

V. BALAŽOVJECH A KOLEKTÍV

**TEORETICKÁ
MECHANIKA
V PŘÍKLADOCH**

alfa

V. BALAŽOVJECH—V. DJUBEKOVÁ—M. HANULA
V. KOZAKOVIČ—Z. MOROVJANOVÁ—F. TRÁVNIČEK

TEORETICKÁ MECHANIKA V PRÍKLADOCH

alfa

VYDAVATELSTVO TECHNICKEJ A EKONOMICKEJ LITERATÚRY
BRATISLAVA

PREDHovor

Teoretická mechanika je časťou fyziky a nadväzuje na matematiku. Mechaniku ako fyzikálnu vedu môžeme rozdeliť na dve časti: statiku a dynamiku. Statika skúma podmienky, pri ktorých hmotné teleso zostáva v relatívnom pokoji. Dynamika je náuka o pohybe hmotných telies a o príčinách tohto pohybu. Okrem exaktnej teoretickej mechaniky sa pre potreby praxe vyvinula aplikovaná čiže technická mechanika.

Na teoretickú mechaniku ako základnú vednú disciplínu nadväzujú statika, pružnosť a pevnosť, stavebná mechanika, experimentálna pružnosť a stavebná dynamika. Tieto učebné predmety tvoria teoretický základ pre učebné disciplíny odborných katedier, najmä katedier betónových konštrukcií a mostov, kovových a drevených konštrukcií, dopravných stavieb, geotechniky, ale aj ostatných odborných katedier stavebných fakúlt, okrem katedier odboru geodézie a kartografie.

Už pred našim letopočtom sa učitelia zaoberali rozličnými problémami mechaniky (Archimedes v r. 287—212 pre n. l.). Najväčšie úspechy v mechanike dosiahli učitelia v 18. storočí a neskôr. Bol to predovšetkým Galileo Galilei (1564—1642), ktorý skúmal zákony voľného pádu a objavil zákon zotrvačnosti, zakladateľ klasickej mechaniky Izák Newton (1642—1727) formuloval tri základné zákony mechaniky, objavil zákon všeobecnej gravitácie, zaviedol pojem hmoty atď., Pierre Varignon (1654—1722) prvý vyslovil momentovú vetu. V 18. storočí sa preslávili J. L. Lagrange, pôvodca princípu virtuálnych prác, L. H. M. Navier a iní. V 19. storočí rozšírili a prehĺbili znalosti mechaniky najmä vedci Carl Culmann, F. Schwedler, H. Müller-Breslau, L. Henneberg, W. Ritter, E. Winkler, O. Mohr, L. Euler, L. Cremona a ďalší.

Z vynikajúcich ruských a sovietskych vedcov sa o rozvoj mechaniky zaslúžili najmä Skornjakov-Pisarev, ktorý v roku 1722 vydal prvú učebnicu statiky, M. V. Ostrogradskij (1801—1861), ktorý prvý vyslovil niekoľko princíпов mechaniky, D. J. Žuravskij formuloval dôležitú základnú vetu mechaniky a S. V. Kovalevská, ktorá vyriešila pohyb zotrvačníka. Z odboru mechaniky obzvlášť vynikli a stali sa svetoznámymi mnohí sovietski vedci, ako napr. pôvodca raketového lietania N. I.

Schválilo Ministerstvo školstva SSR dňa 26. 5. 1975, výmerom číslo Š 5692/1975-OV ako vysokoškolskú príručku pre poslucháčov Stavebnej fakulty SVŠT v Bratislave, Vysokej školy dopravnej v Žiline a Vysokej školy poľnohospodárskej v Nitre

Autori kapitol:

- 1.1., 5. a 10. Ing. VOJTECH KOZAKOVIČ
- 1.2., 8. a 11. Ing. MILAN HANULA
2. Doc. Ing. FRANTIŠEK TRÁVNÍČEK, CSc.
- 3., 12. a 13. Prof. Ing. VOJTECH BALAŽOVJECH
4. Ing. VALENTINA DJUBEKOVÁ
- 6., 7. a 9. Ing. ZDENA MOROVJANOVA

Lektori: Ing. GUSTÁV MARTINČEK, DrSc., Doc. Ing. JURAJ STRADIOT, CSc.

Redakcia stavebnickej literatúry — vedúci redaktor Rudolf Bottán, prom. filológ

Ciolkovskij, ďalej A. V. Darkov, V. I. Kuznecov, A. I. Dychovičnyj, I. P. Prokof-jev, I. M. Rabinovič, D. P. Paščevskij, B. N. Žemočkin, N. M. Beljajev, N. M. Filonenko-Borodič, B. G. Galjorikin, B. H. Gorbunov, M. J. Posadov, A. N. Krylov, S. P. Timošenko, V. Z. Vlasov a iní.

Medzi prvých českých bádateľov v oblasti mechaniky patrí Jan Marcus Marci (1595—1667), ktorý vydal obsiahle dielo o zraze telies. Základy náuky o pružnosti a pevnosti, ako aj stavebnej mechaniky položil koncom 19. a začiatkom tohto storočia profesor Fakulty inžinierskeho staviteľstva ČVUT v Prahe J. Šolín (1841—1912). V jeho práci na Stavebnej fakulte ČVUT pokračovali prof. Zdeněk Bažant (1879—1954), ktorý prvý spracoval v českom jazyku štvorzväzkové súborné dielo zo stavebnej mechaniky, prof. Václav Dašek (1887—1968) a prof. Jan Ducháček (1908—1974). Okrem nich vynikli aj ďalší ešte žijúci vedci na ČVUT v Prahe, VUT v Brne a na vedeckých pracoviskách ČSR.

Zo Slovákov sa preslávili najmä prof. Aurel Stodola (1859—1942), dlhoročný rektor Polytechniky v Zürichu, prof. J. Jedlík (1800—1895), vynálezca a profesor fyziky na univerzite v Budapešti, Jozef Murgáš (1865—1929), vynálezca bezdrôtovej telegrafie a ďalší. Z mladších vedcov má veľké zásluhy prof. Michal Ursíny (1865—1933), dlhoročný vedúci Katedry stavebnej mechaniky na Vysokom učení technickom v Brne. Patril medzi horlivých bojovníkov za založenie Vysokej školy technickej v Košiciach. Po veľkom úsilí, predovšetkým zásluhou rozsiahlej kampane vedenej Komunistickou stranou Československa, bola v roku 1938 založená prvá Vysoká škola technická na Slovensku v Košiciach. Zakladateľom a zaslúžilým budovateľom Katedry stavebnej mechaniky na Stavebnej fakulte SVŠT v Bratislave bol prof. Anton Turecký (1902—1959), autor prvého súborného diela zo stavebnej mechaniky vydaného knižne v slovenskom jazyku. Známymi sa stali aj vedci mladšej generácie a ich zásluhou je táto vedná disciplína v ustavičnom vývoji.

V súčasnom období vyspelej techniky nevystačíme s klasickou (Newtonovou) mechanikou. Vyvrcholením obrovského rozvoja mechaniky je vznik teórie relativity, ktorú v roku 1905 vyslovil Albert Einstein. Veľmi významná je aj kvantová mechanika, ktorú založil M. Planck (1858—1947). Vďaka najnovším platným teóriám, najmä pokrokovej sovietskej vedy, mohli sa riešiť aj také zložité úlohy mechaniky, na ktoré klasická mechanika už nestačila. Úspešné vyriešenie týchto úloh je v období terajšej vedeckotechnickej revolúcie nevyhnutné a bez stále novších poznatkov získaných v matematike a mechanike by nebolo možné.

Touto vysokoškolskou učebnicou chceme prispieť k obohateniu našej literatúry o technických vedách a tiež zlepšiť možnosti štúdia poslucháčom stavebných fakúlt na vysokých školách.

Autori

I. SILY PÔSOBIACE V ROVINE

1.1. CENTRÁLNY SILOVÝ SYSTÉM

Fyzikálne veličiny a ich meranie

Základné fyzikálne pojmy sa stávajú základnými fyzikálnymi veličinami vtedy, keď sa nájde možnosť, vymyslí a zavedie predpis, ako tomu istému pojmu, pozorovanému v rôznych prípadoch, priradať jednoznačne číslo alebo skupinu čísiel.

Mnohé fyzikálne pojmy sa však zaviedli priamo ako veličiny (moment sily, prúdová hustota a pod.). Na rozdiel od predchádzajúcich základných veličín nazývame ich odvodenými veličinami.

Veličiny, ktoré jednoznačne určuje jeden údaj (hmotnosť, energia, absolútna hodnota rýchlosti), nazývajú sa *skaláre*. So skalármí počítame podľa pravidiel aritmetiky. Iné fyzikálne veličiny úplne určuje až väčší počet čísiel. Tieto veličiny sú *vektory*, ktoré sa okrem svojej absolútnej hodnoty vyznačujú aj smerom (rýchlosť, sila). S vektorom sa počíta podľa početných pravidiel, ktoré sa zaviedli tak, aby potrebám fyziky čo najviac vyhovovali.

Sila

Podľa Newtonovho zákona sily zrýchlenie pohybu telesa a je priamo úmerné sile P a nepriamo úmerné jeho hmotnosti m .

Sila zapríčiňuje zmenu tvaru telesa alebo zmenu pokoja a pohybu telesa. Sila sa prejavuje len pri vzájomnom pôsobení telies.

Jednotkou sily je 1 newton, $1 \text{ N} = \text{mkgs}^{-2}$.

1 kilopond, $1 \text{ kp} = 9,806 \text{ 65 N} \doteq 10 \text{ N}$,

1 megapond, $1 \text{ Mp} = 1 \text{ 000 kp} = 9 \text{ 806,65 N} \doteq 10 \text{ 000 N}$.

Určenie sily

Sila je určená veľkosťou, pôsobiskom, smerom a orientáciou. Možno ju udať číselne alebo znázorniť úsečkou a šípkou.

Hmotnosť a tiaž telesa

Hmotnosť telesa je kdekoľvek na našej zemi alebo vo vesmíre rovnaká.

Tiaž telesa nie je všade rovnaká, teleso istej hmotnosti by malo na póle inú tiaž ako na rovníku a inú na Mesiaci.

Príklad 1.1-1.

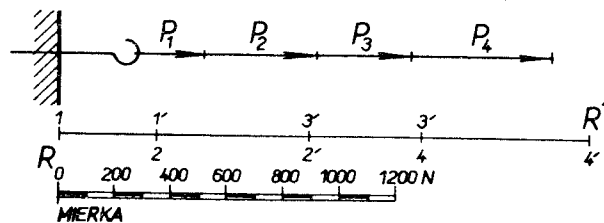
Akou silou je ťahaný hák z múru, keď je na ňom upevnené lano, za ktoré ťahajú štyria ľudia silami $P_1 = 350$ N, $P_2 = 550$ N, $P_3 = 400$ N a $P_4 = 600$ N (obr. 1.1-1).

Riešenie:

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 350 + 550 + 400 + 600 = 1\,900 \text{ N}$$

Hák je ťahaný z múru silou 1 900 N.

Grafické riešenie je znázornené na obr. 1.1-1.



Obr. 1.1-1.

Aby sme mohli sily naniest a zmerať výslednicu, zvolíme si určitú mierku síl, napr. 1 cm = 200 N. Odmeraním na obrázku dostaneme $R = 1\,900$ N.

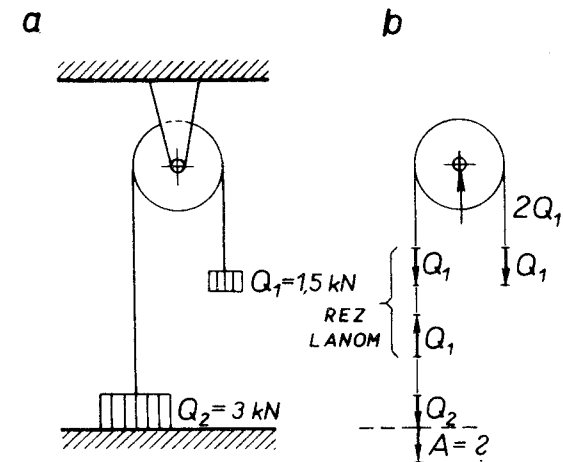
Príklad 1.1-2:

Na koncoch lana umiestneného na jednoduchkej kladke sú zavesené dve bremená $Q_1 = 1,5$ kN a $Q_2 = 3$ kN, pričom bremeno Q_2 je položené na podložke. Treba určiť silu, ktorou pôsobí bremeno Q_2 na podložku, ak neberieme do úvahy trenie v kladke a tiaž lana (obr. 1.1-2).

Úvaha:

Ak neberieme do úvahy trenie v kladke a tiaž lana, bude sila, ktorá v ňom pôsobí, konštantná a bude sa rovnáť bremenu Q_1 , čo vyplýva z momentovej podmienky rovnováhy síl na kladke. Kladka nemení veľkosť sily v lane, mení len jej

smer. Sily Q_1 a Q_2 predstavujú tiaž bremien a ich lúče sú totožné s osou lana. Pretože sila A , ktorá pôsobí ako akcia na podložku, bude výslednicou síl pôsobiacich na bremeno, Q_2 musí pôsobiť v tom istom lúči. Silová sústava tohto príkladu je znázornená na obr. 1.1-2b.



Obr. 1.1-2.

Riešenie:

Prerežeme lano nad bremenom Q_2 a jeho účinok naň nahradíme rovnovážnou silovou sústavou, ktorej veľkosť predstavuje sila v ňom pôsobiaca, v našom prípade je to Q_1 , pozri obr. 1.1-2b. Pretože bremená Q_2 , Q_1 sa nepohybujú a sú v relatívnej rovnováhe

$$A = \sum_{i=1}^2 P_i = Q_2 - Q_1 = 3 - 1,5 = 1,5 \text{ kN}$$

Príklad 1.1-3:

Akým bremenom treba vyvážiť teleso zavesené na lane cez kladku, ak sa skladá z dvoch kociek, dolnej oceľovej s hranou 20 cm a hornej drevenej s hranou 15 cm, pričom dolná kocka je ponorená pod hladinou vody.

Oceľ má mernú tiaž $\gamma = 78,5$ N · dm⁻³, drevo 8 N · dm⁻³.

Výpočet síl (váh — tiaží a vztlaku vody):

tiaž drevenej časti $P_1 = -1,5^3 \cdot 8 = -27,0$ N,

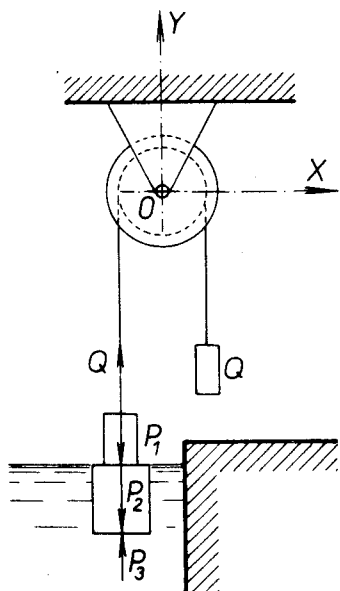
tiaž oceľovej časti $P_2 = -2,0^3 \cdot 78,5 = -628,0$ N,

vztlak vody (tiaž vytlačenej kvapaliny) $P_3 = +2,0^3 \cdot 10 = +80,0$ N

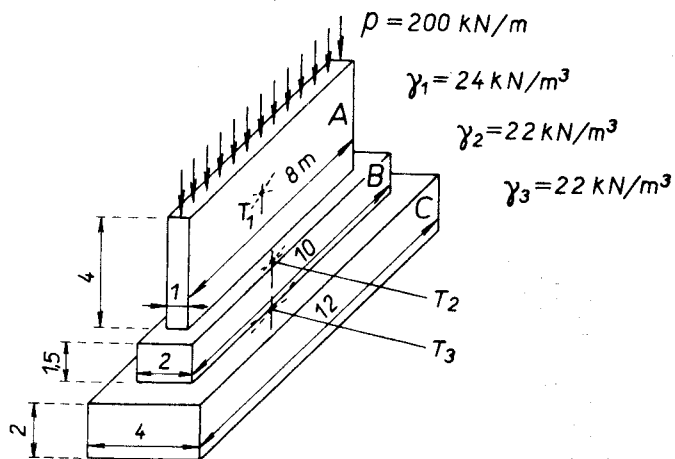
Podmienka rovnováhy:

$$-27,0 - 628,0 + 80,0 + Q = 0$$

z čoho tiaž vyvažovacieho bremena $Q = +575,0 \text{ N}$, pričom sa nebralo do úvahy trenie na kladke ani tiaž lana.



Obr. 1.1-3.



Obr. 1.1-4.

Príklad 1.1-4:

Mostový pilier sa skladá z kvádrov rozličných veľkostí a rôzneho materiálu uložených na seba. Na hornú plochu piliera v jeho pozdĺžnej osi pôsobí zvislé spojité zaťaženie $p = 200 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$. Veľkosti kvádrov a merné tiaže sú na obr. 1.1-4.

Treba určiť:

- veľkosť a pôsobisko sily, ktorou pilier pôsobí na podlažie,
- veľkosť a pôsobiská síl, ktorými kvádre pôsobia na seba v styčných plochách.

Riešenie:

$$\text{a) } \mathbf{R} = \sum \mathbf{P}_i = \mathbf{P} + \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3$$

kde $\mathbf{P} = p \cdot l = 200 \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot 8,0 \text{ m} = 1\,600 \text{ kN}$,
 $\mathbf{Q}_1 = V_1 \cdot \gamma_1 = 1,0 \cdot 4,0 \cdot 8,0 \cdot 24 = 768 \text{ kN}$,
 $\mathbf{Q}_2 = V_2 \cdot \gamma_2 = 2,0 \cdot 1,5 \cdot 10 \cdot 22 = 660 \text{ kN}$,
 $\mathbf{Q}_3 = V_3 \cdot \gamma_3 = 4,0 \cdot 2,0 \cdot 12,0 \cdot 22 = 2\,112 \text{ kN}$,
 V je objem kvádra,
 γ — merná tiaž.

potom

$$\mathbf{R} = 1\,600 + 768 + 660 + 2\,112 = 5\,140 \text{ kN}$$

b) Sila pôsobiaca v styčnej ploche medzi kvádrami A a B.

Z rovnováhy hornej časti piliera

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q}_1 - \mathbf{R}_1 = 0$$

vypočítame

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{P} + \mathbf{Q}_1 = 1\,600 + 768 = 2\,368 \text{ kN}$$

a medzi kvádrami B a C pôsobí sila, ktorú vypočítame z rovnice rovnováhy

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 - \mathbf{R}_2 = 0$$

odkiaľ

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{P} + \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 = 1\,600 + 768 + 660 = 3\,028 \text{ kN}$$

Príklad 1.1-5:

Vyhľadajte výslednicu ťahov nárožného kotviaceho telesa trolejbusového vedenia. V oboch vetvách lana je ťah 2 kN a medzi sebou zvierajú laná uhol $\alpha = 120^\circ$. Rozmer kotviaceho telesa zanedbáme a budeme predpokladať, že ťah v oboch vetvách lana pôsobí v opačnom pôsobisku.

Grafické riešenie je znázornené na obr. 1.1-5b rovnobežníkom síl.

$$\mathbf{P}_1 = 2 \text{ kN}, \mathbf{P}_2 = 2 \text{ kN}, \mathbf{R} = 2 \text{ kN}$$

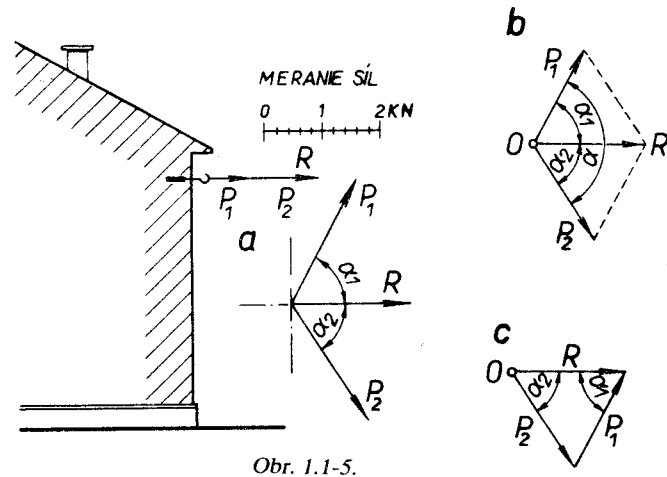
Počtové riešenie:

Pretože $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2 = \mathbf{R}$, dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \sqrt{\mathbf{R}^2 + \mathbf{R}^2 + 2\mathbf{R}^2 \cos \alpha} = \sqrt{2\mathbf{R}^2 + 2\mathbf{R}^2 \cos 120^\circ} \\ &= \mathbf{R} \sqrt{2(1 - \sin 30^\circ)} = \mathbf{R} \sqrt{2\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \mathbf{R} = 2 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{P_2}{R} \sin (180^\circ - \alpha) = \frac{2 \text{ kN}}{2 \text{ kN}} \sin 60^\circ = 0,866$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{P_1}{R} \sin (180^\circ - \alpha) = \frac{2 \text{ kN}}{2 \text{ kN}} \sin 60^\circ = 0,866$$



Obr. 1.1-5.

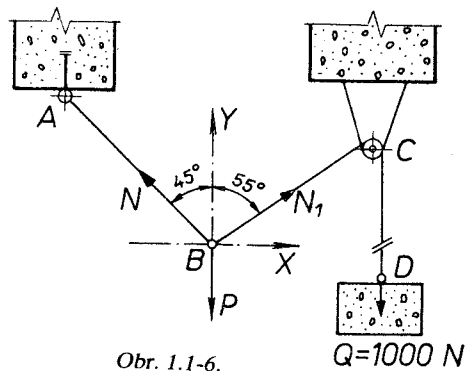
Príklad 1.1-6:

Na voľnom konci lana zavesenom cez kladku a druhým koncom kĺbovo upevneným je zavesené bremeno $Q = 1\,000 \text{ N}$. Aké veľké budú sily P a N , keď bod B má zostať vo svojej polohe.

Riešenie:

V bode B si zvolíme súradnicovú sústavu X, Y a podmienky rovnováhy napíšeme do vodorovného a zvislého smeru.

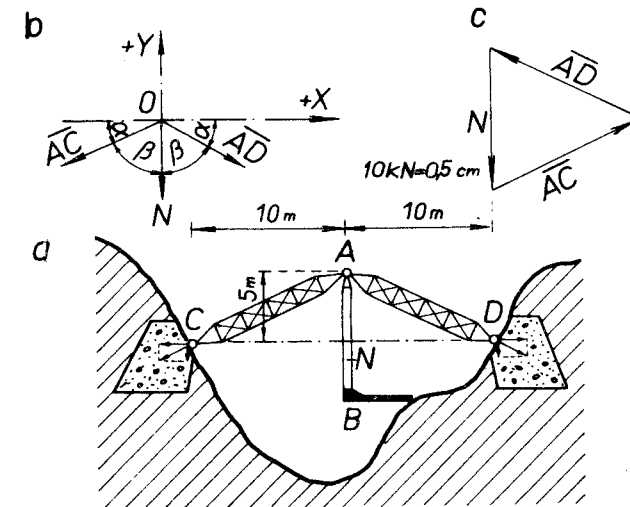
$$\begin{aligned} \Sigma P_{ix} &= N_1 \cdot \cos 35^\circ - N \cdot \cos 45^\circ = 0 \\ (1\,000 \cdot 0,819152) - (N \cdot 0,7071) &= 0 \\ N &= \frac{918,152}{0,7071} = 1\,159 \text{ N} \\ \Sigma P_{iy} &= N_1 \cdot \cos 55^\circ + N \cdot \cos 45^\circ - P = 0 \\ (1\,000 \cdot 0,573\,576) + (1\,159 \cdot 0,7071) &= P \\ P &= 573,576 + 819,529 = 1\,393,1 \text{ N} \end{aligned}$$



Obr. 1.1-6.

Príklad 1.1-7:

V jednej časti horského terénu treba viesť časť cesty nad prekážkou, ako je znázornené na obr. 1.1-7. Aké sily vzniknú v jednotlivých prvkoch konštrukcie. Pomocou nosníka N sa prenáša zaťaženie 500 kN do podpernej konštrukcie. Grafické riešenie je znázornené na obr. 1.1-7c.



Obr. 1.1-7.

Počtové riešenie:

Pri výpočte vychádzame z obr. 1.1-7b.

$$\begin{aligned} \Sigma P_{ix} &= -AC \sin \beta + AD \sin \beta = 0 \\ \Sigma P_{iy} &= -AC \cos \beta - AD \cos \beta - N = 0 \\ \text{tg } \alpha &= \frac{5}{10} = 0,5, \quad \alpha = 26^\circ 33' \\ \beta &= 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 26^\circ 33' = 63^\circ 27' \\ \cos \beta &= \cos 63^\circ 27' = 0,4465 \\ \sin \beta &= \sin 63^\circ 27' = 0,8947 \\ -AC \cdot 0,8947 + AD \cdot 0,8947 &= 0 \end{aligned}$$

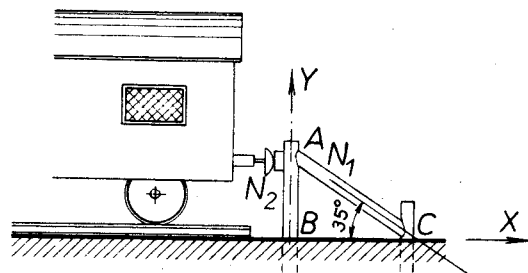
$$-\overline{AC} \cdot 0,4465 - \overline{AD} \cdot 0,4465 - 500 = 0$$

odkiaľ

$$\overline{AC} = \overline{AD} = -559,537 \text{ kN}$$

Príklad 1.1-8:

Vyhľadajte veľkosť sily v podpere \overline{AC} a v stĺpiku AB (obr. 1.1-8), keď v bode A pôsobí sila $P = 50 \text{ kN}$ nárazom od železničného vagóna. Podpera je odklonená od vodorovnej roviny o 35° . Stĺpik \overline{AB} je votknutý v bode B .



Obr. 1.1-8.

Riešenie:

Veľkosť síl N_1 a N_2 vypočítame z dvoch podmienok rovnováhy uzla A

$$\Sigma X = 0, \quad P + N_1 \cos 35^\circ = 0$$

$$\Sigma Y = 0, \quad -N_2 - N_1 \cos 55^\circ = 0$$

odkiaľ

$$N_1 = -\frac{P}{\cos 35^\circ} = -\frac{50}{0,819} = -61,2 \text{ kN}$$

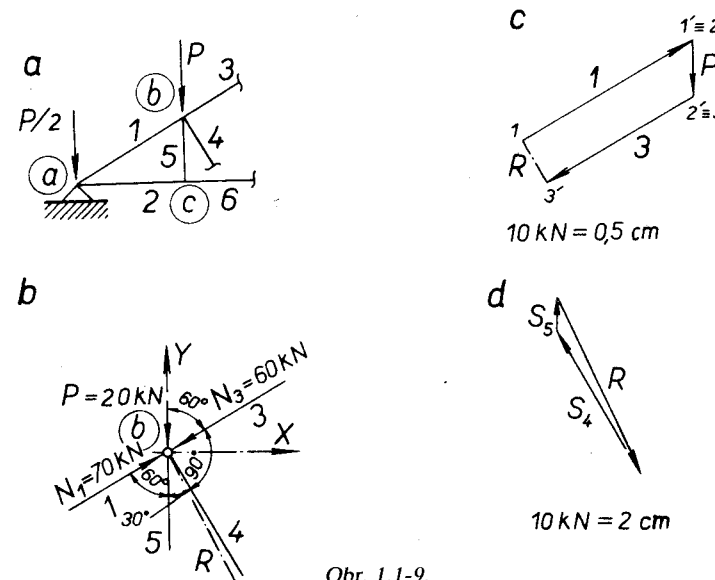
$$N_2 = -N_1 \cos 55^\circ = -61,2 \cdot 0,573 = -35,0 \text{ kN}$$

Príklad 1.1-9:

Vyhľadajte veľkosť síl v prútoch 4 a 5, stretávajúcich sa v uzle b priehradového nosníka, ktorý je znázornený na obr. 1.1-9a.

Grafické riešenie:

V zložkovom obrázku 1.1-9c zložením síl ($N_1 = 70 \text{ kN}$, $N_3 = 60 \text{ kN}$ a $P = 20 \text{ kN}$, ktoré zvierajú medzi sebou uhly znázornené na obr. 1.1-9b), dostávame veľkosť, smer i orientáciu ich výslednice. Rozložením výslednice R do smerov síl 4 a 5 dostávame ich veľkosti i orientácie (obr. 1.1-9c a 1.1-9d).



Obr. 1.1-9.

Počtové riešenie:

Zvolíme si pravouhlý súradnicový systém X, Y a k nemu budeme vzťahovať orientáciu síl pôsobiacich v uzle b . Napísaním podmienok rovnováhy síl do osi X a Y dostaneme dve rovnice.

$$\Sigma X = 0$$

$$N_1 \cdot \cos(90^\circ - 60^\circ) - N_3 \cdot \cos(90^\circ - 60^\circ) + N_4 \cdot \sin 30^\circ = 0$$

$$70,0 \cdot \cos 30^\circ - 60,0 \cdot \cos 30^\circ + N_4 \cdot \sin 30^\circ = 0$$

$$\Sigma Y = 0$$

$$N_1 \cdot \sin 30^\circ - N_3 \cdot \sin 30^\circ - P - N_4 \cdot \sin 60^\circ - N_5 = 0$$

$$70,0 \cdot \sin 30^\circ - 60,0 \cdot \sin 30^\circ - 20,0 - N_4 \cdot \sin 60^\circ - N_5 = 0$$

$$70,0 \cdot 0,866 03 - 60,0 \cdot 0,866 603 + N_4 \cdot 0,500 = 0$$

$$70,0 \cdot 0,5 000 - 60,0 \cdot 0,5 000 - 20,0 - N_4 \cdot 0,866 03 - N_5 = 0$$

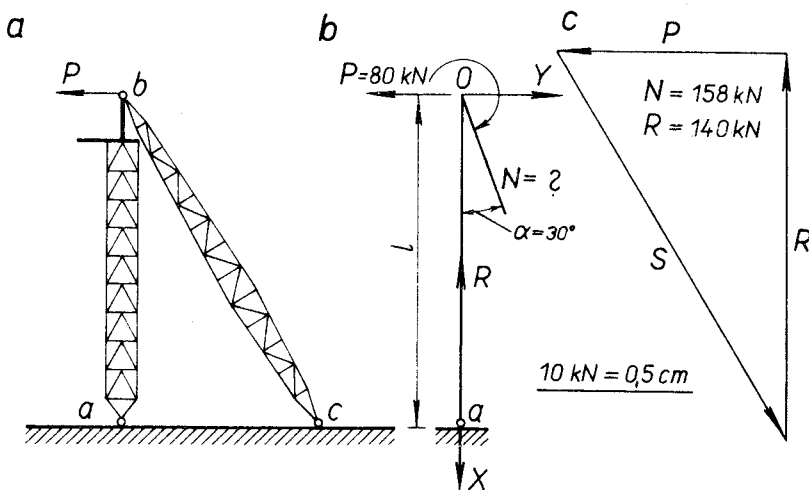
odkiaľ

$$N_4 = -17,32 \text{ kN}$$

$$N_5 = -0,001 \text{ kN}$$

Príklad 1.1-10:

Nech na hornom voľnom konci kyvnej stojky — prúta ocelevej konštrukcie pôsobí kolmo na jeho os sila $P = 80 \text{ kN}$. Akou veľkou silou udržíme prút v rovnováhe, keď sa môže kotviť iba smerom zvierajúcim s osou prúta uhol $\alpha = 30^\circ$ (obr. 1.1-10a).



Obr. 1.1-10.

Úvaha:

Teleso, ktoré v našom prípade predstavuje priehradový prút, je kĺbove upevnené v podpere. Rovnováhu takéhoto telesa môžeme posudzovať z dvoch hľadísk, pričom dostaneme rovnaké výsledky.

a) Na voľnom konci prúta pôsobia dve sily, ktoré sa ho usilujú pootočiť okolo osi kĺba. Rovnováha nastane vtedy, keď moment týchto dvoch síl k bodu a pootočenia sa bude rovnáť nule.

Poznámka: Sila N , vo zvislici musí byť nulová. Pri grafickom riešení vplynula z nepresnosti rysovania.

b) Obidve sily, ktoré pôsobia na prút, majú svoje pôsobisko na voľnom konci. Ich výslednica prechádzajúca týmto bodom musí prechádzať aj kĺbom, aby nenastalo jej pôsobením pootočenie okolo kĺba. Vzniknutá silová sústava je na obr. 1.1-10b.

Riešenie:

Zvolíme si súradnicový systém tak, aby začiatok bol v priesečníku síl P a N a os Y v lúči P .

Z podmienky podľa bodu a) vyplýva:

$$\sum_{i=1}^n M_{ia} = -P \cdot l + N \cdot l \cdot \sin 30^\circ = 0$$

odkiaľ

$$N = \frac{P \cdot l}{l \cdot \sin 30^\circ} = \frac{80}{0,500} = 160 \text{ kN}$$

Z podmienky podľa bodu b) vyplýva:

Veľkosť vypočítame zo súčtovej podmienky síl do tej súradnicovej osi, do ktorej výslednica má nulový priemet. V našom prípade je to smer osi Y .

