PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita

Mechanika a molekulová fyzika
Dynamika tuhého tělesa

Doc. RNDr. Petr Sládek, CSc.

Pedagogická fakulta
Masarykova Univerzita
Poříčí 7, 603 00 Brno

Pro potřeby přednášky zpracováno s využitím www.studopory.vsb.cz materialy html_files

Tuhé těleso

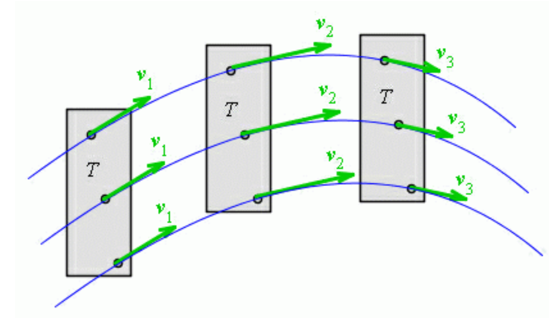
Dynamika tuhého tělesa

⇓

- Zabývá se tělesem s nezanedbatelnými rozměry, s určitým tvarem.

- Každé těleso je více či méně uspořádaný soubor atomů, molekul nebo iontů. Rozměry těchto stavebních prvků tělesa jsou ovšem malé v porovnání s rozměry tělesa, takže je můžeme považovat za hmotné body. Těleso tak můžeme považovat za **soustavu hmotných bodů**.
- Když vyšetřujeme pohyb tělesa vycházíme z předpokladu, že síly které jednotlivé částice drží pohromadě (vnitřní síly) nemají na vzájemnou vzdálenost jednotlivých částic prakticky žádný vliv, tj. těleso se nedeformuje.

Tuhé těleso je ideální těleso, model tělesa. Jeho tvar ani objem se působením sil nemění.

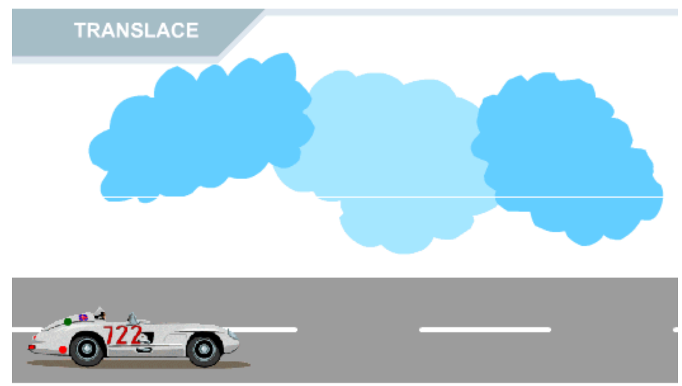


Pohyb tuhého tělesa, těžiště tělesa

Tuhé těleso může konat dva základní druhy pohybů: *posuvný* a *otáčivý*

1. Pohyb posuvný (translační).

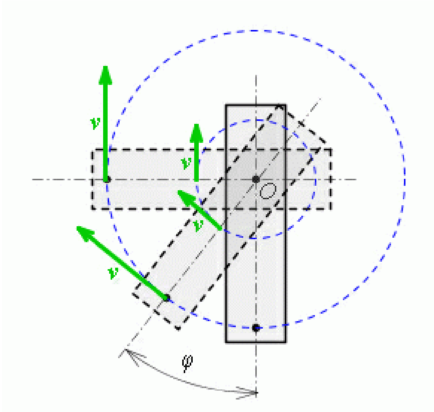
Těleso, které se po trajektorii posunuje tak, že všechny body tělesa mají Během pohybu stejnou rychlost – *velikost* i *směr.*



Trajektorií může být zcela obecná křivka (nejen přímka) a má pro všechny body tělesa stejný tvar.

Translační pohyb homogenního tělesa můžeme nahradit pohybem jeho těžiště, ve kterém je soustředěna hmotnost tělesa a platí všechny dosud uvedené zákony pro pohyb hmotného bodu

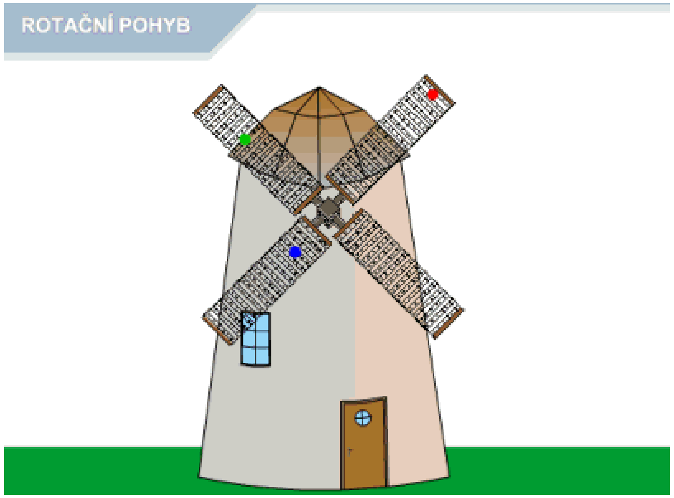
Pohyb tuhého tělesa



2. Pohyb otáčivý (rotační).

Otáčivý pohyb, neboli rotační, koná těleso při otáčení kolem pevné osy otáčení *o*. Při tomto pohybu všechny body tělesa opisují kružnice se středem na ose otáčení. Během pohybu mají stejnou úhlovou rychlost – *velikost* i *směr.*

Při změně úhlové rychlosti mají všechny body stejné úhlové zrychlení ***ε***. Ve stejném čase opíší také stejnou úhlovou dráhu ***φ***.

