikrát více vody než pan Jahoda. Začalo pršet a do obou sudů napršelo stejné množství vody. Po dešti pan Malina zjistil, že má v sudu dvakrát více vody než pan Jahoda.

Kolik litrů vody napršelo do každého sudu? *(L. Hozová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Rusalka měla 10 perel. Bludička jich měla dvakrát tolik.

a) Kolik perel by musela Bludička dostat, aby jich měla čtyřikrát víc než Rusalka?
b) Kolik perel by pak musela dostat Rusalka, aby jich měla dvakrát víc než Bludička?

N2. Pankrác měl dvacetkrát víc nanuků než Servác. Servác měl čtyřikrát méně nanuků než Bonifác. Měl víc nanuků Pankrác, anebo Bonifác? A kolikrát?

N3. Silva měla dvě prázdná akvária. Do prvního nalila dva litry vody. Do druhého nalila tolik vody, aby v něm bylo pětkrát víc litrů než v prvním. Pak do obou akvárií nalila stejné množství vody. Nyní bylo ve druhém akváriu dvakrát tolik vody co v prvním. Kolik vody bylo v obou akváriích dohromady?

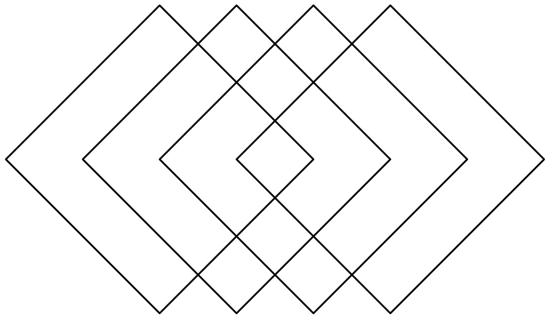
D1. Máme jednu třílitrovou a jednu pětilitrovou nádobu, k tomu neomezené množství vody. Popište, jak s těmito prostředky odměřit

a) 1 litr,
b) 2 litry,
c) 4 litry.

Z5–I–5

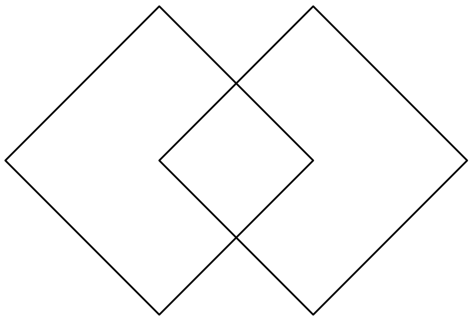
Ze čtyř shodných čtverců byl vytvořen ornament jako na obrázku. Strany čtverců jsou dlouhé 4 cm, jsou navzájem rovnoběžné či kolmé a protínají se buď ve svých čtvrtinách, nebo polovinách. Libor chtěl ornament vybarvit a zjistil, že barva na 1 cm² každého souvislého pole ho bude stát tolik korun, kolika čtvercům je toto pole společné.

Kolik korun bude stát barva na vybarvení ornamentu? *(K. Pazourek)*



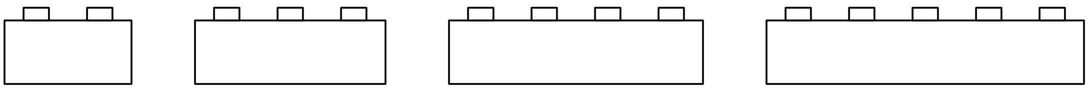
Návodné a doplňující úlohy

N1. Máme dva stejné čtverce. Jeden z vrcholů prvního čtverce leží ve středu druhého čtverce, stejně tak jeden z vrcholů druhého čtverce leží ve středu prvního čtverce. Jaká část druhého čtverce leží zároveň i v prvním čtverci?



N2. Podlaha tvaru obdélníku o rozměrech 4 metry a 6 metrů je pokryta čtvercovými dlaždicemi o straně 50 centimetrů. Kolik je na podlaze dlaždic?

N3. Ze stavebnice jsme vybrali obdélníkové kostky široké jeden dílek a dlouhé 2, 3, 4 a 5 dílků. Kostky skládáme na sebe a za sebe tak, že žádné dvě kostky se nepřekrývají o víc než polovinu délky kterékoliv z nich. Jaká je délka nejkratší stavby, kterou takto můžeme postavit?



N4. Petr měl sedm čtvercových papírů. Žádné dva papíry nebyly stejně velké, každý papír měl délku strany v centimetrech vyjádřenu celým číslem. Petr papíry rozstříhal na proužky široké 1 cm a ze všech poskládal pás široký 1 cm (proužky se nepřekrývaly, jen dotýkaly hranami). Jaký nejkratší mohl být tento pás?

Z5–I–6

Lucka napsala na lístek číslo 12345 a dvakrát jej mezi číslicemi rozstřihla. Získala tak tři menší kartičky se třemi čísly. Tyto kartičky přeskládala dvěma způsoby, čímž dostala dvě různá pětimístná čísla. Rozdíl těchto dvou čísel byl 28 926.

Mezi kterými číslicemi Lucka lístek rozstřihla? *(M. Petrová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Určete dvě číslice, jejichž rozdíl je 7. Najděte všechny možnosti.

N2. Když od dvojciferného čísla odečteme součet jeho číslic, dostaneme jednociferné číslo. Najděte všechna čísla s touto vlastností.

N3. Když od čísla odečtu jednu jeho číslici, dostanu dvě třetiny původního čísla. Které číslo jsem měl na začátku?

D1. Z číslic 6, 7, 8, 9 sestavíme dvě dvojciferná čísla, každou číslici použijeme právě jednou. Jak to můžeme udělat, aby

a) jejich součet byl největší možný,
b) jejich součet byl nejmenší možný,
c) jejich rozdíl byl největší možný,
d) jejich rozdíl byl nejmenší možný?

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z6

Z6–I–1

Kamarádi Jarda, Přemek a Robin hráli kuličky. Jardovi se moc nedařilo, takže po hře měl nejméně kuliček ze všech. Klukům to bylo líto, proto dal Robin Jardovi polovinu všech svých kuliček a Přemek třetinu svých. Teď měl nejvíc kuliček Jarda, a tak svým kamarádům vrátil po sedmi kuličkách. Po těchto výměnách měli všichni stejně, a to 25 kuliček.

Kolik kuliček měl po hře (před výměnami) Jarda? *(M. Petrová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Babička měla v košíku 8 jablek, dědeček měl polovinu jablek, co babička. Kolik jablek by měla dát babička dědečkovi, aby měli stejně?

N2. Na stole byly při oslavě koláčky, laskonky a muffiny. Fiona snědla dva koláčky, čtvrtinu všech laskonek a čtyři muffiny. Shrek snědl všechny zbylé laskonky, ale i tak snědl méně zákusků než Fiona. Kolik nejvíce zákusků můžeme ještě Shrekovi dát, abychom měli jistotu, že jich nesní víc než Fiona?

N3. Michal a David hráli karty o žetony. Na začátku měl každý jiný počet žetonů. V první hře Michal prohrál polovinu svých žetonů a dal je Davidovi, ve druhé hře zase prohrál David jeden žeton a dal ho Michalovi. Třetí hru opět prohrál David a musel Michalovi odevzdat třetinu svých žetonů. V tu chvíli hru ukončili. Když si Michal chtěl posbírat své žetony, čtyři z nich mu spadly do kanálu. Nakonec tak měl každý z nich 8 žetonů. Kolik žetonů měli, než začali hrát?