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = -P + N \cdot \sin 30^\circ = 0$$

odkiaľ

$$N = \frac{P}{\sin 30^\circ} = \frac{P}{0,5} = 2P = 2 \cdot 80 = 160 \text{ kN}$$

Graficky zistíme veľkosť sily N zo zložkového obrázka za predpokladu rovnováhy síl P a N , kde za smer sily R uvažujeme pozdĺžnu os prúta \overline{ab} ; pozri obr. 1.1-10c.

Príklad 1.1-11:

Akou silou musia pôsobiť hydraulické valce nakladača na výložník, keď zaťaženie $Q = 3\,000 \text{ N}$, $a = 900 \text{ mm}$ a dĺžka výložníka $l = 2\,750 \text{ mm}$ (obr. 1.1-11).

Riešenie:

Momentová podmienka k bodu B

$$Q \cdot l - P \cdot p' = 0$$

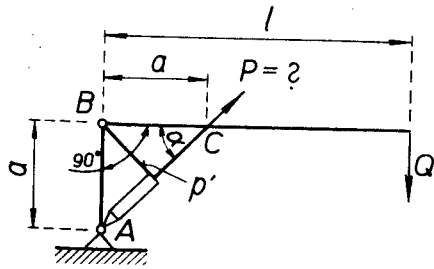
$$\text{tg } \alpha = \frac{a}{a} = \frac{900}{900} = 1 \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$$p' = a \cdot \sin 45^\circ = 900 \cdot 0,707 = 636,3 \text{ mm}$$

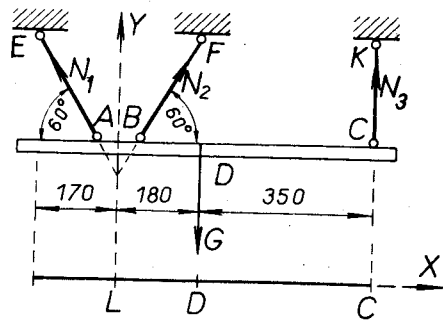
$$P = \frac{Q \cdot l}{p'} = \frac{3\,000 \cdot 2\,750}{636,30} = \frac{2\,750}{212,10} \cdot 1\,000 = 12\,965,1 \text{ N}$$

Príklad 1.1-12:

Pri oprave fasády bolo potrebné závesné lešenie, ktoré je zavesené na prútoch \overline{AE} , \overline{BF} , \overline{CK} a je zaťažené vlastnou tiažou a občasným zaťažením $G = 40 \text{ kN}$ (obr. 1.1-12).



Obr. 1.1-11.



Obr. 1.1-12.

Riešenie:

Veľkosť síl v prútoch vypočítame z troch podmienok rovnováhy. Najskôr napíšeme podmienky rovnováhy do osi X , Y a potom momentovú podmienku k bodu L (k priesečníku smerov síl N_1 a N_2).

$$\Sigma H = 0$$

$$-N_1 \cdot \cos 60^\circ + N_2 \cdot \cos 60^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma V = 0$$

$$N_1 \cdot \sin 60^\circ + N_2 \cdot \sin 60^\circ + N_3 - G = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma M_L = 0$$

$$N_3 \cdot \overline{CL} - G \cdot \overline{DL} = 0 \quad (3)$$

Z rovnice dostaneme

$$N_3 = G \frac{\overline{DL}}{\overline{CL}} = 40 \frac{1,8}{(1,8 + 3,50)} = 40 \frac{1,8}{5,3} = 13,6 \text{ kN}$$

Z prvej rovnice

$$N_1 = N_2 \frac{\cos 60^\circ}{\cos 60^\circ} = N_2$$

Dosadením do druhej rovnice dostaneme

$$N_2 \cdot \sin 60^\circ + N_2 \cdot \sin 60^\circ + G \frac{\overline{DL}}{\overline{CL}} - G = 0$$

$$2(N_2 \cdot \sin 60^\circ) = G - G \frac{\overline{DL}}{\overline{CL}}$$

$$N_2 = \frac{G \left(1 - \frac{\overline{DL}}{\overline{CL}}\right)}{2 \cdot \sin 60^\circ} = \frac{40 \left(1 - \frac{1,8}{5,3}\right)}{2 \cdot 0,866\,03} = 15,20 \text{ kN}$$

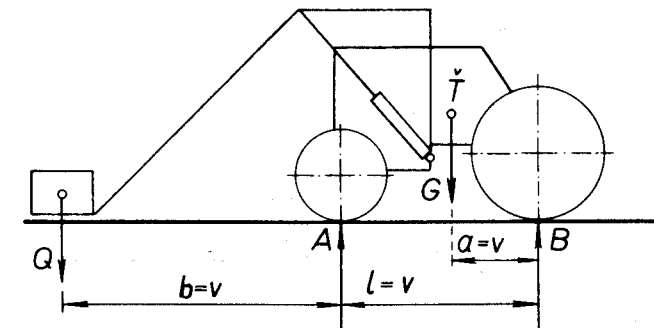
Kontrola:

$$15,20 \cdot 0,866\,03 + 15,20 \cdot 0,8666 + 13,60 - 40,0 = 0$$

$$13,20 + 13,20 + 13,60 - 40,0 = 0$$

Príklad 1.1-13:

Na kolesový traktor je namontovaný nesený čelný nakladač. Vypočítajte veľkosť a orientáciu reakcií pôdy na prednú a zadnú nápravu, ak $Q = 2 \text{ kN}$, $G = 28,60 \text{ kN}$, $a = 700 \text{ mm}$, $b = 2\,925 \text{ mm}$, $l = 2\,190 \text{ mm}$ (obr. 1.1-13).



Obr. 1.1-13.

Riešenie:

$$\Sigma M_B = A \cdot l - Q(b+l) - G \cdot a = 0$$

$$A \cdot 219 - 2(292,5 + 219) - 28,60 \cdot 70 = 0$$

$$A = \frac{1\,023,0 + 2\,002}{219} = \frac{3\,025}{219} = 13,812 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_C = B \cdot l + Q \cdot b - G(l-a) = 0$$

$$B = 219 + 2 \cdot 292,5 - 28,60(219 - 70) = 0$$

$$B = \frac{-585 + 4\,261,40}{219} = \frac{3\,676,40}{219} = 16,787 \text{ kN}$$

Kontrola:

$$\Sigma V = 0$$

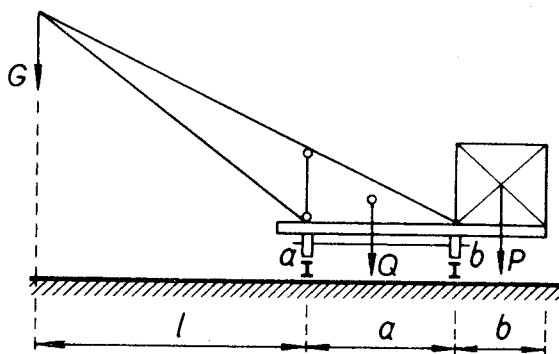
$$A + B - Q - G = 0$$

$$13,812 + 16,787 - 2,0 - 28,60 = 0$$

$$30,59 \doteq 30,60$$

Príklad 1.1-14:

Vypočítajte maximálne bremeno G , ktoré môže zdvihnúť žeriav, ak berieme do úvahy, že v okamihu nadvihnutia bremena sa podpera b nadnáša tak, že v nej pôsobiaca reakcia sa rovná nule, a celú tiaž prenáša podpera a . Tiaž žeriava $Q = 150 \text{ kN}$, tiaž protizávažia $P = 40 \text{ kN}$, $l = 6 \text{ m}$, $a = 3,6 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$ (obr. 1.1-14).



Obr. 1.1-14.

Riešenie:

$$\Sigma M_a = 0$$

$$G \cdot l - Q \frac{a}{2} - P \left(a + \frac{b}{2}\right) = 0$$

$$G \cdot 6 - 150 \cdot 1,8 - 40 \cdot 4,6 = 0$$

$$G = \frac{270 + 184}{6} = \frac{454}{6} = 75,66 \text{ kN}$$

Kontrola:

$$\Sigma M_a = 0$$

$$75,66 \cdot 6 - 150 \cdot 1,8 - 40 \cdot 4,60 = 0$$

$$453,96 - 270,00 - 184,0 = 0$$

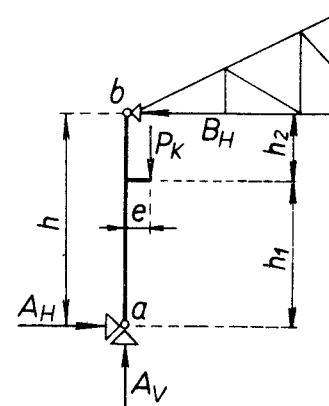
$$453,96 \doteq 454$$

Príklad 1.1-15:

Na stĺp továrenskej haly pôsobí zaťaženie $P_k = 100 \text{ kN}$. Vypočítajte, aké veľké budú horizontálne reakcie A_H , B_H stĺpa v bodoch (podperách) a , b (obr. 1.1-15); $h = 8 \text{ m}$, $h_1 = 5 \text{ m}$, $h_2 = 3 \text{ m}$, $e = 0,5 \text{ m}$.

Riešenie:

Na výpočet horizontálnych reakcií napíšeme k podperovým bodom a , b momentové podmienky a z nich vypočítame veľkosti hľadaných reakcií.



Obr. 1.1-15.

$$\Sigma M_b = 0$$

$$-A_H \cdot h + P_k \cdot e = 0$$

$$A_H = \frac{P_k \cdot e}{h} = \frac{100 \cdot 0,5}{8} = 6,25 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_a = 0$$

$$-B_H \cdot h + P_k \cdot e = 0$$

$$B_H = \frac{P_k \cdot e}{h} = \frac{100 \cdot 0,5}{8} = 6,25 \text{ kN}$$

Kontrola:

$$\Sigma H = 0$$

$$A_H - B_H = 0$$

$$A_H = B_H$$

$$6,25 = 6,25$$

1.2. VŠEOBECNÁ SÚSTAVA SÍL V ROVINE

Všeobecný postup riešenia úloh statiky v rovine

1. *Posúdenie statickej určítosti úlohy*, t. j. voľnosti telesa, hmotného bodu alebo celej sústavy. Posudzovať budeme podľa nasledovného vzťahu:

$$3n + 2m - p - 2k - 3v = S$$

kde n je počet telies v sústave (dosky, trámy, tyče, prípadne symetrické telesá);

m — počet hmotných bodov v sústave. Hmotnými bodmi sú väčšinou osi kĺbov, ktoré sú spoločné pre niekoľko kyvných prútov alebo lomy (ohyby) dokonale ohybných tuhých vlákien;

p — počet podpier — väzieb v sústave, ktoré rušia jeden stupeň voľnosti, t. j. zabraňujú len jednému pohybu. K takýmto podperám patrí:

a) podopretie hladkou rovinou alebo plochou; hrotom alebo hranou na plochu. Zabraňujú v pohybe kolmo na plochu, preto v nich vzniká reakcia kolmá na plochu,

b) podopretie kyvným prútom — telesom, tyčou rozličného tvaru, na ktorú nepôsobí zaťaženie a má dva kĺby,

c) záves na dokonale ohybných a tuhých vláknach, napr. laná, reťaze a iné. Reakcia pôsobí v smere ich pozdĺžnej osi;

k — počet podpier — väzieb v sústave rušiacich dva stupne voľnosti. Zaraďujeme k nim podopretie pevným valcovým kĺbom pri zanedbaní trenia a podopretie dvoma kyvnými prútmi s jedným spoločným kĺbom, ktorý je na telese. Tieto väzby zabraňujú všeobecnému posuvnému pohybu v rovine, ktorý sa skladá z dvoch nezávislých smerov, a preto v ňom necháme pôsobiť dve reakcie v smere zvolených súradnicových osí, alebo v smere osí dvoch kyvných prútov alebo dvoch ľubovoľných v danej úlohe vhodných smerov.

v — počet podpier — väzieb v sústave rušiacich tri stupne voľnosti. Tieto zabraňujú dvom nezávislým smerom posuvných pohybov a jednému otáčavému

v smere kolmom na posuvný. Takúto väzbu nazývame votknutím a predstavuje v podstate úplné spojenie telesa s iným. Môžeme tiež povedať, že v každom bode osi skúmaného telesa je jedna jeho časť (vymedzená týmto bodom) votknutá do nastávajúcej časti. V takejto väzbe vznikajú tri reakcie, z toho dve sily sú v smere zvolených súradnicových osí alebo iných dvoch ľubovoľných smerov a jedna zabraňuje pootočeniu, t. j. dvojica síl, resp. statický moment.

V zložených sústavách telies i hmotných bodov môžeme posudzovať stupne voľnosti jednotlivých telies resp. hmotných bodov podľa tohto istého vzťahu.

Pri riešení rovnice môžu nastať tri varianty:

a) keď $S = 0$, v takomto prípade hovoríme, že úloha je staticky určitá a dá sa riešiť statickými podmienkami rovnováhy;

b) keď $S > 0$, to znamená, že teleso alebo sústava má nejaké stupne voľnosti. Úlohu možno riešiť za predpokladu, že v smere stupňa voľnosti platí podmienka rovnováhy;

c) keď $S < 0$, čiže je záporné. Potom je teleso upevnené viacerými podperami, ako je potrebné, a preto úloha je staticky neurčitá, alebo na určenie neznámych reakcií nestačia statické podmienky rovnováhy.

Pri zložených sústavách rozoznávame vnútorné a vonkajšie väzby, z čoho vyplýva, že sústava môže byť navonok staticky určitá a vnútorne neurčitá. V takom prípade môžeme určiť len vonkajšie reakcie. Keď je sústava navonok staticky neurčitá a vnútorne staticky určitá, potom úlohu nemôžeme riešiť.

2. *Odstránime väzby — podpery* a nahradíme ich účinok na teleso silami — reakciami, ktoré v nich vznikajú (pozri časť o väzbách v prvom bode). Smer pôsobenia vyznačený šípkou môžeme zvoliť ľubovoľne, obyčajne však proti smeru predpokladaného pohybu, ktorému zabraňujú. Označíme ich písmenami veľkej abecedy podľa označenia bodu ich pôsobenia.

3. *Zvolíme si vhodnú súradnicovú sústavu*, a to najlepšie tak, že jedno z pôsobísk neznámych reakcií, ktoré je najviac vľavo, je jej začiatkom a os X je vodorovná. Pri zložených sústavách je niekedy vhodné zvoliť si pre jednotlivé telesá, resp. hmotné body samostatné súradnicové systémy. V statike si zvolíme obyčajne ľavotočivú súradnicovú sústavu, pričom os Y smeruje nahor, nie je to však podmienkou.

4. Z daných geometrických a fyzikálnych hodnôt *určíme veľkosti, smery a pôsobiská prvotných vonkajších síl, smery a pôsobiská druhotných vonkajších síl (reakcií) v zvolenej súradnicovej sústave*. Veľkosti bremien bývajú udané. Hmotnosť telesa musíme obyčajne určiť výpočtom. Keď máme zaťaženie spojitě rozložené, určíme veľkosť náhradného bremena zo vzťahu

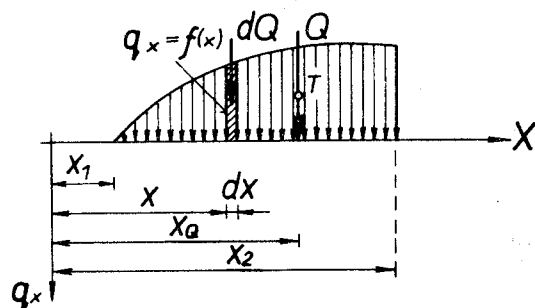
$$Q = \int_{x_1}^{x_2} q_x \cdot dx$$

kde q_x je intenzita zaťaženia.

Pôsobisko náhradného bremena určíme zo vzťahu pre určovanie polohy ťažísk

$$x_0 = \frac{\int_{x_1}^{x_2} q_x x dx}{\int_{x_1}^{x_2} q_x \cdot dy}$$

Z týchto vzťahov vyplýva, že náhradné bremeno je určené plochou zafažovacieho obrázka a pôsobisko je v ťažisku zafažovacieho obrázka. Preto výpočet



Obr. 1.2-1a.

integráciou robíme len vtedy, keď zmena intenzity zafaženia závisí od iných funkcií, napr. od paraboly druhého, resp. tretieho stupňa a neparabolických funkcií. Smerom sily označujeme uhol, ktorý zvierajú vektor sily s kladným smerom osi X. Keď máme určené všetky tieto hodnoty, vykreslíme si obrázok silovej sústavy, v ktorom teleso, prípadne sústavu naznačíme len čiarkovane.

5. Napíšeme podmienky rovnováhy.

Pre rovinnú silovú sústavu máme dve podmienky rovnováhy vo vektorovom a tri v skalárnom tvare.

Vektorové podmienky sú:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i = 0$$

$$\mathbf{M}_0 = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{0i} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{P} \times \mathbf{r}) + \sum_{i=1}^m \mathbf{M}_i = 0$$

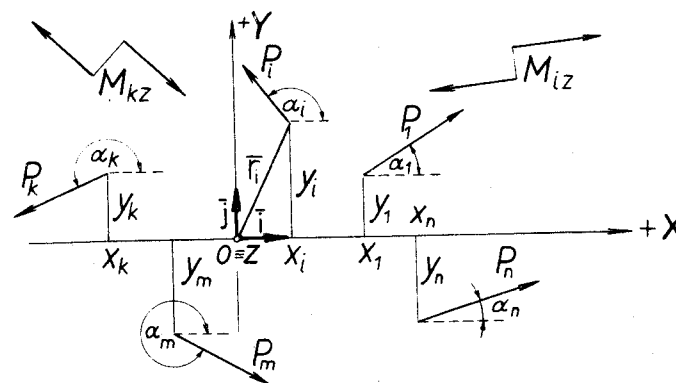
Skalárne podmienky sú rôzne a závisia od voľby súradnicového systému. Pre rovinu x, y:

$$R_x = \mathbf{R} \cdot \mathbf{i} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{i} = \sum_{i=1}^n P_i \cdot 1 \cdot \cos \alpha_i = \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \quad (1)$$

$$R_y = \mathbf{R} \cdot \mathbf{j} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{j} = \sum_{i=1}^n P_i \cdot 1 \cdot \cos \alpha_i = \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \quad (2)$$

Momentovú podmienku napíšeme všeobecne pre ľubovoľný bod roviny

$$\begin{aligned} M_z^{x,y} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{k} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{k}(\mathbf{P}_i \times \mathbf{r}_i) + \sum_{i=1}^m \mathbf{k} \cdot \mathbf{M}_i = \\ &= \sum_{i=1}^n P_i \cdot \sin \alpha_i (x - x_i) - \sum_{i=1}^n P_i \cdot \cos \alpha_i (y - y_i) + \sum_{i=1}^m M_{zi} = 0 \quad (3) \end{aligned}$$



Obr. 1.2-1b.

Význam jednotlivých symbolov používaných v úlohách je zřejmý z obrázka 1.2-0/b. Hodnoty x a y sú súradnice bodu, ku ktorému píšeme momentovú podmienku.

Tieto tri podmienky môžeme používať vo všetkých prípadoch, ale na zjednodušenie výpočtov môžeme si vhodne zvoliť podmienky rovnováhy, pričom postupujeme podľa týchto zásad:

a) Keď sa tri neznáme sily navzájom pretínajú v troch rôznych bodoch, ktorých súradnice majú konkrétne konečné hodnoty (nie ∞), je výhodné pre riešenie úlohy použiť tri momentové podmienky (rovnica (3)) k týmto bodom. Rovnice 1 a 2 použijeme na kontrolu výpočtu. Výhodou tohto riešenia je, že pre tri neznáme sily dostaneme tri rovnice, ale každú s jednou neznámou.

b) Keď jeden z priesečníkov troch neznámych síl je v nekonečne, t. j. dve z neznámych síl sú rovnobežné, použijeme na riešenie úlohy dve momentové podmienky (rovnica (3)) k dvom reálnym priesečníkom a jednu silovú podmienku v smere kolmom na rovnobežné sily, obyčajne je to $\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0$. Druhá podmienka $\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0$ sa môže využiť na kontrolu.

Keď skúmame zložené sústavy, musíme ich najprv rozložiť na základné jednoduché útvary a zisťovať ich rovnováhu postupne. Reakcie vo vnútorných väzbách pôsobia na obe spojené telesá, len smer je rozdielny, a to o 180° . Preto začneme podmienky rovnováhy písať najskôr pre to teleso, na ktoré pôsobí len zaťaženie a vlastné neznáme reakcie vo väzbách pripájajúcich ho k ostatnej sústave, t. j. nesené teleso. Postupne píšeme podmienky pre ostatné telesá a hmotné body.

6. Zo sústavy rovníc postupne vyriešime všetky neznáme vnútorné aj vonkajšie reakcie, prípadne iné hodnoty, ktoré sú v napísaných podmienkach neznámymi, ako napr. smery síl alebo súradnice pôsobísk.

7. Po vyriešení neznámych vždy skontrolujeme správnosť výpočtov, a to postavením podmienok rovnováhy, ktoré sme nepoužili na výpočet, ako sa uvádza v bode 5. Správnosť výpočtu môžeme kontrolovať grafickým riešením, ktoré sa v statike bežne používa.

Príklad 1.2-1:

Pre rovinnú sústavu síl P_1 až P_6 a silových dvojíc M_1 až M_3 , ktorých veľkosti, smery a pôsobiská sú udané v tab. 1, určte smer, veľkosť a pôsobisko výslednice. Úlohu riešte výpočtom a kontrolu urobte graficky.

Tabuľka 1

i	P_i [kN]	α_i [°]	x_i [m]	y_i [m]	M_i [kNm]
1	4	30°	2	4	6
2	6	60°	-1	2	2
3	2	120°	5	-2	-4
4	5	135°	-3	-2	0
5	10	45°	-5	3	0
6	2	270°	4	1	0

Pretože v úlohe nejde o skúmanie rovnováhy telesa, ale len o určenie výslednej sily, môžeme zo všeobecného postupu vynechať prvé štyri body. Na riešenie úlohy použijeme rovnice rovnováhy v bode 5, pričom si môžeme zvoliť dva spôsoby využitia rovníc.

1. Keď chceme použiť rovnice rovnováhy, v pôvodnom anulovanom tvare, zavedieme do sústavy ďalšiu silu, ktorej veľkosť označíme R a jej smer α_R . Pôsobisko sily zvolíme všeobecne na jednej alebo na druhej súradnicovej osi. Potom súradnice pôsobiska sily R sú $(x_R, 0)$ alebo $(0, y_R)$ a budú neznámymi hodnotami, ktoré určíme z momentovej podmienky.

2. Podmienky rovnováhy nepoužijeme v anulovanom tvare, pretože v skutočnosti táto sústava má výslednicu, a preto jej zložky ani moment k ľubovoľnému bodu nebudú nulové. Potom použijeme rovnice v tomto tvare:

$$R_x = \sum_{i=1}^n P_{ix} = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \cos \alpha_i$$

$$R_y = \sum_{i=1}^n P_{iy} = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \sin \alpha_i$$

$$M_z^{x,y} = R_y(x - x_R) - R_x(y - y_R) = \sum_{i=1}^n P_{iy}(x - x_i) - \sum_{i=1}^n P_{ix}(y - y_i) + \sum M_{iz}$$

Oba spôsoby sa líšia len smerom výslednice. V prvom prípade sme našli silu, ktorá danú sústavu uvedie do rovnováhy, v druhom výslednicu. Ich veľkosti aj pôsobisko sú rovnaké, len v prvom prípade je smer rozdielny o 180° od správneho.

$$R_x = P_1 \cdot \cos \alpha_1 + P_2 \cdot \cos \alpha_2 + P_3 \cdot \cos \alpha_3 + P_4 \cdot \cos \alpha_4 + \\ + P_5 \cdot \cos \alpha_5 + P_6 \cdot \cos \alpha_6 = 4 \cdot \cos 30^\circ + 6 \cdot \cos 60^\circ + \\ + 2 \cdot \cos 120^\circ + 5 \cdot \cos 135^\circ + 10 \cdot \cos 45^\circ + 2 \cdot \cos 270^\circ$$

po úprave a po dosadení $R_x = 9,000$ kN.

$$R_y = P_1 \cdot \sin \alpha_1 + P_2 \cdot \sin \alpha_2 + P_3 \cdot \sin \alpha_3 + P_4 \cdot \sin \alpha_4 + \\ + P_5 \cdot \sin \alpha_5 + P_6 \cdot \sin \alpha_6 = 4 \cdot \sin 30^\circ + 6 \cdot \sin 60^\circ + \\ + 2 \cdot \sin 120^\circ + 5 \cdot \sin 135^\circ + 10 \cdot \sin 45^\circ + 2 \cdot \sin 270^\circ$$

po dosadení a úprave dostaneme $R_y = 17,5349$ kN.

Všeobecne momentová podmienka pre $x = 0$ a $y = 0$

$$R_x y_R - R_y x_R = \sum_{i=1}^6 P_i \cdot \cos \alpha_i y_i - \sum_{i=1}^6 P_i \cdot \sin \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^3 M_{zi}$$

$$R_x y_R - R_y x_R = P_1 \cdot \cos \alpha_1 y_1 - P_1 \cdot \sin \alpha_1 x_1 + P_2 \cdot \cos \alpha_2 y_2 - \\ - P_2 \cdot \sin \alpha_2 x_2 + P_3 \cdot \cos \alpha_3 y_3 - P_3 \cdot \sin \alpha_3 x_3 + \\ + P_4 \cdot \cos \alpha_4 y_4 - P_4 \cdot \sin \alpha_4 x_4 + P_5 \cdot \cos \alpha_5 y_5 - \\ - P_5 \cdot \sin \alpha_5 x_5 + P_6 \cdot \cos \alpha_6 y_6 - P_6 \cdot \sin \alpha_6 x_6 + M_1 + M_2 + M_3$$

po dosadení

$$- R_x x_R = 4 \cdot \cos 30^\circ \cdot 4 - 4 \cdot \sin 30^\circ \cdot 2 + 6 \cdot \cos 60^\circ \cdot 2 - \\ - 6 \cdot \sin 60^\circ \cdot (-1) + 2 \cdot \cos 120^\circ \cdot (-2) - 2 \cdot \sin 120^\circ \cdot 5 + \\ + 5 \cdot \cos 135^\circ \cdot (-2) - 5 \cdot \sin 135^\circ \cdot (-3) + \\ + 10 \cdot \cos 45^\circ \cdot 3 - 10 \cdot \sin 45^\circ \cdot (-5) + \\ + 2 \cdot \cos 270^\circ \cdot 1 - 2 \cdot \sin 270^\circ \cdot 4 + 6 + 2 + (-4)$$

po úprave dostaneme $-R_{y,x_R} = 100,6385 \text{ kNm}$.

6. Riešenie rovníc:

Veľkosť, smer a pôsobisko výslednice určíme tromi rovnicami

$$R_x = R \cdot \cos \alpha_R = 9,0000 \text{ kN} \quad (1)$$

$$R_y = R \cdot \sin \alpha_R = 17,5349 \text{ kN} \quad (2)$$

Umocnením a sčítaním rovníc dostaneme vzťah pre veľkosť výslednice

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 19,7097 \text{ kN}.$$

Riešením dvoch rovníc dostaneme vzťah pre smer výslednice

$$\operatorname{tg} \alpha_R = \frac{R_y}{R_x} = 1,948, \quad \alpha_R = 62^\circ 50'$$

Z momentovej rovnice určíme súradnicu x pôsobiska sily

$$x_R = \frac{100,6385}{-R_y} = \frac{100,6385}{-17,5349} = -5,739 \text{ m} \quad (3)$$

7. *Kontrola správnosti riešenia.* Urobíme ju grafickým riešením úlohy. Postup grafického riešenia je nasledovný:

a) Podľa zadania vykreslíme si do súradnicového systému sústavu šiestich síl.

b) Vedľa silového obrázka zostrojíme zložkový obrázok takto: Zvolíme si vhodný bod, ktorým vedieme rovnobežku s lúčom sily P_1 , a nanesieme na ňu jej veľkosť. Koncovým bodom sily P_1 vedíme rovnobežku s lúčom sily P_2 , na ktorú nanesieme jej veľkosť. Takto pokračujeme až po silu P_6 .

c) Spojením začiatočného bodu sily P_1 s koncovým bodom sily P_6 dostaneme veľkosť a smer výslednice silovej sústavy R .

Polohu výslednice určíme použitím výslednicovej čiary, ktorá v grafickom riešení nahrádza podmienku, preto ju musíme zostrojiť.

d) Zvolíme si napravo (alebo naľavo) bod 0, ktorý nazývame pólom.

e) Pól 0 pospájame so začiatkami, resp. koncami všetkých síl vektorov v zložkovom obrázku, čím dostaneme pólové lúče, ktoré si očísľujeme od 0 po 6.

f) V silovom obrázku urobíme výslednicovú čiaru týmto spôsobom: Na lúči sily P_1 si zvolíme jeden vhodný bod a vedíme ním rovnobežky s pólovými lúčmi 0 a 1, ktoré v zložkovom obrázku vymedzujú veľkosť sily P_1 . Rovnobežka s lúčom 1 pretne po predĺžení lúč sily P_2 v bode, ktorým musíme viesť rovnobežku s pólovým lúčom 2, ktorý určuje v zložkovom obrázku koniec vektora sily P_2 . Tento lúč pretne smer ďalšej, v poradí tretej sily. Tento postup opakujeme až po lúč 6, ktorý je posledným pólovým lúčom.

g) Priesečník rovnobežky s pólovým lúčom 0 a rovnobežky s pólovým lúčom

6 je bod, cez ktorý prechádza lúč výslednice R . Preto stačí viesť týmto bodom rovnobežku s lúčom sily R zo zložkového obrázka.

Výslednica R je však lepšou výslednicou sústavy síl, a preto ju musíme ešte zložiť s tromi dvojicami síl M_1 až M_3 . Urobíme to týmto spôsobom.

h) Sčítame všetky momentové dvojice

$$M = M_1 + M_2 + M_3 = 4 \text{ kNm}$$

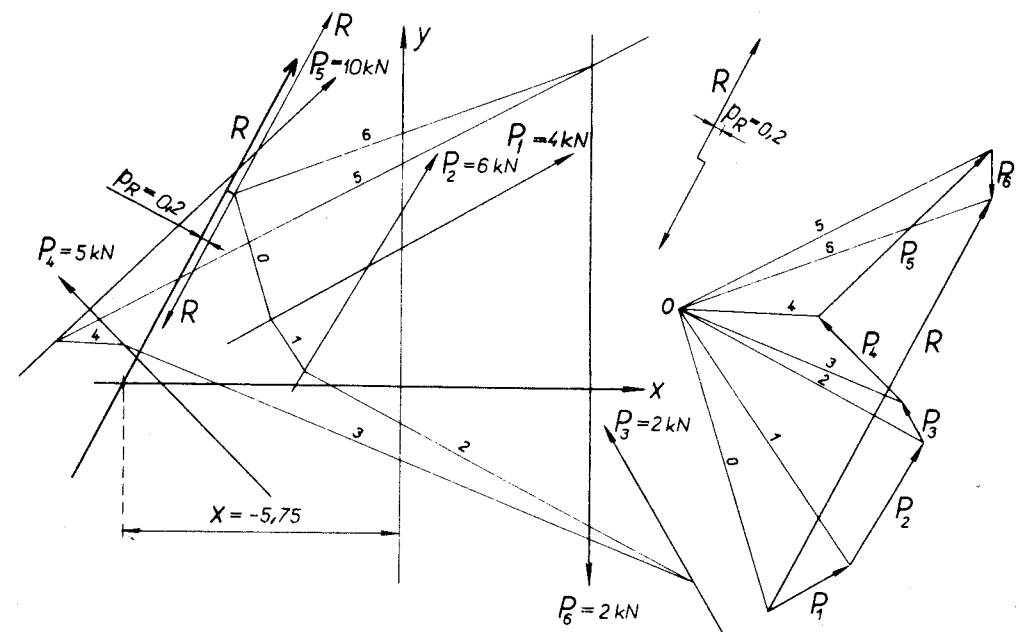
i) Tento výsledný moment premeníme na dvojicu $P \cdot p$, kde

$$P = R \quad \text{a} \quad p_R = \frac{4}{19,7097} = 0,2029 \text{ m}$$

j) Túto dvojicu sčítame s výslednicou tak, že kladne otáčajúcu sa dvojicu pootočíme, aby sa jedna z dvojice jej síl stotožnila s lúčom výslednice síl a mala pritom opačný smer. Druhá z dvojice síl je potom výslednicou celej sústavy, pretože tie dve sily, ktoré sú rovnako veľké a majú opačný smer a pôsobia na jednom lúči, sa rušia, resp. dávajú nulový účinok.

k) Zmeraním vzdialenosti priesečníka tejto sily s osou x môžeme porovnať správnosť výpočtu.

Celý tento postup je zrejmy z obr. 1.2-1.



Obr. 1.2-1.

Príklad 1.2-2:

Kváder zaťažený vonkajšou silou $P = 60 \text{ kN}$ a vlastnou tiažou je uložený podľa obr. 1.2-2a. Rozmery kvádra: dĺžka $l = 5,0 \text{ m}$, výška $v = 2,0 \text{ m}$, šírka $b = 1,0 \text{ m}$. Objemová tiaž je $21,6 \text{ kN/m}^3$. Vplyv trenia vzhľadom na hladkosť povrchov neberieme do úvahy. Treba určiť reakcie, ktorými teleso pôsobí na podpery.