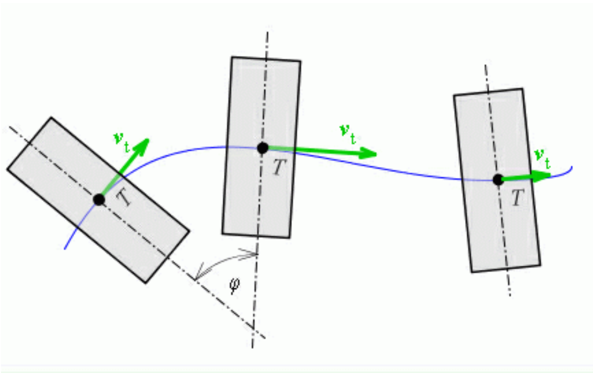


PEDAGOGICKÁ FAKULTA Masarykova univerzita

Pohyb tuhého tělesa

Složený pohyb

je pohyb složený z posuvného a rotačního pohybu. Těleso se pohybuje posuvným pohybem rychlostí $\vec{v}$ a navíc se těleso otáčí úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$ kolem okamžité osy otáčení (její poloha se v čase měnní).



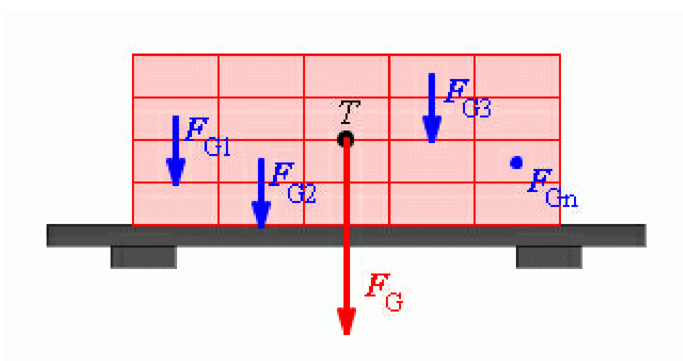
- Rychlost jednotlivých bodů je dána vektorovým součtem translační rychlosti těžiště $\vec{v}_t$ a okamžité obvodové rychlosti $\vec{v}_0$.

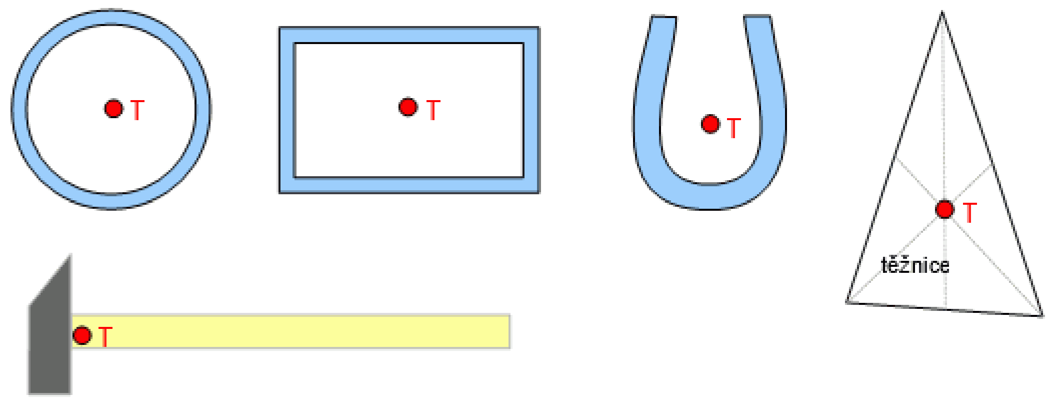
$$\vec{v}_j = \vec{v}_t + \vec{\omega} \times \vec{r}_j$$

Těžiště tělesa

Těžiště tělesa je bod, který se pohybuje (hybnost) tak, jako by v něm byla soustředěna veškerá hmotnost tělesa.

$$\mathrm{m} = \sum m_j \qquad \vec{p} = \sum m_j \vec{v}_j$$





Těžiště tělesa je působiště výslednice všech tíhových sil působících na jednotlivé hmotné body tvořící dané těleso

Těžiště tělesa

***Výpočet polohy těžiště tělesa*.**

$$\vec{p} = m\vec{v_t} = \sum m_j \vec{v}_j \quad \text{protože} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}_j}{dt} \quad \text{pak} \quad m\vec{r_t} = \sum m_j \vec{r}_j$$

Celkem $\vec{r_t} = \frac{1}{m} \sum m_j \vec{r}_j$

Pro spojitě rozloženou hmotnost $\vec{r_t} = \frac{1}{m} \int \vec{r}_j \, dm$

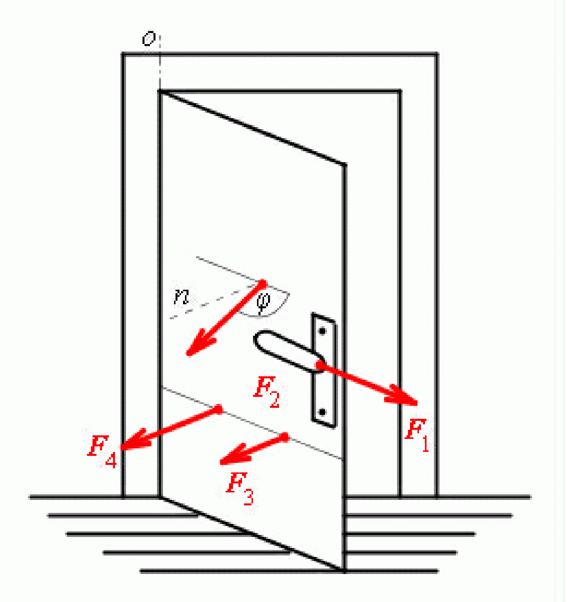
Pro jednotlivé souřadnice:

$$x_t = \frac{1}{m} \int x \, \mathrm{d}m \, , \qquad y_t = \frac{1}{m} \int y \, \mathrm{d}m \, , \qquad z_t = \frac{1}{m} \int z \, \mathrm{d}m$$

V případě homogenního tělesa je těžiště tělesa totožné s jeho geometrickým středem.