N4. Markus a Aurelius házeli třemi klasickými herními kostkami obarvenými červeně, modře a zeleně. Markus získal při svém hodu součet 8. Poté Aurelius hodil tentýž součet. Přitom na červené kostce padla Aureliovi polovina toho, co Markusovi, na modré kostce Aurelius hodil o tři víc než Markus a na zelené kostce měl o třetinu méně než Markus. Co mohlo Aureliovi padnout na jednotlivých kostkách?

Z6–I–2

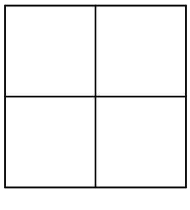
Karolína narýsovala čtverec o straně 6 cm. Na každé straně čtverce vyznačila modrou barvou dva body, kterými rozdělila příslušnou stranu na tři shodné části. Potom sestrojila čtyřúhelník, který měl všechny vrcholy modré a jehož žádné dva vrcholy neležely na stejné straně čtverce.

Jaké obsahy čtyřúhelníků mohla Karolína dostat? Uveďte všechny možnosti.

(L. Hozová)

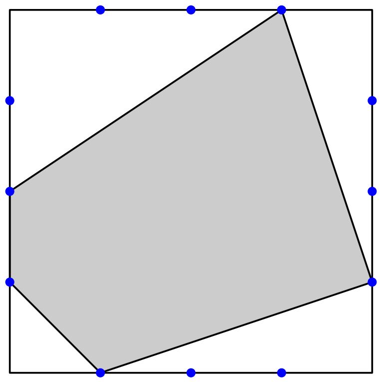
Návodné a doplňující úlohy

N1. Kolik různých trojúhelníků lze nalézt ve čtvercové tabulce 2×2, jestliže vrcholy každého trojúhelníku jsou jedině v mřížových bodech? Shodné trojúhelníky počítejte za jeden.



N2. Klára má na zahrádce zatlučené kolíky tvořící vrcholy pravidelného šestiúhelníku. Pomocí lanek spojujících kolíky chce tento záhon rozdělit čtyři trojúhelníkové záhonky. Kolika způsoby to může udělat, jestliže souměrná dělení se počítají jen jednou?

N3. Strany čtverce měří 12 cm a vyznačené body dělí každou ze stran na čtyři stejné části, viz obrázek. Určete obsah šedého pětiúhelníku.



D1. Jaké různé obsahy mohou mít trojúhelníky zakreslené ve čtvercové tabulce 3×3, jestliže vrcholy každého trojúhelníku jsou jedině v mřížových bodech? Strana každého čtverečku měří 1 cm.

Z6–I–3

V osmimístném čísle je každá jeho číslice (kromě poslední) větší než číslice následující. Kolik je všech takových čísel? *(I. Jančigová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Kolik trojmístných čísel vytvořených z číslic 1, 2, 3, 4, z nichž žádná se neopakuje, má na místě jednotek větší číslici než na místě stovek?

N2. Adam, Boris, Cecil, David a Evžen si dělají na táboře každé ráno nástup. Jeden je vedoucím dne, stojí naproti nastoupené řadě a zbylí chlapci se seřadí vzestupně podle výšky (každý z chlapců je jinak vysoký). V pondělí jeden z chlapců, který však nebyl vedoucím dne, zaspal a nástup propásl. Jak mohl pondělní nástup vypadat? Určete počet všech možností.

N3. V lednici bylo šest různých jogurtů (vanilkový, čokoládový, borůvkový, jahodový, mangový a citronový). Maminka dala každému ze tří dětí jeden jogurt ke svačině, tedy v lednici zbyly tři jogurty. Kolik různých kombinací jogurtů mohlo zůstat v lednici?

N4. Při slavnostní hostině se podával studený předkrm, poté polévka, teplý předkrm, hlavní chod, salát a dezert. Hosté si mohli vybrat mezi dvěma druhy dezertu, ostatní chody byly bez možnosti výběru. Jonáš se rozhodl vynechat dva chody, ale rozhodně ne dezert. Kolika způsoby si mohl Jonáš vybrat slavnostní hostinu?

Z6–I–4

V následujícím písemném násobení dvou trojmístných čísel jsou mnohé číslice zastoupeny hvězdičkami. Místo hvězdiček doplňte číslice tak, aby byl výpočet platný:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \ast & \ast & \ast \\
\times & & \ast & \ast & \ast \\
\hline
 & \ast & \ast & \ast & \ast \\
3 & 1 & 7 & 5 & \\
\ast & \ast & \ast & & \\
\hline
\ast & \ast & 6 & \ast & \ast
\end{array}$$

(L. Hozová)

Návodné a doplňující úlohy

N1. Toník si zašifroval dvě číslice, jednu označil jako A, druhou jako B. Vytvořil z nich čísla AAB a BA. Když menší z nich odečetl od většího, vyšel mu výsledek 155. Jaké číslice se skrývají za písmeny A a B?

N2. Zjistěte, jaké číslice se skrývají za písmeny A, B a C, jestliže platí $ABC \cdot AA = 2024$. Za stejnými písmeny se skrývají stejné číslice, za různými písmeny různé číslice.

N3. Mařenka chtěla znát oblíbené číslo Jeníčka. Ten jí prozradil, že jeho oblíbené číslo lze rozložit na součin tří prvočísel, přitom součet dvou z těchto prvočísel je 30 a součet jiných dvou z těchto prvočísel je 18. Jaké může být Jeníčkovo oblíbené číslo?

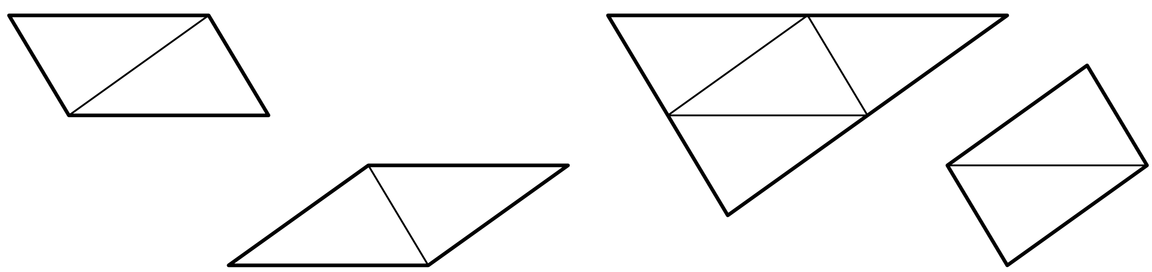
N4. V následujícím písemném násobení trojmístného a dvojmístného čísla jsou mnohé číslice zastoupeny hvězdičkami. Místo hvězdiček doplňte číslice tak, aby byl výpočet platný:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \ast & \ast & \ast \\
\times & & & \ast & \ast \\
\hline
 & & \ast & \ast & \ast \\
 & 6 & 9 & 5 & \\
\hline
 & \ast & \ast & \ast & 3
\end{array}$$

Z6–I–5

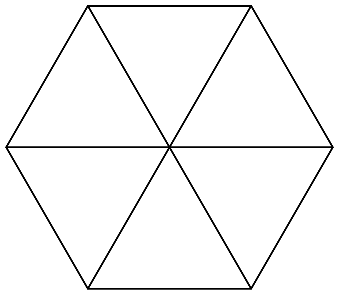
Péťa složil z navzájem shodných trojúhelníků několik rovinných útvarů, viz obrázek. Obvody prvních tří jsou postupně 8 cm, 11,4 cm a 14,7 cm.

