PEDAGOGICKÁ
FAKULTA
Masarykova univerzita

# Speciální teorie relativity II

**Doc. RNDr. Petr Sládek, CSc.**

Pedagogická fakulta
Masarykova Univerzita
Poříčí 7, 603 00 Brno

Pro potřeby přednášky zpracováno s využitím http://www.fyzika007.cz/specialni-teorie-relativity, a dalších materiálů např. zde uvedených

PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita

# Relativistická dynamika

**Fyzikální zákony jsou invariantní, budou-li formulovány pomocí kovariantních rovnic (nezmění se při transformaci souřadnic).**

Uvažujme uzavřený soubor $\sum_n m_n = konst$ $\sum_n \overrightarrow{p_n} = \overrightarrow{konst}$

(sčítá se přes všechny interagující částice)

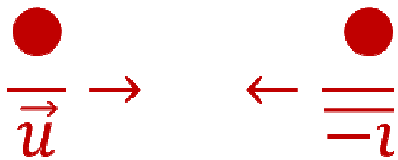
Přechod $S : S'$ $\sum_n m_n = \sum_n m'_n$

$\sum_n \overrightarrow{p_n} = \sum_n \overrightarrow{p'_n}$

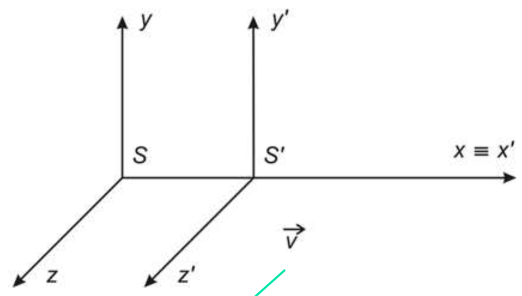
Uvažujme pružnou srážku dvou částic se stejnou klidovou hmotností $m_0$ podél osy $x$ s rychlostmi $u'_1 = u'$ $u'_2 = -u'$ vůči soustavě $S'$

Pak v okamžiku srážky jsou vůči $S'$ v klidu.

**Platí zákon zachování hybnosti.**



Vztažná soustava $S'$ se pohybuje ve směru $+x$ rychlostí $v$ vůči soustavě $S$.




# Relativistická dynamika

- V okamžiku srážky v soustavě *S*:

$m_1+m_2=M$ $\qquad\qquad$ $m_1u_1+m_2u_2=M.v$

Přidáme transformační vztahy pro rychlost

$$u_1=\frac{u'+v}{1+\frac{v}{c^2}.u'} \qquad\qquad u_2=\frac{-u'+v}{1+\frac{v}{c^2}.(-u')}$$

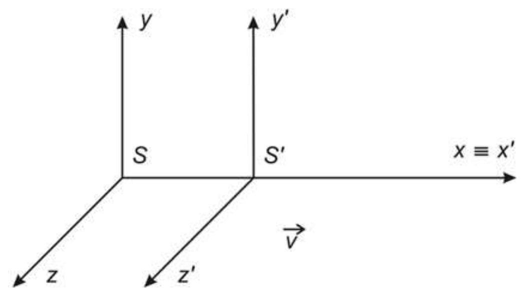
Dosadíme

$$m_1\frac{u'+v}{1+\frac{v}{c^2}.u'}+m_2\frac{-u'+v}{1-\frac{v}{c^2}.u'}=m_1v+m_2v \Rightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{1+\frac{u'v}{c^2}}{1-\frac{u'v}{c^2}}=\cdots=\frac{\sqrt{1-\frac{u_2^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{u_1^2}{c^2}}}$$

Pro $m_2(u_2=0)=m_0$ $= m_1(u_1=0)$ a $u_2=0$ $\Rightarrow$ $\frac{m_1}{m_0}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u_1^2}{c^2}}}$

Označíme-li $m_1=m$ a $\boxed{m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}}$ Závislost hmotnosti na rychlosti

Vztažná soustava *S′* se pohybuje ve směru +*x* rychlostí *v* vůči soustavě *S*.