Otáčivé účinky síly, moment síly, moment hybnosti

- Působení síly ve směru ležícím v rovině dveří ($\vec{F}_1$), žádný pohyb.
- Působení silou ($\vec{F}_2$), ve směru více odkloněném od roviny dveří, otáčení - až do srovnání rovin.
- Největší otáčivý účinek při síle ($\vec{F}_3$), ve směru kolmém na rovinu dveří.
- Čím blíže je síla ($\vec{F}_4$) ose otáčení, tím musíme vynaložit větší sílu k dosažení stejných otáčivých účinků.
- Působení síly v ose otáčení – žádný pohyb.



Otáčivý účinek síly působící na těleso závisí na velikosti síly, na jejím směru a orientaci a na poloze jejího působiště.

Moment síly

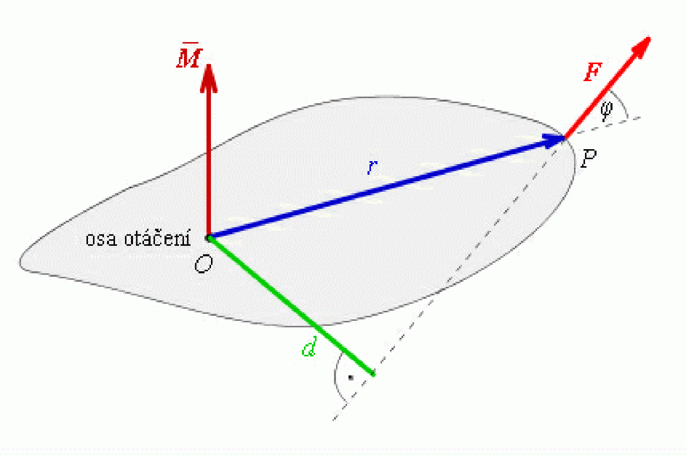
- Otáčivý účinek síly vyjadřujeme veličinou *moment síly* $\vec{M}$ vzhledem k ose otáčení *o*.

Velikostně je to součin působící síly F a ramena síly d.

$$M = d.\,F$$

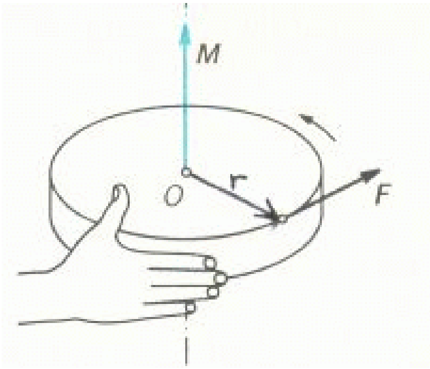
Rameno síly je kolmá vzdálenost vektorové přímky p síly od osy otáčení

$$M = r\,F\,\sin\varphi.$$



Protože otáčení lze přisoudit směr, půjde tedy o vektorovou veličinu

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$



Moment síly

Protože moment síly je vektor, pak při působení více sil s různými otáčivými účinky na tuhé těleso kolem pevné (nehybné) osy se působící momenty sil sčítají vektorově.

Výsledný moment sil současně působících na těleso **je roven vektorovému součtu momentů jednotlivých sil vzhledem k dané ose otáčení**.

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i$$

Pro danou osu můžou momenty sil působit se stejnou nebo opačnou orientací.

Momentová věta:

Otáčivý účinek sil působících na tuhé těleso se navzájem ruší, je-li vektorový součet momentů všech sil vzhledem k dané ose roven nule.

Moment hybnosti

- Pro stanovení velikosti otáčivého pohybu tělesa (soustavy) zavádíme (analogicky s posuvným pohybem) veličinu ***moment hybnosti*** $\vec{b}$. (někdy označován jako *točivost*)

- Protože existuje analogie mezi veličinami obvodovými a úhlovými, (násobení *r* u skalárních a vektorově $\vec{r}\times$ u vektorových veličin), pro moment hybnosti máme:

$$\vec{b}=\vec{r}\times\vec{p}$$

Navíc

$$\vec{b}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}=\vec{r}\times m(\vec{\omega}\times\vec{r})=\cdots.=J.\vec{\omega}$$

Výraz *Jω* pro moment hybnosti je analogií s výrazem pro hybnost *mv* translačního pohybu. Symbolem *J* je označen *moment setrvačnosti*, veličina charakterizující setrvačné vlastnosti tělesa u rotačního pohybu.

Skládání sil působících na těleso

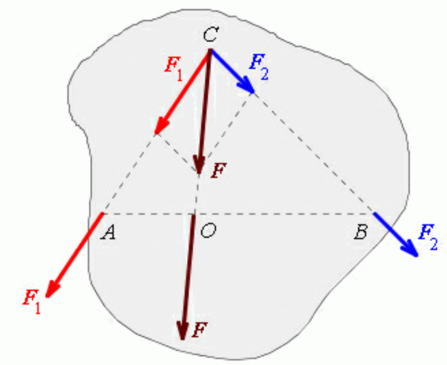
Skládání sil při působení na tuhé těleso není jen o sčítání vektorů, síly totiž nepůsobí jen na jeden hmotný bod, ale na rozměrné tuhé těleso. Záleží tedy na místě působiště síly. Podle toho bude těleso konat pohyb – translační, rotační, složený…

Skládat síly působící na těleso znamená nahradit je silou jedinou, která má na těleso stejný pohybový účinek.

Podle působiště skládaných sil mohou nastat dvě situace.