Určete obvod čtvrtého útvaru. *(E. Semerádová)*



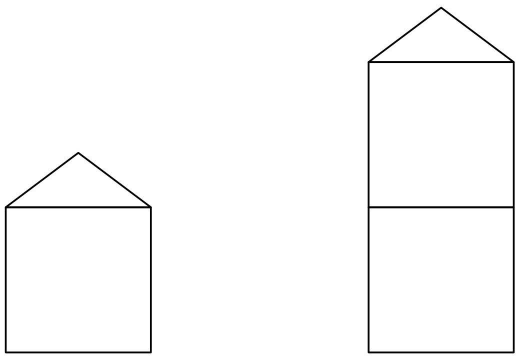
Návodné a doplňující úlohy

N1. Madla si narýsovala dva stejné pravidelné šestiúhelníky a rozdělila je na shodné rovnostranné trojúhelníky jako na obrázku. Trojúhelníky z jednoho šestiúhelníku přiložila ke stranám druhého šestiúhelníku a vytvořila tak pravidelnou šesticípou hvězdu. Jak se lišil obvod hvězdy od obvodu původního šestiúhelníku? Jak se lišily jejich obsah?

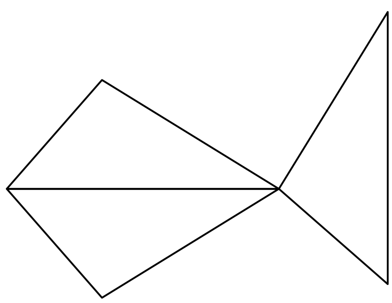


N2. Martin si narýsoval pravidelný šestiúhelník se stranou délky 4 centimetry a rozstříhal jej na šest shodných rovnostranných trojúhelníků. Pak se snažil trojúhelníky přeskládat tak, aby se sousední trojúhelníky dotýkaly vždy celými stranami a aby obvod vzniklého souvislého obrazce byl co největší. Jak mohl trojúhelníky přeskládat a jaký byl výsledný obvod? Najděte alespoň tři možnosti.

N3. Obrazec se skládá ze čtverce a rovnoramenného trojúhelníku, jehož základna je stejně dlouhá jako strana čtverce. Obvod obrazce je 25 cm. Pokud pod obrazec přikreslíme ještě jeden shodný čtverec jako na obrázku, obvod se zvětší o 9,6 cm. Jaký je obvod samotného rovnoramenného trojúhelníku?



N4. Radim složil ze tří shodných různostranných trojúhelníků tvar ryby. Určete obvod tohoto útvaru, jestliže nejkratší strana trojúhelníku je o 4 cm kratší než jeho nejdelší strana, zbylá strana trojúhelníku je o 2 cm menší než jeho nejdelší strana a tělo ryby (bez ocasní ploutve) má obvod 16 cm.



Z6–I–6

Aleš, Bára, Cyril, Dana, Eva, František a Gábina se stali na svých školách vítězi ve stolním fotbálku a sešli se na dvoudenním turnaji o celkového vítěze. Každé z těchto sedmi dětí mělo během turnaje sehrát jednu hru s každým jiným. První den turnaje odehrál Aleš jednu hru, Bára dvě hry, Cyril tři, Dana čtyři, Eva pět her a František šest.

Kolik her odehrála první den Gábina? *(L. Hozová)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Anežka, Broňa a Cilka spolu hrály šipky. Hrály vždy po dvojicích, vítězka získala 2 body, poražená 0 bodů, při remíze dostaly obě hráčky po 1 bodu. Když dohrály každá s každou jednu hru, měla Anežka 4 body a Broňa 1 bod. Dokážeš zjistit, kolik bodů měla Cilka?

N2. Na obědě se sešlo sedm přátel. V restauraci neměli dost velký stůl, proto hosty posadili k několika prázdným stolům. Když přinesl číšník přípitek, ťukl si každý s každým u svého stolu, ale s nikým jiným. Celkem se ozvalo devět cinknutí skleniček. Ke kolika stolům byli přátelé rozsazeni?

N3. Aleš, Bořek, Cecilka, Dana a Eva si před prázdninami slíbili, že každý s každým půjde jednou na zmrzlinu, přitom se vždy sejdou pouze ve dvou. Aleš tvrdil, že kdyby každý den šla jedna dvojice na zmrzlinu, tak budou potřebovat aspoň dva týdny. Měl Aleš pravdu?

N4. Na táborové výpravě byla tři stanoviště. Na prvním stanovišti si každý z oddílu losoval, jestli na další stanoviště pojede na kole, půjde pěšky, nebo se sveze autobusem. Také na druhém stanovišti si každý losoval, jak se dostane na třetí. Tentokrát si navíc mohli vylosovat cestu lodí. Zdenda je zdatný matematik a správně si odvodil, že alespoň dva lidé z oddílu budou z prvního až na třetí stanoviště cestovat společně. Kolik nejméně táborníků bylo na výpravě?

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z7

Z7–I–1

Ajka, Barborka, Cilka a Danek se dohadovali o počtu zrnek písku na jejich pískovišti. Danek sdělil kamarádkám svůj odhad a ty se jej rozhodly ověřit. Ajka napočítala 873 451 230, Barborka 873 451 227 a Cilka 873 451 213 zrnek. Součet (kladných) rozdílů těchto tří výsledků od Dankova odhadu byl 29.

Kolik zrnek písku mohl odhadovat Danek? Uveďte všechny možnosti. (V. Bachratá)

Návodné a doplňující úlohy

N1. Rozdíl dvou čísel je 105, jedno z nich je 150. Jaký může být součet těchto čísel?

N2. Vypočítejte co nejjednodušeji:

$$987\,004 + 789\,003 - 987\,002 - 789\,001 = ?$$

N3. Jsou dána čísla 4, 14, 18 a 24. Vyberte z nich tři čísla tak, aby součet jejich (kladných) rozdílů od čísla 15 byl co nejmenší.

D1. Pro každé jednomístné přirozené číslo vezměte jeho nezáporný rozdíl od čísla 5. Vyjádřete aritmetický průměr takto vzniklých čísel.

Z7–I–2

Pan Delfín a pan Žralok byli zdatní rybáři. Jednou dohromady ulovili 70 ryb. Pět devítin ryb, které ulovil pan Delfín, byli pstruzi. Dvě sedmnáctiny ryb, které ulovil pan Žralok, byli kapři.

Kolik ryb ulovil pan Delfín? (L. Hozová)

Návodné a doplňující úlohy

N1. Richard napsal číslo tvořené navzájem různými číslicemi. Pak z nich třetinu číslic umazal. Kolik číslic mohlo mít zbylé číslo? Určete všechny možnosti.

N2. Ve spíži byly schovány koláče, z nichž třetina byla maková. Hugo si tajně dva makové koláče vzal, čímž snížil podíl makových koláčů na čtvrtinu. Kolik makových koláčů zbylo ve spíži?