# Relativistická dynamika

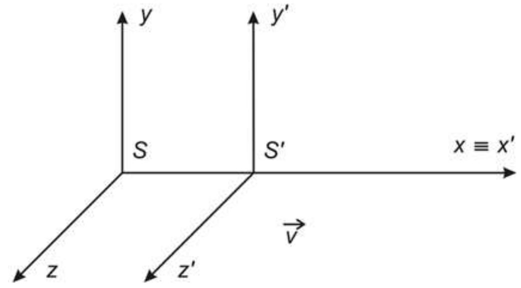
- **Hybnost** těles v závislosti na jejich rychlosti $\vec{u}$ v dané vztažné soustavě

$$\vec{p} = m\vec{u} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\vec{u}$$

Transformační vztah pro hmotnost při přechodu $S' \Rightarrow S$ (mění se hodnota rychlosti tělesa vůči dané soustavě → mění se hmotnost $m \Rightarrow m'$)

$$m = m' \frac{1+\frac{u_x' v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Vztažná soustava $S'$ se pohybuje ve směru $+x$ rychlostí $v$ vůči soustavě $S$.




# Relativistická dynamika

- **Síla** (2.NZ)

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{u})}{dt} \qquad \vec{F'} = \frac{d\vec{p'}}{dt'} = \frac{d(m'\vec{u'})}{dt'}$$

Dále

$$\vec{F} = \frac{dm}{dt}\vec{u} + m\frac{d(\vec{u})}{dt} \qquad \vec{F'} = \frac{dm'}{dt'}\vec{u'} + m'\frac{d(\vec{u'})}{dt'}$$

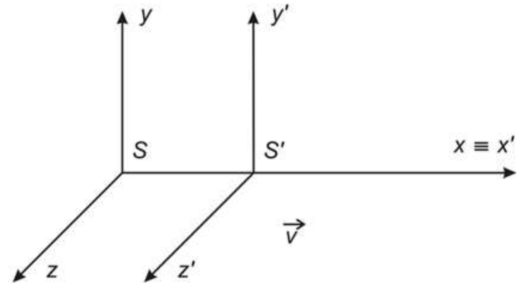
+ LT

$$F_x = F_x' + \frac{u'_y v}{c^2 + u'_x v} F'_y + \frac{u'_z v}{c^2 + u'_x v} F'_z$$

$$F_y = \frac{c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c^2 + u'_x v} F'_y$$

$$F_z = \frac{c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c^2 + u'_x v} F'_z$$

Vztažná soustava $S'$ se pohybuje ve směru $+x$ rychlostí $v$ vůči soustavě $S$.




# Zákon ekvivalence hmotnosti a energie I

- Dokonale nepružná srážka dvou stejných částic A, B o klidové hmotnosti $m_0$

Po spojení klidová hmotnost výsledné částice C $M_0$

$S^o$ soustava v níž je těžiště v klidu, tj. $u^\circ_1=(u,0,0)$ $u^\circ_B=(-u,0,0)$

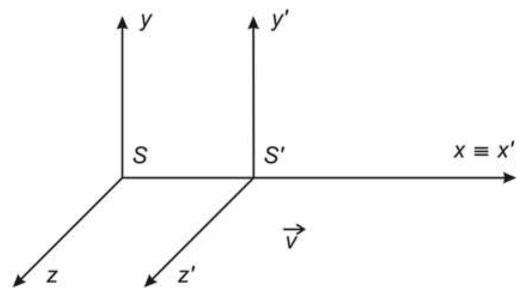
Soustava $S$ se vůči $S^o$ pohybuje ve směru osy $x$ rychlostí $u$, (tj. s částici A), pak

$$u_A = 0 \qquad u_c = -u \qquad u_B = \frac{2u}{1+\frac{u^2}{c^2}}$$

ZZH v $S$ $\quad 0 + \dfrac{m_0 u_B}{\sqrt{1-\frac{u_B^2}{c^2}}} = \dfrac{M_0(-u)}{\sqrt{1-\frac{(-u)^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad M_0 = \dfrac{2m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$

Klidová hmotnost částice C není rovna součtu klidových hmotností částic A, B

Vztažná soustava *S'* se pohybuje ve směru *+x* rychlostí *v* vůči soustavě *S*.




# Zákon ekvivalence hmotnosti a energie I

- Změna z klidové energie částice se rovná práci vykonané pro urychlení částice

$$A = \vec{F}(\vec{u}\,dt) \qquad \frac{dE_k}{dt} = \vec{F}\,\vec{u} \qquad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{u})}{dt}$$

$$dE_k = \vec{u}\,d\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\vec{u}\right) \Rightarrow dE_k = \frac{u\,m_0}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}du$$

Integrujeme $E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} + b \Leftarrow$ integr. konst. Pro $u=0$ $E_k=0$ tedy $b=-m_0c^2$

Celkem $\boxed{E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - 1\right)}$