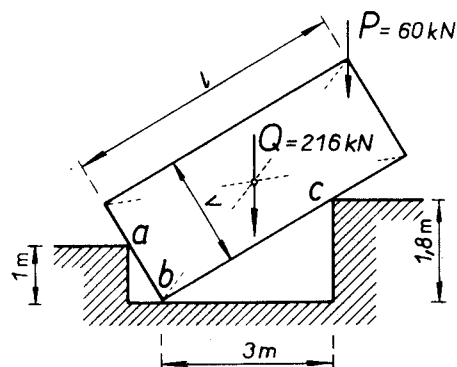
Pri riešení postupujeme podľa všeobecného návodu.

1. Posúdenie statickej určítosti úlohy

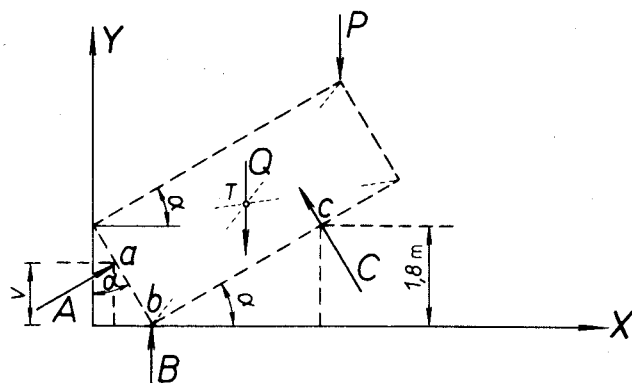
Kváder ako teleso v rovine je podporené tromi jednoduchými podperami, z ktorých každá ruší jeden stupeň voľnosti. Preto $n = 1$, $m = 0$, $p = 3$, $k = 0$, $v = 0$ a $S = 3 \times 1 + 2 \times 0 - 3 \times 1 - 0 \times 2 - 0 \times 3 = 0$.

Úloha je staticky určitá.

2. Účinok podpier na teleso nahradíme reakciami A v bode a a C v bode c , pôsobiacich kolmo na steny kvádra. V bode b bude reakcia B kolmá na vodorovnú podperujúcu rovinu.



Obr. 1.2-2a.



Obr. 1.2-2b.

3. Súradnicový systém si zvolíme tak, aby os X prechádzala bodom b vodorovne, t. j. rovinou podporenia a os Y ľavou hornou hranou telesa.

4. Výpočet smerov, pôsobísk a veľkostí síl:

Najprv musíme určiť uhol α .

$$\text{tg } \alpha = \frac{1,8}{3,0} = 0,6$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{tg } \alpha}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha}} = 0,5145$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha}} = 0,8575$$

$$\alpha_O = \alpha_P = 270^\circ, \alpha_A = \alpha, \alpha_B = 90^\circ, \alpha_C = 90^\circ + \alpha$$

Súradnice pôsobísk síl určíme z geometrie zadania.

$$x_A = \text{tg } \alpha (2 \cos \alpha - 1) = 0,429 \text{ m}, \quad y_A = 1,0 \text{ m}$$

$$x_B = 2 \sin \alpha = 1,029 \text{ m}, \quad y_B = 0$$

$$x_O = \frac{l}{2} \cos \alpha + 1,0 \sin \alpha = 2,65875 \text{ m}$$

$$y_O = \frac{l}{2} \sin \alpha + 1,0 \cos \alpha = 2,14375$$

$$x_C = 3 + 2 \sin \alpha = 4,029 \text{ m}, \quad y_C = 1,8 \text{ m}$$

$$x_P = 5 \cdot \cos \alpha = 4,2875 \text{ m}, \quad y_P = 5 \cdot \sin \alpha + 2 \cos \alpha = 4,2875 \text{ m}$$

Výpočet vlastnej tiaže telesa

$$Q = V \cdot \gamma = 216 \text{ kN}$$

5. Zostavenie podmienok rovnováhy:

Vzhľadom na rozmiestenie a smery síl k výpočtu použijeme všetky tri základné podmienky rovnováhy.

$$\sum_{i=1}^5 P_{ix} = A \cdot \cos \alpha_A + B \cdot \cos \alpha_B + C \cdot \cos \alpha_C + Q \cdot \cos \alpha_O + P \cdot \cos \alpha_P = 0 \quad (1)$$

po dosadení a úprave dostávame prvú rovnicu

$$A \cdot 0,8575 - C \cdot 0,5145 = 0$$

$$\sum_{i=1}^5 P_{iy} = A \cdot \sin \alpha_A + B \cdot \sin \alpha_B + C \cdot \sin \alpha_C + Q \cdot \sin \alpha_O + P \cdot \sin \alpha_P = 0 \quad (2)$$

po dosadení a úprave dostávame druhú rovnicu

$$A \cdot 0,5145 + B + C \cdot 0,8575 = Q + P$$

$$\sum_{i=1}^5 M_{i0} = \sum_{i=1}^5 P_{ix} y_i - \sum_{i=1}^5 P_{iy} x_i = A \cdot \cos \alpha_A y_A - A \cdot \sin \alpha_A x_A +$$

$$+ B \cdot \cos 90^\circ y_B - B \cdot \sin 90^\circ x_B + C \cdot \cos (90^\circ + \alpha) y_C -$$

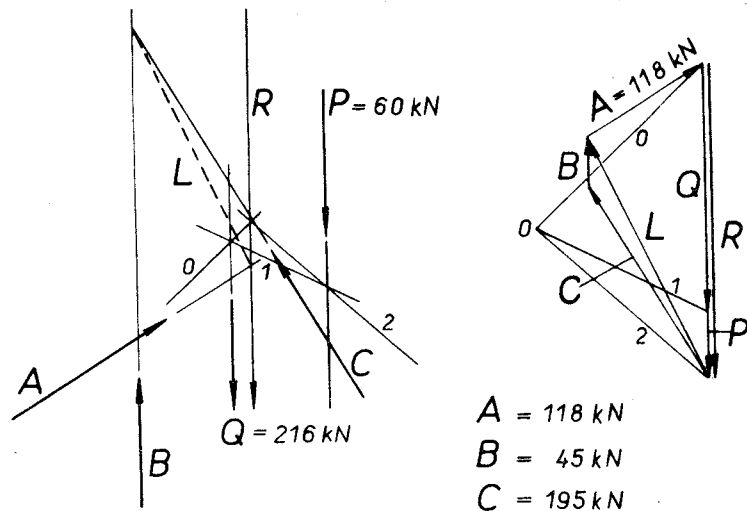
$$- C \cdot \sin (90^\circ + \alpha) x_C + Q \cdot \cos 270^\circ y_Q -$$

$$- Q \cdot \sin 270^\circ x_Q + P \cdot \cos 270^\circ y_P -$$

$$- P \cdot \sin 270^\circ x_P = 0,0 \quad (3)$$

po dosadení a úprave

$$A \cdot 0,6365 - B \cdot 1,029 - C \cdot 4,387 = -(2,658 Q + 4,229 P)$$



Obr. 1.2-2c.

6. Riešenie rovníc: z rovnice 1 určíme A a dosadíme do rovníc 2 a 3, z ktorých vypočítame C a B .

Výsledné hodnoty v závislosti od P a Q sú nasledovné:

$$A = 0,348 Q + 0,669 P = 115,3 \text{ kN}$$

$$B = 0,322 Q - 0,358 P = 48,1 \text{ kN}$$

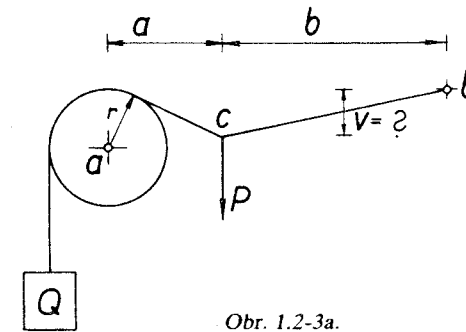
$$C = 0,581 Q + 1,164 P = 195,3 \text{ kN}$$

7. Výsledky sú skontrolované v obr. 1.2-2c.

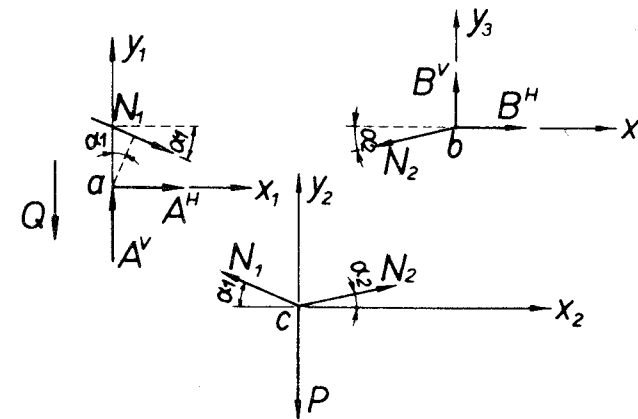
Príklad 1.2-3:

Na voľnom konci lana, ktoré je preložené cez kladku a druhým koncom kĺbovo upevnené, je zavesené bremeno $Q = 10 \text{ kN}$. Medzi kladkou a kĺbom je na lane zavesené bremeno $P = 6 \text{ kN}$, ako vidieť na obrázku. Je potrebné určiť:

- veľkosť síl pôsobiach v lane,
- poklesnutie pôsobiska sily P pri zanedbaní tiaže lana a trenia kladky,
- veľkosť síl v podperách.



Obr. 1.2-3a.



Obr. 1.2-3b.

1. Statická určitost: Riešená sústava sa skladá z jedného telesa a jedného hmotného bodu (pôsobisko sily P), ktoré sú navzájom spojené ohybným tuhým vláknom. Preto $n=1$, $m=1$, $p=2$, $k=1$, $v=0$. $S=3 \times 1 + 2 \times 1 - 2 \times 1 - 1 \times 2 - 0 \times 3 = 1$.

Sústava má jeden stupeň voľnosti, ktorý spočíva v možnosti otáčania kladky okolo jej kĺbového upevnenia. Úloha ako statická dá sa riešiť za predpokladu rovnovážneho stavu kladky. Hmotný bod je potom upevnený dvoma vláknami a jeho stupeň voľnosti sa rovná nule.

2. *Nahradenie účinku väzieb*: Kladka je upevnená kĺbovou väzbou rušiacou dva stupne voľnosti, preto v osi kĺba a necháme pôsobiť dve sily A^V a A^H , t. j. zvisle a vodorovne. Koniec lana je tiež kĺbovo upevnený, preto v ňom necháme pôsobiť zvisle a vodorovne reakcie B^V a B^H . Tieto sily predstavujú vonkajšie reakcie. Osová sila N_1 pôsobí v lane medzi kladkou a silou P . Medzi silou P a kĺbom b pôsobí sila N_2 . Obe sú vnútornými reakciami a predpokladáme, že pôsobia ako ťahové. Vzniknutá silová sústava je zrejماً z obr. 1.2-3b.

3. *Voľba súradnicového systému*: Celá silová sústava sa dá výhodne rozložiť na tri menšie sústavy, preto si pre riešenie úlohy zvolíme tri samostatné súradnicové systémy. Prvý (x_1, y_1) bude mať začiatok v osi kĺba kladky, druhý (x_2, y_2) v bode pôsobenia sily P a tretí v podpere b . Všetky osi X budú vodorovné.

4. *Určenie veľkostí, smerov a pôsobísk síl*: Vzhľadom na voľbu súradnicových systémov nepotrebujeme určovať veľkosti prvotných síl, ale len ich smery. Potrebujeme určiť smery síl N_1 a N_2 , t. j. uhly α_1 a α_2 . Z obrázka vyplýva, že

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{v}{a}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{v}{b}$$

Rozdielne znamienka vyplývajú zo zvolenej súradnicovej sústavy. Dosadením do známych trigonometrických vzťahov dostaneme:

$$\sin \alpha_1 = \frac{-v}{\sqrt{a^2 + v^2}}, \quad \cos \alpha_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + v^2}}$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{v}{\sqrt{b^2 + v^2}}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{b}{\sqrt{b^2 + v^2}}$$

Smery vonkajších síl

$$\alpha_{A^V} = 90^\circ, \quad \alpha_{A^H} = 0^\circ, \quad \alpha_O = 270^\circ = \alpha_P,$$

$$\alpha_{B^V} = 90^\circ, \quad \alpha_{B^H} = 0^\circ$$

Smery sily N_1

$$\text{v bode } \alpha_{N_1} = \alpha_1, \quad \text{v bode } c \quad \alpha_{N_1} = 180^\circ - \alpha_1$$

Smer sily N_2

$$\text{v bode } c \quad \alpha_{N_2} = \alpha_2, \quad \text{v bode } b \quad \alpha_{N_2} = 180^\circ + \alpha_2$$

Pôsobiská musíme určovať len v súradnicovej sústave (X_1, Y_1) pre sily N_1 a Q :

$$x_O = -r, \quad y_O = 0, \quad x_{N_1} = -r \cdot \sin \alpha_1, \quad y_{N_1} = r \cdot \cos \alpha_1$$

5. *Zostavenie podmienok rovnováhy*:

Podmienky rovnováhy síl súradnicovej sústavy

a) *v bode a*

$$\sum_{i=1}^4 P_{ix} = A^V \cdot \cos \alpha_{A^V} + A^H \cdot \cos \alpha_{A^H} + Q \cdot \cos \alpha_O + N_1 \cdot \sin \alpha_{N_1} = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^4 P_{iy} = A^V \cdot \sin \alpha_{A^V} + A^H \cdot \sin \alpha_{A^H} + Q \cdot \sin \alpha_O + N_1 \cdot \sin \alpha_{N_1} = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 M_{ai} &= \sum_{i=1}^4 P_i \cdot \cos \alpha_i y_i - \sum_{i=1}^4 P_i \cdot \sin \alpha_i x_i = \\ &= A^V \cdot \cos \alpha_{A^V} 0 - A^V \cdot \sin \alpha_{A^V} 0 + A^H \cdot \cos \alpha_{A^H} 0 - \\ &- A^H \cdot \sin \alpha_{A^H} 0 + Q \cdot \cos \alpha_O 0 - Q \cdot \sin \alpha_O (-r) + \\ &+ N_1 \cdot \cos \alpha_{N_1} r \cdot \cos \alpha_{N_1} - N_1 \cdot \sin \alpha_{N_1} (-r) \sin \alpha_{N_1} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

po úprave a dosadení z rovníc 1, 2, 3 dostaneme

$$A^H + N_1 \frac{a}{\sqrt{a^2 + v^2}} = 0$$

$$A^V - Q + N_1 \frac{-v}{\sqrt{a^2 + v^2}} = 0$$

$$Q(-r) + N_1 \cdot r = 0$$

b) *v bode c*

$$\sum_{i=1}^3 P_{ix} = N_1 \cdot \cos \alpha_{N_1} + N_2 \cdot \cos \alpha_{N_2} + P \cdot \cos \alpha_P = 0 \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^3 P_{iy} = N_1 \cdot \sin \alpha_{N_1} + N_2 \cdot \sin \alpha_{N_2} + P \cdot \sin \alpha_P = 0 \quad (5)$$

po úprave a dosadení z rovníc 4, 5 dostaneme

$$-N_1 \frac{a}{\sqrt{a^2 + v^2}} + N_2 \frac{b}{\sqrt{b^2 + v^2}} = 0$$

$$N_1 \frac{v}{\sqrt{a^2 + v^2}} + N_2 \frac{v}{\sqrt{b^2 + v^2}} = P$$

c) *v bode b*

$$\sum_{i=1}^3 P_{ix} = N_2 \cdot \cos \alpha_{N_2} + B^V \cdot \cos \alpha_{B^V} + B^H \cdot \cos \alpha_{B^H} = 0 \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^3 P_{iy} = N_2 \cdot \sin \alpha_{N_2} + B^V \cdot \sin \alpha_{B^V} + B^H \cdot \sin \alpha_{B^H} = 0 \quad (7)$$

po úprave a dosadení z rovníc 6, 7 dostaneme

$$-N_2 \frac{b}{\sqrt{b^2+v^2}} + B^H = 0$$

$$-N_2 \frac{v}{\sqrt{b^2+v^2}} + B^V = 0$$

6. *Riešenie rovníc.* Najprv z rovnice 3 určíme hodnotu $N_1 = Q$.

Dosadením do rovníc 4 a 5 a ich riešením pre N_2 a v dostaneme výrazy pre

$$N_2 = Q \sqrt{1 + \frac{P^2(a^2 - b^2)}{Q^2(a+b)^2}}$$

$$v = \frac{a \cdot b \cdot P}{\sqrt{Q^2(a+b)^2 - b^2 \cdot P^2}}$$

po dosadení za v z rovnice 1 dostaneme

$$A^H = -Q \sqrt{1 + \frac{-b^2 \cdot P^2}{(a+b)^2 Q^2}}$$

z rovnice 2

$$A^V = Q \left(1 + \frac{b \cdot P}{Q(a+b)} \right)$$

z rovníc 6 a 7

$$B^H = Q \sqrt{1 + \frac{-b^2 \cdot P^2}{(a+b)^2 Q^2}}$$

$$B^V = P \frac{a}{a+b}$$

Ak dosadíme do vzorcov zadané hodnoty, dostaneme

$$N_1 = 10 \text{ kN}, v = 0,873 \text{ m}, N_2 = 9,381 \text{ kN}$$

$$A^H = -B^H = 9,165 \text{ kN}, A^V = 14 \text{ kN}, B^V = 2 \text{ kN}$$

7. *Výpočty prekontrolujeme* použitím silových podmienok pre celú sústavu.

$$\sum_{i=1}^4 P_{iy} = A^V + B^V - Q - P = 0$$

$$Q \left(1 + \frac{b}{Q(a+b)} P \right) + \frac{a}{a+b} P - Q - P = 0$$

Riešenie je správne.

$$\sum_{i=1}^2 P_{ix} = A^H + B^H = 0$$

$$0 = -Q \sqrt{1 + \frac{-b^2 \cdot P^2}{(a+b)^2 Q^2}} + Q \sqrt{1 + \frac{-b^2 \cdot P^2}{(a+b)^2 Q^2}}$$

Príklad 1.2-4:

Prefabrikovaný stĺp štvorcového prierezu dĺžky $2l = 6 \text{ m}$ a tiaže $Q = 20 \text{ kN}$ je zavesený na dvoch lanách rovnakej dĺžky $l_0 = 5 \text{ m}$. Vo vzdialenosti $a = 1 \text{ m}$ od ľavého konca stojí montážnik s montážnym náradím celkovej tiaže $P = 1 \text{ kN}$. Treba určiť uhol α , ktorý zvierá prefabrikát s vodorovnou rovinou a sily v lanách.

1. *Statická určitosť.* Riešená sústava sa skladá z jedného telesa, ktoré je upevnené dvoma jednoduchými podperami — ohybnými tuhými vláknami. Potom $n = 1, m = 0, p = 2, k = v = 0, S = 3 \times 1 + 2 \times 0 - 2 \times 1 - 0 \times 2 - 0 \times 3 = 1$.

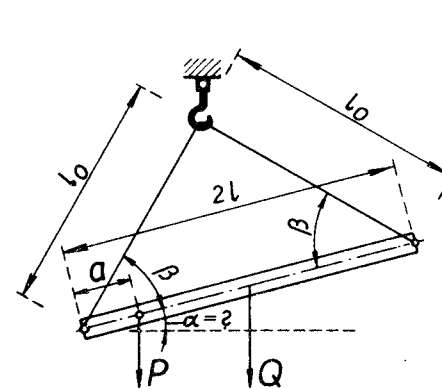
Sústava má jeden stupeň voľnosti, ktorý spočíva v možnosti pootáčania sa sústavy okolo závesu — priesečníka lán. Úloha sa dá riešiť za predpokladu, že napriek stupňu voľnosti je splnená podmienka rovnováhy.

2. *Nahradenie účinku väzieb na teleso:* Na koncoch prefabrikátu necháme namiesto závesov pôsobiť v smere ich osí sily A (na ľavej strane) a B .

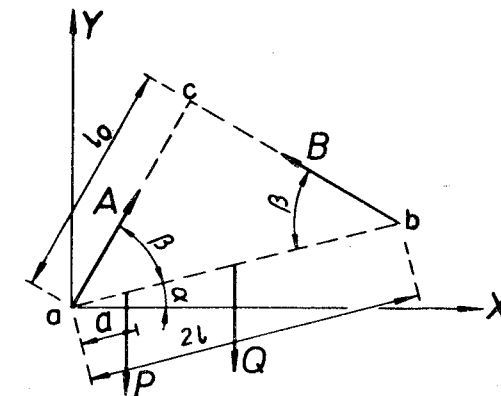
3. *Začiatok súradnicového systému* zvolíme v pôsobisku reakcie A s tým, že os X bude vodorovná.

4. *Výpočet smerov a pôsobísk síl:* Najprv musíme z daných vzdialeností určiť

funkcie uhla β . Priamo môžeme určiť funkciu $\cos \beta = \frac{l}{l_0}$ potom $\sin \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{l}{l_0}\right)^2}$.



Obr. 1.2-4a.



Obr. 1.2-4b.

Smery síl budú nasledovné:

$$\alpha_A = \alpha + \beta, \quad \alpha_P = \alpha_O = 270^\circ$$

$$\alpha_B = 180^\circ - (\beta - \alpha)$$

Súradnice pôsobísk síl: $x_A = 0, y_A = 0, x_P = a \cdot \cos \alpha, y_P = a \cdot \sin \alpha, x_O = l \cdot \cos \alpha, y_O = l \cdot \sin \alpha, x_B = 2l \cdot \cos \alpha, y_B = 2l \cdot \sin \alpha$.

Priesečník síl A a B: $x_c = l_0 \cdot \cos (\alpha + \beta), y_c = l_0 \cdot \sin (\alpha + \beta)$.

5. Zostavenie podmienok rovnováhy: Vzhľadom na rozloženie síl bude najvhodnejšie postaviť dve momentové podmienky rovnováhy k bodom a a c a jednu silovú podmienku v smere osi X.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 M_{ai} &= \sum_{i=1}^4 P_i \cdot \sin \alpha_i (x_a - x_i) - \sum_{i=1}^4 P_i \cdot \cos \alpha_i (y_a - y_i) = \\ &= A \cdot \sin \alpha_A (x_a - x_A) - A \cdot \cos \alpha_A (y_a - y_A) + P \cdot \sin \alpha_P (x_a - x_P) - \\ &\quad - P \cdot \cos \alpha_P (y_a - y_P) + Q \cdot \sin \alpha_O (x_a - x_O) - Q \cdot \cos \alpha_O (y_a - y_O) + \\ &\quad + B \cdot \sin \alpha_B (x_a - x_B) - B \cdot \cos \alpha_B (y_a - y_B) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

po dosadení a úprave

$$\begin{aligned} (P \cdot a + Q \cdot l) \cos \alpha - 2l \cdot B \cdot \sin \alpha &= 0 \\ \sum_{i=1}^4 M_{ci} &= A \cdot \sin \alpha_A (x_c - x_A) - A \cdot \cos \alpha_A (y_c - y_A) + \\ &\quad + P \cdot \sin \alpha_P (x_c - x_P) - P \cdot \cos \alpha_P (y_c - y_P) + \\ &\quad + Q \cdot \sin \alpha_O (x_c - x_O) - Q \cdot \cos \alpha_O (y_c - y_O) + \\ &\quad + B \cdot \sin \alpha_B (x_c - x_B) - B \cdot \cos \alpha_B (y_c - y_B) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

po dosadení a úprave

$$-P[l_0 \cdot \cos (\beta + \alpha) - a \cdot \cos \alpha] - Q[l_0 \cdot \cos (\beta + \alpha) - l \cdot \cos \alpha] = 0$$

$$\sum_{i=1}^2 P_{ix} = A \cdot \cos (\beta + \alpha) - B \cdot \cos (\beta - \alpha) = 0 \quad (3)$$

$$A \cdot \cos (\beta + \alpha) - B (\beta - \alpha) = 0$$

6. Riešenie rovníc:

Dosadením do rovnice 2 za $\cos (\beta + \alpha) = \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha$ za $l_0 = \frac{l}{\cos \beta}$, ak vydelíme celú rovnicu $\cos \alpha \sin \beta$ a osamostatníme $\operatorname{tg} \alpha$, dostaneme

výraz na určenie sklonu

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P(l-a)}{(P+Q)\sqrt{l_0^2-l^2}} = 0,023\ 8095$$

Dosadením do rovnice 1 z rovnice 2

$$(P \cdot a + Q \cdot l) \cos \alpha = l_0 \cdot \cos (\beta + \alpha) (P + Q)$$

a za

$$l_0 = \frac{l}{\cos \beta}$$

$$B = (P + Q) \frac{\cos (\beta + \alpha)}{\sin 2\beta} = 17,182 \text{ kN}$$

z rovnice 3

$$A = (P + Q) \frac{\cos (\beta - \alpha)}{\sin 2\beta} = 17,808 \text{ kN}$$

Dosadením do rovníc 1, 2, 3 dostaneme všeobecné výrazy bez uhlov. Za $\sin 2\beta = 2 \frac{l}{l_0^2} \sqrt{l_0^2 - l^2}$ a $\cos (\beta + \alpha) = \frac{(P \cdot a + Q \cdot l) \cos \alpha}{l_0(P + Q)}$

$$B = \frac{(P + Q) l_0 (Q \cdot l + P \cdot a)}{2l \sqrt{(P + Q)^2 (l_0^2 - l^2) + P^2 (l - a)^2}}$$

$$A = \frac{(P + Q) l_0 [(2P + Q)l - P \cdot a]}{2l \sqrt{(P + Q)^2 (l_0^2 - l^2) + P^2 (l - a)^2}}$$

7. Kontrola správnosti riešenia: Na tento účel použijeme podmienku rovnováhy zvislých síl.

$$A \cdot \sin (\beta + \alpha) + B \cdot \sin (\beta - \alpha) = P + Q$$

po dosadení a úprave

$$(P + Q) \frac{1}{\sin 2\beta} \sin [(\beta + \alpha) + (\beta - \alpha)] = P + Q$$

a číselné vyjadrenie

$$10,634 + 10,343 = 21$$

$$20,977 \doteq 21$$

Kontrolou sa zistil rozdiel 0,023, čo predstavuje chybu 0,11 %, je to menšia chyba ako prípustná.

Poznámka: Na určenie A musíme vyjadriť $\cos (\beta - \alpha)$ v závislosti od $\cos (\beta + \alpha)$. Po sčítaní ľavých a pravých strán rovníc týchto výrazov dostaneme

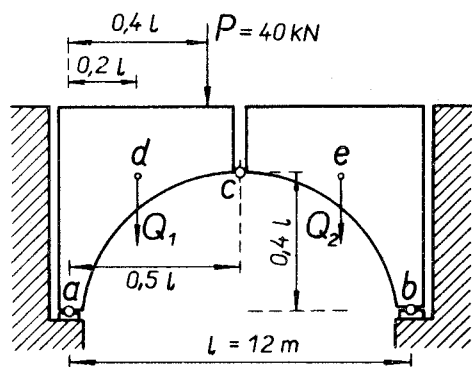
$$\cos (\beta - \alpha) = 2 \cos \alpha \cos \beta - \cos (\beta + \alpha)$$

Príklad 1.2-5:

Mostová konštrukcia, ktorá sa skladá z dvoch tvarove rovnakých častí, je k základom aj medzi nimi kĺbovo spojená. Zatažená je bremenom $P = 40 \text{ kN}$ a vlastnou tiažou veľkosti $Q = 100 \text{ kN}$ pre jednu časť. Pôsobisko tiaže zadané bodmi d a e je vyznačené na obrázku. Treba určiť sily vo vnútorných aj vonkajších väzbách.

1. V úlohe ide o zistenie rovnováhy dvoch dosák viazaných tromi kĺbmi, z ktorých jeden predstavuje vnútornú väzbu. Vzhľadom na to $n = 2$, $m = 0$, $p = v = 0$, $k = 3$; potom $S = 2 \times 3 + 0 \times 2 - 0 \times 1 - 3 \times 2 - 0 \times 3 = 0$.

Úloha je staticky určitá.



Obr. 1.2-5a.

2. Vo vonkajších väzbách, t. j. v bodoch a a b necháme na teleso pôsobiť zvislé (A^V , B^V) a vodorovné (A^H , B^H) sily, ako je to vyznačené v silovom obrázku. V bode c je vnútorná väzba, ktorá pôsobí na obe dosky, preto v nej musíme nechať pôsobiť zvislú zložku C^V aj vodorovnú zložku C^H na ľavú i pravú časť, pričom smery týchto síl sú rozdielne o 180° . Sústava síl vo vnútornej väzbe tvorí rovnovážnu silovú sústavu.

3. **Voľba súradnicového systému:** Za začiatok súradnicovej sústavy si zvolíme podperový bod a s vodorovnou osou X .

4. **Určenie smerov a pôsobísk síl:**

a) smery síl

$$\alpha_{A^V} = \alpha_{B^V} = \alpha_{C^V} = 90^\circ \quad \alpha_{A^H} = \alpha_{C^H} = 0$$

$$\alpha_{B^H} = \alpha_{C^H} = 180^\circ$$

$$\alpha_P = \alpha_Q = \alpha_{C^V} = 270^\circ$$

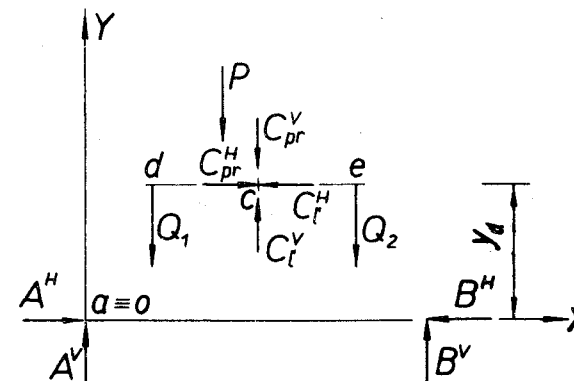
b) súradnice pôsobísk — okrem vodorovných síl netreba určovať súradnice Y .

$$x_{A^V} = x_{A^H} = y_{B^V} = 0, \quad x_{B^V} = x_{B^H} = l$$

$$y_{B^H} = 0, \quad x_{Q_d} = 0,2l, \quad x_{Q_e} = 0,8l, \quad x_P = 0,4l$$

$$x_{C^V} = x_{C^H} = 0,5l, \quad y_{C^H} = 0,4l = y_{C^V}.$$

5. **Zostavenie podmienok rovnováhy:** Pretože ide o zloženú sústavu dvoch telies, môžeme písať podmienky rovnováhy pre sústavu ako celok, potom vplyv vnútorných väzbových síl vzhľadom na ich smery a veľkosti bude nulový. Na určenie štyroch neznámych vonkajších reakcií potrebujeme štyri podmienky rovnováhy. Najskôr napíšeme momentové podmienky k podperovým bodom a a b .



Obr. 1.2-5b.