Buď síly působí

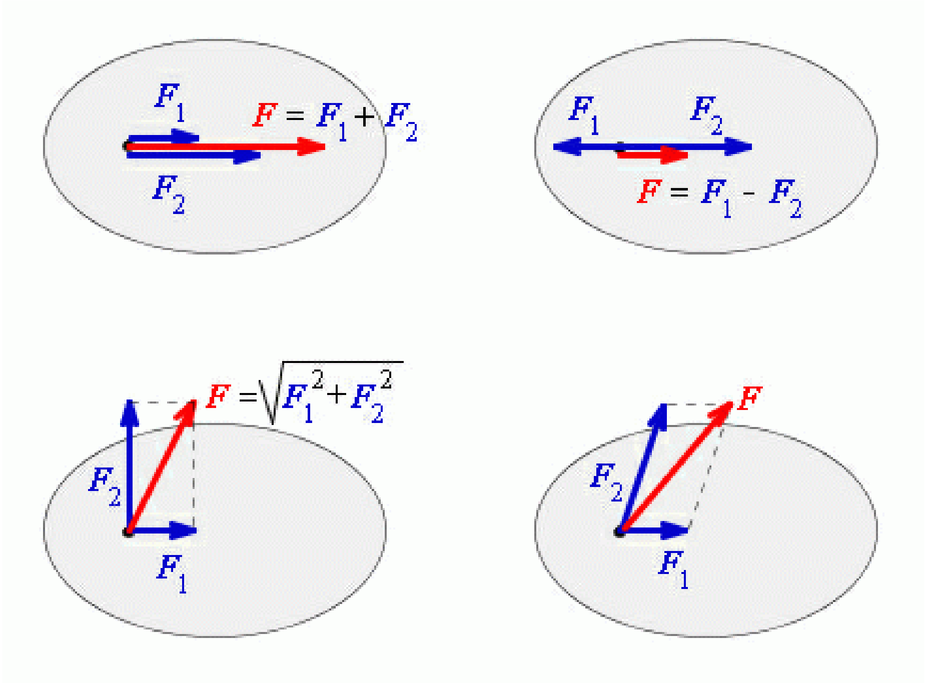
- v jednom bodě tělesa
- v bodech různých.



Skládání sil působících na těleso

1. **Síly působící v jednom bodě tělesa.**

   Síly skládáme jako v případě hmotného bodu.



PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita

Skládání sil působících na těleso

2. Síly působí v různých bodech tělesa.

A) Nejjednodušeji se skládají dvě působící různoběžné síly $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$.
Každou z těchto sil posuneme po přímkách, na kterých leží do společného působiště *O*. Tam je složíme podle pravidla o vektorovém součtu,

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B$$

Nejlépe je výslednici posunout do působiště *C*, do bodu, který je průsečíkem vektorových přímek sil $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$. Pak výslednice $\vec{F}$ v tomto bodě má stejný pohybový účinek na těleso jako složky $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$ působící v bodech A a B.

S

Skládání sil působících na těleso

2. Síly působí v různých bodech tělesa.

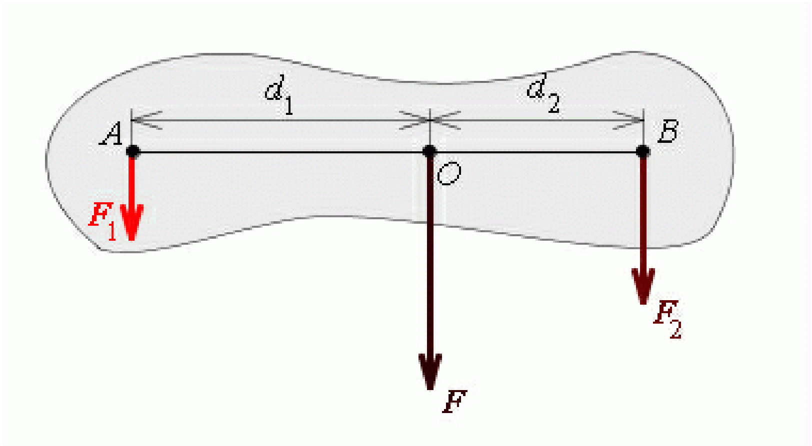
B) Když působí na těleso dvě rovnoběžné síly $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$ stejné orientace, pak jejich výslednice $\vec{F}$ má stejnou orientaci jako působící síly.

Její velikost je rovna součtu velikostí obou sil $F = F_1 + F_2$.

Pro polohu působiště výslednice platí

$d_1 . F_1 = d_2 . F_2$

(momenty obou sil jsou stejné).



Skládání sil působících na těleso

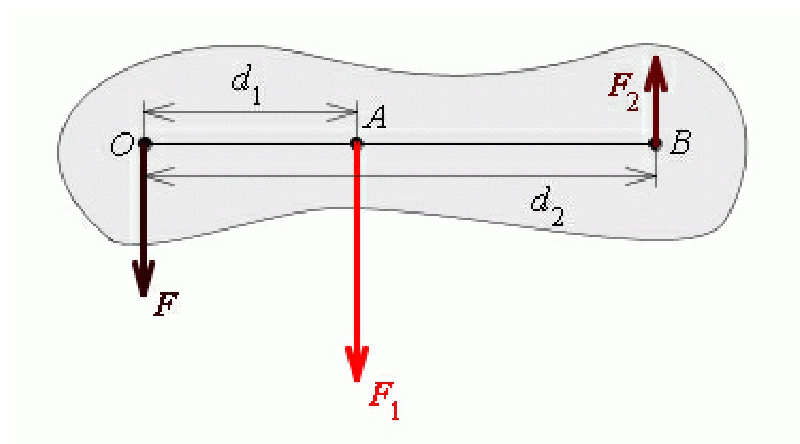
2. Síly působí v různých bodech tělesa.