, Rozvoj ($(1-x)^n \approx 1+nx$ ) $E_k = \frac{1}{2}m_0u^2 + \frac{3}{8}m_0\frac{u^4}{c^2} + \ldots$ princip korespondence

- $E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - 1\right)$

# Zákon ekvivalence hmotnosti a energie I

- Jaký je rozdíl klidových hmotností při dokonale nepružné srážce 2 částic?

$$\Delta m_0 = M_0 - 2m_o = \frac{2m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - 2m_0 = 2m_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - 1\right) = \frac{2E_k}{c^2}$$

Na 1 částici je pak změna:

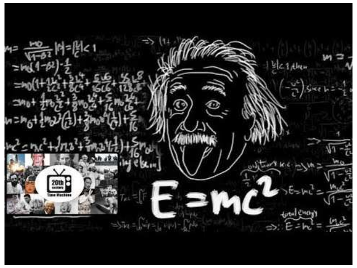
$$\Delta m_0 = \frac{\Delta E_0}{c^2}$$

Změna vnitřní(klidové) energie vede ke změně klidové hmotnosti částice.

**Klidová hmotnost je mírou klidové energie částice** $E_0 = m_0 c^2$

**Celková energie je** $E = E_0 + E_k$

$$E = mc^2$$



$$u_y = \frac{u'_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v}{c^2}.u'_x} \qquad u_x = \frac{u'_x + v}{1+\frac{v}{c^2}.u'_x} \qquad m = m'\frac{1+\frac{u_x' v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$m' = \frac{E'}{c^2}$$

# Transformace hybnosti a energie

Pro transformační vztahy vyjdeme z definice veličin a transformačních vztahů vstupujících veličin (ty již známe):

$$p_x = m.u_x = m'\frac{1+\frac{u_x' v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.\frac{u'_x+v}{1+\frac{v}{c^2}.u'_x} = \frac{m'u'_x+m'v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{p'_x+\frac{E'v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$p_y = m.u_y = m'\frac{1+\frac{u_x' v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.\frac{u'_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v}{c^2}.u'_x} = m'.u'_y = p'_y$$

Tramsformuje se stejně jako *x,y,z,t* V LT

$$p_z = m.u_z = m'\frac{1+\frac{u_x' v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.\frac{u'_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v}{c^2}.u'_x} = m'.u'_z = p'_z$$

$$E = mc^2 = m'\frac{1+\frac{u_x' v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}c^2 = \frac{m'c^2+m'u'_x v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E'+p'_x v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita

$$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$
$$x = \gamma(x' + vt') = \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$
$$y = y,$$
$$z = z.$$

# Transformace hybnosti a energie

Pro transformační vztahy vyjdeme z definice veličin a transformačních vztahů vstupujících veličin (ty již známe):

$$p_x = \frac{p'_x + \frac{E'v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad p_y = p'_y \qquad p_z = p'_z \qquad E = \frac{E' + p'_x v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Tramsformuje se stejně jako *x,y,z,t* V LT

Protože platí $r^2 - c^2t^2 = r'^2 - c^2t'^2$ = invariant

zřejmě platí $p^2 - \frac{E^2}{c^2} = p'^2 - \frac{E'^2}{c^2}$ = invariant = $-m_0^2c^2$ (platí i pro částici v klidu)

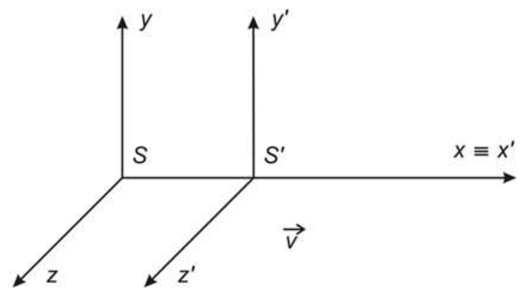
$$\boxed{E^2 = c^2(p^2 + m_0^2c^2)}$$

Pravá strana záporná - znamená to:

1. $p^2 - \frac{E^2}{c^2} < 0$ tj. $E > cp$ a protože $u = \frac{p}{m} = \frac{pc^2}{mc^2} = \frac{pc^2}{E}$ je $\boldsymbol{u < c}$
2. $p^2 - \frac{E^2}{c^2} = 0 = -m_0^2c^2$ tj. $\boldsymbol{m_0 = 0}$ **(fotony)**
3. $p^2 - \frac{E^2}{c^2} > 0$ pak i $-m_0^2c^2 > 0$ tj. $m_0^2 < 0$ ⟹ $m_0$ – imaginární ⟹ nelze vyloučit, pak ale $\boldsymbol{u > c}$ a záporná energie hypotetické částice - tachyony

PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Masarykova univerzita

Vztažná soustava $S'$ se pohybuje ve směru $+x$ rychlostí $v$ vůči soustavě $S$.