Ďalšie dve rovnice dostaneme momentovými podmienkami rovnováhy každej dosky samostatne, ale vždy k bodu c ako pôsobisku vnútorných reakcií. Na určenie vnútorných reakcií použijeme silové podmienky rovnováhy pre jednu alebo druhú dosku. Na zjednodušenie výrazov vynecháme v momentových podmienkach účinnok tých síl, ktoré majú nulový účinok. (Prechádzajú bodmi, ku ktorým píšeme momentovú podmienku.)

$$\sum_{i=1}^4 M_{ai} = Q_1 \cdot \sin 270^\circ (0 - 0,2l) + P \cdot \sin 270^\circ (0 - 0,4l) +$$

$$+ Q_2 \cdot \sin 270^\circ (0 - 0,8l) + B^V \sin 90^\circ (0 - l) = 0 \quad (1)$$

po úprave rovnice (1)

$$Q_1 \cdot 0,2l + P \cdot 0,4l + Q_2 \cdot 0,8l - B^V \cdot l = 0$$

$$\sum_{i=1}^4 M_{bi} = A^V \cdot \sin 90^\circ (l - 0) + Q_1 \cdot \sin 270^\circ (l - 0,2l) +$$

$$+ P \cdot \sin 270^\circ (l - 0,4l) + Q_2 \cdot \sin 270^\circ (l - 0,8l) = 0 \quad (2)$$

po úprave rovnice (2)

$$A^V l - Q_1 \cdot 0,8l - P \cdot 0,6l - Q_2 \cdot 0,2l = 0$$

$$\sum_{i=1}^4 M_{ci}^{td} = A^V \cdot \sin 90^\circ (0,5l - 0) - A^H \cdot \cos 0^\circ (0,4l - 0) +$$

$$+ Q_1 \cdot \sin 270^\circ (0,5l - 0,2l) + P \cdot \sin 270^\circ (0,5 - 0,4)l = 0 \quad (3)$$

po úprave rovnice (3)

$$A^V \cdot 0,5l - A^H \cdot 0,4l - Q_1 \cdot 0,3l - P \cdot 0,1l = 0$$

$$\sum_{i=1}^3 M_{ci}^{pr} = Q_2 \cdot \sin 270^\circ (0,5l - 0,8l) + B^V \cdot \sin 90^\circ (0,5l - l) +$$

$$+ B^H \cdot \cos 180^\circ (0,4l - 0) = 0 \quad (4)$$

po úprave rovnice (4)

$$Q_2 \cdot 0,3l - B^V \cdot 0,5l + B^H \cdot 0,4l = 0$$

$$\sum_{i=1}^6 P_{ix}^{td} = A^V \cdot \cos 90^\circ + A^H \cdot \cos 0^\circ + Q_1 \cdot \cos 270^\circ + P \cdot \cos 270^\circ +$$

$$+ C^V \cdot \cos 90^\circ + C^H \cdot \cos 180^\circ = 0 \quad (5)$$

po úprave rovnice (5)

$$A^H - C^H = 0$$

$$\sum_{i=1}^6 P_{iy}^{td} = A^V \cdot \sin 90^\circ + A^H \cdot \sin 0^\circ + Q_1 \cdot \sin 270^\circ + P \cdot \sin 270^\circ +$$

$$+ C^V \cdot \sin 90^\circ + C^H \cdot \sin 180^\circ = 0 \quad (6)$$

po úprave rovnice (6)

$$A^V - Q_1 - P + C^V = 0$$

6. Riešenie:

z rovnice (1) $B^V = Q + 0,4P$

z rovnice (2) $A^V = Q + 0,6P$

z rovnice (3) po dosadení za A^V , $A^H = 0,5(Q + P)$

z rovnice (4) $B^H = 0,5(Q + P)$

z rovnice (5) po dosadení za A^H , $C^H = 0,5(Q + P)$

z rovnice (6) po dosadení za A^V , $C^V = 0,4P$

7. Kontrola správnosti riešenia.

Na kontrolu môžeme použiť nevyužitú podmienku rovnováhy pri sústave ako celku, ako aj rovnovážne silové podmienky pre pravú dosku:

a) $A^H - B^H = 0$ po dosadení $0 = 0$

b) $A^V + B^V - Q_c - Q_d - P = 0$ po dosadení $0 = 0$

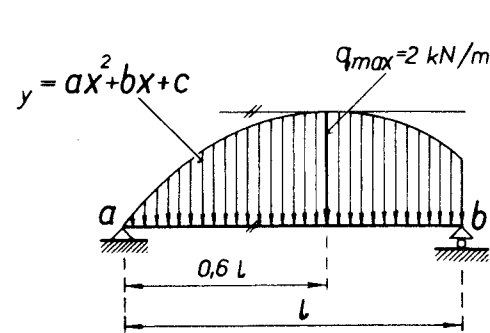
c) $C^H - B^H = 0$ po dosadení $0 = 0$

d) $B^V - Q_c - C^V = 0$ po dosadení $0 = 0$

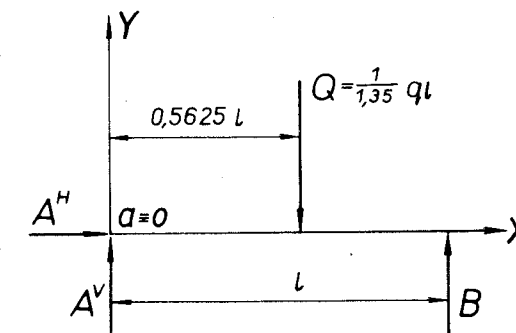
Úloha je vyriešená správne.

Príklad 1.2-6:

Na priamy nosník rozpätia $l = 6$ m, podopretie je znázornené na obrázku, pôsobí zvislé spojité zaťaženie, ktorého intenzita sa mení po dĺžke osi nosníka podľa zákona paraboly druhého stupňa s $q_{\max} = 2$ kN/m vo vzdialenosti $0,6l$ od ľavej podpery. Treba určiť veľkosť podperových reakcií nosníka. Nosník vzhľadom na malé priečne rozmery oproti dĺžke nahradíme ťažiskovou osou.



Obr. 1.2-6a.



Obr. 1.2-6b.

1. Nosník ako tuhá doska v rovine je upevnený jednou kĺbovou a posuvnou podperou. Preto $n = 1$, $m = v = 0$, $p = 1$, $k = 1$ a $S = 1 \times 3 + 0 \times 2 - 1 \times 1 - 1 \times 2 - 0 \times 3 = 0$.

Úloha je staticky určitá.

2. Účinok ľavej podpery nahradíme zvislou a vodorovnou silou A^V a A^H . V pravej podpore necháme pôsobiť silu kolmú na smer posuvu, t. j. kolmú na pozdĺžnu os nosníka.

3. Začiatok súradnicového systému zvolíme v podperovom bode a a os x bude totožná s pozdĺžnou osou nosníka.

4. Určenie smeru, veľkosti a pôsobiska sily:

a) smery: spojité zaťaženie má v každom bode zvislý smer, a preto aj náhradné bremeno bude zvislé $\alpha_{A^V} = 90^\circ = \alpha_B$, $\alpha_{A^H} = 0^\circ$, $\alpha_Q = 270^\circ$.

b) pôsobiská síl:

$$x_{A^V} = x_{A^H} = 0, \quad x_B = l$$

Súradnice y nepočítame, pretože nie sú potrebné. Pôsobisko náhradnej sily za spojité zaťaženie, ako aj jej veľkosť určíme zo vzťahov uvedených v predchádzajúcom texte. Najskôr určíme rovnicu — funkciu premenlivosti intenzity spojitého zaťaženia. Vychádzame pritom zo všeobecnej rovnice paraboly druhého stupňa a zo skutočnosti, že takáto parabola musí byť zadaná buď tromi alebo dvoma bodmi a ďalším údajom, obvykle prvou deriváciou, čo platí aj o príklade 1.2-6. Na určenie paraboly máme zadané tieto údaje: pre $x = 0$, $q_y = 0$; pre $x = 0,6l$, $q_y = 2 \text{ kN/m}$, $q'_y = 0$. Uvedené údaje dosadíme do rovnice

$$q_y = ax^2 + bx + c$$

a na určenie neznámych a , b , c dostaneme tri rovnice

$$0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$q = a(0,6l)^2 + b \cdot 0,6l + c$$

$$0 = 2a \cdot 0,6l + b(q'_y = 2ax + b)$$

Vyriešením rovníc a dosadením do všeobecného výrazu dostaneme vzťah

$$q_y = \frac{q}{0,3l} \left(x - \frac{x^2}{1,2l} \right)$$

potom veľkosť náhradného bremena bude

$$Q = \int_0^l q_y dx = \frac{q}{0,3l} \int_0^l \left(x - \frac{x^2}{1,2l} \right) dx = \frac{1}{1,35} ql = 8,8 \text{ kN}$$

Poloha — pôsobisko náhradného bremena

$$x_O = \frac{\int_0^l q_y x dx}{\int_0^l q_y dx}, \quad \int_0^l q_y x dx = \frac{q}{0,3l} \int_0^l \left(x - \frac{x^2}{1,2l} \right) x dx = \frac{1}{2,4} ql^2$$

po dosadení do zlomku

$$x_O = \frac{1,35}{2,4} l = 0,5625l = 3,375 \text{ m}$$

5. Zostavenie podmienok rovnováhy: Na výpočet reakcií použijeme dve momentové podmienky rovnováhy, a to k priesečníkom síl A^H s A^V a A^H s B .

Pretože A^V je rovnobežná s tretou podmienkou rovnováhy B , bude P_{ix} silová podmienka v smere X .

$$\sum_{i=1}^4 P_{ix} = A^H \cdot \cos 90^\circ + A^H \cdot \cos 0^\circ + Q \cdot \cos 270^\circ + B \cdot \cos 90^\circ = 0 \quad (1)$$

Po úprave rovnice (1) $A^H = 0$

$$\sum_{i=1}^3 M_{ai} = A^V \cdot \sin 90^\circ (0 - 0) + Q \cdot \sin 270^\circ (0 - 0,5625l) + B \cdot \sin 90^\circ (0 - l) = 0 \quad (2)$$

po úprave a dosadení rovnice (2)

$$0,5625l \cdot Q - B \cdot l = 0$$

$$\sum_{i=1}^3 M_{bi} = A^V \cdot \sin 90^\circ (l - 0) + Q \cdot \sin 270^\circ (l - 0,5625l) + B \cdot \sin 90^\circ (l - l) = 0 \quad (3)$$

po dosadení a úprave rovnice (3)

$$A^V \cdot l - 0,4375l \cdot Q = 0$$

6. Riešenie rovníc:

z rovnice (1) $A^H = 0$

z rovnice (2) $B = 0,5625Q = \frac{1}{2,4} ql = 5 \text{ kN}$

z rovnice (3) $A = 0,4375Q = \frac{1,05}{1,35} \cdot \frac{1}{2,4} ql = 3,888 \text{ kN}$

7. Kontrola výpočtu:

$$A + B - Q = 0$$

$$5,0 + 3,8 - 8,8 = 0$$

$$0 = 0$$

Úloha je vyriešená správne.

Príklad 1.2-7:

Nosník stáleho prierezu (ktorého rozmery sú oproti dĺžke malé) s pozdĺžnou lomenou osou (v rovine) je zaťažený sústavou bremien a spojitým rovnomerným zaťažením podľa obrázka. Treba určiť reakcie v podperách.

1. Nosník ľubovoľného tvaru predstavuje tuhú dosku v rovine, v našom

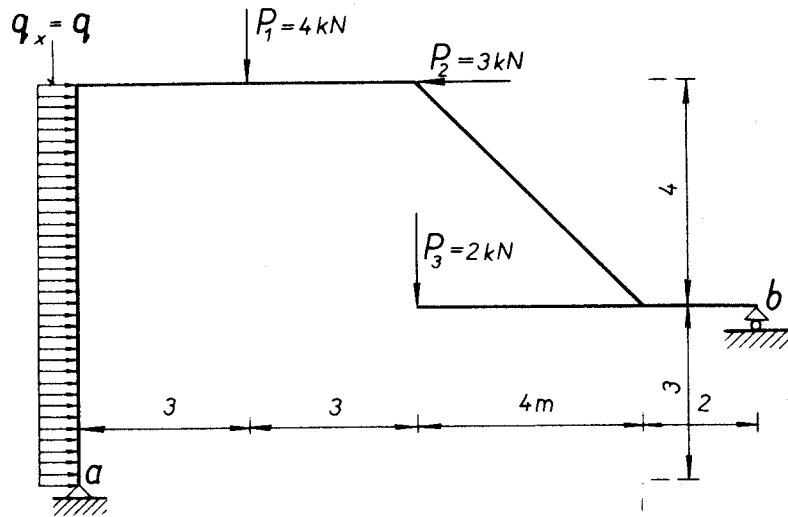
případe podpretú jednou kĺbovou a jednou posuvnou podperou. Potom $n = 1$, $m = v = 0$, $p = 1$, $k = 1$, $S = 1 \times 3 + 0 \times 2 - 1 \times 1 - 1 \times 2 - 0 \times 3 = 0$.

Úloha je staticky určitá.

2. Účinok kĺbovej podpory na nosník nahradíme zvislou A^V a vodorovnou A^H reakciou. V posuvnom lôžku bude pôsobiť sila kolmá na smer posuvu, t. j. zvislá reakcia B .

3. V podperovom bode a si zvolíme začiatok súradnicového systému s vodorovnou osou X , ktorá v tomto prípade nie je totožná s osou nosníka X . Táto má v jednotlivých úsekoch rôznu polohu aj smer.

4. Výpočet smerov, pôsobísk síl a veľkosti náhradného bremena:



Obr. 1.2-7a.

a) smery síl: $\alpha_{A^V} = \alpha_B = 90^\circ$, $\alpha_{P_1} = \alpha_{P_3} = 270^\circ$, $\alpha_{P_2} = 180^\circ$, $\alpha_{A^H} = 0^\circ$. Smer Q bude totožný so smerom spojitého zaťaženia, t. j. vodorovný $\alpha_Q = 0^\circ$.

b) výpočet náhradného bremena: intenzita spojitého zaťaženia q je konštantná, a preto

$$Q_x = \int_0^h q_x dy = q \cdot h = 7 \text{ kN}$$

c) pôsobiská síl: Pôsobiská všetkých síl predpokladáme na pozdĺžnej osi nosníka. Preto musíme určiť rovnice úsekov osí a z nich po dosadení jednej určíme druhú súradnicu.

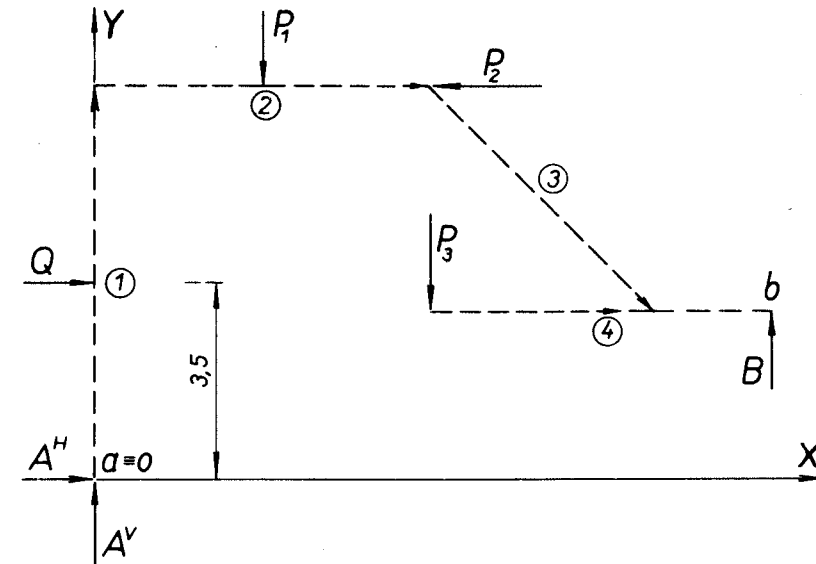
Prvý úsek osi má smer $\alpha_1 = 90^\circ$ a rovnica tohto úseku v zvolenej súradnicovej sústave je $x = 0$. Na tomto úseku pôsobí náhradné bremeno Q a reakcie A .

Z rovnice priamky vyplýva, že $x_O = 0$ a y_O musíme vypočítať podľa vzťahu uvedenom na str. 24.

$$y_O = \frac{\int_0^h q_x y dy}{\int_0^h q_x dy} = \frac{h}{2} = 3,5 \text{ m}$$

$$x_{A^V} = x_{A^H} = y_{A^V} = y_{A^H} = 0$$

Druhý úsek má smer $\alpha_2 = 0^\circ$ a rovnica tejto priamky $y = h$. Preto $y_{P_1} = y_{P_2} = h = 7 \text{ m}$ a súradnice X zistíme priamo zo zadania $x_{P_1} = 3 \text{ m}$, $x_{P_2} = 6 \text{ m}$.



Obr. 1.2-7b.

Tretia časť osi je šikmá, a preto jej smer určíme z rovnice priamky pre tento úsek

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

Po dosadení a úprave

$$y = -x + 13$$

potom $\text{tg } \alpha_3 = -1$, $\alpha_3 = -45^\circ$ alebo 315° . V tomto úseku nepôsobí nijaká sila. V poslednom úseku má os smer $\alpha_4 = 0^\circ$ a rovnica má tvar $y = h - 4 = 3$. Potom $x_{P_3} = 6 \text{ m}$, $y_{P_3} = 3 \text{ m}$, $x_B = 12 \text{ m}$, $y_B = 3 \text{ m}$.

5. Zostavenie podmienok rovnováhy:

Do všeobecnej rovnice nebudeme dosadzovať členy, ktoré dávajú nulovú hodnotu.

$$\sum_{i=1}^5 M_{ai} = -Q_x \cdot \cos 0^\circ (0 - y_O) + P_1 \cdot \sin 270^\circ (0 - x_{P_1}) - P_2 \cdot \cos 180^\circ (0 - y_{P_2}) + P_3 \cdot \sin 270^\circ (0 - x_{P_3}) + B \cdot \sin 90^\circ (0 - y_B) = 0 \quad (1)$$

po úprave a po dosadení do rovnice (1) dostaneme

$$3,5Q + 3P_1 - 7P_2 + 6P_3 - 12B = 0$$

$$27,5 - 12B = 0$$

$$\sum_{i=1}^6 M_{bi} = A^V \cdot \sin 90^\circ (x_B - x_{A^V}) - A^H \cdot \cos 0^\circ (y_B - y_{A^H}) - Q \cdot \cos 0^\circ (y_B - y_O) + P_1 \cdot \sin 270^\circ (x_B - x_{P_1}) - P_2 \cdot \cos 180^\circ (y_B - y_{P_2}) + P_3 \cdot \sin 270^\circ (x_B - x_{P_3}) = 0 \quad (2)$$

po úprave a dosadení do rovnice (2) dostaneme

$$12A^V - 3A^H + 0,5Q - 9P_1 - 4P_2 - 6P_3 = 0$$

$$-12A^V - 3A^H - 56,5 = 0$$

$$\sum_{i=1}^3 P_{ix} = A^H \cos 0^\circ + Q \cos 0^\circ + P_2 \cos 180^\circ = 0 \quad (3)$$

po dosadení do rovnice (3) dostaneme $A^H + 4 = 0$

6. Riešenie:

- z rovnice (3) $A^H = -4 \text{ kN}$
- z rovnice (2) $A^V = 3,7083 \text{ kN}$
- z rovnice (1) $B = 2,2916 \text{ kN}$

7. Kontrola výpočtu:

$$\sum_{i=1}^4 P_{iy} = A^V + B - P_1 - P_2 = 0$$

$$3,7083 + 2,2916 - 4 - 2 = 0$$

$$0 = 0$$

Úloha je vyriešená správne.

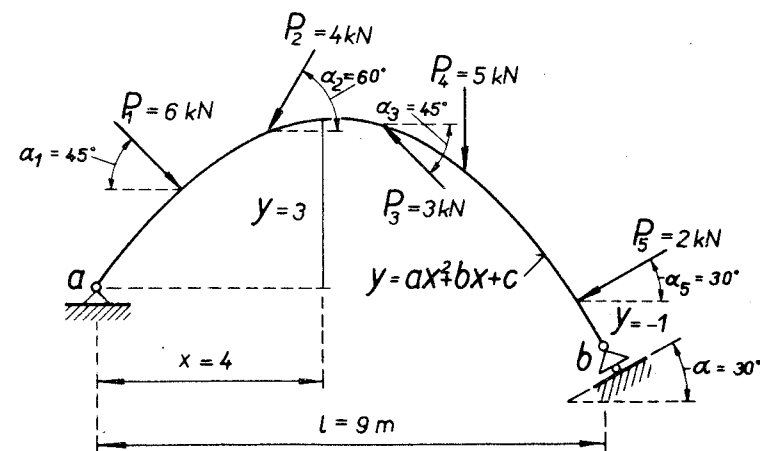
Príklad 1.2-8:

Na nosník so zakrivenou osou tvaru paraboly druhého stupňa pôsobí rovinná sústava síl podľa obrázka. Os leží v rovine sústavy síl a určujú ju tri body. Máme určiť veľkosť reakcií. Vlastnú tiaž prúta zanedbáme.

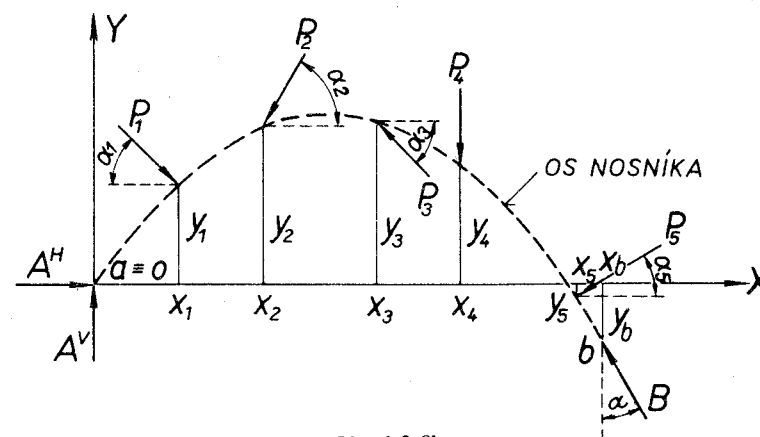
1. Nosič so zakrivenou osou považujeme za tuhú dosku v rovine, ktorá je upevnená jednou kĺbovou a jednou posuvnou podperou. Preto $n = 1$, $m = 0$, $p = 1$, $k = 1$, $v = 0$ a $S = 1 \times 3 + 0 \times 2 - 1 \times 1 - 1 \times 2 - 0 \times 3 = 0$.

Sústava je staticky určitá.

2. Väzbu v bode a nahradíme zvislou A^V a vodorovnou A^H reakciou. V bode b bude pôsobiť sila B kolmo na smer možného posuvu.



Obr. 1.2-8a.



Obr. 1.2-8b.

3. Začiatok súradnicovej sústavy zvolíme v bode a a os bude vodorovná.

4. Určenie smerov a pôsobísk síl:

a) smery síl:

$$\alpha_V = 90^\circ, \alpha_{A^H} = 0^\circ, \alpha_{P_1} = 360^\circ - \alpha_1, \alpha_{P_2} = 180^\circ + \alpha_2, \alpha_{P_3} = 180^\circ - \alpha_3, \alpha_{P_4} = 270^\circ, \alpha_{P_5} = 180^\circ + \alpha_5, \alpha_B = 90^\circ + \alpha$$

b) pôsobiská síl: Na to, aby sme mohli určiť pôsobiská síl, musíme určiť rovnicu osi prúta v zvolenej sústave. Na určenie súčiniteľov a, b, c všeobecnej rovnice paraboly dosadíme do nej súradnice troch určujúcich bodov

$$0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$-1 = a \cdot 9^2 + b \cdot 9 + c$$

$$3 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c$$

Riešením sústavy dostaneme $a = -0,172, b = 1,438, c = 0$, potom

$$y = -0,172x^2 + 1,438x$$

Vypočítané smery a súradnice pôsobísk sú v tab. 2.

Tabuľka 2

Symbol	A^V	A^H	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	B
x	0	0	1,5	3,0	5,0	6,5	8,5	9,0
y	0	0	1,7708	2,7667	2,8889	2,0764	-0,2126	-1,0
α	90°	0°	315°	240°	135°	270°	210°	120°

5. Zostavenie podmienok rovnováhy: K podperovým bodom použijeme dve momentové podmienky a súčtovú podmienku v smere osi X .

$$\sum_{i=1}^8 M_{ai} = A^V \cdot \sin 90^\circ (0-0) - A^V \cdot \cos 90^\circ (0-0) + A^H \cdot \sin 0^\circ (0-0) - A^H \cdot \cos 0^\circ (0-0) + P_1 \cdot \sin 315^\circ (0-1,5) - P_1 \cdot \cos 315^\circ (0-1,7708) + P_2 \cdot \sin 240^\circ (0-3,0) - P_2 \cdot \cos 240^\circ (0-2,7667) + P_3 \cdot \sin 135^\circ (0-5,0) - P_3 \cdot \cos 135^\circ (0-2,8889) + P_4 \cdot \sin 270^\circ (0-6,5) - P_4 \cdot \cos 270^\circ (0-2,0764) + P_5 \cdot \sin 210^\circ (0-8,5) - P_5 \cdot \cos 210^\circ [0 - (-0,2126)] + B \cdot \sin 120^\circ (0-9,0) - B \cdot \cos 120^\circ [0 - (-1)] = 0 \quad (1)$$

po dosadení a úprave rovnice (1)

$$43,3689 - 7,2942B = 0$$

$$\sum_{i=1}^8 M_{bi} = A^V \cdot \sin 90^\circ (9,0-0) - A^V \cdot \cos 90^\circ (-1-0) + A^H \cdot \sin 0^\circ (9,0-0) - A^H \cdot \cos 0^\circ (-1-0) + P_1 \cdot \sin 315^\circ (9,0-1,5) - P_1 \cdot \cos 315^\circ (-1-1,7708) + P_2 \cdot \sin 240^\circ (9,0-3,0) - P_2 \cdot \cos 240^\circ (-1-2,7667) + P_3 \cdot \sin 135^\circ (9,0-5,0) - P_3 \cdot \cos 135^\circ (-1-2,8889) + P_4 \cdot \sin 270^\circ (9,0-6,5) - P_4 \cdot \cos 270^\circ (-1-2,0764) + P_5 \cdot \sin 210^\circ (9,0-8,5) - P_5 \cdot \cos 210^\circ [-1 - (-0,2126)] + B \cdot \sin 120^\circ (9,0-9) - B \cdot \cos 120^\circ [-1 - (-1)] = 0 \quad (2)$$

po dosadení a úprave rovnice (2)

$$-62,5103 + 9A^V + A^H = 0$$

$$\sum_{i=1}^8 P_{ix} = A^V \cdot \cos 90^\circ + A^H \cdot \cos 0^\circ + P_1 \cdot \cos 315^\circ + P_2 \cdot \cos 240^\circ + P_3 \cdot \cos 135^\circ + P_4 \cdot \cos 270^\circ + P_5 \cdot \cos 210^\circ + B \cdot \cos 120^\circ = 0 \quad (3)$$

po dosadení a úprave rovnice (3)

$$A^H - 1,6107 - 0,5B = 0$$

6. *Riešenie:*

$$\text{z rovnice (1)} \quad B = 5,945$$

dosadením B do rovnice (3) dostaneme

$$A^H = 4,583$$

po dosadení do rovnice (2) vypočítame poslednú neznámu

$$A^V = 6,436$$

7. *Kontrola riešenia:*

$$\sum_{i=1}^8 P_{iy} = A^V \cdot \sin 90^\circ + A^H \cdot \sin 0^\circ + P_1 \cdot \sin 315^\circ + P_2 \cdot \sin 240^\circ + P_3 \cdot \sin 135^\circ + P_4 \cdot \sin 270^\circ + P_5 \cdot \sin 210^\circ + B \cdot \sin 120^\circ = 0$$

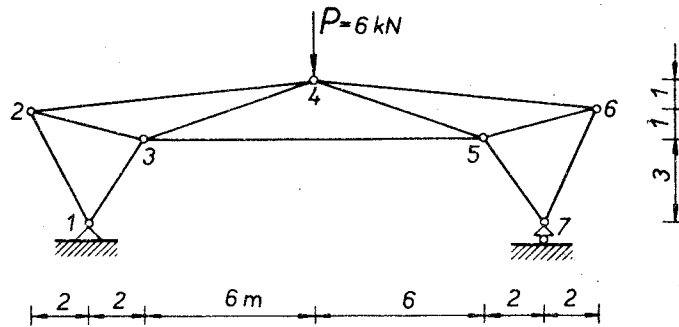
Po dosadení a úprave $13,707 - 13,707 = 0$

Úloha je vyriešená správne.

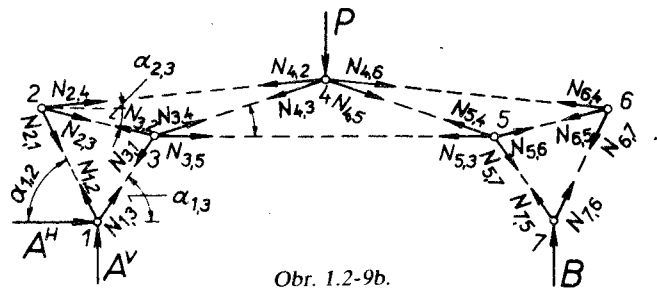
Príklad 1.2-9:

Nosník vytvorený sústavou prútov spojených v uzloch — styčníkoch kĺbove je zaťažený silou $P = 6 \text{ kN}$. Určte veľkosť síl vo vonkajších aj vnútorných väzbách. Rozmery a rozmiestnenie prútov sú zrejmé z obrázka.

1. *Posúdenie statickej určítosti:* Zadaný nosník je vytvorený sústavou kyvných prútov, pretože každý prút má obojstranne koncový kĺb a ani jeden nie je zaťažený. Preto v tomto prípade ide o sústavu konečného počtu hmotných bodov, ktoré sú vzájomne pospájané kyvnými prútmi a ako celok podopreté jednou kĺbovou a jednou posuvnou podperou. Potom $n = 0$, $m = 7$, $p = 11 + 1 = 12$, $k = 1$, $v = 0$, a $S = 0 \times 3 + 7 \times 2 - 12 \times 1 - 1 \times 2 - 0 \times 3 = 0$.



Obr. 1.2-9a.



Obr. 1.2-9b.

Úloha je staticky určitá. Neznámych väzbových síl je 14. Keď vylúčime vonkajšie väzby, vidíme, že sústava má 3 stupne voľnosti, a teda bez vonkajších väzieb nosník predstavuje tuhú dosku v rovine.

2. Každý kyvný prút pôsobí na dva hmotné body, preto jeho účinok musíme nahradit dvoma silami rovnakej veľkosti, ale rôzneho smeru. Rozdiel v smere je 180° a tieto dve sily tvoria nulový systém síl. Silu, ktorá pôsobí v prúte ik , kde i a k sú čísla uzlov, označíme ako N_{ik} , keď pôsobí v uzle i a N_{ki} , keď pôsobí v uzle k . Potom $N_{ik} - N_{ki} = 0$.

Vonkajšie väzby nahradíme v bode 1 jednou zvislou (A^V) a vodorovnou (A^H) reakciou a v bode 7 zvislou silou (B). Týmto spôsobom nám vznikne silová sústava, ktorá sa rozpadá na sedem centrálnych sústav, pôsobiacich na jednotlivé hmotné body.

3. Vzhľadom na predchádzajúcu vetu zvolíme si v každom uzle začiatok samostatných súradnicových sústav s vodorovnými osami X .

4. *Výpočet smerov a pôsobísk síl:*

a) smery: Z geometrie sústavy určíme pri každom prúte najprv $\text{tg } \alpha_{ik}$ a podľa známych trigonometrických vzťahov

$$\sin \alpha_{ik} = \frac{\text{tg } \alpha_{ik}}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha_{ik}}}$$

a

$$\cos \alpha_{ik} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha_{ik}}}$$

$\text{tg } \alpha_{1,2} = 2,$	$\sin \alpha_{1,2} = 0,447,$	$\cos \alpha_{1,2} = 0,894$
$\text{tg } \alpha_{1,3} = 1,5,$	$\sin \alpha_{1,3} = 0,832,$	$\cos \alpha_{1,3} = 0,555$
$\text{tg } \alpha_{2,3} = 0,25,$	$\sin \alpha_{2,3} = 0,242,$	$\cos \alpha_{2,3} = 0,970$
$\text{tg } \alpha_{2,4} = 0,1,$	$\sin \alpha_{2,4} = 0,0995,$	$\cos \alpha_{2,4} = 0,995$
$\text{tg } \alpha_{3,4} = 0,3,$	$\sin \alpha_{3,4} = 0,316,$	$\cos \alpha_{3,4} = 0,949$
$\text{tg } \alpha_{3,5} = 0,0,$	$\sin \alpha_{3,5} = 0,0,$	$\cos \alpha_{3,5} = 1,0$

Uhly ďalších prútov nebudeme určovať vzhľadom na symetriu konštrukcie, ale určíme smery síl.

$$\alpha_{A^V} = \alpha_B = 90^\circ \quad \alpha_{A^H} = 0^\circ \quad \alpha_P = 270^\circ$$

$$\alpha_{N_{1,2}} = 180^\circ - \alpha_{1,2}, \quad \alpha_{N_{5,2,1}} = 360^\circ - \alpha_{1,2}$$

$$\alpha_{N_{1,3}} = \alpha_{1,3}, \quad \alpha_{N_{3,1}} = 180^\circ + \alpha_{1,3}, \quad \alpha_{N_{2,4}} = \alpha_{2,4}$$

$$\alpha_{N_{4,2}} = 180^\circ + \alpha_{2,4}, \quad \alpha_{N_{3,4}} = \alpha_{3,4}, \quad \alpha_{N_{4,3}} = 180^\circ + \alpha_{3,4}$$

$$\alpha_{N_{3,5}} = \alpha_{3,5} = 0, \quad \alpha_{N_{5,3}} = 180^\circ, \quad \alpha_{N_{4,6}} = 360^\circ - \alpha_{2,4}$$

$$\alpha_{N_{4,5}} = 360^\circ - \alpha_{3,4}, \quad \alpha_{N_{2,3}} = 360^\circ - \alpha_{2,3}, \quad \alpha_{N_{3,2}} = 180^\circ - \alpha_{2,3}$$

b) *Pôsobiská síl:* Budeme ich určovať len pre vonkajšie sily, ostatné sily vo vnútorných väzbách tvoria centrálnu silovú sústavu

$$x_{A^V} = y_{A^V} = x_{A^H} = y_{A^H} = y_B = 0$$

$$x_B = l = 16 \text{ m}$$

$$x_P = 8 \text{ m}, \quad y_P = 5 \text{ m}$$

5. Zostavenie podmienok rovnováhy: Na určenie síl vo vonkajších väzbách použijeme momentové podmienky rovnováhy celej silovej sústavy k podperovým bodom a a b a súčet vodorovných síl. V týchto podmienkach sily vo vnútorných väzbách nebudú vystupovať, pretože tvoria vždy v každom prúte nulovú sústavu.