C) Když působí na těleso dvě rovnoběžné síly $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$, opačné orientace, pak jejich výslednice $\vec{F}$ má stejný směr jako působící síly.

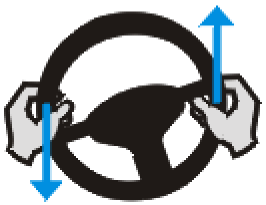
Její velikost je rovna rozdílu velikostí obou sil $F = F_1 - F_2$.

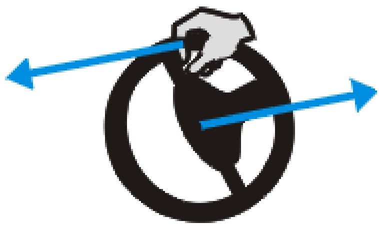
Pro polohu působiště výslednice platí

$d_1.F_1 = d_2.F_2$



Skládání sil působících na těleso



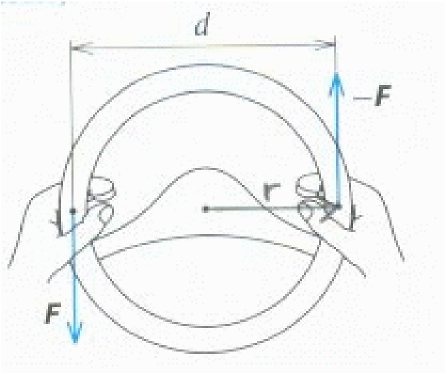


2. Síly působí v různých bodech tělesa.

D) ***Dvojici sil*** - tvoří dvě stejně velké rovnoběžné síly síly $\vec{F} = -\vec{F}'$, opačné orientace, které působí ve dvou různých bodech tělesa, otáčivého kolem pevné osy.

Výsledný moment dvojice sil $\vec{M}$ je dán součtem

$$\vec{M} = \vec{M} + \vec{M}' = \vec{r} \times \vec{F} + (-\vec{r} \times \vec{F}')$$

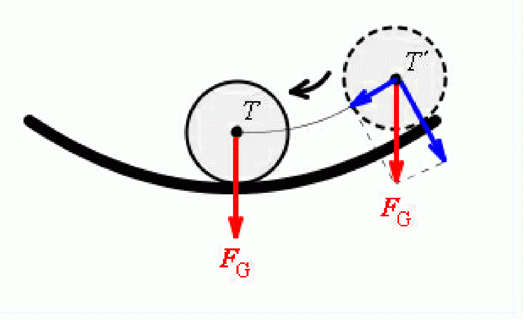


Protože velikosti sil i ramena jsou stejné,

Velikost momentu dvojice sil je rovna

$$D = d \,.\, F$$

kde d je kolmá vzdálenost vektorových přímek obou sil označovaná jako *rameno dvojice sil*.



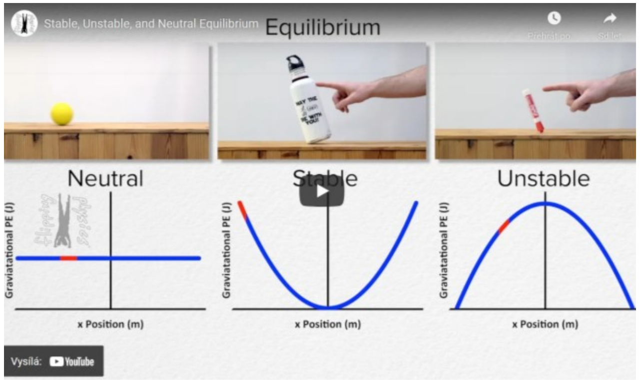
Rovnováha tuhého tělesa

Řekneme, že ***těleso je v rovnovážné poloze*** (v rovnováze), když **výslednice sil i výsledný moment sil na něj působících je nulový a těleso je v klidu.** Budou tedy platit vztahy:

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad \vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i$$

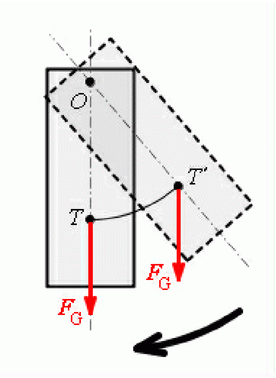
https://youtu.be/4rG9u478X1Q

Stabilní rovnovážnou polohu má těleso, které se po vychýlení z této polohy opět do ní vrací.

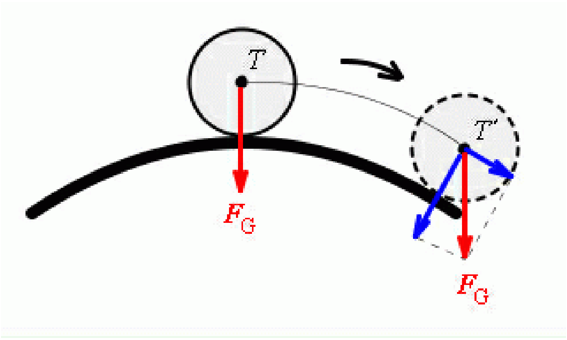


Rovnováha tuhého tělesa

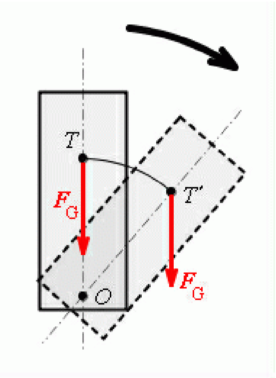
Stabilní rovnovážnou polohu má také těleso, které je otáčivé kolem osy umístěné nad svým těžištěm.



Labilní rovnovážnou polohu má těleso, které se po vychýlení z této polohy do ní nevrací. Těleso po vychýlení přechází do nové stabilní polohy.