# Relativistická hustota

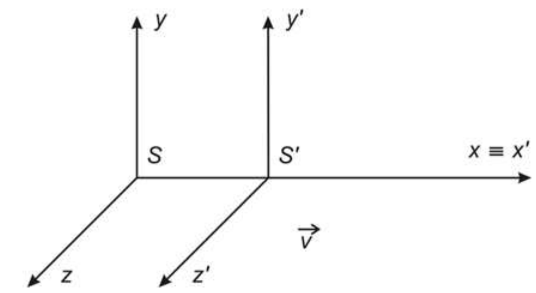
- Objem

$$V = V_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Hmotnost $\mathrm{m} = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Hustota $\rho = \dfrac{m}{V} = \rho_0 \dfrac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})}$

Vztažná soustava *S'* se pohybuje ve směru *+x* rychlostí *v* vůči soustavě *S*.




# Rovnoměrně zrychlený pohyb

$$\frac{dE}{dt} = (\vec{F}.\vec{u})$$

2. NZ v soustavě *S*:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{u})}{dt} = m\frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{u}\frac{dm}{dt} = m\frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{\vec{u}}{c^2}\frac{dE}{dt} = m\frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{\vec{u}}{c^2}(\vec{F}.\vec{u})$$

$\vec{F} = m\frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{\vec{u}}{c^2}(\vec{F}.\vec{u}) \Rightarrow$ **zrychlení částice nemusí mít vždy směr působící síly**

Nechť $\vec{F}\ ||\ \vec{u_0}\ ||$ x

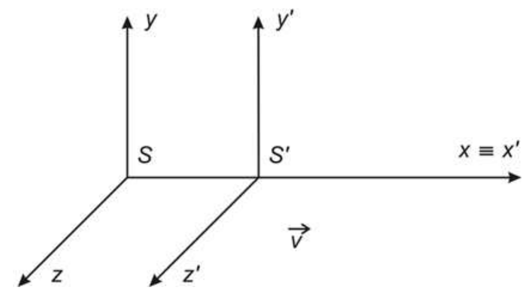
Pro jednoduchost dále v $t=0$ $x=0$ $u_0=0$ a $F=F_0=konst$

$$F_0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 u}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \Rightarrow d\left(\frac{u}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{F_0}{m_0}dt = a\,dt$$ Integrujeme

$$\left(\frac{u}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = at \Rightarrow u = \left(\frac{at}{\sqrt{1-\frac{a^2t^2}{c^2}}}\right) = \frac{dx}{dt}$$ Integrujeme

$$x = \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2} - 1\right)$$ pro $(at)^2 << c^2$ $x = \frac{1}{2}at^2$; pro t →∞ | u→c

Vztažná soustava *S'* se pohybuje ve směru +*x* rychlostí *v* vůči soustavě *S*.




# Rovnoměrně zrychlený pohyb

- Nechť $\vec{F} \perp \vec{u_0}$ (např. Lorentzova síla $\vec{F}_L = q\left(\vec{u} \times \vec{B}\right)$ dále nechť $\vec{B}$=(0,0,$B_z$)

$\frac{dE}{dt} = \left(\vec{F}.\vec{u}\right) = 0$ ➡ *E(t) = $E_0$ energie se nemění, není práce* $\vec{u} = (u_x; u_y; 0)$

Pohybové rovnice

⊥ SS

$$\frac{dp_x}{dt} = qu_yB_z \qquad \frac{dp_y}{dt} = -qu_xB_z \qquad \frac{dp_z}{dt} = 0$$

Navíc $\vec{p} = m\vec{u} = \frac{E_0}{c^2}.\vec{u}$ $p_x = \frac{E_0}{c^2}u_x$ $p_y = \frac{E_0}{c^2}u_y$ $p_z = 0$

Dostáváme

$$\frac{1}{u_y}\frac{du_x}{dt} = \frac{c^2}{E_0}qB_z \qquad \frac{1}{u_x}\frac{du_y}{dt} = -\frac{c^2}{E_0}qB_z$$ řešení soustavy dif. rovnic