Na výpočet síl vo vnútorných väzbách použijeme silové podmienky rovnováhy vo vodorovnom aj zvislom smere, čiže budeme písať podmienky rovnováhy každého hmotného bodu osobitne.

$$\sum_{i=1}^4 M_{ai} = A^V \cdot \sin 90^\circ (0-0) - A^V \cdot \cos 90^\circ (0-0) + A^H \cdot \sin 0^\circ (0-0) - A^H \cdot \cos 0^\circ (0-0) + P \cdot \sin 270^\circ (0-8) - P \cdot \cos 270^\circ (0-5) + B \cdot \sin 90^\circ (0-l) - B \cdot \cos 90^\circ (0-0) = 0 \quad (1)$$

po úprave a dosadení do rovnice (1) $8P - 16B = 0$

$$\sum_{i=1}^4 M_{bi} = A^V \cdot \sin 90^\circ (l-0) - A^V \cdot \cos 90^\circ (0-0) + A^H \cdot \sin 0^\circ (l-0) - A^H \cdot \cos 0^\circ (0-0) + P \cdot \sin 270^\circ (l-8) - P \cdot \cos 270^\circ (0-5) + B \cdot \sin 90^\circ (l-l) - B \cdot \cos 90^\circ (0-0) = 0$$

po úprave a dosadení do rovnice (2) $16A^V - 8P = 0$

$$\sum_{i=1}^4 P_{ix} = A^V \cdot \cos 90^\circ + A^H \cdot \cos 0^\circ + P \cdot \cos 270^\circ + B \cdot \cos 90^\circ = 0 \quad (3)$$

po úprave a dosadení do rovnice (3) $A^H = 0$

V uzle 1

$$\sum_{i=1}^4 P_{ix} = A^V \cdot \cos 90^\circ + A^H \cdot \cos 0^\circ + N_{1,2} \cdot \cos (180^\circ - \alpha_{1,2}) + N_{1,3} \cdot \cos \alpha_{1,3} = 0 \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^4 P_{iy} = A^V \cdot \sin 90^\circ + A^H \cdot \cos 0^\circ + N_{1,2} \cdot \sin (180^\circ - \alpha_{1,2}) + N_{1,3} \cdot \sin \alpha_{1,3} = 0 \quad (5)$$

po úprave a dosadení dostaneme

$$A^H - 0,4472N_{1,2} + 0,5547N_{1,3} = 0$$

$$A^V + 0,8944N_{1,2} + 0,8320N_{1,3} = 0$$

V uzle 2

$$\sum_{i=1}^3 P_{ix} = N_{2,1} \cdot \cos (360^\circ - \alpha_{1,2}) + N_{2,3} \cdot \cos (360^\circ - \alpha_{2,3}) + N_{2,4} \cdot \cos \alpha_{2,4} = 0 \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^3 P_{iy} = N_{2,1} \cdot \sin (360^\circ - \alpha_{1,2}) + N_{2,3} \cdot \sin (360^\circ - \alpha_{2,3}) + N_{2,4} \cdot \sin \alpha_{2,4} = 0 \quad (7)$$

po úprave a dosadení dostaneme

$$0,4472N_{2,1} + 0,9701N_{2,3} + 0,9950N_{2,4} = 0$$

$$-0,8944N_{2,1} - 0,2425N_{2,3} + 0,0995N_{2,4} = 0$$

V uzle 3

$$\sum_{i=1}^4 P_{ix} = N_{3,1} \cdot \cos (180^\circ + \alpha_{1,3}) + N_{3,2} \cdot \cos (180^\circ - \alpha_{2,3}) + N_{3,4} \cdot \cos \alpha_{3,4} + N_{3,5} \cdot \cos \alpha_{3,5} = 0 \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^4 P_{iy} = N_{3,1} \cdot \sin (180^\circ + \alpha_{1,3}) + N_{3,2} \cdot \sin (180^\circ - \alpha_{2,3}) + N_{3,4} \cdot \sin \alpha_{3,4} + N_{3,5} \cdot \sin \alpha_{3,5} = 0 \quad (9)$$

po úprave a dosadení dostaneme

$$-0,5547N_{3,1} - 0,9701N_{3,2} + 0,9487N_{3,4} + 1,0N_{3,5} = 0$$

$$-0,8320N_{3,1} + 0,2425N_{3,2} + 0,3162N_{3,4} + 0,0N_{3,5} = 0$$

Vzhľadom na symetriu konštrukcie aj vonkajších síl stačí riešiť len polovicu konštrukcie, lebo napr.

$$N_{1,2} = N_{7,6} \quad \text{resp.} \quad N_{2,4} = N_{6,4} \quad \text{atď.}$$

6. Riešenie:

$$\text{Z rovníc (1), (2) a (3)} \quad A^V = B = 0,5P = 3 \text{ kN}, \quad A^H = 0$$

po dosadení týchto hodnôt do rovníc (4) a (5) vypočítame z nich

$$N_{1,2} = -1,9167 \text{ kN}, \quad N_{1,3} = -1,5452 \text{ kN}$$

ich dosadením do rovníc (6) a (7) určíme hodnoty

$$N_{2,4} = -4,3072 \text{ kN}, \quad N_{2,3} = +5,3013 \text{ kN}$$

Z rovníc (8) a (9) po dosadení za $N_{3,1} = N_{1,3}$, $N_{3,2} = N_{2,3}$

vypočítame

$$N_{3,4} = -8,1318 \text{ kN}, \quad N_{3,5} = +12,0003 \text{ kN}$$

7. Výpočet prekontrolujeme z podmienky rovnováhy zvislých síl v uzle 4

$$-2N_{2,4} \cdot 0,0995 - 2N_{3,4} \cdot 0,3162 - P = 0$$

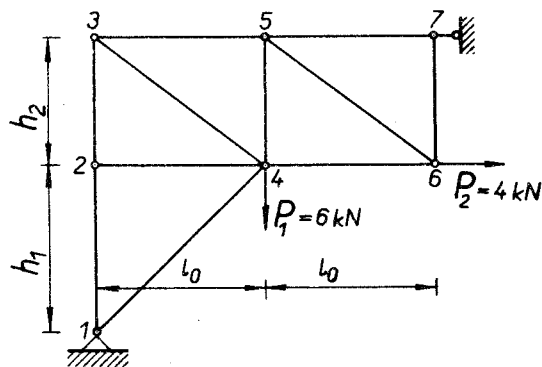
po dosadení a úprave bude

$$6,000 - 6,000 = 0$$

Výsledok je správny.

Príklad 1.2-10:

Na rovinnú konštrukciu zhotovenú z kyvných prútov pôsobia sily P_1 a P_2 podľa obrázka. Treba určiť reakcie vo vonkajších väzbách; vo vnútorných len v prútoch číslo $\overline{14}$, $\overline{24}$, $\overline{23}$, $\overline{35}$, $\overline{45}$ a $\overline{46}$. Vplyv vlastnej tiaže konštrukcie neberieme do úvahy.



Obr. 1.2-10a.

1. Konštrukcia sa skladá zo 7 hmotných bodov, ktoré sú vzájomne pospájané 11 kyvnými prútmi, preto $n = 0$, $m = 7$, $p = 11$, $k = 0 = v$, $S = 0 \times 3 + 7 \times 2 - 11 \times 1 - 0 \times 2 - 0 \times 3 = 3$.

Sústava hmotných bodov s kyvnými prútmi má tri stupne voľnosti a predstavuje tuhú dosku v rovine. Keď berieme do úvahy aj vonkajšie väzby, potom $p = 12$, $k = 1$, $S = 0 \times 3 + 7 \times 2 - 12 \times 1 - 1 \times 2 - 0 \times 3 = 0$.

Sústava je staticky určitá. Sústava hmotných bodov je určitá aj tvarovo, pretože každý hmotný bod, ktorý má v rovine dva stupne voľnosti, je k ďalším bodom pripevnený vždy len dvoma kyvnými prútmi, a teda má zrušené len dva stupne voľnosti.

Keď odstránime z konštrukcie prúty $\overline{14}$, $\overline{24}$, $\overline{23}$ a nahradíme ich účinok na sústavu silami, rozdelí sa konštrukcia na dve časti, z ktorých každá stupňami voľnosti predstavuje tuhú dosku v rovine. To isté platí aj vtedy, keď odstránime prúty $\overline{35}$, $\overline{45}$ a $\overline{46}$.

2. Účinok vonkajších väzieb nahradíme dvoma vodorovnými silami v bodoch 1 a 7 a jednou zvislou silou v bode 1. Účinok určených vnútorných väzieb nahradíme dvoma silami N_{ik} a N_{ki} , ktoré spĺňajú podmienku $N_{ik} + N_{ki} = 0$, a to postupne po troch tak, ako sme uviedli pri posudzovaní stupňov voľnosti.

3. Na riešenie úlohy nám postačí jedna súradnicová sústava so začiatkom v bode 1 a s vodorovnou osou X .

4. Určenie smerov a pôsobísk síl:

a) smery vonkajších síl:

$$\alpha_{A^v} = 90^\circ, \quad \alpha_{A^H} = \alpha_{P_2} = 0^\circ, \quad \alpha_B = 180^\circ, \quad \alpha_{P_1} = 270^\circ$$

b) smery vnútorných síl:

$$\text{tg } \alpha_{1,4} = 1, \quad \sin \alpha_{1,4} = \cos \alpha_{1,4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha_{2,4} = 0^\circ, \quad \alpha_{4,2} = 180^\circ, \quad \alpha_{2,3} = 90^\circ, \quad \alpha_{3,2} = 270^\circ$$

$$\alpha_{1,4} = 45^\circ, \quad \alpha_{4,1} = 180^\circ + \alpha_{1,4}, \quad \alpha_{3,5} = \alpha_{4,6} = 0^\circ$$

$$\alpha_{5,3} = \alpha_{6,4} = 180^\circ, \quad \alpha_{4,5} = 90^\circ, \quad \alpha_{5,4} = 270^\circ$$

c) pôsobiská vonkajších síl:

$$x_{P_1} = l_0, \quad y_{P_1} = y_{P_2} = h_1, \quad x_{P_2} = 2l_0$$

$$x_{A^v} = x_{A^H} = y_{A^v} = y_{A^H} = 0, \quad x_B = 2l_0, \quad y_B = h_1 + h_2$$

d) pôsobiská síl vnútorných väzieb:

$$x_{1,4} = y_{1,4} = 0, \quad x_{3,4} = l_0, \quad y_{3,4} = h_1, \quad x_{2,4} = 0$$

$$y_{2,4} = h_1, \quad x_{4,2} = l_0, \quad y_{4,2} = h_1, \quad x_{2,3} = 0, \quad y_{2,3} = h_1$$

$$x_{3,2} = 0, \quad y_{3,2} = h_1 + h_2, \quad x_{3,5} = 0, \quad y_{3,5} = h_1 + h_2$$

$$x_{5,3} = l_0, \quad y_{5,3} = h_1 + h_2, \quad x_{5,4} = l_0, \quad y_{5,4} = h_1 + h_2$$

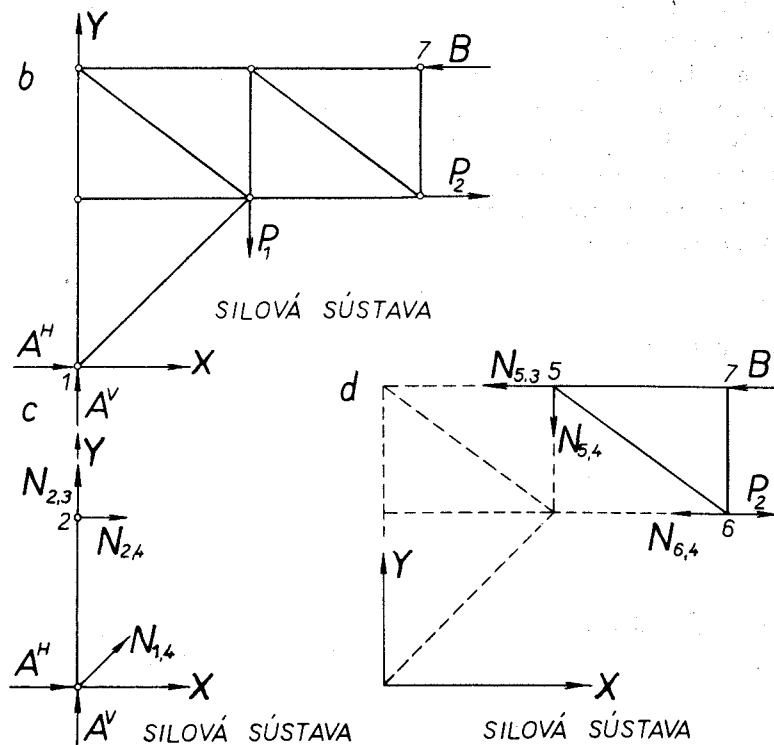
$$x_{4,5} = l_0, \quad y_{4,5} = h_1, \quad x_{4,6} = l_0, \quad y_{4,6} = h_1, \quad x_{6,4} = 2l_0$$

$$y_{6,4} = h_1$$

5. Zostavenie rovníc:

Na určenie vonkajších reakcií použijeme dve momentové podmienky k podperovým bodom 1 a 7 a silovú podmienku rovnováhy zvislých síl, pretože

vodorovné reakcie sú rovnobežné. Na určenie síl vo vnútorných prútoch $\overline{14}$, $\overline{24}$, $\overline{23}$ budeme písať podmienky rovnováhy na prúte $\overline{12}$, a to dve silové v zvislom a vodorovnom smere a jednu momentovú k bodu 1.



Obr. 1.2-10b, c, d.

Sily v prútoch $\overline{35}$, $\overline{45}$, $\overline{46}$ vypočítame z podmienok rovnováhy pravej dosky tvorenej sústavou hmotných bodov 5, 6 a 7. Použijeme na to momentové podmienky k bodom 4 a 5 a silovú podmienku v zvislom smere.

Pre celú sústavu:

$$\sum_{i=1}^5 M_{ti} = A^V \cdot \sin 90^\circ (0-0) - A^V \cdot \cos 90^\circ (0-0) + A^H \cdot \sin 0^\circ (0-0) - A^H \cdot \cos 0^\circ (0-0) + P_1 \cdot \sin 270^\circ (0-l_0) - P_1 \cdot \cos 270^\circ (0-h_1) + P_2 \cdot \sin 0^\circ (0-2l_0) - P_2 \cdot \cos 0^\circ (0-h_1) + B \cdot \sin 180^\circ (0-2l_0) - B \cdot \cos 180^\circ [0-(h_1+h_2)] = 0 \quad (1)$$

po dosadení a úprave bude

$$4P_1 + 4P_2 - 7B = 0$$

$$\sum_{i=1}^5 M_{7i} = A^V \cdot \sin 90^\circ (2l_0-0) - A^V \cdot \cos 90^\circ (h_1+h_2-0) + A^H \cdot \sin 0^\circ (2l_0-0) - A^H \cdot \cos 0^\circ (h_1+h_2-0) + P_1 \cdot \sin 270^\circ (2l_0-l_0) - P_1 \cdot \cos 270^\circ (h_1+h_2-h_1) + P_2 \cdot \sin 0^\circ (2l_0-2l_0) - P_2 \cdot \cos 0^\circ (h_1+h_2-h_1) + B \cdot \sin 180^\circ (2l_0-2l_0) - B \cdot \cos 180^\circ [h_1+h_2-(h_1+h_2)] = 0 \quad (2)$$

po dosadení a úprave dostaneme

$$8A^V - 7A^H - 4P_1 - 3P_2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^5 P_{iy} = A^V \cdot \sin 90^\circ + A^H \cdot \sin 0^\circ + P_1 \cdot \sin 270^\circ + P_2 \cdot \sin 0^\circ + B \cdot \sin 180^\circ = 0 \quad (3)$$

po úprave a dosadení dostaneme

$$A^V - P_1 = 0$$

Pre prút $\overline{12}$

$$\sum_{i=1}^5 M_{ti} = A^V \cdot \sin 90^\circ (0-0) - A^V \cdot \cos 90^\circ (0-0) + A^H \cdot \sin 0^\circ (0-0) - A^H \cdot \cos 0^\circ (0-0) + N_{1,4} \cdot \sin 45^\circ (0-0) - N_{1,4} \cdot \cos 45^\circ (0-0) + N_{2,4} \cdot \sin 0^\circ (0-0) - N_{2,4} \cdot \cos 0^\circ (0-h_1) + N_{2,3} \cdot \sin 90^\circ (0-0) - N_{2,3} \cdot \cos 90^\circ (0-h_1) = 0 \quad (4)$$

po dosadení a úprave bude

$$4N_{2,4} = 0$$

$$\sum_{i=1}^5 P_{ix} = A^V \cdot \cos 90^\circ + A^H \cdot \cos 0^\circ + N_{1,4} \cdot \cos 45^\circ + N_{2,4} \cdot \cos 0^\circ + N_{2,3} \cdot \cos 90^\circ = 0 \quad (5)$$

po úprave a dosadení bude

$$A^H + N_{1,4} \frac{1}{\sqrt{2}} + N_{2,4} = 0$$

$$\sum_{i=1}^5 P_{iy} = A^v \cdot \sin 90^\circ + A^h \cdot \sin 0^\circ + N_{1,4} \cdot \sin 45^\circ + N_{2,4} \cdot \sin 0^\circ + N_{2,3} \cdot \sin 90^\circ = 0 \quad (6)$$

po úprave a dosadení dostaneme

$$A^v + \frac{1}{\sqrt{2}} N_{1,4} + N_{2,3} = 0$$

Rovnováha dosky bodov 5, 6, 7.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 M_{5i} = & N_{5,3} \cdot \sin 180^\circ (l_0 - l_0) - N_{5,3} \cdot \cos 180^\circ [(h_1 + h_2) - (h_1 + h_2)] + N_{5,4} \cdot \sin 270^\circ (l_0 - l_0) - \\ & - N_{5,4} \cdot \cos 270^\circ [(h_1 + h_2) - (h_1 + h_2)] + \\ & + N_{6,4} \cdot \sin 180^\circ (l_0 - 2l_0) - N_{6,4} \cdot \cos 180^\circ [(h_1 + h_2) - h_1] + P_2 \cdot \sin 0^\circ (l_0 - 2l_0) - \\ & - P_2 \cdot \cos 0^\circ [(h_1 + h_2) - h_1] + B \cdot \sin 180^\circ (l_0 - 2l_0) - \\ & - B \cdot \cos 180^\circ [(h_1 + h_2) - (h_1 + h_2)] = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

po dosadení a úprave bude $3N_{6,4} - 3P_2 = 0$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 M_{4i} = & N_{5,3} \cdot \sin 180^\circ (l_0 - l_0) - N_{5,3} \cdot \cos 180^\circ [h_1 - (h_1 + h_2)] + \\ & + N_{5,4} \cdot \sin 270^\circ (l_0 - l_0) - N_{5,4} \cdot \cos 270^\circ [h_1 - (h_1 + h_2)] + \\ & + N_{6,4} \cdot \sin 180^\circ (l_0 - 2l_0) - N_{6,4} \cdot \cos 180^\circ (h_1 - h_1) + \\ & + P_2 \cdot \sin 0^\circ (l_0 - 2l_0) - P_2 \cdot \cos 0^\circ (h_1 - h_1) + \\ & + B \cdot \sin 180^\circ (l_0 - 2l_0) - B \cdot \cos 180^\circ [h_1 - (h_1 + h_2)] = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

po dosadení a úprave dostaneme

$$-3N_{5,3} - 3B = 0$$

$$\sum_{i=1}^5 P_{iy} = N_{5,3} \cdot \sin 180^\circ + N_{5,4} \cdot \sin 270^\circ + N_{6,4} \cdot \sin 180^\circ + P_2 \cdot \sin 0^\circ + B \cdot \sin 180^\circ = 0 \quad (9)$$

po úprave a dosadení dostaneme $N_{5,4} = 0$

6. Riešenie:

z rovnice (1) $B = (P_1 + P_2) \frac{4}{7} = 5,7143 \text{ kN}$

z rovnice (3) $A^v = P_1 = 6,0 \text{ kN}$

Dosadením za A^v do rovnice (2) vypočítame

$$A^h = \frac{1}{h_1 + h_2} (2l_0 A^v - l_0 P_1 - h_2 P_2) = 1,7143 \text{ kN}$$

zo vzťahu (4)

$$N_{2,4} = 0$$

po dosadení za A^h a $N_{2,4}$ do rovnice (5) dostaneme

$$N_{1,4} = -2,4244 \text{ kN}$$

po dosadení za A^v a $N_{1,4}$ z rovnice (6) určíme

$$N_{2,3} = -3,5756 \text{ kN}$$

z rovnice (8) po dosadení za B

$$N_{5,3} = -B = -5,7143 \text{ kN}$$

z rovnice (7)

$$N_{6,4} = P_2 = 4,0 \text{ kN}$$

z rovnice (9)

$$N_{5,4} = 0$$

7. Kontrola riešenia:

a) $\sum_{i=1}^3 P_{ix} = 1,7143 + 4,0000 - 5,7143 = 0$
 $5,7143 - 5,7143 = 0$

b) $\sum_{i=1}^2 M_{2i} = -h_1 A^h - h_1 N_{1,4} \cdot \sin 45^\circ = 0$
 $-1,7143 + 1,7143 = 0$

c) $\sum_{i=1}^4 P_{ix} = N_{5,3} + B + N_{6,4} - P_2 = 0$
 $-5,7143 + 5,7143 + 4,0 - 4,0 = 0$

Úloha je vyriešená správne.

Príklad 1.2-11:

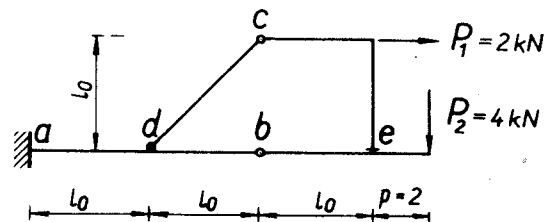
Na konštrukciu zhotovenú z plnostenných prútov pôsobí zaťaženie P_1 a P_2 podľa obrázka. Za predpokladu zanedbania vlastnej tiaže konštrukcie treba určiť:

- reakcie vo vonkajších aj vnútorných väzbách,
- veľkosť silových účinkov na prierez e .

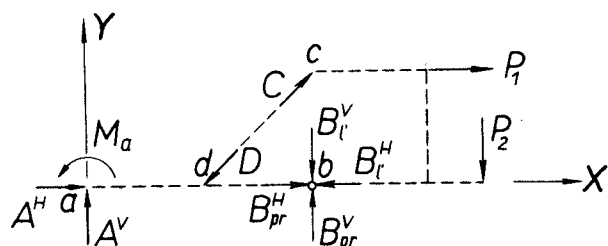
1. Konštrukcia sa skladá z dosky adb a dosky bec , ktoré sú medzi sebou

spojené kĺbom a kyvným prútom. Sústava ako celok je votknutá, preto $n = 2$, $m = 0$, $p = 1$, $k = 1$, $v = 1$; potom $S = 2 \times 3 + 0 \times 2 - 1 \times 1 - 1 \times 2 - 1 \times 3 = 0$.

Sústava ako celok je staticky určitá, pričom druhú dosku nesie prvá.



Obr. 1.2-11a



SILOVÁ SÚSTAVA a

Obr. 1.2-11b

Riešenie úlohy podľa bodu a

2. Účinok vonkajšej väzby na konštrukciu nahradíme dvoma silami, z ktorých jedna je zvislá A^V a druhá vodorovná A^H a momentom M_a v bode a , pretože táto väzba ruší tri stupne voľnosti. Pôsobenie kyvného prúta ako vnútornej väzby nahradíme v bode c a d silami C a D , ktoré spĺňajú podmienku $C - D = 0$. V bode b ako v kĺbovej podpore necháme pôsobiť na jednu aj druhú dosku zvislú (B_{pr}^V a B_{pr}^V) a vodorovnú (B_{pr}^H a B_{pr}^H) reakciu, aby tvorili nulovú sústavu síl.

3. Súradnicová sústava bude mať začiatok v podperovom bode a a os X bude vodorovná.

4. Určenie smerov a pôsobísk síl:

a) smery síl:

$$\alpha_{A^V} = \alpha_{B_{pr}^V} = 90^\circ, \quad \alpha_{A^H} = \alpha_{B_{pr}^H} = 0^\circ, \quad \alpha_{B^H} = 180^\circ$$

$$\alpha_{B^V} = 270^\circ, \quad \alpha_C = \alpha, \quad \alpha_D = 180^\circ + \alpha, \quad \alpha_{P_1} = 0^\circ$$

$$\alpha_{P_2} = 270^\circ, \quad \text{tg } \alpha = 1, \quad \alpha = 45^\circ$$

b) pôsobiská síl:

$$x_{A^V} = y_{A^H} = y_{A^V} = y_{A^H} = y_{B^V} = y_{B^H} = 0, \quad x_{B^V} = x_{B^H} = 2l_0$$

$$x_C = 2l_0, \quad y_C = l_0, \quad x_D = l_0, \quad y_D = 0$$

$$x_{P_1} = 3l_0, \quad y_{P_1} = l_0, \quad x_{P_2} = 3l_0 + p, \quad y_{P_2} = 0$$

5. Zostavenie podmienok rovnováhy:

Na určenie reakcií vo vonkajšej väzbe použijeme všetky tri podmienky rovnováhy, t.j. dve silové a jednu momentovú k začiatku súradnicového systému. V týchto rovniciach nebudú účinky síl, ktoré pôsobia vo vnútorných väzbách, pretože tieto sú rovnovážnymi sústavami.

Sily vo vnútorných väzbách vypočítame z rovnovážnych podmienok druhej — nesenej dosky použitím dvoch momentových podmienok (k bodom b a c) a jednej silovej podmienky v zvislom smere.

Pre celú sústavu:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 M_{a_i} &= A^V \cdot \sin 90^\circ (0-0) - A^V \cdot \cos 90^\circ (0-0) + \\ &+ A^H \cdot \sin 0^\circ (0-0) - A^H \cdot \cos 0^\circ (0-0) + \\ &+ P_1 \cdot \sin 0^\circ (0-3l_0) - P_1 \cdot \cos 0^\circ (0-l_0) + \\ &+ P_2 \cdot \sin 270^\circ [0-(3l_0+p)] - P_2 \cdot \cos 270^\circ (0-0) + \\ &+ M_a = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

po dosadení a úprave dostaneme

$$l_0 \cdot P_1 + (3l_0 + p)P_2 + M_a = 0$$

$$\sum_{i=1}^4 P_{ix} = A^V \cdot \cos 90^\circ + A^H \cdot \cos 0^\circ + P_1 \cdot \cos 0^\circ + P_2 \cdot \cos 270^\circ = 0 \quad (2)$$

po úprave dostaneme

$$A^H + P_1 = 0$$

$$\sum_{i=1}^4 P_{iy} = A^V \cdot \sin 90^\circ + A^H \cdot \sin 0^\circ + P_1 \cdot \sin 0^\circ + P_2 \cdot \sin 270^\circ = 0 \quad (3)$$

po úprave bude

$$A^V - P_2 = 0$$

Pre pravú dosku

$$\sum_{i=1}^5 M_{b_i} = B_{pr}^V \cdot \sin 90^\circ (2l_0 - 2l_0) - B_{pr}^V \cdot \cos 90^\circ (0-0) + B_{pr}^H \cdot \sin 0^\circ (2l_0 - 2l_0) +$$

$$\begin{aligned}
& + B_{pr}^H \cdot \cos 0^\circ (0 - 0) + P_1 \cdot \sin 0^\circ (2l_0 - 3l_0) - \\
& - P_1 \cdot \cos 0^\circ (0 - 0) + P_2 \cdot \sin 270^\circ [2l_0 - (3l_0 + p)] - \\
& - P_2 \cdot \cos 270^\circ (0 - 0) + C \cdot \sin \alpha [(2l_0 - 2l_0)] - \\
& - C \cdot \cos \alpha (0 - l_0) = 0
\end{aligned} \quad (4)$$

po úprave bude

$$\begin{aligned}
l_0 \cdot \cos \alpha C + l_0 \cdot P_1 + (l_0 + p)P_2 &= 0 \\
\sum_{i=4}^5 M_{ci} &= B_{pr}^V \cdot \sin 90^\circ (2l_0 - 2l_0) - B_{pr}^V \cdot \cos 90^\circ (0 - 0) + \\
& + B_{pr}^H \cdot \sin 0^\circ (2l_0 - 2l_0) - B_{pr}^H \cdot \cos 0^\circ (l_0 - 0) + \\
& + P_1 \cdot \sin 0^\circ (2l_0 - 3l_0) - P_1 \cdot \cos 0^\circ (l_0 - l_0) + \\
& + P_2 \cdot \sin 270^\circ [2l_0 - (3l_0 + p)] - \\
& - P_2 \cdot \cos 270^\circ (l_0 - 0) + C \cdot \sin \alpha (2l_0 - 2l_0) - \\
& - C \cdot \cos \alpha (l_0 - l_0) = 0
\end{aligned} \quad (5)$$

po úprave dostaneme

$$\begin{aligned}
-l_0 \cdot B_{pr}^H + (l_0 + p)P_2 &= 0 \\
\sum_{i=1}^5 P_{iy} &= B_{pr}^V \cdot \sin 90^\circ + B_{pr}^H \cdot \sin 0^\circ + P_1 \cdot \sin 0^\circ + P_2 \cdot \sin 270^\circ + \\
& + C \cdot \sin \alpha = 0
\end{aligned} \quad (6)$$

po úprave dostaneme

$$B_{pr}^V + C \sin \alpha - P_2 = 0$$

6. Riešenie:

z rovnice (1)

$$M_a = -l_0 \cdot P_1 - (3l_0 + p)P_2 = -58 \text{ kNm}$$

z rovnice (2) a (3)

$$A^V = P_2 = 4,0 \text{ kN}, \quad A^H = -P_1 = -2,0 \text{ kN}$$

z rovnice (4)

$$C = \frac{-1}{l_0 \cdot \cos 45^\circ} [l_0 \cdot P_1 + (l_0 + p)P_2] = -8 \cdot \sqrt{2} \text{ kN}$$

z rovnice (5)

$$B_{pr}^H = \frac{1}{l_0} (l_0 + p)P_2 = 6 \text{ kN}$$

z rovnice (6) po dosadení za C

$$B_{pr}^V = P_2 + \frac{\text{tg } 45^\circ}{l_0} [l_0 \cdot P_1 + (l_0 + p)P_2] = 12 \text{ kN}$$

7. Kontrola výpočtu: Urobíme ju momentovou podmienkou k priesečníku síl P_1 a P_2 pre celú sústavu.

$$A^V (3l_0 + p) - A^H \cdot l_0 + M_A = 0.$$

$$P_2(3l_0 + p) - (-P_1)l_0 - l_0 \cdot P_1 - (3l_0 + p)P_2 = 0$$

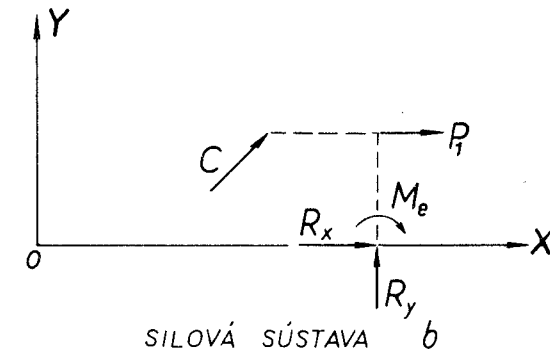
Pre druhú dosku zo sumy vodorovných síl.

$$B_{pr}^H + P_1 + C \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$\frac{1}{l_0} (l_0 + p)P_2 + P_1 - \frac{1}{l_0} [l_0 \cdot P_1 + (l_0 + p)P_2] = 0$$

Riešenie úlohy podľa bodu b:

Keď chceme určiť silové účinky, ktoré od daného zaťaženia pôsobia v priereze e , musíme predpokladať, že v tomto bode je časť nosníka \overline{ce} votknutá do časti \overline{eb} , prípadne až \overline{ea} . Potom túto väzbu — votknutie nahradíme tromi zložkami silových účinkov, ktoré takúto väzbu nahradzujú, t. j. dvoma silovými — zvislou a vodorovnou — a jednou momentovou, ako to vidieť na silovom obrázku d . Súradnicovú sústavu môžeme ponechať pôvodnú, a tým aj smery a súradnice pôsobísk.



Obr. 1.2-11a.

5. Zostavenie podmienok rovnováhy:

Pre úsek nosníka \overline{ce} (môžeme brať do úvahy aj úsek \overline{be}) výhodne použijeme tri základné podmienky rovnováhy — dve silové a jednu momentovú k bodu e .

$$\sum_{i=1}^5 M_{ei} = C \cdot \sin 45^\circ (3l_0 - 2l_0) - C \cdot \cos 45^\circ (0 - l_0) +$$

$$+ P_1 \cdot \sin 0^\circ (3l_0 - 3l_0) - P_1 \cdot \cos 0^\circ (0 - l_0) +$$

$$+ R_x \cdot \sin 0^\circ (3l_0 - 3l_0) - R_x \cdot \cos 0^\circ (0 - 0) +$$

$$+ R_y \cdot \sin 90^\circ (3l_0 - 3l_0) - R_y \cdot \cos 90^\circ (0 - 0) + M_e = 0 \quad (7)$$

po úprave dostaneme

$$l_0 (\sin 45^\circ + \cos 45^\circ) C + l_0 \cdot P_1 + M_e = 0$$

$$\sum_{i=1}^4 P_{ix} = C \cdot \cos 45^\circ + P_1 \cdot \cos 0^\circ + R_x \cdot \cos 0^\circ + R_y \cdot \cos 90^\circ = 0 \quad (8)$$

po úprave dostaneme

$$R_x + C \cdot \cos 45^\circ + P_1 = 0$$

$$\sum_{i=1}^4 P_{iy} = C \cdot \sin 45^\circ + P_1 \cdot \sin 0^\circ + R_x \cdot \sin 0^\circ + R_y \cdot \sin 90^\circ = 0 \quad (9)$$

po úprave dostaneme

$$R_y + C \cdot \sin 45^\circ = 0$$

6. Riešenie:

Po dosadení za C do rovnice (7) určíme veľkosť momentu

$$M_e = -l_0 \cdot P_1 + \frac{\sin 45^\circ + \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} [l_0 \cdot P_1 + (l_0 + p) P_2] =$$

$$= l_0 \cdot P_1 + 2(l_0 + p) P_2 = 56 \text{ kNm}$$

z rovnice (8) po dosadení za C

$$R_x = \frac{1}{l_0} (l_0 + p) P_2 = 6 \text{ kN}$$

z rovnice (9)

$$R_y = P_1 + \frac{1}{l_0} (l_0 + p) P_2 = 8 \text{ kN}$$

7. Kontrola výpočtu: Použijeme momentovú podmienku k bodu c

$$-R_y \cdot l_0 - R_x \cdot l_0 + M_e = 0$$

po dosadení bude

$$-l_0 \left[\frac{1}{l_0} (l_0 + p) P_2 + P_1 + \frac{1}{l_0} (l_0 + p) P_2 \right] + l_0 \cdot P_1 + 2(l_0 + p) P_2 = 0$$

$$0 = 0$$

Úloha je vyriešená správne.