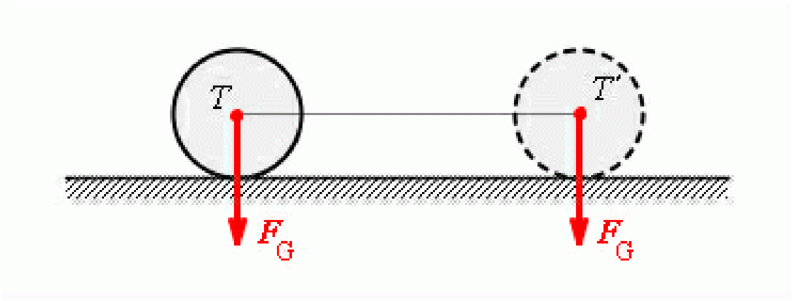


Labilní rovnovážnou polohu má také těleso, které je otáčivé kolem osy umístěné pod svým těžištěm



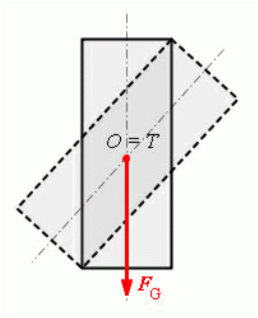
Rovnováha tuhého tělesa

Volnou (indiferentní) rovnovážnou polohu má těleso, které po vychýlení zůstává v jakékoliv nové opět stabilní poloze.



Volnou rovnovážnou polohu má také těleso, které je otáčivé kolem osy

umístěné ve svém těžišti

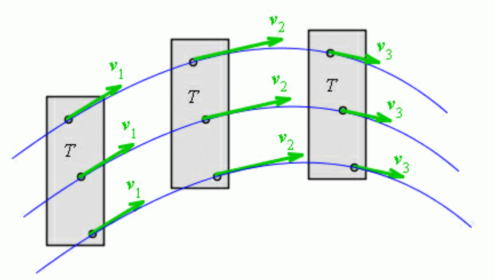


Kinetická energie tuhého tělesa

1) Kinetická energie posuvného pohybu.

Všechny body tělesa se pohybují stejnou rychlostí $\vec{v}$. Kinetickou energii tělesa o celkové hmotnosti *m* dostaneme, sečteme-li kinetické energie všech jednotlivých *n* hmotných bodů tělesa m_i.

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v^2 = \frac{1}{2} v^2 \sum_{i=1}^{n} m_i = \frac{1}{2} m v^2$$

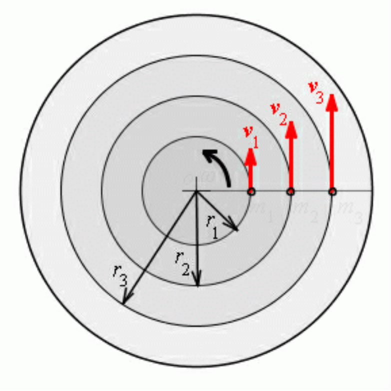


Kinetická energie tuhého tělesa

2) Kinetická energie otáčivého pohybu.

Všechny body tělesa se pohybují stejnou úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$. Kinetickou energii tělesa o celkové hmotnosti *m* dostaneme, sečteme-li kinetické energie všech jednotlivých *n* hmotných bodů tělesa m_i.

$$E_{krot} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \frac{1}{2} J \omega^2$$



Součet výrazů $m_j\, r_j^2$ se označuje jako ***moment setrvačnosti*** tělesa vzhledem k ose otáčení a označuje se *J*.

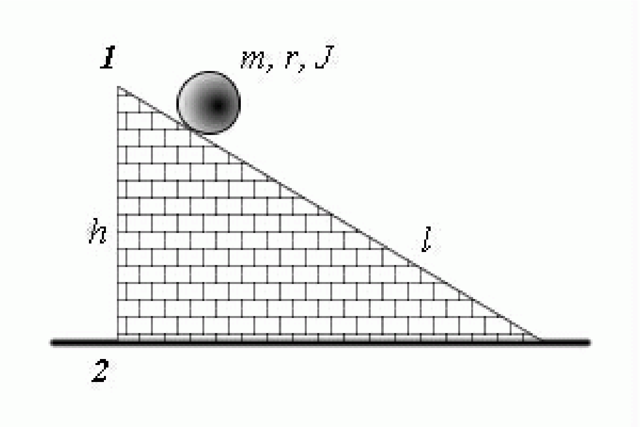
Moment setrvačnosti *J* určuje setrvačné vlastnosti tělesa při rotačním pohybu.

Kinetická energie tuhého tělesa

3) Kinetická energie složeného pohybu.

Tento pohyb vzniká složením posuvného a rotačního pohybu k dané ose. Protože kinetická energie je skalární veličina, jednoduše sečteme kinetickou energii posuvného a rotačního pohybu.

$$E_k = E_{k,trans} + E_{k,rot} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$



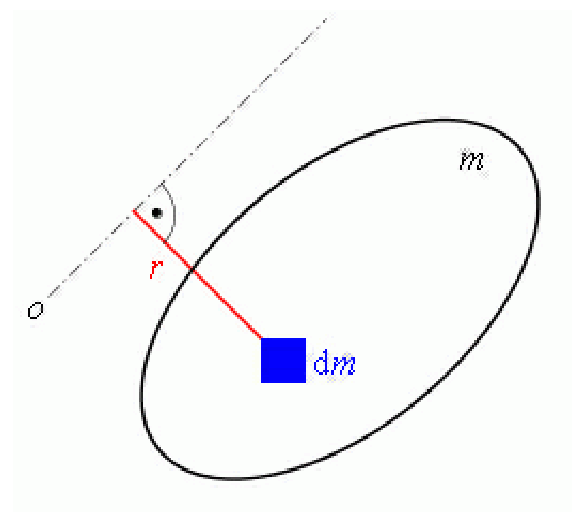
PEDAGOGICKÁ
FAKULTA
Masarykova univerzita

Moment setrvačnosti

Moment setrvačnosti J je veličina, která má u rotačního pohybu stejnou funkci jako hmotnost ***m*** u pohybu translačního – charakterizuje setrvačné vlastnosti rotujícího tělesa. Je to veličina, která charakterizuje rozložení hmotnosti tělesa vzhledem k ose rotace.