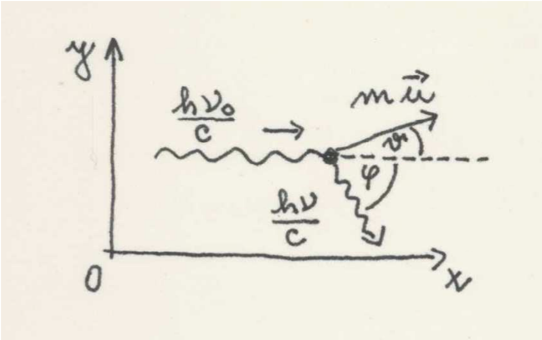
$u_x = A\cos(\omega t + \varphi)$ $u_y = -A\sin(\omega t + \varphi)$ kde $A^2 = u_\perp^2 = u_x^2 + u_y^2$

$\omega = \frac{c^2 qB_z}{E_0} = \frac{q}{m_0}B_z$ ➡ kružnice s poloměrem $R = \frac{\omega}{u_\perp}$ měření parametrů částic

$$x = x_0 + \frac{u_\perp}{\omega}\sin(\omega t + \varphi) \qquad y = y_0 + \frac{u_\perp}{\omega}\cos(\omega t + \varphi)$$

# Comptonův jev (1923)

Pružná srážka fotonu s klidným a volným elektronem




ZZE: $m_0c^2 + h\nu_0 = mc^2 + h\nu$

ZZH: x: $\frac{h\nu_0}{c} = \frac{h\nu}{c}\cdot\cos\varphi + mu\cdot\cos\vartheta$

y: $0 = \frac{h\nu}{c}\sin\varphi - mu\sin\vartheta$

dále: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

$$\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu_0} = \frac{h}{m_0c^2}(1-\cos\varphi)$$

$$\boxed{\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0c^2}(1-\cos\varphi)}$$

Při srážce dochází ke změně vlnové délky fotonu,

Tato změna nezávisí na původní , pouze na úhlu vstupního a výstupního svazku.

# Zákon ekvivalence hmotnosti a energie II

1. Experimenty 1932 Cockcroft a Walton – bombardování rychlými protony

$Li_3^7 + H_1^1 \rightarrow Be_4^8 \rightarrow He_2^4 + He_2^4 \Longrightarrow$ $\Delta m_0 = 0{,}309.10^{-28}\,kg$

$\Delta m_0 c^2 = 27{,}7.10^{-13}\,J$

Tento výsledek je v souladu s experimentem, kdy se měří $E_k$ protonu a **α** částic.

2. Štěpná reakce

$U_{92}^{235}$ + neutrony dvě jádra ze střední části periodické tabulky

1 g uranu ⟶ 9,6.10⁴ MJ (3 tuny uhlí)

3. Termojaderná fúze ⟶

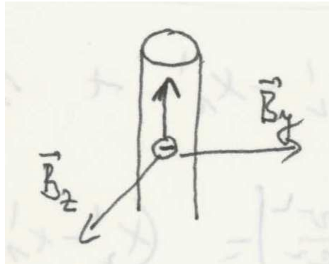
$H_1^2 + H_1^3 \rightarrow He_2^4 + n_0^1$

$\Delta m_0 = 3.10^{-29}\,kg$

$\Delta m_0 c^2 = 2{,}8.10^{-12}\,J$

1 g deuterium + tritium ⟶ $3{,}1.10^5$ MJ (o řád výš než štěpná reakce)

4. Zahřátím 1 kg vody z 0 °C na 100 °C se zvětší její hmotnost cca o $5.10^{-9}$ kg.



# Relativistické důsledky v teorii elmag pole

1. Maxwellovy rovnice jsou invariantní vůči Lorentzově transformaci
2. Vystupují zde derivace podle času a prostorových proměnných → ty se mění při přechodu $S \rightarrow S'$ ⟶ $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$ se mění, aby byla zachována **invariantnost MR**

➡ pole buzené stejnými zdroji se jinak jeví pro pozorovatele v pohyblivé a nepohyblivé soustavě

Např. Biotův-Savartův zákon je důsledkem STR (nelze vysvětlit klasicky)

El. náboje v *S* vytvářejí elektrické pole $\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$

Pozorovatel v *S´* registruje i mag. pole $\vec{B'} = B'_y\vec{j} + B'_z\vec{k}$

$$B'_y = \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}E_z \quad B'_z = \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}E_y$$

Tedy element proudovodiče délky *ds* protékaný proudem *I* budí ve svém okolí i magnetické pole s indukcí $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{ds}{r^2}$ (odvodí se za předpokladu v‹‹c $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$ ).

Pozn. Existuje i jev opačný , nicméně vytvořené sek. elektrické pole je velmi slabé