II. PRIESTOROVÉ SÚSTAVY SÍL

2.1. CENTRÁLNY SILOVÝ SYSTÉM

Príklad 2.1-1:

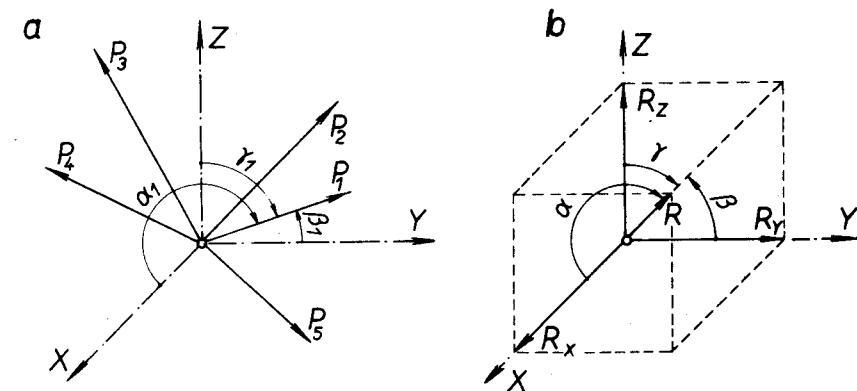
Určte výslednicu 5 síl P_1, \dots, P_5 centrálného silového systému (obr. 2.1-1a), keď sú zadané sily

$P_1 = 3,0 \text{ kN}$	$\alpha_1 = 54^\circ 44'$,	$\beta_1 = 54^\circ 44'$,	$\gamma_1 = ?$
$P_2 = 4,0 \text{ kN}$	$\alpha_2 = 45^\circ$,	$\beta_2 = ?$	$\gamma_2 = 45^\circ$
$P_3 = 2,5 \text{ kN}$	$\alpha_3 = ?$	$\beta_3 = 90^\circ$,	$\gamma_3 = 60^\circ$
$P_4 = 3,5 \text{ kN}$	$\alpha_4 = 125^\circ 16'$,	$\beta_4 = 54^\circ 44'$,	$\gamma_4 = ?$
$P_5 = 2,0 \text{ kN}$	$\alpha_5 = 30^\circ$,	$\beta_5 = ?$	$\gamma_5 = 60^\circ$

Riešenie:

Neznáme uhly $\gamma_1, \beta_1, \alpha_3, \dots$, atď. určíme z výrazu

$$\cos^2 \alpha_i + \cos^2 \beta_i + \cos^2 \gamma_i = 1, \text{ pre } i = 1, \dots, 5$$



Obr. 2.1-1a,b.

čiže

$$\cos^2 \gamma_1 = 1 - \cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \beta_1 = 1 - 0,5773^2 - 0,5773^2 = 0,3334$$

$$\cos \gamma_1 = 0,5774 \rightarrow \gamma_1 = 54^\circ 44'$$

$$\cos^2 \beta_2 = 1 - \cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \gamma_2 = 1 - 0,7071^2 - 0,7071^2 \doteq 0$$

$$\cos \beta_2 = 0 \rightarrow \beta_2 = 90^\circ$$

$$\cos^2 \alpha_3 = 1 - \cos^2 \beta_3 - \cos^2 \gamma_3 = 0,75$$

$$\cos \alpha_3 = 0,866 \rightarrow \alpha_3 = 30^\circ$$

$$\cos^2 \gamma_4 = 1 - \cos^2 \alpha_4 - \cos^2 \beta_4 \doteq 0,3334$$

$$\cos \gamma_4 = 0,5774 \rightarrow \gamma_4 = 54^\circ 44'$$

$$\cos^2 \beta_5 = 1 - \cos^2 \alpha_5 - \cos^2 \gamma_5 \doteq 0$$

$$\cos \beta_5 = 0 \rightarrow \beta_5 = 90^\circ$$

Veľkosti zložiek R_x , R_y , R_z výslednice \mathbf{R} do smerov súradnicových osí X , Y , Z sa rovnajú algebrickému súčtu priemetov síl $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_5$ do príslušnej súradnicovej osi.

$$\begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^5 P_i \cdot \cos \alpha_i = P_1 \cdot \cos \alpha_1 + \dots + P_5 \cdot \cos \alpha_5 = \\ &= 3 \cdot 0,5773 + 4 \cdot 0,7071 + 2,5 \cdot 0,866 + 3,5 \cdot (-0,5773) + 2 \cdot 0,866 = \\ &= 6,437 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_y &= \sum_{i=1}^5 P_i \cdot \cos \beta_i = P_1 \cdot \cos \beta_1 + \dots + P_5 \cdot \cos \beta_5 = \\ &= 3 \cdot 5,5773 + 4 \cdot 0 + 2,5 \cdot 0 + 3,5 \cdot 0,5773 + 2 \cdot 0 = \\ &= 3,752 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_z &= \sum_{i=1}^5 P_i \cdot \cos \gamma_i = P_1 \cdot \cos \gamma_1 + \dots + P_5 \cdot \cos \gamma_5 = \\ &= 3 \cdot 0,5773 + 4 \cdot 0,7071 + 2,5 \cdot 0,5 + 3,5 \cdot 0,5774 + 2 \cdot 0,5 = \\ &= 8,8312 \text{ kN} \end{aligned}$$

Po určení veľkosti zložiek výslednice určíme veľkosť (absolútnu hodnotu resp. modul vektora \mathbf{R}) výslednice

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{6,437^2 + 3,752^2 + 8,8312^2} \doteq 11,554 \text{ kN}$$

Smer výslednice \mathbf{R} (obr. 2.1-1b) je určený uhlami α , β , γ , ktoré vypočítame z výrazov

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{6,437}{11,554} = 0,557089 \rightarrow \alpha = 56^\circ 09'$$

$$\cos \beta = \frac{R_y}{R} = \frac{3,752}{11,554} = 0,324765 \rightarrow \beta = 71^\circ 03'$$

$$\cos \gamma = \frac{R_z}{R} = \frac{8,8312}{11,554} = 0,764318 \rightarrow \gamma = 40^\circ 09'$$

Vypočítané uhly musia spĺňať rovnicu

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$0,557089^2 + 0,324765^2 + 0,764318^2 = 1$$

$$1,000002 = 1 \rightarrow \Delta = 0,000002$$

Príklad 2.1-2:

Závažie zavesené v bode d pôsobí tiažou $Q = 100 \text{ kN}$ na sústave, ktorá sa skladá z troch prútov ad , bd , cd (obr. 2.1-2a), pričom $\sphericalangle bcd = \sphericalangle cbd = \sphericalangle d'ad = 30^\circ$, ďalej $\sphericalangle cd'd = \sphericalangle d'cd = 90^\circ$. Ako znázorňuje aj obrázok, body $bcd'd$ ležia v spoločnej horizontálnej rovine a body $ad'd$ ležia v spoločnej vertikálnej rovine. Výpočtom a graficky určte veľkosti síl v prútoch tak, aby sústava bola v rovnováhe.

Riešenie výpočtom:

Bod d stotožníme so zvoleným súradnicovým systémom X , Y , Z . Určíme uhly (napr. α_{ab}), ktoré zvierajú predpokladaný kladný smer síl (napr. sily \mathbf{P}_{ab}) v príslušných prútoch s kladným smerom súradnicových osí X , Y , Z . Veľičina α je uhol, ktorý zvierajú kladne orientovaný vektor sily s kladne orientovanou osou X . Podobne definujeme aj uhol β a γ (obr. 2.1-2b).

$$\alpha_Q = 90^\circ \rightarrow \cos 90^\circ = 0, \quad \beta_Q = 270^\circ \rightarrow \cos 270^\circ = 0$$

$$\alpha_{da} = 90^\circ \rightarrow \cos 90^\circ = 0, \quad \beta_{da} = 240^\circ \rightarrow \cos 240^\circ = -0,5$$

$$\alpha_{db} = 330^\circ \rightarrow \cos 330^\circ = 0,866, \quad \beta_{db} = 240^\circ \rightarrow \cos 240^\circ = -0,5$$

$$\alpha_{dc} = 210^\circ \rightarrow \cos 210^\circ = -0,866, \quad \beta_{dc} = 120^\circ \rightarrow \cos 120^\circ = -0,5$$

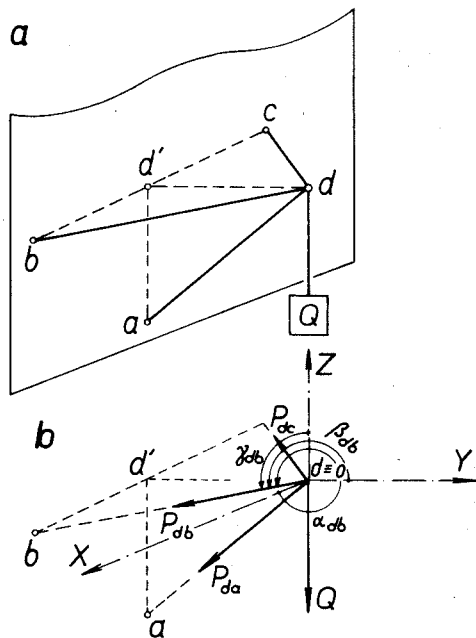
$$\gamma_Q = 180^\circ \rightarrow \cos 180^\circ = -1, \quad \gamma_{da} = 150^\circ \rightarrow \cos 150^\circ = -0,866$$

$$\gamma_{db} = 90^\circ \rightarrow \cos 90^\circ = 0, \quad \gamma_{dc} = 90^\circ \rightarrow \cos 90^\circ = 0$$

Smery síl Q , P_{da} , P_{db} , P_{dc} musia spĺňať podmienku

$$\cos^2 \alpha_i + \cos^2 \beta_i + \cos^2 \gamma_i = 1, \quad \text{pre } i = da, db, dc$$

V úlohe riešime rozklad sily Q do smerov troch zložiek síl P_{da} , P_{db} , P_{dc} .
Matematickú formuláciu úlohy uskutočníme pomocou troch súčtových podmienok rovnováhy.



Obr. 2.1-2a,b.

$$Q \cdot \cos \alpha_Q + P_{da} \cdot \cos \alpha_{da} + P_{db} \cdot \cos \alpha_{db} + P_{dc} \cdot \cos \alpha_{dc} = 0$$

$$Q \cdot \cos \beta_Q + P_{da} \cdot \cos \beta_{da} + P_{db} \cdot \cos \beta_{db} + P_{dc} \cdot \cos \beta_{dc} = 0$$

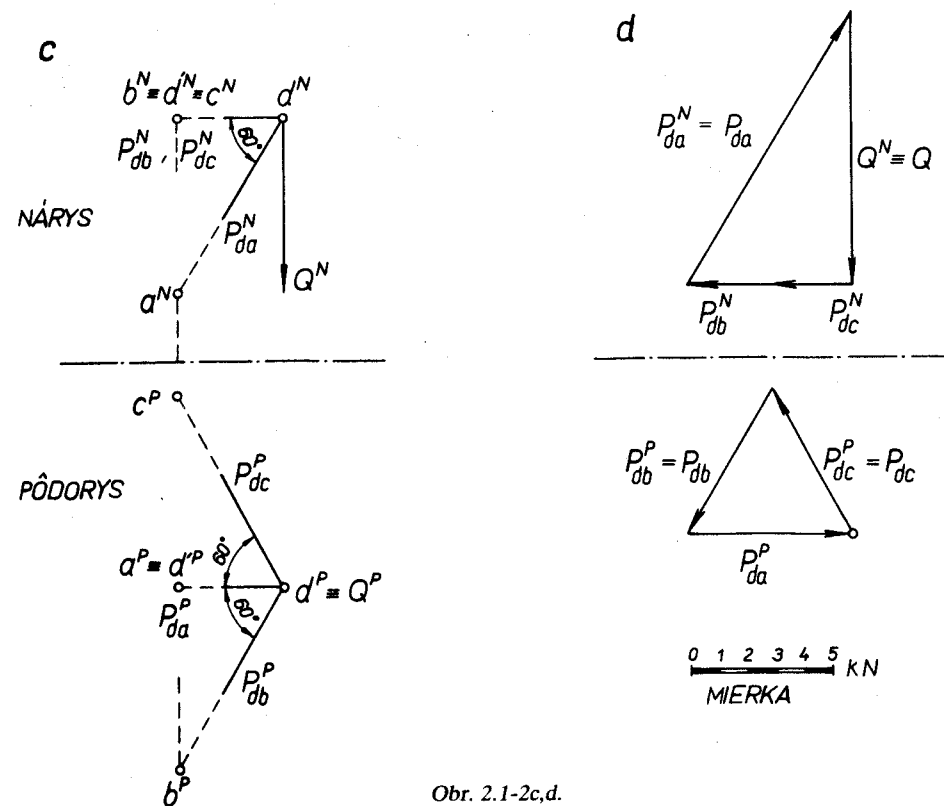
$$Q \cdot \cos \gamma_Q + P_{da} \cdot \cos \gamma_{da} + P_{db} \cdot \cos \gamma_{db} + P_{dc} \cdot \cos \gamma_{dc} = 0$$

Do uvedených rovníc dosadíme kosínus príslušných uhlov, ako známou silu zadanú hodnotu $Q = 100$ kN. Potom

$$100 \cdot 0 + P_{da} \cdot 0 + P_{db} \cdot 0,866 + P_{dc} \cdot (-0,866) = 0$$

$$100 \cdot 0 + P_{da} \cdot (-0,5) + P_{db} \cdot (-0,5) + P_{dc} \cdot (-0,5) = 0$$

$$100 \cdot (-1) + P_{da} \cdot (-0,866) + P_{db} \cdot 0 + P_{dc} \cdot 0 = 0$$



Obr. 2.1-2c,d.

Riešením uvedenej sústavy rovníc dostaneme sily:

$$P_{da} = -115,47 \text{ kN}, \quad P_{db} = 57,73 \text{ kN}, \quad P_{dc} = 57,73 \text{ kN}$$

Grafické riešenie:

1. Graficky znázorníme geometrický tvar danej sústavy pomocou ortogonálneho priemetu do pôdorysu a nárysu. Pôdorysňa je zvolená rovnobežne s rovinou prechádzajúcou bodmi b , c , d . Nárysňa je zvolená rovnobežne s rovinou, ktorá prechádza bodmi a , d' , d . Na obr. 2.1-2c je v pôdoryse a v náryse vyznačený geometrický tvar (čiarkovane) aj sily pôsobiace v prútoch (plná čiara).

2. V náryse rozložíme silu $Q = Q^N$ (vykreslenú v skutočnej veľkosti) do zložiek P_{db}^N , P_{dc}^N , P_{da}^N tak, aby sústava bola v rovnováhe (zložkový obrázok uzavretý, zmysel síl súhlasný), obr. 2.1-2d.

3. V pôdoryse rozložíme silu P_{da}^P , ktorej smer je známy z pôdorysu a veľkosť pôdorysného priemetu odvodíme z nárysu do zložiek P_{db}^P , P_{dc}^P tak, aby sústava bola v rovnováhe, obr. 2.1-2d.

4. Veľkosti síl P_{ab}^N , P_{dc}^N odvodíme pomocou ich pôdorysu, obr. 2.1-2d.

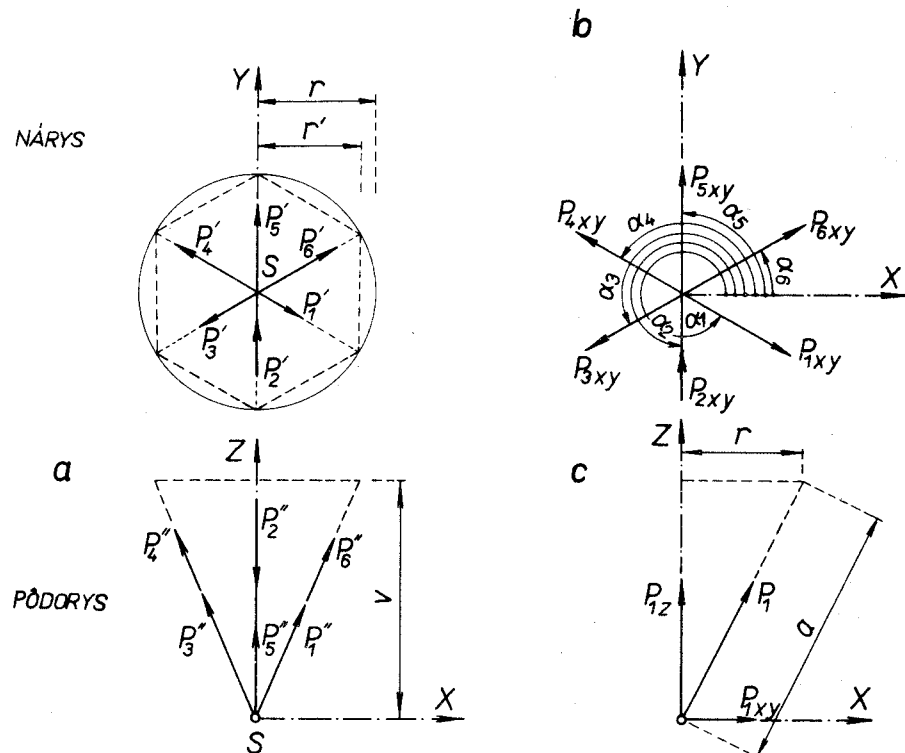
5. Skutočnú veľkosť jednotlivých zložiek síl nemusíme osobitne určovať, lebo ich pôdorys, resp. nárys sa zvolili tak, že každá z nich je v zložkovom obrázku v pôdoryse, resp. náryse v skutočnej veľkosti, obr. 2.1-2d.

6. Pomocou mierky odčítame veľkosti zložiek

$$Q = 100 \text{ kN}, \quad P_{da} = 115 \text{ kN}, \quad P_{dc} = P_{ab} = 58 \text{ kN}$$

Príklad 2.1-3:

V hranách pláštá pravidelného šesťbokého ihlana (jeho základňa leží v náryse a je vpísaná do kružnice s polomerom $r = 4,0 \text{ m}$) pôsobia sily prechádzajúce jeho vrcholom (obr. 2.1-3a), $P_1 = 8,0 \text{ kN}$, $P_2 = 4,0 \text{ kN}$, $P_3 = 7,0 \text{ kN}$, $P_4 = 1,5 \text{ kN}$, $P_5 = 2,0 \text{ kN}$, $P_6 = 3,0 \text{ kN}$; výška ihlana $v = 8,0 \text{ m}$. Určte výpočtom výslednicu R celej sústavy síl.



Obr. 2.1-3a,b,c.

Riešenie:

Zvolíme si súradnicový systém napr. tak, ako je nakreslený na obr. 2.1-3a. Silu P_i premietneme do roviny X, Y a dostaneme priemety P_{iXY} ; podobne silu P_i premietneme do smeru osi Z a dostaneme P_{iZ} .

Najprv určíme z geometrických závislostí uhly α_i, γ_i .

Podľa obr. 2.1-3b dostaneme:

$$\text{tg } \gamma_1 = \frac{r}{v} = \frac{4,0}{8,0} = 0,5 \rightarrow \gamma_1 = 26^\circ 34'$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_6 = 26^\circ 34' \rightarrow \cos \gamma_1 = \dots = \cos \gamma_6 = 0,8944$$

$$\sin \gamma_1 = \dots = \sin \gamma_6 = 0,4472$$

podľa obr. 2.1-3c dostaneme:

$$\alpha_1 = 330^\circ \rightarrow \cos 330^\circ = +0,866, \quad \sin 330^\circ = -0,5$$

$$\alpha_2 = 90^\circ \rightarrow \cos 90^\circ = 0,0, \quad \sin 90^\circ = +1,0$$

$$\alpha_3 = 210^\circ \rightarrow \cos 210^\circ = -0,866, \quad \sin 210^\circ = -0,5$$

$$\alpha_4 = 150^\circ \rightarrow \cos 150^\circ = -0,866, \quad \sin 150^\circ = +0,5$$

$$\alpha_5 = 90^\circ \rightarrow \cos 90^\circ = 0,0, \quad \sin 90^\circ = +1,0$$

$$\alpha_6 = 30^\circ \rightarrow \cos 30^\circ = +0,866, \quad \sin 30^\circ = +0,5$$

Priemet sily P_i do roviny X, Y

$$P_{1XY} = P_1 \cdot \sin \gamma_1 = 8,0 \cdot 0,4472 = 3,5776 \text{ kN}$$

$$P_{2XY} = P_2 \cdot \sin \gamma_2 = 4,0 \cdot 0,4472 = 1,7888 \text{ kN}$$

$$P_{3XY} = P_3 \cdot \sin \gamma_3 = 7,0 \cdot 0,4472 = 3,1304 \text{ kN}$$

$$P_{4XY} = P_4 \cdot \sin \gamma_4 = 1,5 \cdot 0,4472 = 0,6708 \text{ kN}$$

$$P_{5XY} = P_5 \cdot \sin \gamma_5 = 2,0 \cdot 0,4472 = 0,8944 \text{ kN}$$

$$P_{6XY} = P_6 \cdot \sin \gamma_6 = 3,0 \cdot 0,4472 = 1,3416 \text{ kN}$$

Sily P_{iXY} , ktoré pôsobia v rovine XY , rozložíme do smerov súradnicových osí X a Y (obr. 2.1-3c).

$$P_{1X} = P_{1XY} \cdot \cos \alpha_1 = 3,5776 \cdot (+0,866) = +3,0982 \text{ kN}$$

$$P_{2Y} = P_{2XY} \cdot \sin \alpha_2 = 1,7888 \cdot (0,0) = 0,0 \text{ kN}$$

$$P_{3X} = P_{3XY} \cdot \cos \alpha_3 = 3,1304 \cdot (-0,866) = -2,7109 \text{ kN}$$

$$P_{4X} = P_{4XY} \cdot \cos \alpha_4 = 0,6708 \cdot (-0,866) = -0,5809 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned}
P_{5X} &= P_{5XY} \cdot \cos \alpha_5 = 0,8944 \cdot (0,0) = 0,0 \text{ kN} \\
P_{6X} &= P_{6XY} \cdot \cos \alpha_6 = 1,3416 \cdot (+0,866) = +1,1618 \text{ kN} \\
P_{1Y} &= P_{1XY} \cdot \sin \alpha_1 = 3,5776 \cdot (-0,5) = -1,7888 \text{ kN} \\
P_{2Y} &= P_{2XY} \cdot \sin \alpha_2 = 1,7888 \cdot (+1,0) = +1,7888 \text{ kN} \\
P_{3Y} &= P_{3XY} \cdot \sin \alpha_3 = 3,1304 \cdot (-0,5) = -1,5652 \text{ kN} \\
P_{4Y} &= P_{4XY} \cdot \sin \alpha_4 = 0,6708 \cdot (+0,5) = +0,3354 \text{ kN} \\
P_{5Y} &= P_{5XY} \cdot \sin \alpha_5 = 0,8944 \cdot (+1,0) = +0,8944 \text{ kN} \\
P_{6Y} &= P_{6XY} \cdot \sin \alpha_6 = 1,3416 \cdot (+0,5) = +0,6708 \text{ kN}
\end{aligned}$$

Priemet sily P_i do smeru osi Z

$$\begin{aligned}
P_{1Z} &= P_1 \cdot \cos \gamma_1 = 8,0 \cdot 0,8944 = 7,1652 \text{ kN} \\
P_{2Z} &= P_2 \cdot \cos \gamma_2 = 4,0 \cdot (-0,8944) = -3,5776 \text{ kN} \\
P_{3Z} &= P_3 \cdot \cos \gamma_3 = 7,0 \cdot (0,8944) = 6,2608 \text{ kN} \\
P_{4Z} &= P_4 \cdot \cos \gamma_4 = 1,5 \cdot (0,8944) = 1,3416 \text{ kN} \\
P_{5Z} &= P_5 \cdot \cos \gamma_5 = 2,0 \cdot (0,8944) = 1,7888 \text{ kN} \\
P_{6Z} &= P_6 \cdot \cos \gamma_6 = 3,0 \cdot (0,8944) = 2,6832 \text{ kN}
\end{aligned}$$

Zložky výslednice v smeroch súradnicových osí X, Y, Z určíme ako súčet priemetov síl P_i do súradnicových osí

$$\begin{aligned}
R_X &= \sum_{i=1}^6 P_{iX} = P_{1X} + \dots + P_{6X} = +3,0982 - 2,7109 - 0,5809 + \\
&\quad + 1,1618 = +0,9682 \text{ kN} \\
R_Y &= \sum_{i=1}^6 P_{iY} = P_{1Y} + \dots + P_{6Y} = -1,7888 + 1,7888 - 1,5652 + \\
&\quad + 0,3354 + 0,8944 + 0,6708 = +0,3354 \text{ kN} \\
R_Z &= \sum_{i=1}^6 P_{iZ} = P_{1Z} + \dots + P_{6Z} = 7,1652 - 3,5776 + 6,2608 + \\
&\quad + 1,3416 + 1,7888 + 2,6832 = +15,6620 \text{ kN}
\end{aligned}$$

Veľkosť výslednice určíme zo vzťahu

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2 + R_Z^2} = \sqrt{0,9682^2 + 0,3354^2 + 15,662^2} = 15,6958 \text{ kN}$$

Smer výslednice určíme pomocou uhlov α , β , γ

$$\begin{aligned}
\cos \alpha &= \frac{R_X}{R} = \frac{0,9682}{15,6958} = 0,061852 \rightarrow \alpha = 86^\circ 28' \\
\cos \beta &= \frac{R_Y}{R} = \frac{0,3354}{15,6958} = 0,0213687 \rightarrow \beta = 88^\circ 47'
\end{aligned}$$

$$\cos \gamma = \frac{R_Z}{R} = \frac{15,6620}{15,6958} = 0,99784 \rightarrow \gamma = 3^\circ 46'$$

Pre kosínusy uvedených uhlov musí platiť vzťah

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$0,061852^2 + 0,0213687^2 + 0,99784^2 = 1$$

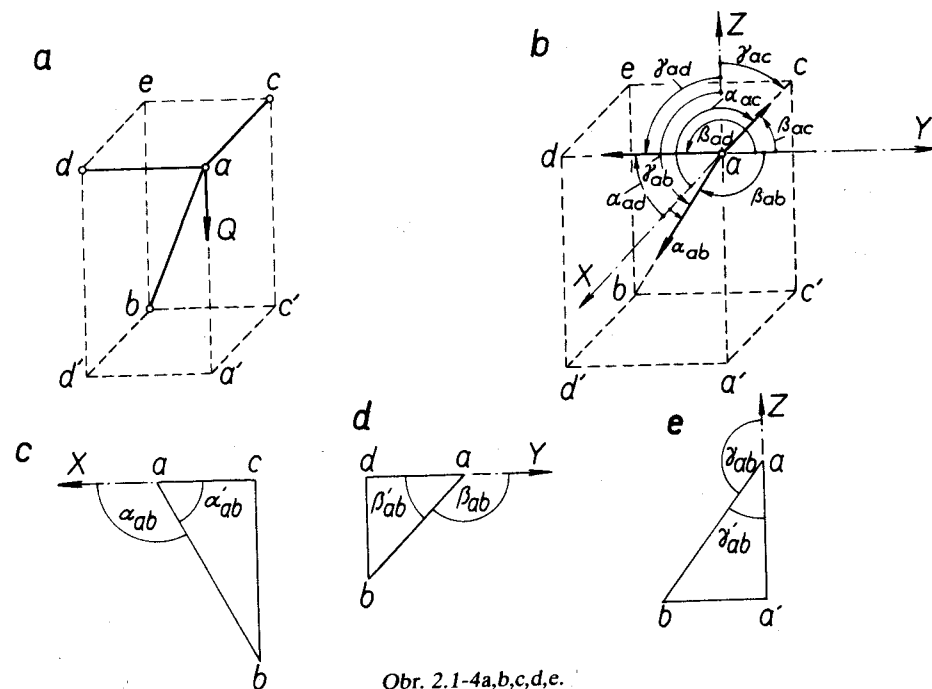
$$1,0383015 = 1 \rightarrow \Delta = 0,038$$

Príklad 2.1-4:

Závažie pôsobí silou $Q = 50 \text{ kN}$ v bode a na sústave troch prútov \overline{ab} , \overline{ac} , \overline{ad} , obr. 2.1-4a. Dĺžka prútov $\overline{ac} = 100 \text{ cm}$, $\overline{ad} = 30 \text{ cm}$, vzdialenosť bodov $\overline{eb} = 200 \text{ cm}$. Určte výpočtom veľkosti síl v prútoch \overline{ab} , \overline{ac} , \overline{ad} .

Riešenie:

Zvolíme si súradnicový systém X, Y, Z, napr. tak, ako je vyznačený na obr. 2.1-4b. Potom určíme uhly α_0 , β_0 , ..., ktoré zvierajú sily Q , P_{ab} , P_{ac} , P_{ad} s osami X, Y, Z, obr. 2.1-4 c, d, e.



Obr. 2.1-4a,b,c,d,e.

$$\overline{ac} = 100 \text{ cm}$$

$$\overline{cb} = \sqrt{\overline{eb}^2 + \overline{ad}^2} = \sqrt{200^2 + 30^2} = 202,2374 \text{ cm}$$

$$\text{tg } \alpha'_{ab} = \frac{\overline{cb}}{\overline{ac}} = \frac{202,2374}{100} = 2,022\ 2374 \rightarrow \alpha'_{ab} = 63^\circ 43'$$

$$\alpha_{ab} = 180^\circ - 63^\circ 43' = 116^\circ 17'$$

$$\overline{ad} = 30 \text{ cm}$$

$$\overline{bd} = \sqrt{\overline{be}^2 + \overline{de}^2} = \sqrt{200^2 + 100^2} = 223,6068 \text{ cm}$$

$$\text{tg } \beta'_{ab} = \frac{\overline{bd}}{\overline{ad}} = \frac{223,6068}{30} = 7,453\ 56 \rightarrow \beta'_{ab} = 82^\circ 21' 30''$$

$$\beta_{ab} = 180^\circ - 82^\circ 21' 30'' = 97^\circ 38' 30''$$

$$\overline{aa'} = 200 \text{ cm}$$

$$\overline{a'b} = \sqrt{\overline{a'd'}^2 + \overline{a'c'}^2} = \sqrt{30^2 + 100^2} = 104,403 \text{ cm}$$

$$\text{tg } \gamma'_{ab} = \frac{\overline{a'b}}{\overline{aa'}} = \frac{104,403}{200} = 0,522\ 01 \rightarrow \gamma'_{ab} = 27^\circ 34'$$

$$\gamma_{ab} = 180^\circ - 27^\circ 34' = 152^\circ 26'$$

Na obr. 2.1-4b sú vyznačené uhly α_{ab} , β_{ab} , γ_{ab} , ktoré zvierajú kladne orientovaný smer sily \mathbf{P}_{ab} s kladne orientovanými smermi súradnicových osí; podobne dostaneme aj uhly pre ostatné sily, čiže

$$\begin{aligned} \alpha_o &= 90^\circ, & \beta_o &= 90^\circ, & \gamma_o &= 180^\circ \\ \alpha_{ab} &= 116^\circ 17', & \beta_{ab} &= 97^\circ 38' 30'', & \gamma_{ab} &= 152^\circ 16' \\ \alpha_{ac} &= 180^\circ, & \beta_{ac} &= 90^\circ, & \gamma_{ac} &= 90^\circ \\ \alpha_{ad} &= 90^\circ, & \beta_{ad} &= 180^\circ, & \gamma_{ad} &= 90^\circ \end{aligned}$$

Smery síl \mathbf{Q} , \mathbf{P}_{ab} , \mathbf{P}_{ac} , \mathbf{P}_{ad} musia spĺňať podmienku $\cos^2 \alpha_i + \cos^2 \beta_i + \cos^2 \gamma_i = 1$; napr. pre smer sily \mathbf{P}_{ab}

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha_{ab} + \cos^2 \beta_{ab} + \cos^2 \gamma_{ab} &= 1 \\ (-0,4428)^2 + (-0,132\ 95)^2 + (0,8865)^2 &= 1 \\ 0,999\ 63 &= 1 \rightarrow \Delta = 0,000\ 37 \end{aligned}$$

Silu \mathbf{Q} rozložíme do troch zložiek \mathbf{P}_{ab} , \mathbf{P}_{ac} , \mathbf{P}_{ad} pomocou súčtových podmienok rovnováhy

$$Q \cdot \cos \alpha_o + P_{ab} \cdot \cos \alpha_{ab} + P_{ac} \cdot \cos \alpha_{ac} + P_{ad} \cdot \cos \alpha_{ad} = 0$$

$$Q \cdot \cos \beta_o + P_{ab} \cdot \cos \beta_{ab} + P_{ac} \cdot \cos \beta_{ac} + P_{ad} \cdot \cos \beta_{ad} = 0$$

$$Q \cdot \cos \gamma_o + P_{ab} \cdot \cos \gamma_{ab} + P_{ac} \cdot \cos \gamma_{ac} + P_{ad} \cdot \cos \gamma_{ad} = 0$$

Do predchádzajúcich troch rovníc dosadíme kosínusy príslušných uhlov a za silu zadanú hodnotu $Q = 50 \text{ kN}$, potom

$$50 \cdot 0 + P_{ab} \cdot (-0,4428) + P_{ac} \cdot (-1,0) + P_{ad} \cdot 0 = 0$$

$$50 \cdot 0 + P_{ab} \cdot (-0,1329) + P_{ac} \cdot 0 + P_{ad} \cdot (-1,0) = 0$$

$$50 \cdot 1 + P_{ab} \cdot (-0,8865) + P_{ac} \cdot 0 + P_{ad} \cdot 0 = 0$$

Po vyriešení sústavy rovníc dostaneme:

$$P_{ab} = -57,703 \text{ kN}, \quad P_{ac} = +25,551 \text{ kN}, \quad P_{ad} = +7,672 \text{ kN}$$

Príklad 2.1-5:

Na obr. 2.1-5a je prútová sústava, ktorá sa skladá zo 6 prútov. Sila $P = 2 \text{ kN}$ pôsobí na uzol a v rovine preloženej bodmi a , b , c , d . Medzi smerom sily \mathbf{P} a smerom spojnice \overline{ac} je uhol 30° ; trojuholníky $\Delta eaf = \Delta gbh$ sú rovnostranné. Určte sily vo všetkých šiestich prútoch.