Moment setrvačnosti tohoto elementu ***dm*** je dán Výrazem ***r²dm***. Moment setrvačnosti celého tělesa hmotnosti m dostaneme integrováním tohoto vztahu

$$J = \int_m r^2 dm$$



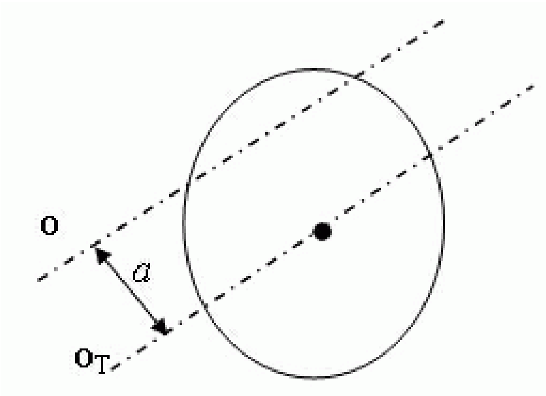
Moment setrvačnosti

Moment setrvačnosti J vůči ose procházející těžištěm (označované jako J_T) pro jednoduché útvary můžeme spočítat vhodnou volbou elementu *dm* nebo je lze najít v tabulkách.

Často potřebujete stanovit moment setrvačnosti *J* vůči ose neprocházející těžištěm. Moment setrvačnosti tělesa *J* lze pak stanovit pomocí

Steinerovy věty:

$$J = J_T + m\, a^2$$



Osu otáčení ***o*** vůči níž chceme stanovit moment setrvačnosti a která je rovnoběžná s těžištní osou $\boldsymbol{o_T}$ a je ve vzdálenosti ***a***.

Pohybová rovnice translace tělesa

I. impulsová věta:

Součet všech vnějších sil působících na soustavu hmotných bodů je roven časové derivaci celkové hybnosti soustavy $\vec{P}$.

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Pro vnitřní síly působící na hmotné body soustavy platí zákon akce a reakce a proto je jejich součet nulový.

$$\sum \vec{F_j} = \sum \overrightarrow{F_{int}} + \overrightarrow{F_{ext}} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} = \sum \frac{d}{dt} m_j \vec{v}_j = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Těžiště soustavy hmotných bodů se pohybuje tak, jako kdyby celá hmotnost soustavy byla soustředěna v těžišti a všechny vnější síly působily v těžišti.

Pohybová rovnice rotace tělesa

II. Impulsová věta:

Součet momentů všech vnějších sil působících na soustavu hmotných bodů je roven časové derivaci celkového momentu hybnosti soustavy $\vec{b}$.

$$\vec{M} = \sum \overrightarrow{M_{ext}} = \frac{d\vec{b}}{dt}$$

Momenty $\vec{M}$ a $\vec{b}$ jsou vztaženy ke stejnému referenčnímu bodu. Pro vnitřní síly působící na hmotné body soustavy platí zákon akce a reakce a proto je jejich celkový moment nulový. (Moment hybnosti ~ točivost).

$$\sum \vec{r_j} \times \overrightarrow{F_{j,ext}} = \sum \overrightarrow{M_{ext}} = \sum \frac{d}{dt} r_j \vec{p}_j = \frac{d\vec{b}}{dt}$$

PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita

Pohybová rovnice rotace tělesa

Pohybovou rovnici rotačního pohybu lze také zapsat:

$$\vec{M} = J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = J\vec{\varepsilon}$$

Rotační impuls ***L*** definujeme vztahem

$$L = \int_{t_0}^{t} \vec{M}dt = \vec{b} - \overrightarrow{b_0}$$

Působení rotačního impulsu vnějších sil vede ke změně momentu hybnosti – ke změně točivosti tělesa.

Zákony zachování v izolované soustavě hmotných bodů a při pohybu tuhého tělesa

Zákon zachování hybnosti

V izolované soustavě hmotných bodů se celková hybnost soustavy $\vec{P}$ zachovává.

$$\sum \vec{p}_i = \vec{P} = \overrightarrow{konst} \qquad \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

Zákon zachování točivosti (momentu hybnosti)

V izolované soustavě hmotných bodů se celkový moment hybnosti soustavy (točivost) $\vec{b}$ zachovává.

$$\sum \vec{b}_i = \vec{b} = \overrightarrow{konst} \qquad \frac{d\vec{b}}{dt} = 0$$

Krasobruslaři - pirueta

$$\vec{M} = J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = J\vec{\varepsilon} = 0$$

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2$$

Práce a výkon při rotaci

- $$W_{1,2} = \int_1^2 \vec{M} d\vec{\varphi}$$

Protože směry vektorů $\vec{M}$ a $\vec{\varphi}$ jsou totožné a pod integrálem máme skalární součin (*cos0 = 1*)

$$W_{1,2} = \int_1^2 M d\varphi$$

Pro výkon

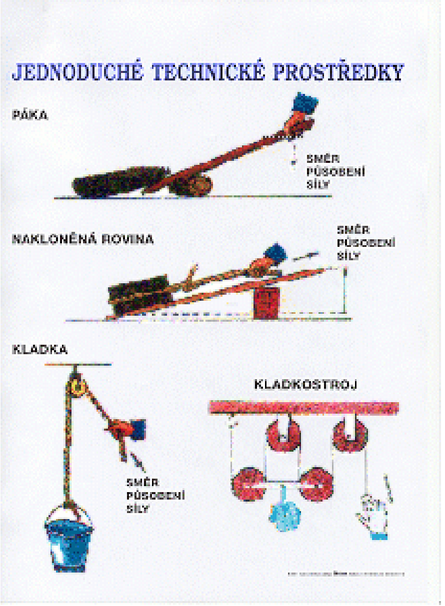
$$P = M\omega$$

Jednoduché stroje

jsou zařízení, která přenášejí sílu a mechanický pohyb z jednoho tělesa na druhé, přitom mohou měnit směr i velikost síly a tím usnadňovat konání mechanické práce