N3. Máme tři zlomky, jejichž čitatelé i jmenovatelé jsou zapsáni přirozenými čísly. Společný jmenovatel prvního a druhého zlomku je 4, společný jmenovatel druhého a třetího zlomku je 6. Jaký může být nejmenší součet všech tří zlomků?

D1. Na oslavě narozenin měli velký dort. Míša z něj snědla desetinu. Nina snědla dvanáctinu zbytku. Sourozenci Opletalovi snědli dvě třetiny toho, co zbylo po Nině. Patrik snědl jedenáctinu toho, co zbylo po Opletalových. Jaká část dortu byla celkem snědena?

Z7–I–3

Myslím si tři čísla. Když je sečtu, dostanu 15. Když od součtu prvních dvou čísel odečtu třetí, dostanu 10. Když od součtu prvního a třetího čísla odečtu druhé, dostanu 8.

Která čísla si myslím? *(E. Semerádová)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Máme dvě čísla, jejichž rozdíl je 10 000. K oběma číslům přičteme 2 024. Jaký bude rozdíl takto zvětšených čísel?

N2. Máme čísla a, b, c a d, pro která platí

$$a - b = b - c = c - d = 100.$$

Určete rozdíl $a - d$.

N3. Jindra rýsoval červené a modré úsečky. Úsečky stejné barvy měly stejnou délku. Čtyři červené úsečky za sebou tvořily úsečku, která se lišila o 12 cm od úsečky sestrojené ze čtyřech modrých úseček. Jak se lišily délky jedné modré a jedné červené úsečky?

N4. Jindra měl našetřeno tolik peněz, co Michal a Pavel dohromady. Když si Michal od Pavla půjčil tolik, kolik sám měl, zbylo Pavlovi o 500 korun méně, než co měl Jindra. Kolik korun měl Michal původně?

D1. V zahradě stály dva stejné sudy plné vody. Když Lída odebrala z prvního sudu několikrát vodu konví, zbylo v něm 26 litrů vody. Když Lída odebrala z druhého sudu několikrát vodu toutéž konví, zbylo v něm 41 litrů. Konev byla vždy naplněna až po okraj a její objem byl udán v celých litrech. Jaký mohl být objem konve? Určete všechny možnosti.

Z7–I–4

Anetčin strýc má narozeniny ve stejný den v roce jako Anetčina teta. Strýc je starší než teta, ne však o víc než o deset let, a oba jsou plnoletí. Na poslední oslavě jejich narozenin si Anetka uvědomila, že když vynásobí jejich oslavované věky a výsledný součin ještě vynásobí počtem psů, kteří se na oslavě sešli, dostane číslo 2024.

Kolik psů mohlo být na této oslavě? Určete všechny možnosti. *(M. Petrová)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Najděte všechny dělitele čísla 46 827, které nejsou dělitelné třemi.

N2. Kolik dělitelů součinu čísel 1, 2, 3, 4 a 5 je sudých?

N3. Najděte nejmenší přirozené číslo, které má právě pět různých dělitelů.

D1. Vyjádřete číslo 2000 jako součin tří jeho dělitelů tak, aby první dělitel byl jednociferný, druhý dvojciferný a třetí trojciferný. Najděte všechny možnosti.

Z7–I–5

Pravoúhlý trojúhelník má obsah $36\,\mathrm{m}^2$. V něm je umístěn čtverec tak, že dvě strany čtverce jsou částmi dvou stran trojúhelníku a jeden vrchol čtverce je ve třetině nejdelší strany.

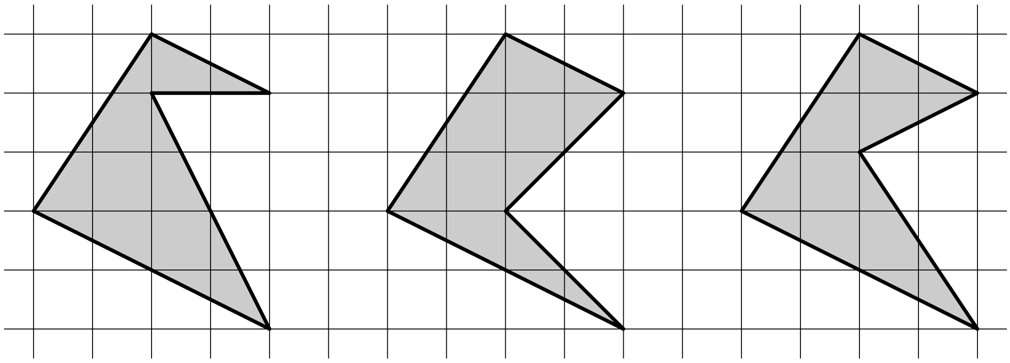
Určete obsah tohoto čtverce. *(E. Novotná)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

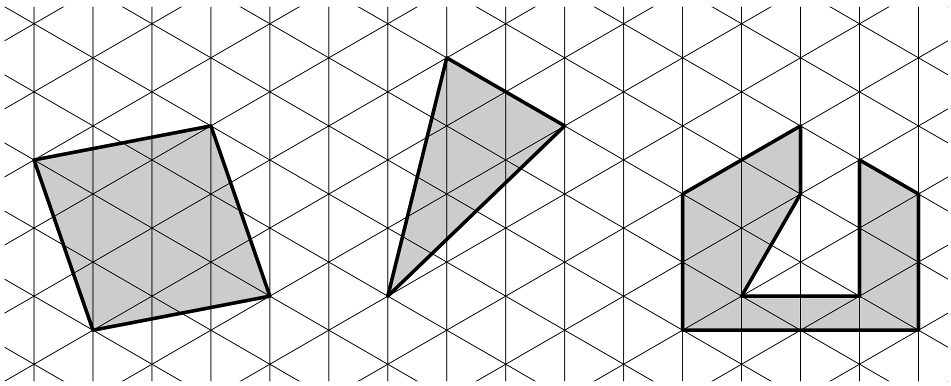
N1. Do pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku o obsahu $60\,\mathrm{cm}^2$ je vepsán čtverec tak, že dvě strany čtverce leží na odvěsnách, jejich společný vrchol leží v hlavním vrcholu trojúhelníku a protilehlý vrchol leží na základně. Jaký je obsah tohoto čtverce?

N2. Je dán rovnoramenný tupoúhlý trojúhelník ABC se základnou AB. Vyznačme na základně AB bod D tak, že $|AD| = \frac{1}{4}|AB|$. Bodem D veďme kolmici k základně a její průsečík s ramenem AC označme E. Obsah trojúhelníku ADE je $6\,\mathrm{cm}^2$. Jaký je obsah čtyřúhelníku $DBCE$?

N3. Určete obsahy následujících útvarů ve čtvercové síti, kde strana základního čtverce sítě měří 1 cm:



D1. Určete obsahy následujících útvarů v trojúhelníkové síti, kde obsah základního trojúhelníku sítě je $1\,\mathrm{cm}^2$:



Z7–I–6

Trpaslíci počítají svoje věky ve dnech, takže každý den slaví narozeniny. U trpaslíka Nosíka se sešlo sedm trpaslíků s věky 105, 120, 140, 168, 210, 280 a 420 dnů. Během oslavy se všem osmi trpaslíkům podařilo rozdělit do dvou skupin se stejnými součty věků.