Riešenie:

Urobíme rez prútom \overline{ab} ; sústava sa rozpadá na dva centrálné silové systémy vzájomne od seba závislé, pretože sila v prúte \overline{ab} je rovnaká, či už pôsobí na uzol a alebo b , teda $P_{ab} = P_{ba}$.

V uzle a si zvolíme súradnicový systém X_1 , Y_1 , Z_1 a predpokladáme ťahové pôsobenie síl, obr. 2.1-5b. Ak po vyriešení rovníc vychádza pri sile znamienko mínus, potom náš predpoklad o orientácii sily bol nesprávny a zmeníme ho na opačný. Pre uzol a napíšeme súčtové podmienky rovnováhy; najprv však stanovíme uhly (vyplývajú priamo zo zadania), ktoré zvierajú kladne orientované smery síl s kladne orientovaným smerom súradnicových osí.

$$\begin{aligned} \alpha_p &= 90^\circ \rightarrow \cos \alpha_p = 0, & \beta_p &= 60^\circ \rightarrow \cos \beta_p = 0,5 \\ \alpha_{af} &= 60^\circ \rightarrow \cos \alpha_{af} = 0,5, & \beta_{af} &= 90^\circ \rightarrow \cos \beta_{af} = 0 \\ \alpha_{ae} &= 120^\circ \rightarrow \cos \alpha_{ae} = -0,5, & \beta_{ae} &= 90^\circ \rightarrow \cos \beta_{ae} = 0 \end{aligned}$$

$$\alpha_{ab} = 90^\circ \rightarrow \cos \alpha_{ab} = 0, \quad \beta_{ab} = 0^\circ \rightarrow \cos \beta_{ab} = 1$$

$$\gamma_P = 150^\circ \rightarrow \cos \gamma_P = -0,866, \quad \gamma_{af} = 150^\circ \rightarrow \cos \gamma_{af} = -0,866$$

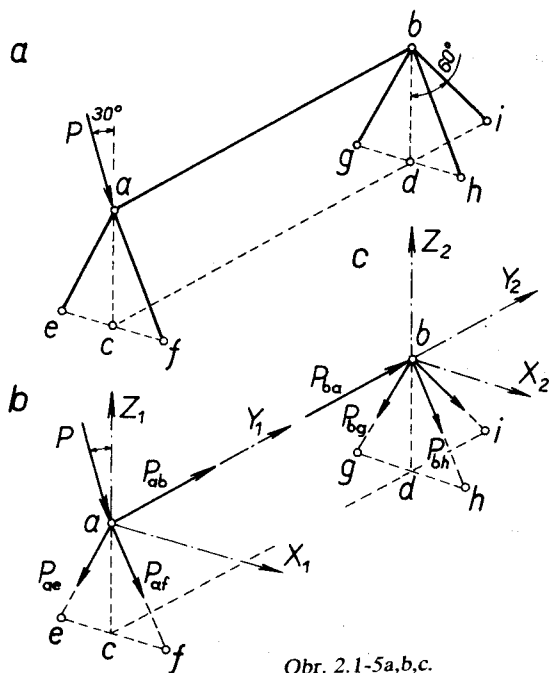
$$\gamma_{ae} = 150^\circ \rightarrow \cos \gamma_{ae} = -0,866, \quad \gamma_{ab} = 90^\circ \rightarrow \cos \gamma_{ab} = 0$$

Súčtové podmienky rovnováhy:

$$\sum_i^n P_{iX_1} = 0 \rightarrow P \cdot \cos \alpha_P + P_{af} \cdot \cos \alpha_{af} + P_{ae} \cdot \cos \alpha_{ae} + P_{ab} \cdot \cos \alpha_{ab} = 0$$

$$\sum_i^n P_{iY_1} = 0 \rightarrow P \cdot \cos \beta_P + P_{af} \cdot \cos \beta_{af} + P_{ae} \cdot \cos \beta_{ae} + P_{ab} \cdot \cos \beta_{ab} = 0$$

$$\sum_i^n P_{iZ_1} = 0 \rightarrow P \cdot \cos \gamma_P + P_{af} \cdot \cos \gamma_{af} + P_{ae} \cdot \cos \gamma_{ae} + P_{ab} \cdot \cos \gamma_{ab} = 0$$



Obr. 2.1-5a,b,c.

Po dosadení číselných hodnôt do uvedených rovníc dostaneme:

$$2 \cdot 0 + P_{af} \cdot 0,5 + P_{ae} \cdot (-0,5) + P_{ab} \cdot 0 = 0$$

$$2 \cdot 0,5 + P_{af} \cdot 0 + P_{ae} \cdot 0 + P_{ab} \cdot 1 = 0$$

$$2 \cdot (-0,866) + P_{af} \cdot (-0,866) + P_{ae} \cdot (-0,866) + P_{ab} \cdot 0 = 0$$

Po vyriešení sústavy rovníc dostaneme:

$$P_{ab} = -1,0 \text{ kN}, \quad P_{af} = -1,0 \text{ kN}, \quad P_{ae} = -1,0 \text{ kN}$$

V uzle b si zvolíme súradnicový systém X_2, Y_2, Z_2 a predpokladáme ťahové pôsobenie síl, obr. 2.1-5c. Skutočné (už vypočítané) pôsobenie sily $P_{ba} = 1,0 \text{ kN}$ je tlak. Pre uzol b opäť napíšeme súčtové podmienky rovnováhy; najprv určíme uhly, resp. ich goniometrické funkcie (pozri zadanie).

$$\alpha_{ba} = 90^\circ \rightarrow \cos \alpha_{ba} = 0, \quad \beta_{ba} = 0^\circ \rightarrow \cos \beta_{ba} = 1$$

$$\alpha_{bg} = 120^\circ \rightarrow \cos \alpha_{bg} = -0,5, \quad \beta_{bg} = 90^\circ \rightarrow \cos \beta_{bg} = 0$$

$$\alpha_{bh} = 60^\circ \rightarrow \cos \alpha_{bh} = 0,5, \quad \beta_{bh} = 90^\circ \rightarrow \cos \beta_{bh} = 0$$

$$\alpha_{bi} = 90^\circ \rightarrow \cos \alpha_{bi} = 0, \quad \beta_{bi} = 30^\circ \rightarrow \cos \beta_{bi} = 0,866$$

$$\gamma_{ba} = 90^\circ \rightarrow \cos \gamma_{ba} = 0, \quad \gamma_{bg} = 150^\circ \rightarrow \cos \gamma_{bg} = -0,866$$

$$\gamma_{bh} = 150^\circ \rightarrow \cos \gamma_{bh} = -0,866, \quad \gamma_{bi} = 120^\circ \rightarrow \cos \gamma_{bi} = -0,5$$

Súčtové podmienky rovnováhy:

$$\sum_i^n P_{iX_2} = 0 \rightarrow P_{ab} \cdot \cos \alpha_{ab} + P_{bg} \cdot \cos \alpha_{bg} + P_{bh} \cdot \cos \alpha_{bh} + P_{bi} \cdot \cos \alpha_{bi} = 0$$

$$\sum_i^n P_{iY_2} = 0 \rightarrow P_{ab} \cdot \cos \beta_{ab} + P_{bg} \cdot \cos \beta_{bg} + P_{bh} \cdot \cos \beta_{bh} + P_{bi} \cdot \cos \beta_{bi} = 0$$

$$\sum_i^n P_{iZ_2} = 0 \rightarrow P_{ab} \cdot \cos \gamma_{ab} + P_{bg} \cdot \cos \gamma_{bg} + P_{bh} \cdot \cos \gamma_{bh} + P_{bi} \cdot \cos \gamma_{bi} = 0$$

Po dosadení číselných hodnôt do uvedených rovníc dostaneme:

$$(-1) \cdot 0 + P_{bg} \cdot (-0,5) + P_{bh} \cdot (-0,5) + P_{bi} \cdot 0 = 0$$

$$(-1) \cdot 1 + P_{bg} \cdot 0 + P_{bh} \cdot 0 + P_{bi} \cdot 0,866 = 0$$

$$(-1) \cdot 0 + P_{bg} \cdot (-0,866) + P_{bh} \cdot (-0,866) + P_{bi} \cdot (-0,5) = 0$$

Po vyriešení sústavy rovníc

$$P_{bg} = -0,333 \text{ kN}, \quad P_{bh} = -0,333 \text{ kN}, \quad P_{bi} = 1,15473 \text{ kN}$$

Príklad 2.1-6:

Určte bod m , ktorý leží na výslednici síl centrálného silového systému, keď je známa vzdialenosť bodu m nad pôdorysnou $z_m = 3,0 \text{ m}$, obr. 2.1-6.

Zadané sú hodnoty veličín:

$$P_1 = 10,0 \text{ kN}, \quad \alpha_1 = 90^\circ, \quad \beta_1 = 60^\circ, \quad \gamma_1 = ?$$

$$P_2 = 30,0 \text{ kN}, \quad \alpha_2 = 60^\circ, \quad \beta_2 = ?, \quad \gamma_2 = 30^\circ$$

$$P_3 = 20,0 \text{ kN}, \quad \alpha_3 = ?, \quad \beta_3 = 45^\circ, \quad \gamma_3 = 45^\circ$$

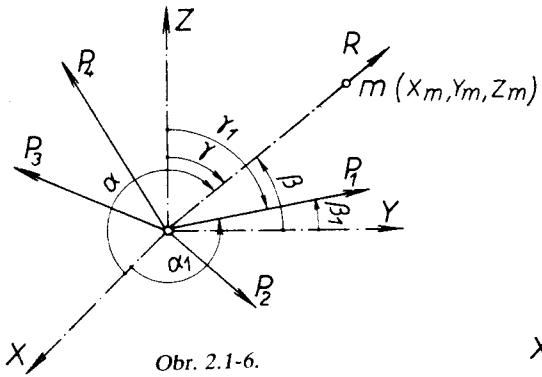
$$P_4 = 40,0 \text{ kN}, \quad \alpha_4 = 60^\circ, \quad \beta_4 = 60^\circ, \quad \gamma_4 = ?$$

Riešenie:

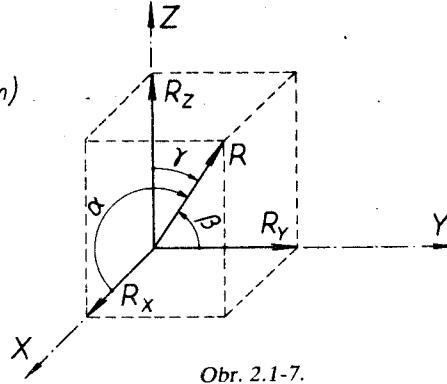
$$\gamma_1 = 30^\circ, \quad \beta_2 = 90^\circ, \quad \alpha_3 = 90^\circ, \quad \gamma_4 = 45^\circ$$

Veľkosť výslednice $R = 93,254 \text{ kN}$, smer výslednice $\alpha = 67^\circ 58'$, $\beta = 65^\circ 17'$, $\gamma = 34^\circ 14'$.

Bod m má súradnice $x_m = 1,362 \text{ m}$, $y_m = 1,542 \text{ m}$, $z_m = 3,0 \text{ m}$.



Obr. 2.1-6.



Obr. 2.1-7.

Príklad 2.1-7:

Rozložte silu R , ktorej veľkosť je $20,00 \text{ kN}$ do troch na seba kolmých smerov R_x , R_y , R_z , obr. 2.1-7. Uhly, ktoré zvierá sila R so zložkami R_x , R_y , R_z , sú $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = ?$

Riešenie:

$$\gamma = 45^\circ, \quad R_x = 10,00 \text{ kN}, \quad R_y = 10,00 \text{ kN}, \quad R_z = 14,14 \text{ kN}$$

Príklad 2.1-8:

Silu P , ktorej veľkosť je $50,00 \text{ kN}$ ($40,00 \text{ kN}$) rozložte do troch zložiek P_x , P_y , P_z , obr. 2.1-8; zložky majú rovnakú veľkosť a sú navzájom kolmé.

Riešenie:

$$P_x = P_y = P_z = 28,87 \text{ kN} \text{ (23,090 kN)}$$

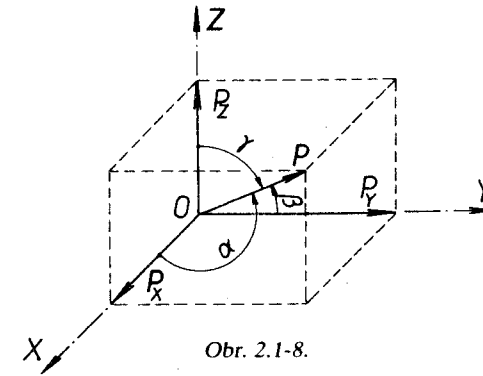
Príklad 2.1-9:

Rozložte danú silu R , ktorej veľkosť je $7,0 \text{ kN}$ do zložiek P_1 , P_2 , P_3 tak, aby sústava bola v rovnováhe. Sily vytvárajú centrálny silový systém a ich smery sú dané pôdorysom a nárysom, obr. 2.1-9a.

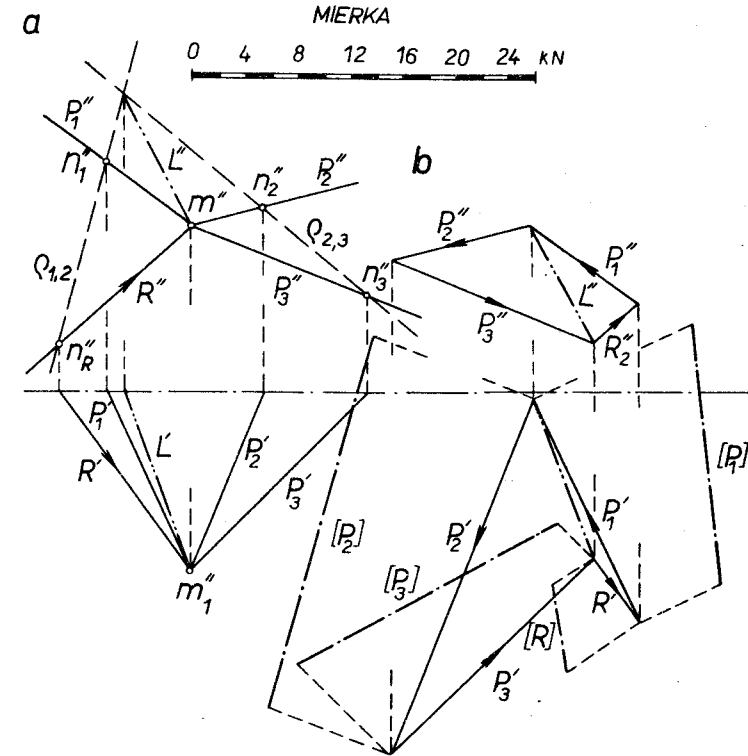
Riešenie:

Úlohu riešime napr. Cullmanovou metódou (môžeme ju riešiť aj metódou šikmého premietania, pozri príklad 2.1-10).

1. Silami R , P_1 a silami P_2 , P_3 preložíme rovinu — dostaneme pomocou stopníkov n_1 , n_R , resp. n_2 , n_3 a bodu m stopy roviny v náryse $Q_{1,R}$, resp. $Q_{2,3}$.



Obr. 2.1-8.



Obr. 2.1-9a,b.

2. Priesečnica rovín L'' , ktorej priemet v náryse je spojnice bodov $m''m''$, udáva smer čiastočnej výslednice.

3. V zložkovom obrázku pomocou skutočnej veľkosti sily R zostrojíme v zvolenej mierke R' , R'' , obr. 2.1-9b.

4. V náryse silu R'' rozložíme do smeru síl P_1' a L'' tak, aby sústava bola v rovnováhe (zložkový obrázok uzavretý a zmysel síl súhlasný).

5. Zmeníme zmysel sily L'' ($+L''$ a $-L''$ vytvára nulový silový systém a ďalšie riešenie neovplyvňuje) a rozkladáme ju do zložiek P_2'' , P_3'' a opäť vyžadujeme, aby sústava bola v rovnováhe.

6. Na základe metódy ortogonálneho premietania odvodíme pôdorys zložiek P_1' , P_2' , P_3' .

7. Pomocou mierky určíme skutočnú veľkosť zložiek $[P_1] = 20,0$ kN; $[P_2] = 29,5$ kN; $[P_3] = 22,5$ kN.

Príklad 2.1-10:

Rozložte danú silu R , ktorej veľkosť je 8,0 kN do zložiek P_1 , P_2 , P_3 tak, aby sústava bola v rovnováhe. Sily vytvárajú centrálny silový systém a ich smery sú dané ich pôdorysom a nárysom, obr. 2.1-10a.

Riešenie:

Úlohu riešime napr. metódou šikmého premietania (môžeme ju riešiť aj Cuilmanovou metódou, pozri príklad 2.1-9).

1. Zvolíme si niektorý smer zložky síl P_1 , P_2 , P_3 za smer šikmého premietania; zvolíme si napr. smer sily P_3' . Pomocou pôdorysných stopníkov p_1 , p_2 , p_3 , p_R dostaneme šikmé priemety síl (len tri P_1' , P_2' , R'), obr. 2.1-10a.

2. Pomocou pôdorysu a nárysu sily R zostrojíme v mierke skutočnú veľkosť R , ktorú preniesieme do šikmého priemetu R' , obr. 2.1-10b.

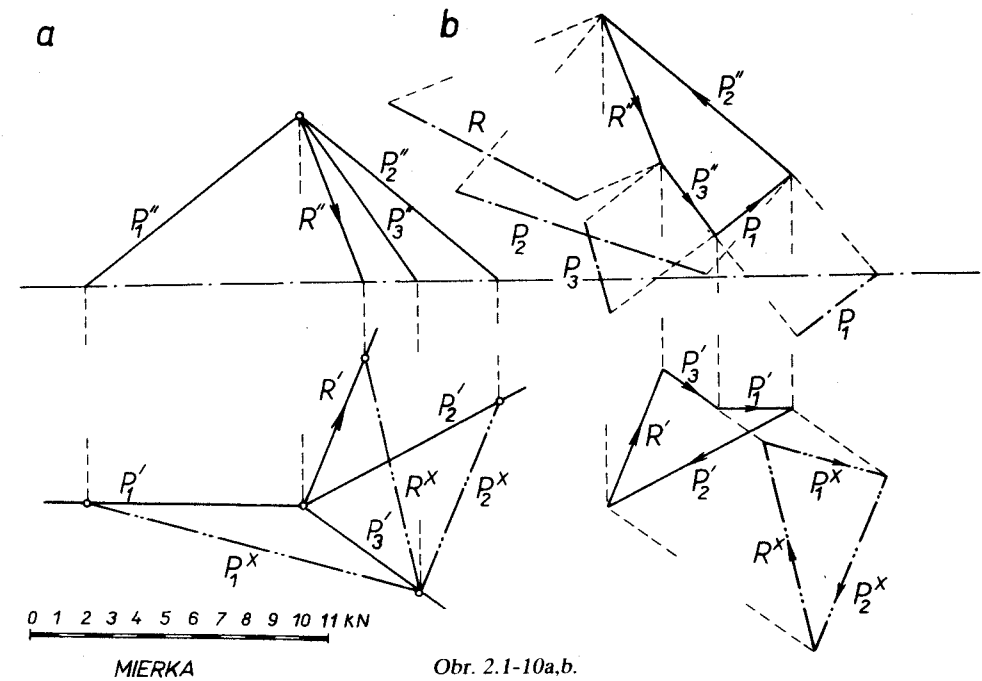
3. V šikmom priemete rozložíme silu R' do zložiek P_1' , P_2' tak, aby sústava bola v rovnováhe (zložkový obrázok je uzavretý a zmysel síl je súhlasný).

4. Zo zložkového obrázku v šikmom priemete odvodíme pôdorys zložkového mnohoúhelníka (pôdorys síl P_1' , P_2' , P_3' , R').

5. Metódou ortogonálneho premietania odvodíme nárys zložkového mnohoúhelníka (nárys síl P_1'' , P_2'' , P_3'' , R'').

6. V použitej mierke odmeriame skutočnú veľkosť zložiek $[P_1] = 3,7$ kN, $[P_2] = 10,0$ kN, $[P_3] = 3,9$ kN.

Poznámka: Ak by bola úloha zadaná tak, že sa vyžaduje len rozklad danej sily R do troch zložiek P_1 , P_2 , P_3 , potom postupujeme podľa riešenia v príklade 2.1-9, len zmysel zložiek vo vektorovom obrázku (priemet v pôdoryse alebo náryse) je opačný, ako je zmysel sily R .



Obr. 2.1-10a,b.

Príklad 2.1-11:

Rozložte danú silu R , ktorej veľkosť je 7,0 kN do zložiek P_1 , P_2 , P_3 tak, aby sústava bola v rovnováhe. Sily vytvárajú centrálny silový systém a ich smery sú dané ich pôdorysom a nárysom, pričom v pôdoryse sily P_1' a P_2' majú rovnaký smer, obr. 2.1-11a.

Riešenie:

Úlohu riešime ako tzv. špeciálny prípad, pretože v pôdoryse rozkladáme danú silu R do dvoch smerov, a to do spoločného smeru síl P_1' a P_2' a do smeru sily P_3' .

1. V zložkovom obrázku (obr. 2.1-11b) pomocou skutočnej veľkosti sily $[R]$ zostrojíme v zvolenej mierke R' , R'' .

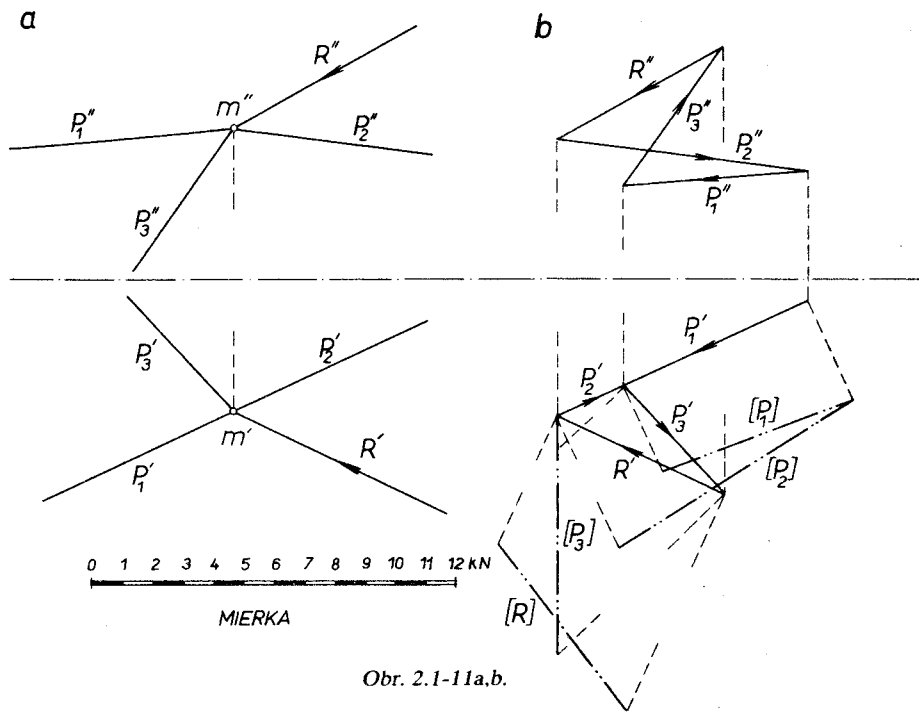
2. V pôdoryse rozložíme silu R' do spoločného smeru P_1' , P_2' a smeru P_3' .

3. V náryse určíme pomocou pôdorysného priemetu veľkosť sily R'' a P_3'' ; zložky síl P_1 a P_2 musia uzatvárať zložkový mnohoúhelník, a tým sú jednoznačne určené priemety síl v náryse.

Poznámka: Ak by bola úloha zadaná tak, že sa vyžaduje len rozklad danej sily R do troch zložiek P_1 , P_2 , P_3 , postupujeme potom tak isto, len zmysel zložiek vo vektorovom obrázku (vektorový obrázok je zostrojený v pôdoryse a náryse) je opačný ako zmysel sily R .

4. Odvodíme z narysu veľkosti síl P_1' a P_2' .

5. Pomocou použitej mierky odmeriame skutočnú veľkosť zložiek $[P_1] = 6,6 \text{ kN}$, $[P_2] = 9,3 \text{ kN}$, $[P_3] = 6,8 \text{ kN}$.



Obr. 2.1-11a,b.

Príklad 2.1-12:

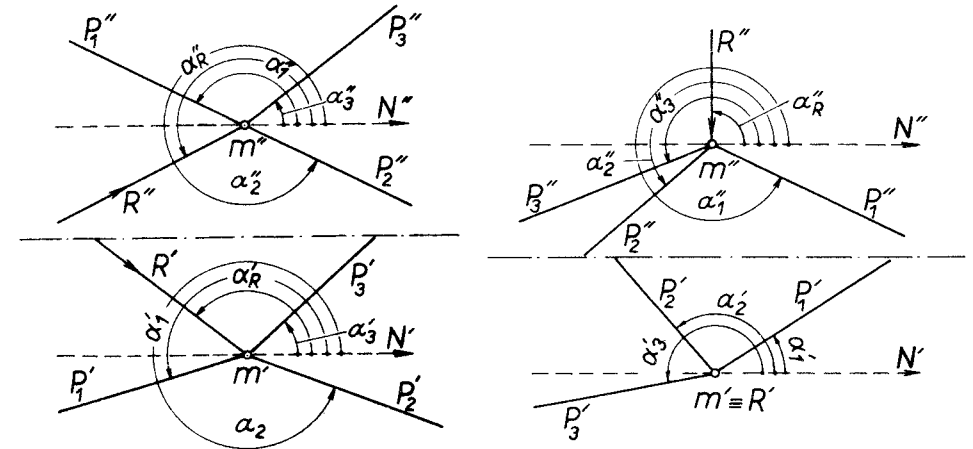
Rozložte silu R , ktorej veľkosť je $6,0 \text{ kN}$ do zložiek P_1 , P_2 , P_3 . Sily vytvárajú centrálny silový systém, pričom smer síl P_1' , P_2' v naryse je rovnaký, obr. 2.1-12. Priemety síl P_1' , P_2' , P_3' , R'' v naryse zvierajú s narysom priamky s'' uhly $\alpha_1'' = 149^\circ$, $\alpha_2'' = 329^\circ$, $\alpha_3'' = 43^\circ 30'$, $\alpha_R'' = 201^\circ 30'$; priemety síl P_1' , P_2' , P_3' , R' zvierajú s pôdorysom priamky s' uhly $\alpha_1' = 198^\circ 30'$, $\alpha_2' = 343^\circ 30'$, $\alpha_3' = 55^\circ 30'$, $\alpha_R' = 142^\circ 30'$.

Riešenie:

Veľkosť zložiek $[P_1] = 15,0 \text{ kN}$, $[P_2] = 16,8 \text{ kN}$, $[P_3] = 6,0 \text{ kN}$.

Príklad 2.1-13:

Rozložte danú silu R , ktorej veľkosť je $9,0 \text{ kN}$ do troch zložiek P_1 , P_2 , P_3 . Sily vytvárajú centrálny silový systém, pričom smer sily R je kolmý na pôdorysnu,



Obr. 2.1-12.

Obr. 2.1-13.

obr. 2.1-13. Priemety síl P_1' , P_2' , P_3' , R'' v naryse zvierajú s narysom priamky s'' uhly $\alpha_1'' = 337^\circ$, $\alpha_2'' = 215^\circ$, $\alpha_3'' = 204^\circ$, $\alpha_R'' = 90^\circ$.

Pôdorysný priemet síl P_1' , P_2' , P_3' zvierajú s pôdorysom priamky s' uhly $\alpha_1' = 42^\circ$, $\alpha_2' = 118^\circ$, $\alpha_3' = 201^\circ 30'$.

Riešenie:

Veľkosť zložiek $[P_1] = 15,8 \text{ kN}$, $[P_2] = 5,8 \text{ kN}$, $[P_3] = 16,0 \text{ kN}$.

2.2. VŠEOBECNÝ SILOVÝ SYSTÉM

Príklad 2.2-1:

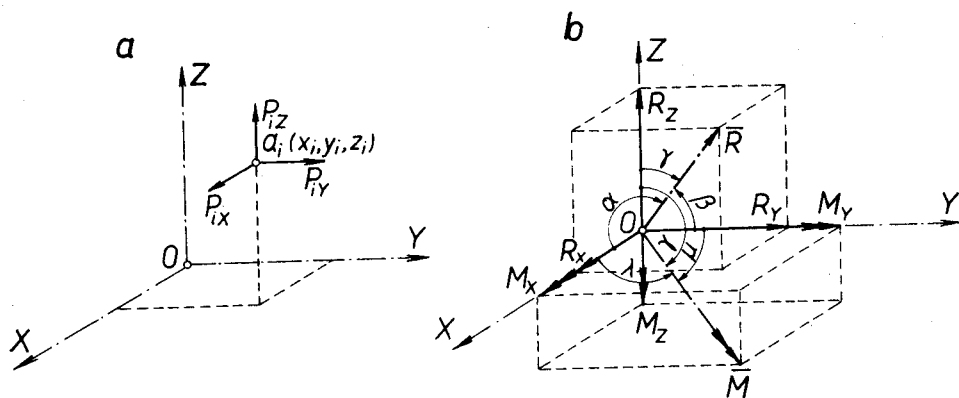
Nahraďte sústavu síl P_i pôsobiacich vzhľadom na daný súradnicový systém X , Y , Z v bodoch $a_i(x_i, y_i, z_i)$ (obr. 2.2-1a) vektorom výslednice R a vektorom výslednej silovej dvojice M ; vektory R a M pôsobia v začiatku súradnicového systému. Sily P_1 až P_4 sú dané priemetmi do smerov súradnicových osí X , Y , Z , čiže

P_1 pôsobiace v bode $a_1(2, 3, 4)$ má priemety

$$P_{1x} = 5 \text{ kN}, \quad P_{1y} = 6 \text{ kN}, \quad P_{1z} = 7 \text{ kN}$$

P_2 pôsobiace v bode $a_2(3, 4, 2)$ má priemety

$$P_{2x} = 5 \text{ kN}, \quad P_{2y} = 1 \text{ kN}, \quad P_{2z} = 3 \text{ kN}$$



Obr. 2.2-1a,b.

P_3 pôsobiace v bode $a_3(1, 0, 3)$ má priemety

$$P_{3x} = 3 \text{ kN}, \quad P_{3y} = 2 \text{ kN}, \quad P_{3z} = 8 \text{ kN}$$

P_4 pôsobiaca v bode $a_4(6, 5, 0)$ má priemety

$$P_{4x} = -5 \text{ kN}, \quad P_{4y} = 2 \text{ kN}, \quad P_{4z} = -6 \text{ kN}$$

Riešenie:

Určíme veľkosti priemetov výslednice R do smerov súradnicových osí zo vzťahov

$$R_x = \sum_{i=1}^4 P_{ix} \rightarrow R_x = P_{1x} + \dots + P_{4x} = 5 + 5 + 3 - 5 = 8 \text{ kN}$$

$$R_y = \sum_{i=1}^4 P_{iy} \rightarrow R_y = P_{1y} + \dots + P_{4y} = 6 + 1 + 2 + 2 = 11 \text{ kN}$$

$$R_z = \sum_{i=1}^4 P_{iz} \rightarrow R_z = P_{1z} + \dots + P_{4z} = 7 + 3 + 8 - 6 = 12 \text{ kN}$$

Veľkosť výslednice dostaneme z výrazu

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{8^2 + 11^2 + 12^2} = 18,138 \text{ kN}$$

smer vektora výslednice R je definovaný uhlami α, β, γ , obr. 2.2-1b.