Z fyzikálního hlediska je dělíme do 2 skupin:

- stroje založené na rovnováze momentů sil (páka, kladka, kolo na hřídeli = tělesa otáčivá kolem pevné osy)
- stroje založené na rovnováze sil (nakloněná rovina, klín, šroub)

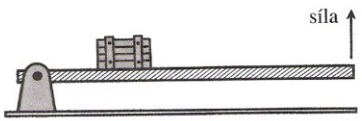


Jednoduché stroje

Páka je pevná tyč otáčivá kolem osy, která je k tyči kolmá.

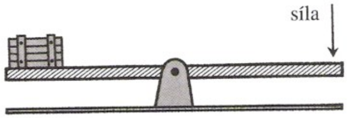
- *jednozvratná*:

  síly $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$ působí na jedné straně od osy



- *dvojzvratná páka*

  síly $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$ působí na různých stranách od osy páky



Páka je v rovnovážné poloze: $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0$

Jednoduché stroje

Kladky

- *pevná kladka*:

  stejně jako u dvojzvratné páky síly $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$ působí na různých stranách od osy páky, jsou *stejně velké* se *stejně velkými rameny*

  $$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

  Slouží jen ke změně směru působící síly (zvedání nákladu silou působící směrem dolů).

- *volná kladka*

  jako u jednozvratné páky síly $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$ působí na jedné straně od osy

  s rameny *r*, *2r*

  Z rovnosti momentů sil $2r.F_1 = r.F_2$ pak platí $\boxed{F_1 = \frac{F_2}{2}}$

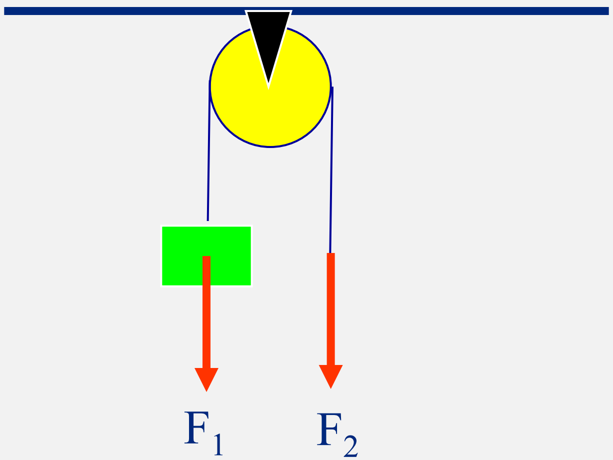
  Umožňuje zvedat těleso poloviční silou, než je tíha tělesa.

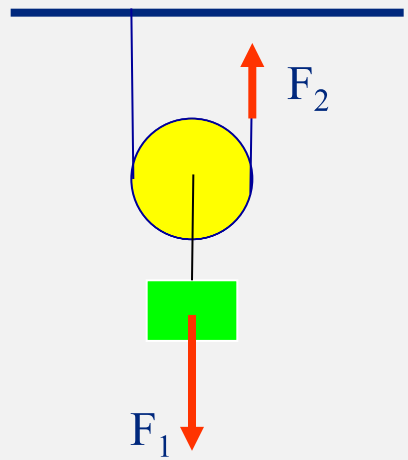
KLADKA

Dělení:

pevná kladka

volná kladka





$$F_1.\cancel{r} = F_2.\cancel{r}$$

$$F_1 = F_2$$

$$F_2.2\cancel{r} = F_1.\cancel{r}$$

$$F_2 = F_1 / 2$$

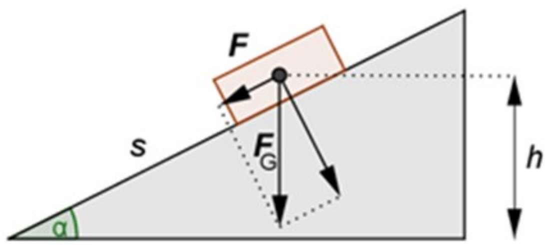
Kladkostroj – spojení pevných a volných kladek

Nakloněná rovina

je rovina svírající s vodorovným směrem úhel α .

h …výška nakloněné roviny

s … délka nakloněné roviny



podmínka rovnováhy: $s.F = h.F_G$

Nakloněná rovina se používá k přemísťování těžkých nákladů (šikmo postavený žebřík, schodiště, silnice se stoupáním…)

- na principu nakloněné roviny je založen:
  - a) klín = sekera, dláto, nůž, pluh…
  - b) šroub = lze vyvinout síly značné velikosti (šroubový zvedák)

Zdroje

- Posuvný a otáčivý pohyb - https://ucim-se.webnode.cz/a9-tridy/a7-trida/translace-a-rotace/
- http://vyuka.jihlavsko.cz/sily/index.htm
- Skládání různoběžných sil - https://sehnalova-informatika.blogspot.com/2012/12/animace-skladani-ruznobeznych-sil.html
- Dvojice sil - http://fyzweb.cz/materialy/sily/ucinky/pokus1.php
- Polohy těles - https://www.flippingphysics.com/stable-unstable-neutral-equilibrium.html
- Jednoduché stroje - http://agris.wz.cz/pri.html