Kolik nejméně a kolik nejvíce dnů mohlo být trpaslíkovi Nosíkovi? (E. Novotná)

Návodné a doplňující úlohy

N1. Jsou dána čísla 3∗∗∗∗∗54, 3∗∗∗∗∗40, 3∗∗∗∗178, kde hvězdičky značí neznámé číslice. Navíc je dáno zcela neznámé číslo x. Tato čtyři čísla je možné rozdělit do dvou skupin tak, že součet čísel v obou skupinách je stejný. Jindra tvrdí, že číslo x jistě není tvaru 3∗∗∗∗∗99. Má Jindra pravdu?

N2. Řešte soutěžní úlohu pro případ, že by k Nosíkovi přišli jen dva trpaslíci s věky 105 a 120 dnů.

D1. Král vážil svůj poklad a zjistil přitom následující:

- jedna truhlice váží stejně jako dvě žezla a dvě koruny dohromady,

- tři truhlice váží stejně jako čtyři žezla a třináct korun dohromady,
- jedna truhlice a dvanáct korun dohromady váží stejně jako šest žezel.

Čím lze vyvážit pět žezel? Najděte alespoň tři možnosti.

D2. Na rovnoramenných vahách chceme vyvážit předmět, jehož hmotnost je v celých dekagramech. Přitom máme k dispozici pouze závaží o hmotnostech 3 dekagramy a 8 dekagramů. Je vždy možné tento úkol splnit? (Předpokládejte, že závaží každého druhu je neomezené množství a váha má neomezenou nosnost.)

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z8

Z8–I–1

V loňském roce bylo v našem skautském oddíle o 30 chlapců více než děvčat. Letos se počet dětí v oddíle zvětšil o 10 %, přičemž počet chlapců se zvětšil o 5 % a počet děvčat se zvětšil o 20 %.

Kolik dětí máme letos v oddíle? *(L. Hozová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Na pouťové střelnici byly červené a modré papírové růže. Červených růží bylo o 20 % více než modrých a dohromady jich bylo 55. Kolik bylo na střelnici modrých růží?

N2. Mezi bonbóny na stole bylo 15 % bonbónů s bílou polevou. Když cukrářka přidala na stůl pět bonbónů s bílou polevou, jejich podíl mezi všemi bonbóny se zvýšil na 20 %. Kolik bonbónů bylo původně na stole?

N3. Marek si každý měsíc zapisoval, kolik vody napršelo na jeho zahradu. Zjistil, že v červenci napršelo o 20 % více než v dubnu, v září napršelo o 25 % méně než v červenci a v prosinci napršelo stejně jako v dubnu, ale o 3 mm více než v září. Kolik mm napršelo v dubnu?

D1. Petr měl o čtvrtinu více papírových origami jeřábů než Pavel, dohromady jich měli 108. V sobotu se sešli a celé odpoledne skládali jeřáby. Pavlovi se podařilo složit tolik jeřábů, že jich měl celkem o šestinu více než původně. Petr složil 15 % svého původního počtu jeřábů. O kolik procent více jeřábů měli dohromady po sobotním skládání?

Z8–I–2

Adam měl papír, který byl natolik veliký, že by z něj šlo natrhat několik desítek tisíc kousků. Nejprve papír roztrhal na čtyři kousky. Každý z těchto kousků vzal a roztrhal buď na čtyři, nebo na deset kousků. Stejným způsobem pokračoval dál: každý nově vzniklý kousek roztrhal buď na čtyři, nebo na deset menších kousků.

Rozhodněte a vysvětlete, zda může Adam tímto způsobem natrhat přesně 20 000 kousků. *(I. Jančigová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Stela měla mísu bonbónů. Obsah mísy rozdělila na poloviny, jednu polovinu pak rozdělila na třetiny a druhou polovinu na pětiny. Kolik nejméně bonbónů mohlo být v míse?

N2. Adam trhá papír na kousky. Každý den roztrhá každý kousek papíru, který má z předchozího dne, a to buď na 4, nebo na 10 kousků. Ve středu začínal trháním jednoho kusu papíru. Kolik nejvíce a kolik nejméně kousků mohl mít po trhání v pátek téhož týdne?

N3. Žaneta a Václav hráli zajímavou hru, každý se svými 10 125 kamínky a hrací kostkou. V každém kole oba házeli kostkou a rozdělovali kamínky. Pokud padlo liché číslo, měl házející za úkol rozdělit svou hromádku na tři hromádky se stejným počtem kamínků, pokud padlo sudé číslo, rozdělovali na pět hromádek se stejným počtem kamínků. V dalších kolech rozdělovali všechny svoje hromádky na třetiny či pětiny podle toho, co padlo na kostce. První, kdo nemohl některou ze svých hromádek rozdělit, prohrál. Kolik kol mohla hra trvat?

N4. Na festivalu rekordů upekli obrovský tvarohový koláč. Tonda, který koláč krájel, uměl rozkrojit jakýkoli kus buď na poloviny, nebo na třetiny. Mohl Tonda rozdělit celý koláč mezi 15 lidí? Pokud ano, mohli mít všichni stejně velký kus koláče?

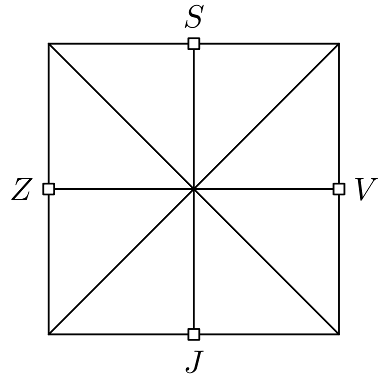
Z8–I–3

Ve sportovním areálu tvořila stanoviště A, B, C, D, E vrcholy pravidelného pětiúhelníku. Tato stanoviště byla pospojována přímými cestami. Navíc na cestě z A do B byla fontána F, kterou se stanovištěm C spojovala cesta kolmá k cestě z B do E. Pat a Mat se sešli na stanovišti E a rozhodli se zamést některé cesty. Pat zametl cestu z E do B. Mat zametl cestu z E do A a ještě z A do F.

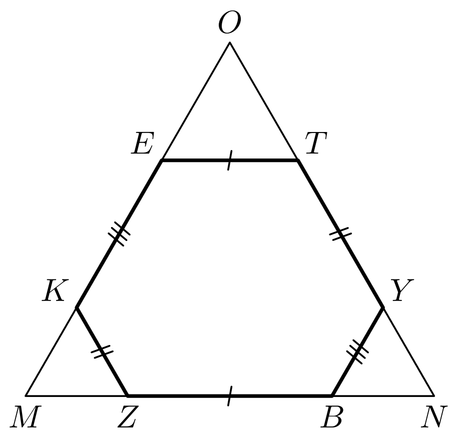
Určete rozdíl úseků zametených Patem a Matem. *(L. Hozová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Štaflík a Špagetka šli na procházku do parku. Cesty v parku tvoří čtvercový útvar jako na obrázku, uprostřed každé obvodové cesty je vchod. Štaflík vešel jižním vchodem, došel do středu parku, poté pokračoval úhlopříčně do severovýchodního rohu a po obvodové cestě se vydal směrem na jih, až došel zpět k jižnímu vchodu. Špagetka vešel do parku západním vchodem, hned zahnul na sever, na další křižovatce šel úhlopříčně až do jihovýchodního rohu, stejnou cestou se vrátil do středu parku a odtud nejkratší cestou k západnímu vchodu. Kdo měl delší procházku?

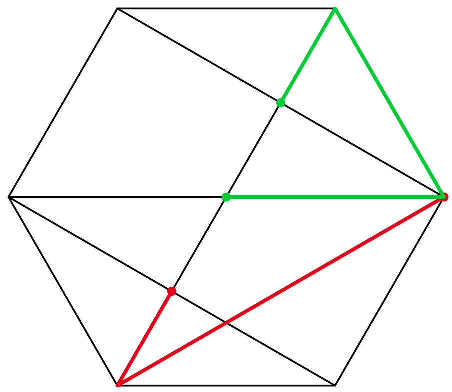


N2. Na stranách rovnostranného trojúhelníku MNO jsou body Z, B, Y, T, E, K. Přitom platí, že $2|MZ| = 2|BN| = |ZB|$, $|MO| = 3|EO|$ a že vyznačené úsečky na obrázku jsou rovnoběžné. Určete obvod útvaru $ZBYTEK$, jestliže obvod trojúhelníku MNO je 36 cm.



N3. Přes koryto řeky byla natažena dvě lana. Modré lano bylo nataženo kolmo k oběma břehům, zelené bylo nataženo šikmo přes řeku. V jednom místě nad řekou se lana křížila. Mirek zjistil, že od místa křížení to je po modrém laně 4 metry k bližšímu břehu a 6 metrů k tomu vzdálenějšímu. Jedna cesta po zeleném laně ze břehu ke křížení a zpět na stejný břeh měří 9 metrů. Kolik metrů měří obdobná cesta z druhého břehu?

N4. V pravidelném šestiúhelníku jsou vyznačeny dvě lomené čáry. Porovnejte délky červené a zelené lomené čáry.



Z8–I–4

Hynek napsal následující příklad s pěti záhadnými sčítanci:

$$@ + \#\# + *** + \&\&\&\& + \$\$\$\$\$ = ?$$

Prozradil, že znaky @, #, ∗, &, $ představují navzájem různé číslice 1, 2, 3, 4, 5 a že výsledný součet je dělitelný jedenácti.

Které nejmenší a které největší číslo může být výsledkem Hynkova příkladu?

(E. Novotná)

Návodné a doplňující úlohy

N1. Ondřej sestavil všechna nejvýše trojciferná čísla dělitelná jedenácti a obsahující pouze číslice 1, 2, 3. Kolik čísel Ondřej sestavil?

N2. Sandra zapsala příklad se třemi sčítanci $*** + \%\% + \$$, v němž každý ze znaků $*$, % a $ zastupuje jednu z číslic od 1 do 9 (různé znaky zastupují různé číslice, stejné znaky stejnou). Jakou největší a jakou nejmenší hodnotu může mít uvedený součet, jestliže je dělitelný deseti?

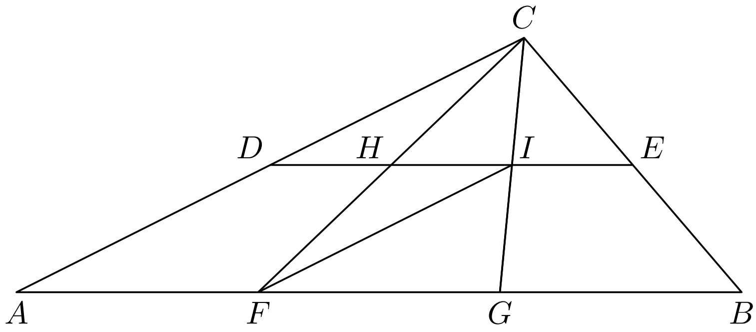
N3. David zapsal příklad se dvěma sčítanci $*** + \%\%\%$, v němž znaky $*$ a % zastupují dvě číslice (stejné znaky zastupují stejné číslice). Výsledkem tohoto příkladu je trojciferné číslo dělitelné dvanácti. Určete všechny možné výsledky.

N4. Alena vynásobila tři dvojciferná čísla, z nichž každé bylo tvořeno dvěma stejnými číslicemi. Výsledek byl dělitelný číslem 280. Jaká čísla Alena násobila?

Z8–I–5

Trojúhelník ABC je rozdělen úsečkami jako na obrázku. Úsečky DE a AB jsou rovnoběžné. Trojúhelníky CDH, CHI, CIE, FIH mají stejný obsah, a to $8\,dm^2$.

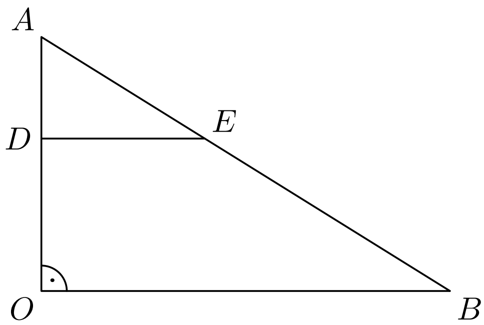
Určete obsah čtyřúhelníku $AFHD$. *(E. Semerádová)*



Návodné a doplňující úlohy

N1. Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže pro středy S_{AB}, S_{BC}, S_{CA} jeho stran platí $|S_{AB}S_{BC}| = 4\,\text{cm}$, $|S_{BC}S_{CA}| = 5\,\text{cm}$ a $|S_{CA}S_{AB}| = 2\,\text{cm}$.

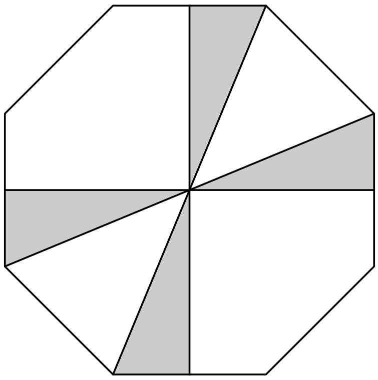
N2. Pravoúhlý trojúhelník OBA má obsah $15\,\text{cm}^2$ a pro body D a E na jeho stranách platí $2|OD| = 3|DA|$ a $3|AE| = 2|BE|$. Určete obsah lichoběžníku $OBED$.



N3. Strana AB trojúhelníku ABC je rozdělena bodem X na poloviny. Na úsečce XB leží bod Y a platí $|XY| = 2|YB|$. Jaký je obsah trojúhelníku XYC, jestliže obsah trojúhelníku ABC je $18\,\text{cm}^2$?

N4. Standa z pravidelného šestiúhelníku ustřihl trojúhelník, jehož vrcholy byly sousedními vrcholy šestiúhelníku. Jak velká část šestiúhelníku zbyla?

D1. Toník v pravidelném osmiúhelníku vybarvil čtyři trojúhelníky, jejichž vrcholy vybíral mezi vrcholy osmiúhelníku, středy stran a středem osmiúhelníku. Určete, jak velkou část osmiúhelníku Toník vybarvil.



Z8–I–6

Adam vepsal do tabulky 3×3 čísla od 1 po 9 jako na obrázku:

7	*6*	*4*
1	*2*	*8*
9	*3*	*5*

Pro toto vyplnění platí, že součet čísel tří políček podél každé strany je stále stejný. Adam zjistil, že čísla do tabulky lze vyplnit i jinak, aniž by pokazil vlastnost se stejnými součty podél stran.

Jakou nejmenší hodnotu může mít tento součet? Uveďte příklad tabulky s nejmenším součtem podél stran a vysvětlete, proč menší být nemůže. *(J. Tkadlec)*

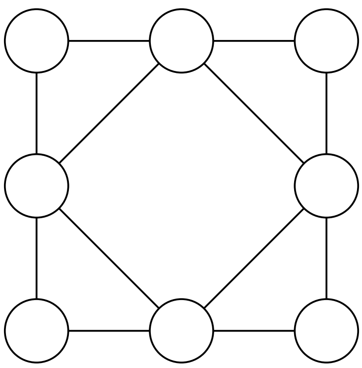
Návodné a doplňující úlohy

N1. Anička umístila do vrcholů a středů stran rovnostranného trojúhelníku šest navzájem různých nezáporných jednomístných čísel. Na každé straně tak ležela tři čísla a jejich součet byl na všech stranách stejný. Jaký nejmenší mohl být tento součet?

N2. Při táborové hře měl každý z devíti táborníků přiděleno přirozené číslo menší než 10, přičemž žádní dva táborníci neměli stejné číslo. Dostali za úkol rozdělit se do tří skupin tak, aby součet přidělených čísel v každé skupině byl sudý. Je takové rozdělení možné? Pokud ano, uveďte příklad, pokud ne, uveďte důvod.

N3. Přeskládejte čísla v tabulce ze soutěžní úlohy tak, aby součet ve všech řádcích, sloupcích i v obou úhlopříčkách byl 15.

N4. Velký čtverec je rozdělen na čtyři shodné trojúhelníky a jeden čtverec jako na obrázku. Do kroužků ve vrcholech vepište čísla od 1 do 8 tak, aby v každém kroužku bylo jiné číslo a aby součet v každém trojúhelníku i v malém čtverci byl roven dvanácti.



Návodné a doplňující úlohy pro kategorii Z9

Z9–I–1

Pat a Mat se vykoupali v rybníce a pak si dali závod do své chaloupky. V jistém okamžiku platilo, že kdyby Mat měl zdolánu polovinu vzdálenosti, kterou dosud uběhl, chyběl by mu do chaloupky trojnásobek oné poloviční vzdálenosti. V tomtéž okamžiku platilo, že kdyby Pat měl zdolán dvojnásobek vzdálenosti, kterou dosud uběhl, chyběla by mu do chaloupky třetina oné dvojnásobné vzdálenosti.

Kdo byl v daném okamžiku blíž chaloupce? *(L. Hozová)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Kulatý dort byl rozdělen na tři stejně velké výseče. První výseč z poloviny snědla Klára. Z druhé výseče snědl Tomáš čtvrtinu. Z třetí výseče snědl Honza polovinu toho, co Klára a Tomáš snědli dohromady. Jaká část dortu zbyla?

N2. Luboš šel na výlet. Po první hodině ušel tolik, že kdyby byl o polovinu této vzdálenosti dále, pak by mu do cíle chybělo ještě třikrát tolik. Jakou část výletu měl Luboš za sebou po první hodině?

N3. Marta s Helenou měly vyrobit určitý počet čerpadel. Marta dopoledne vyrobila desetinu požadovaného počtu a odpoledne pětinu toho, co vyrobila dopoledne Helena. Helena dopoledne vyrobila pětinu požadovaného počtu a odpoledne desetinu toho, co vyrobila dopoledne Marta. Která z nich vyrobila více čerpadel?

D1. Na číselné ose jsou znázorněny tři navzájem různé zlomky $\frac{k}{l}$, $\frac{l}{k}$ a $-\frac{k}{l}$. Vzdálenost $\frac{k}{l}$ a $-\frac{k}{l}$ na této ose je 24 cm. Jaká je vzdálenost $\frac{k}{l}$ a $\frac{l}{k}$?

Z9–I–2

Sestrojte kosočtverec $ABCD$, ve kterém platí $|AC| = 8\,\mathrm{cm}$ a $|AS| = 7\,\mathrm{cm}$, kde S je středem strany CD. *(K. Pazourek)*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY

N1. Které z následujících vlastností platí v každém kosočtverci?

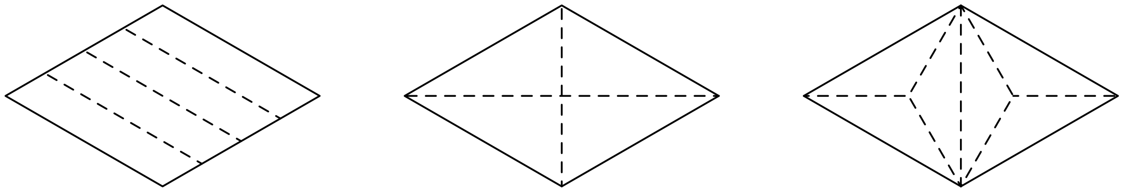
a) Všechny strany jsou stejně dlouhé.
b) Obě úhlopříčky jsou stejně dlouhé.
c) Úhlopříčky se navzájem dělí v poměru 2 : 1.
d) Spojnice každého vrcholu se středem libovolné strany, na níž daný vrchol neleží, jsou stejně dlouhé.
e) Obsah je roven polovině součinu délek úhlopříček.
f) Lze mu opsat kružnice.
g) Lze mu vepsat kružnice.

N2. Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li známy některé strany a těžnice:

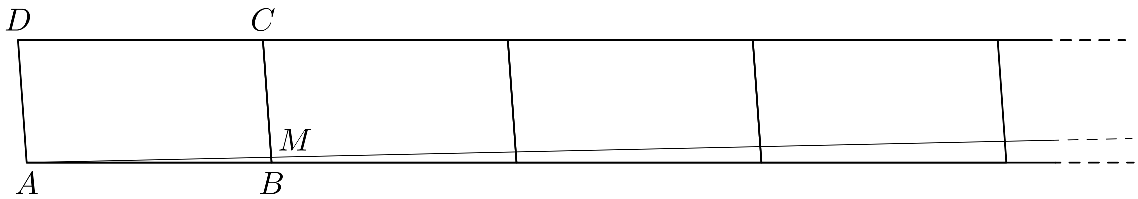
a) c, t_a, t_b,
b) a, b, t_a,
c) a, b, t_c.

D1. Je dán kosočtverec, jehož vnitřní úhly jsou v poměru 1 : 2 : 1 : 2. Rozdělte jej na:

a) 2 shodné díly,
b) 4 shodné díly,
c) 6 shodných dílů,
d) 7 shodných dílů.



D2. Na obrázku je nekonečný pás složený z kosodélníků shodných s kosodélníkem $ABCD$. Přitom $|AB| = 3\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 1{,}5\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle DAB| > 90°$ a šířka pásu je 1,2 cm. Bod M dělí úsečku BC v poměru 1 : 2023. V jaké vzdálenosti od bodu D protíná přímka AM přímku CD? A jak daleko leží tento průsečík od bodu A?



Z9–I–3

V základní škole U Tří dubů, kam chodí i Zikmund, každoročně pořádají vědomostní soutěž, v níž každý soutěžící může získat nejvíce 15 bodů. Letos byl průměrný bodový zisk soutěžících zaokrouhlený na desetiny roven 10,4. Zikmund si po soutěži uvědomil, že jednu otázku si špatně přečetl a odpovídal na něco jiného. Mohl tak mít o 4 body více a průměrný bodový zisk zaokrouhlený na desetiny by se tím zvýšil na 10,6.

Určete, kolik nejméně a kolik nejvíce dětí letos U tří dubů soutěžilo. *(M. Petrová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Neznámé číslo jsme zaokrouhlili na desetiny, výsledek vynásobili třemi a dostali číslo 20,4. Jaké mohlo být původní neznámé číslo?

N2. Pro neznámé číslo x platí: když každé z čísel x a $x + 0{,}5$ zaokrouhlíme na desetiny a výsledky sečteme, dostaneme číslo 7,9. Určete možné hodnoty čísla x.

N3. Mějme číslo x. Jako y označme číslo vzniklé zaokrouhlením x na setiny a jako z číslo vzniklé zaokrouhlením x na desetiny. Určete x, jestliže:

a) $x + y + z = 11{,}198$,
b) $x + y + z = 11{,}398$.

N4. Jaký největší může být rozdíl mezi aritmetickým průměrem dvou čísel a aritmetickým průměrem těchto čísel zaokrouhlených na desetiny? Jak se změní odpověď, jestliže místo dvou čísel použijeme n čísel?

Z9–I–4

Kája měl vynásobit dvě dvojmístná čísla. Z nepozornosti zaměnil pořadí číslic v jednom z činitelů a dostal součin, který byl o 4 248 menší než správný výsledek.

Kolik mělo Kájovi správně vyjít? *(L. Hozová)*

Návodné a doplňující úlohy

N1. Jaký největší výsledek můžeme dostat, pokud od dvojmístného čísla odečteme dvojmístné číslo zapsané stejnými číslicemi, ale v opačném pořadí?

N2. Kolik existuje dvojciferných přirozených čísel, která jsou rovna desetinásobku svého ciferného součtu?

N3. Uvažme čtyřciferná přirozená čísla s navzájem různými číslicemi, která jsou dělitelná pěti a zároveň devíti. Zapište největší takové číslo v rozvinutém tvaru.

N4. Je dáno dvojmístné číslo, jehož obě číslice jsou menší než 5. K tomuto číslu přičtěte číslo, které je o 11 větší. Zapište výsledný součet v rozvinutém tvaru, jestliže rozvinutý zápis daného čísla je $10a + b$.

D1. Mějme dvě čtyřmístná čísla, v jejichž zápise jsou na prvních dvou místech trojky a na zbylých dvou místech jsou stejné číslice, jen v opačném pořadí. Dokažte, že součet těchto dvou čísel je násobkem jedenácti.

Z9–I–5

Trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C. Body A', B', C' jsou obrazy bodů A, B, C postupně ve středových souměrnostech se středy C, A, B. Dokažte, že platí

$$|A'B'|^2 + |B'C'|^2 + |C'A'|^2 = 14 \cdot |AB|^2.$$

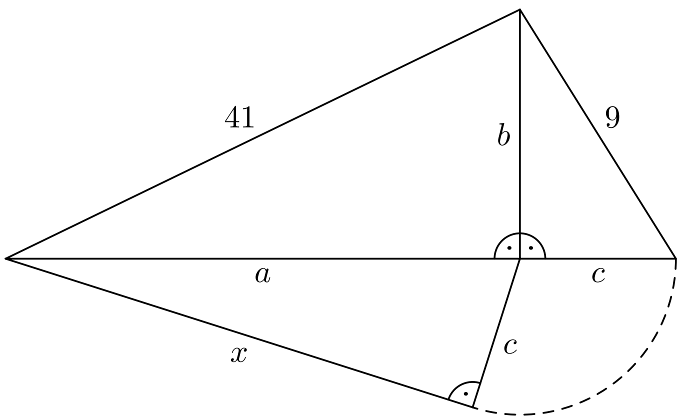
(J. Zhouf)

Návodné a doplňující úlohy

N1. V kartézské souřadné soustavě jsou dány body $K = [3, 0]$, $L = [7, -1]$, $M = [6, 2]$. Určete obvod trojúhelníku KLM.

N2. V pravoúhlém trojúhelníku je součet, resp. rozdíl délek přepony a jedné odvěsny $10x$, resp. $\frac{10}{x}$, kde x je kladné číslo. Určete délku zbývající strany.

N3. Vyjádřete délku strany x z následujícího obrázku:



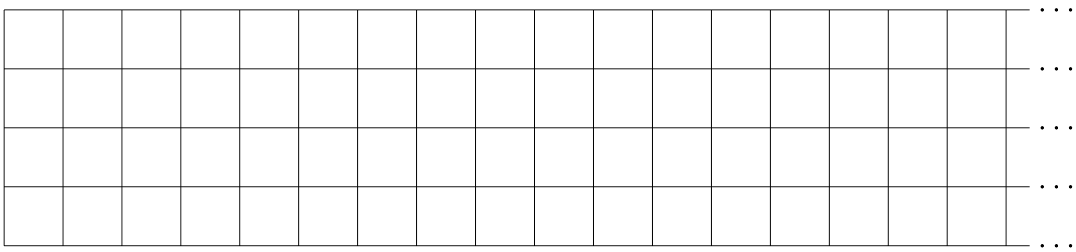
N4. Je dán pravoúhlý trojúhelník ASB s přeponou AB, kde $|AB| = 13\,\mathrm{cm}$ a $|BS| = 4\,\mathrm{cm}$. Body C a D jsou postupně obrazy bodů A a B ve středové souměrnosti se středem S. Určete obsah čtyřúhelníku $ABCD$.

D1. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC se stranou délky 4 cm. Označme body D, E, F postupně jako obrazy bodů A, B, C ve středových souměrnostech se středy B, C, A. Určete obvod trojúhelníku DEF.

Z9–I–6

Níže je naznačena část čtvercové sítě sestávající ze 4 řádků a 2023 sloupců. Určete počet čtverců, jejichž všechny vrcholy jsou uzlovými body čtvercové sítě.

(K. Pazourek)

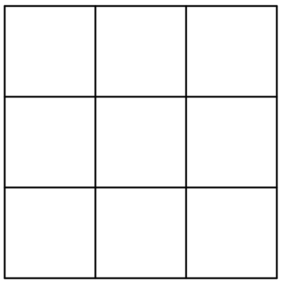


Návodné a doplňující úlohy

N1. Která z následujících čísel udávají délku strany některého ze čtverců diskutovaných v soutěžní úloze? (Vztaženo k základnímu jednotkovému čtverci sítě.)

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \sqrt{7},\ \sqrt{8},\ \sqrt{9},\ \sqrt{10}.$$

N2. Kolik je čtverců, které mají vrcholy v uzlových bodech následující čtvercové sítě?



N3. Na přímce je vyznačeno 30 červených bodů. Kolik existuje úseček, které mají oba krajní body a právě k vnitřních bodů červených? Úlohu řešte nejprve pro $k = 1$ a 2, poté obecně.

D1. Jsou dány dvě rovnoběžky a a b. Na přímce a je vyznačeno 50 červených bodů, na přímce b je 30 červených bodů. Kolik existuje trojúhelníků, které mají na obvodu právě ℓ červených bodů, z toho tři ve vrcholech? Úlohu řešte nejprve pro $\ell = 3$ a 4, poté obecně.