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{8}{18,1383} = 0,441\,055 \rightarrow \alpha = 63^\circ 50'$$

$$\cos \beta = \frac{R_y}{R} = \frac{11}{18,1383} = 0,606\,45 \rightarrow \beta = 52^\circ 40'$$

$$\cos \gamma = \frac{R_z}{R} = \frac{12}{18,1383} = 0,661\,58 \rightarrow \gamma = 48^\circ 34'$$

Uhly musia spĺňať podmienku

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$0,441\,055^2 + 0,606\,45^2 + 0,661\,58^2 = 0,999\,99$$

$$\Delta = 0,000\,001$$

Aby sme mohli určiť výsledný vektor silovej dvojice, musíme najprv stanoviť veľkosť priemetu výslednej silovej dvojice do súradnicových osí.

$$M_x = \sum_{i=1}^4 (P_{iy} \cdot z_i - P_{iz} \cdot y_i) =$$

$$= 6 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 0 - 7 \cdot 3 - 3 \cdot 4 - 8 \cdot 0 - (-6) \cdot 5 = +29 \text{ kNm}$$

$$M_y = \sum_{i=1}^4 (P_{iz} \cdot x_i - P_{ix} \cdot z_i) =$$

$$= 7 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 8 \cdot 1 + (-6) \cdot 6 - 5 \cdot 4 - 5 \cdot 2 - 3 \cdot 3 - (-5) \cdot 0 = +44 \text{ kNm}$$

$$M_z = \sum_{i=1}^4 (P_{ix} \cdot y_i - P_{iy} \cdot x_i) =$$

$$= 5 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + (-5) \cdot 5 - 6 \cdot 2 - 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 6 = -19 \text{ kNm}$$

Veľkosť výslednej silovej dvojice dostaneme zo vzťahu

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{29^2 + 44^2 + (-19)^2} = 56,0172 \text{ kNm}$$

Smer vektora výslednej silovej dvojice M je definovaný uhlami λ, μ, ν , obr. 2.2-1b.

$$\cos \lambda = \frac{M_x}{M} = \frac{29}{56,0172} = 0,517\,69 \rightarrow \lambda = 58^\circ 46'$$

$$\cos \mu = \frac{M_y}{M} = \frac{44}{56,0172} = 0,785\,47 \rightarrow \mu = 38^\circ 15'$$

$$\cos \nu = \frac{M_z}{M} = \frac{(-19)}{56,0172} = 0,339\,18 \rightarrow \nu = 70^\circ 10'$$

Uhly musia spĺňať podmienku

$$\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1$$

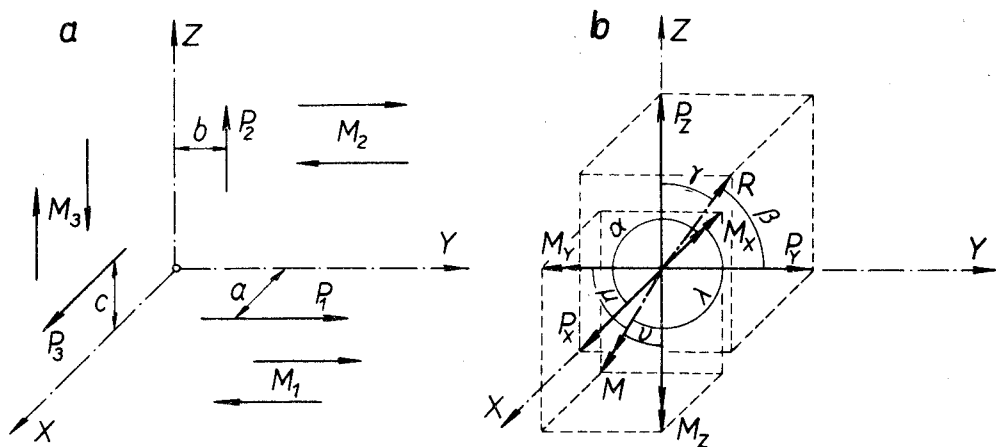
$$0,517\,69^2 + 0,785\,47^2 + 0,339\,18^2 = 1,000\,009$$

$$\Delta = 0,000\,009$$

Príklad 2.2-2:

Nahraďte statický účinok všeobecnej silovej sústavy vektorom výslednice **R** a vektorom výslednej silovej dvojice **M**, ktoré pôsobia v začiatku 0 daného súradnicového systému X, Y, Z.

Nech v rovine XY, obr. 2.2-2a, pôsobí sila $P_1 = 5$ kN, pričom P_1 je rovnobežná so smerom súradnicovej osi Y a silová dvojica $M_1 = 2$ kNm; v rovine YZ pôsobí sila $P_2 = 3$ kN, pričom P_2 je rovnobežná so smerom súradnicovej osi Z a silová dvojica $M_2 = 6$ kNm; v rovine XZ pôsobí sila $P_3 = 4$ kN, pričom P_3 je rovnobežná



Obr. 2.2-2a,b.

so smerom osi X a silová dvojica $M_3 = 4$ kNm; P_3 je rovnobežná so smerom osi X a silová dvojica $M_3 = 4$ kNm. Vzdialenosti síl P_1 , P_2 , P_3 od príslušnej súradnicovej osi $a = 2$ m, $b = 4$ m, $c = 3$ m, obr. 2.2-2a.

Riešenie:

Veľkosti priemetov výslednice do smerov súradnicových osí

$$R_x = \sum_{i=1}^3 P_{ix} \rightarrow R_x = P_3 = 4 \text{ kN}$$

$$R_y = \sum_{i=1}^3 P_{iy} \rightarrow R_y = P_1 = 5 \text{ kN}$$

$$R_z = \sum_{i=1}^3 P_{iz} \rightarrow R_z = P_2 = 3 \text{ kN}$$

Veľkosť vektora výslednice **R**, obr. 2.2-2b

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{4^2 + 5^2 + 3^2} = 7,071 \text{ kN}$$

smer vektora výslednice **R** je definovaný uhlami α , β , γ , obr. 2.2-2b.

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{4}{7,071} = 0,569 71 \rightarrow \alpha = 55^\circ 16'$$

$$\cos \beta = \frac{R_y}{R} = \frac{5}{7,071} = 0,712 14 \rightarrow \beta = 44^\circ 35'$$

$$\cos \gamma = \frac{R_z}{R} = \frac{3}{7,071} = 0,427 28 \rightarrow \gamma = 64^\circ 42'$$

uhly musia spĺňať podmienku

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$0,569 71^2 + 0,712 14^2 + 0,427 28^2 = 1,014 280$$

$$\Delta = 0,014 28$$

Veľkosť priemetov výslednej silovej dvojice do smerov súradnicových osí určíme z výrazov

$$M_x = \sum M_{ix} \rightarrow M_x = -P_2 \cdot b + M_2 = -3 \cdot 4 + 6 = -6 \text{ kNm}$$

$$M_y = \sum M_{iy} \rightarrow M_y = -P_3 \cdot c + M_3 = -4 \cdot 3 + 4 = -8 \text{ kNm}$$

$$M_z = \sum M_{iz} \rightarrow M_z = -P_1 \cdot a + M_1 = -5 \cdot 2 + 2 = -8 \text{ kNm}$$

Veľkosť vektora výslednej silovej dvojice dostaneme zo vzťahu

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2 + (-8)^2} = 12,81 \text{ kNm}$$

smer vektora výslednej dvojice **M** je definovaný uhlami λ , μ , ν , obr. 2.2-2b.

$$\cos \lambda = \frac{M_x}{M} = \frac{-6}{12,81} = 0,468 384 \rightarrow \lambda = 62^\circ 4'$$

$$\cos \mu = \frac{M_y}{M} = \frac{-8}{12,81} = 0,624 512 \rightarrow \mu = 51^\circ 21'$$

$$\cos \nu = \frac{M_z}{M} = \frac{-8}{12,81} = 0,624 12 \rightarrow \nu = 51^\circ 21'$$

musí sa splniť podmienka

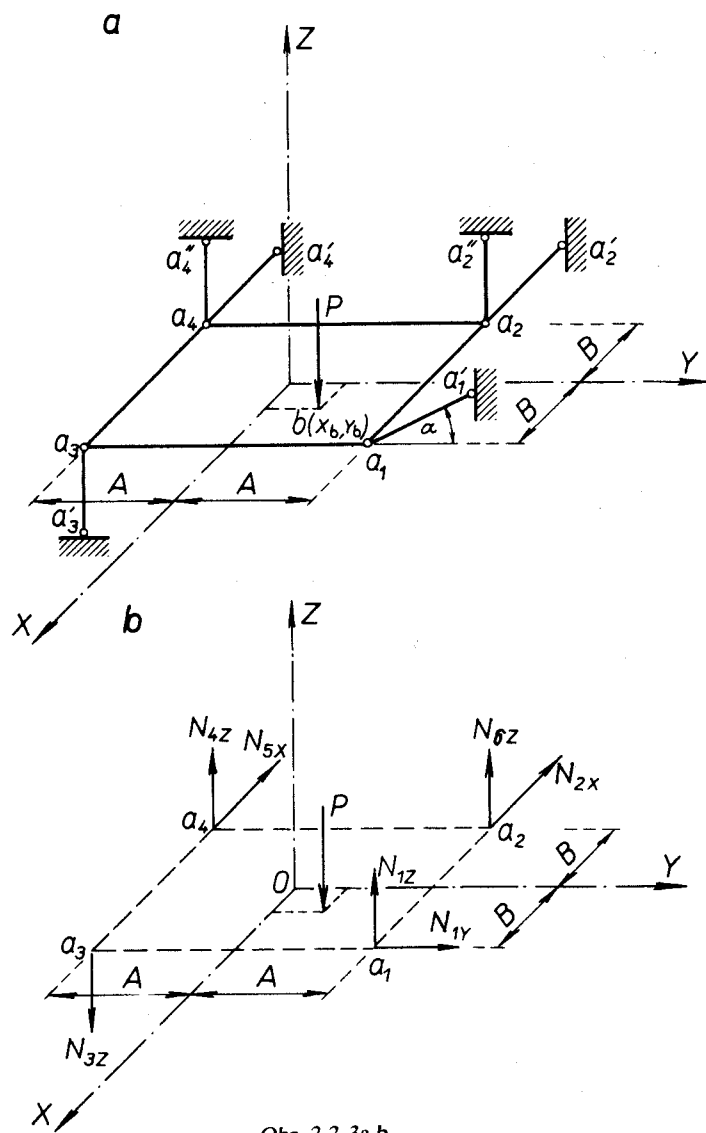
$$\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1$$

$$0,468 384^2 + 0,624 512^2 + 0,624 512^2 = 0,99 414$$

$$\Delta = 0,000 586$$

Príklad 2.2-3:

Určte osové sily $\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_6$ v kyvných prútoch $\overline{a_1 a'_1}, \dots, \overline{a_4 a'_4}$, ktoré pridržiavajú pravouhlú dosku a_1, a_2, a_3, a_4 , obr. 2.2-3a, v rohoch tak, aby sústava bola v rovnováhe. Na dosku pôsobí sila $P = 5 \text{ kN}$ v bode b , ktorý vzhľadom na zvolený súradnicový systém (obr. 2.2-3a) má súradnice $b(x_b, y_b)$. Uhol, ktorý



Obr. 2.2-3a,b.

zvíra smer prúta $\overline{a_1 a'_1}$ so smerom osi Y, je $\alpha = 60^\circ$; strany dosky $A = 6,0 \text{ m}$, $B = 7,0 \text{ m}$ sú definované podľa obr. 2.2-3a. Vlastnú tiaž dosky neberieme do úvahy.

Riešenie:

Sily (reakcie) $\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_6$, ktorými nahradzujeme väzby kyvnými prútmi, pôsobia v smere spojnice kĺbov kyvných prútov, teda v smere $\overline{a_1 a'_1}, \dots, \overline{a_4 a'_4}$. O reakciách $\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_6$ predpokladáme, že pôsobia ako ťahy. Po uvoľnení väzieb a rozklade síl do smerov súradnicových osí (v tejto úlohe rozkladáme do dvoch smerov len silu \mathbf{N}_1 , a to do smeru $\mathbf{N}_{1y}, \mathbf{N}_{1z}$; ostatné reakcie sú súhlasné so smerom niektorej súradnicovej osi) riešime priestorovú sústavu síl, pre ktorú platí 6 statických podmienok rovnováhy.

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} + \sum_{k=1}^m N_{kx} = 0 \rightarrow -N_{2x} - N_{5x} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} + \sum_{k=1}^m N_{ky} = 0 \rightarrow -N_{1y} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iz} + \sum_{k=1}^m N_{kz} = 0 \rightarrow -P + N_{1z} - N_{3z} + N_{4z} + N_{6z} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_{ix}^P + \sum_{k=1}^m M_{kx} = 0 \rightarrow +P \cdot y_b - N_{1z} \cdot A - N_{3z} \cdot A + N_{4z} \cdot A - N_{6z} \cdot A = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iy}^P + \sum_{k=1}^m M_{ky} = 0 \rightarrow +P \cdot x_b + N_{1z} \cdot B - N_{3z} \cdot B - N_{4z} \cdot B - N_{6z} \cdot B = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iz}^P + \sum_{k=1}^m M_{kz} = 0 \rightarrow -N_{1y} \cdot B - N_{5x} \cdot A - N_{5x} \cdot A = 0$$

Zložky priemetov síl: $N_{1y} = N_1 \cdot \cos \alpha = 0,5N_1$, $N_{1z} = N_1 \cdot \sin \alpha = 0,866N_1$, $N_{2x} = N_2$, $N_{3z} = N_3$, $N_{4z} = N_4$, $N_{5x} = N_5$, $N_{6z} = N_6$.

Výrazy dosadíme do podmienok rovnováhy a po úprave dostaneme:

$$N_2 + N_5 = 0$$

$$0,5N_1 = 0$$

$$-5,0 + 0,866N_1 - N_3 + N_4 + N_6 = 0$$

$$5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} - 0,866N_1 - N_3 + N_4 - N_6 = 0$$

$$5 \cdot 1 \cdot \frac{1}{7} + 0,866N_1 - N_3 - N_4 - N_6 = 0$$

$$-0,5 \cdot 7 \cdot N_1 - 6 \cdot N_2 + 6 \cdot N_5 = 0$$

po vyriešení uvedeného systému rovníc dostaneme sily:

$$N_1 = 0, \quad N_2 = 0, \quad N_3 = -2,142 \text{ kN}, \quad N_4 = -0,476 \text{ kN}, \quad N_5 = 0, \quad N_6 = 3,333 \text{ kN}.$$

Výpočet prekontrolujeme napr. tak, že k osi $\overline{a_1 a_2}$ napíšeme momentovú podmienku

$$\begin{aligned} \sum M_{\overline{a_1 a_2}} = 0 \rightarrow & -P \cdot (A - y_b) - N_3 \cdot 2A + N_4 \cdot 2A = 0 \\ & -5 \cdot (6 - 2) - (-2,142 \cdot 86) \cdot 2 \cdot 6 + \\ & + (-0,476 \cdot 193) \cdot 2 \cdot 6 = 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = 0,000 \ 004$$

Znamienko mínus pri silách N_3, N_4 znamená, že zmysel reakcií je opačný, ako sme predpokladali.

Príklad 2.2-4:

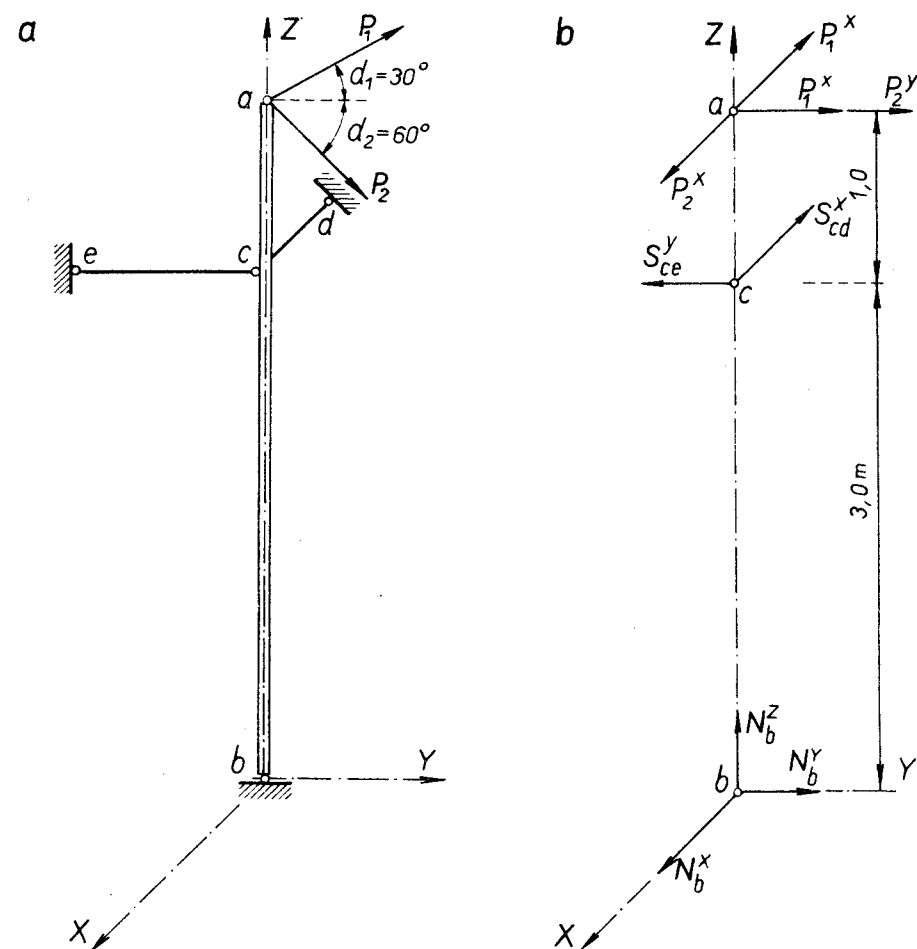
Elektrické vedenie (drôt) pôsobí v horizontálnej rovine silami $P_1 = 2 \text{ kN}$, $P_2 = 3 \text{ kN}$ na elektrický stožiar, obr. 2.2-4a. Určte sily v prútoch \overline{cd} , \overline{ce} a reakcie v kĺbe b . Predpokladajme, že stĺp \overline{ab} je dokonale tuhý a v mieste b kĺbovo uložený; vzdialenosti $\overline{ac} = 1 \text{ m}$, $\overline{bc} = 3 \text{ m}$ (dĺžky kyvných prútov neovplyvňujú výpočet reakcií).

Riešenie:

Sily (reakcie) v uvoľnených väzbách, t.j. v kyvných prútoch, \overline{cd} , \overline{ce} a v kĺbe b aj zadané vonkajšie sily $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ rozkladáme do smerov zvoleného súradnicového systému X, Y, Z , obr. 2.2-4b, na ktorom je zakreslená i orientácia síl (reakcií) uvoľnených väzieb. Poznamenávame, že kyvný prút nahradzame silou, ktorej smer je totožný so smerom spojnice koncových bodov kyvného prúta; guľový kĺb b nahradzame troma zložkami síl, ktorých smer je napr. rovnobežný so smerom súradnicových osí. Po splnení uvedených postupov dostaneme priestorovú sústavu síl a neznáme reakcie vypočítame zo statických podmienok rovnováhy.

$$\sum_i P_{ix} + \sum_k N_{kx} = 0 \rightarrow -P_1^x + P_2^x - N_{cd} + N_b^x = 0$$

$$\sum_i P_{iy} + \sum_k N_{ky} = 0 \rightarrow P_1^y + P_2^y - N_{ce} + N_b^y = 0$$



Obr. 2.2-4a,b.

$$\sum_i P_{iz} + \sum_k N_{kz} = 0 \rightarrow N_b^z = 0$$

$$\sum_i M_{ix}^p + \sum_k M_{kx}^N = 0 \rightarrow P_1^y \cdot \overline{ab} + P_2^y \cdot \overline{ab} - N_{ce} \cdot \overline{bc} = 0$$

$$\sum_i M_{iy}^p + \sum_k M_{ky}^N = 0 \rightarrow P_1^x \cdot \overline{ab} - P_2^x \cdot \overline{ab} + N_{cd} \cdot \overline{bc} = 0$$

$$\sum_i M_{iz}^p + \sum_k M_{kz}^N = 0 \rightarrow \text{podmienka je identicky splnená}$$

Poznámka: Sústava má 5 stupňov voľnosti, čomu zodpovedá 5 statických podmienok rovnováhy.

Vyjadrieme priemety zadaných vonkajších síl \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 a reakcií do smerov súradnicových osí

$$X \rightarrow P_1^x = P_1 \cdot \sin \alpha_1 = 1,0 \text{ kN},$$

$$N_{cd}^x = N_{cd}$$

$$P_2^x = P_2 \cdot \sin \alpha_2 = 2,598 \text{ kN}$$

$$N_{ce}^x = 0$$

$$Y \rightarrow P_1^y = P_1 \cdot \cos \alpha_1 = 1,732 \text{ kN},$$

$$N_{cd}^y = 0$$

$$P_2^y = P_2 \cdot \cos \alpha_2 = 1,5 \text{ kN}$$

$$N_{ce}^y = N_{ce}$$

$$Z \rightarrow P_1^z = 0$$

$$P_2^z = 0$$

$$N_{cd}^z = 0$$

$$N_{ce}^z = 0$$

Uvedené vzťahy a geometrické zadanie dosadíme do statických podmienok rovnováhy (obr. 2.2-4a, b)

$$-1,0 + 2,598 - N_{cd} + N_b^x = 0$$

$$+1,732 + 1,5 - N_{ce} + N_b^y = 0$$

$$N_b^z = 0$$

$$1,732 \cdot 4 + 1,5 \cdot 4 - 3 \cdot N_{ce} = 0$$

$$1 \cdot 4 - 2 \cdot 598 \cdot 4 + 3 \cdot N_{cd} = 0$$

Po vyriešení systému rovníc dostaneme sily: $N_b^x = 0,53266 \text{ kN}$; $N_b^y = 1,0773 \text{ kN}$; $N_b^z = 0$; $N_{cd} = 2,13066 \text{ kN}$; $N_{ce} = 4,3093 \text{ kN}$.

Predpokladaná orientácia zložiek reakcií sa podľa výpočtu (znamienko plus) zhoduje so skutočnosťou.

Výpočet kontrolujeme tak, že napíšeme napr. momentovú podmienku rovnováhy k osi Y' , ktorá prechádza bodom c a je rovnobežná s osou Y

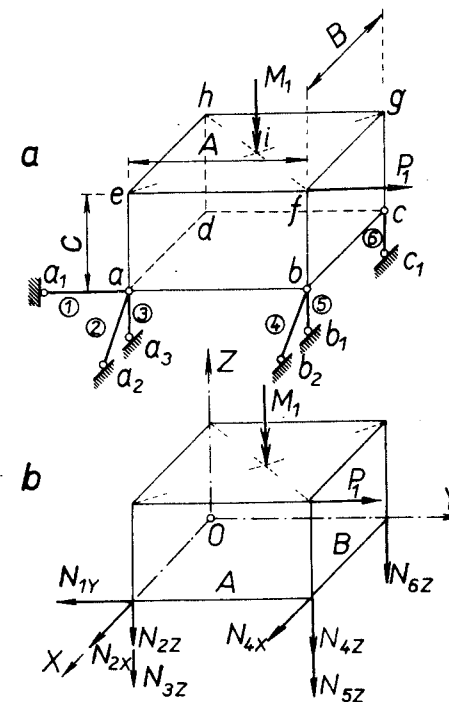
$$\sum M_{iy}^P + \sum M_{ky}^N = 0 \rightarrow P_1^x \cdot \overline{ac} - P_2^x \cdot \overline{ac} + N_b^x \cdot \overline{bc} = 0$$

$$1,0 \cdot 1 - 2,598 \cdot 1 + 0,53266 \cdot 3 = 0$$

$$\Delta = 0,00002$$

Príklad 2.2-5:

Určte reakcie na telese, ktoré je zaťažené silou \mathbf{P}_1 , ktorej veľkosť je 10 kN v bode f a vektorom silovej dvojice \mathbf{M}_1 , ktorej veľkosť je 30 kNm v bode i . Popis väzieb, geometrického tvaru a pôsobenie vonkajšieho zaťaženia je na obr. 2.2-5a. Rozmery hranola $A = 3 \text{ m}$, $B = 3 \text{ m}$, $C = 1 \text{ m}$.



Obr. 2.2-5a,b.

Riešenie:

Väzby kyvnými prútmi nahradíme silami (reakciami) \mathbf{N}_k , ktoré pôsobia v smere spojnic kĺbov kyvných prútov; sily \mathbf{N}_k predpokladáme ako ťahy. Primárne sily (i silové dvojice) zaťaženia aj reakcie (sekundárne sily) rozkladáme do smerov súradnicového systému X, Y, Z , ktorý sme si zvolili tak, ako je vyznačený na obr. 2.2-5b. Dostaneme priestorovú všeobecnú silovú sústavu a neznáme sily (reakcie) vypočítame zo šiestich statických podmienok rovnováhy

$$\sum_i P_{ix} + \sum_k N_{kx} = 0 \rightarrow N_{2x} + N_{4x} = 0$$

$$\sum_i P_{iy} + \sum_k N_{ky} = 0 \rightarrow P_1 - N_{1y} = 0$$

$$\sum_i P_{iz} + \sum_k N_{kz} = 0 \rightarrow -N_{2z} - N_{3z} - N_{4z} - N_{5z} - N_{6z} = 0$$

$$\sum_i M_{ix} + \sum_k M_{kx} = 0 \rightarrow P_1 \cdot C + N_{4z} \cdot A + N_{5z} \cdot A + N_{6z} \cdot A = 0$$

$$\sum_i M_{iy} + \sum_k M_{ky} = 0 \rightarrow -N_{2z} \cdot B - N_{3z} \cdot B - N_{4z} \cdot B - N_{5z} \cdot B = 0$$

$$\sum_i M_{iz} + \sum_k M_{kz} = 0 \rightarrow M_1 - P_1 \cdot B + N_{1y} \cdot B + N_{4x} \cdot A = 0$$

Priemety síl a silových dvojíc vyjadríme do smerov súradnicových osí; geometrické údaje sú na obr. 2.2-5b.

$$X \rightarrow N_{1x} = 0, N_{2x} = N_2 \cdot \sin 60^\circ = 0,866 N_2$$

$$N_{3x} = 0, N_{4x} = N_4 \cdot \sin 60^\circ = 0,866 N_4$$

$$N_{5x} = 0, N_{6x} = 0$$

$$Y \rightarrow N_{1y} = N_1, N_{2y} = 0, N_{3y} = 0, N_{4y} = 0$$

$$N_{5y} = 0, N_{6y} = 0$$

$$Z \rightarrow N_{1z} = 0, N_{2z} = N_2 \cdot \cos 60^\circ = 0,5 N_2, N_{3z} = N_3$$

$$N_{4z} = N_4 \cdot \cos 60^\circ = 0,5 N_4, N_{5z} = N_5, N_{6z} = N_6$$

Z uvedených vzťahov dosadíme do statických podmienok rovnováhy číselné hodnoty a dostaneme:

$$0,866 \cdot N_2 + 0,866 \cdot N_4 = 0$$

$$10 - N_1 = 0$$

$$-0,5 N_2 - N_3 - 0,5 N_4 - N_5 - N_6 = 0$$

$$10 \cdot 1,0 + 0,5 \cdot 3,0 \cdot N_4 + 3 N_5 + 3,0 \cdot N_6 = 0$$

$$-0,5 \cdot 2,0 N_2 - 2,0 N_3 - 0,5 \cdot 2,0 N_4 - 2,0 N_5 = 0$$

$$10 - 10 \cdot 2,0 + 2,0 N_1 + 0,866 \cdot 3,0 N_4 = 0$$

Po vyriešení sústavy rovníc dostaneme veľkosti síl: $N_1 = 10 \text{ kN}$, $N_2 = -11,547 \text{ kN}$, $N_3 = 9,106 \text{ kN}$, $N_4 = 11,547 \text{ kN}$, $N_5 = -9,106 \text{ kN}$, $N_6 = 0$.

Výpočet prekontrolujeme tak, že napíšeme napr. momentovú podmienku k osi bc , teda

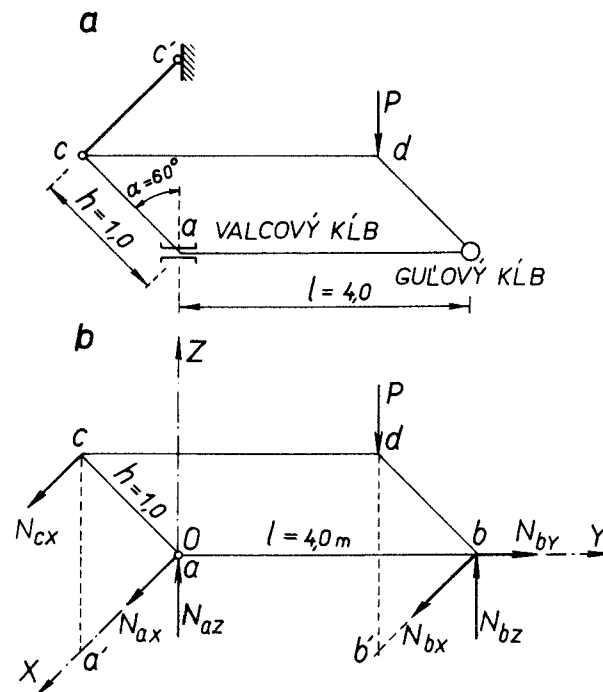
$$\sum M_{bc} = 0 \rightarrow P_1 \cdot C - N_{2z} \cdot A - N_{3z} \cdot A = 0$$

$$10 \cdot 1,0 - 0,5 \cdot 3,0 \cdot (-11,547) - 3,0 \cdot 9,106 = 0$$

$$\Delta = 0,0025$$

Príklad 2.2-6:

Určte reakcie na doske (telese) $abcd$, ktorá je zatažená zvislou silou P , ktorej veľkosť je 2 kN pôsobiaca v bode d , obr. 2.2-6a. Doska je podopretá v bode a valcovým kĺbom, v mieste b guľovým kĺbom a v mieste c je kyvný prút. Rozmery dosky: dĺžka $l = 4 \text{ m}$, šírka $h = 1,0 \text{ m}$, doska zvierá so zvislou rovinou uhol $\alpha = 60^\circ$.



Obr. 2.2-6a,b.

Riešenie:

Zvolíme si súradnicový systém tak, ako je to vyznačené na obr. 2.2-6b. Väzbu kyvným prútom cc' nahradíme silou (reakciou) $\mathbf{N}_c = \mathbf{N}_{cx}$, ktorej smer je určený spojnicou kĺbov kyvného prúta cc' ; väzbu valcovým kĺbom nahradíme zložkami síl \mathbf{N}_{ax} , \mathbf{N}_{az} ; väzbu guľovým kĺbom nahradíme troma zložkami síl \mathbf{N}_{bx} , \mathbf{N}_{by} , \mathbf{N}_{bz} . Pri zostavovaní statických podmienok rovnováhy predpokladáme orientáciu síl (reakcií) tak, ako je to naznačené (šípky) na obr. 2.2-6b. Dostaneme priestorovú všeobecnú sústavu síl a neznáme sily (reakcie) vypočítame zo šiestich statických podmienok rovnováhy.

$$\sum_i P_{ix} + \sum_k N_{kx} = 0 \rightarrow N_{ax} + N_{bx} + N_{cx} = 0$$

$$\sum_i P_{iy} + \sum_k N_{ky} = 0 \rightarrow N_{by} = 0$$

$$\sum_i P_{iz} + \sum_k N_{kz} = 0 \rightarrow -P + N_{az} + N_{bz} = 0$$

$$\sum_i M_{ix} + \sum_k M_{kx} = 0 \rightarrow P \cdot \overline{ab} - N_{bz} \cdot \overline{ab} = 0$$

$$\sum_i M_{iy} + \sum_k M_{ky} = 0 \rightarrow -P \cdot \overline{bb'} - N_{cx} \cdot \overline{ac'} = 0$$

$$\sum_i M_{iz} + \sum_k M_{kz} = 0 \rightarrow N_{bx} = 0$$

Podľa obr. 2.2-6b vyjadríme geometrické závislosti, ktoré sa vyskytujú v predchádzajúcich rovniciach.

$$\overline{cc'} = \overline{ac} \cdot \sin 60^\circ = 1 \cdot 0,866 = 0,866 \text{ m}$$

$$\overline{aa'} = \overline{bb'} = \overline{cc'}$$

$$\overline{ac'} = \overline{ac} \cdot \cos 60^\circ = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ m}$$

Do podmienok rovnováhy dosadíme číselné hodnoty geometrických vzťahov a dostaneme:

$$-N_{ax} + N_{bx} + N_{cx} = 0$$

$$N_{by} = 0$$

$$-2,0 + N_{az} + N_{bz} = 0$$

$$2,0 - N_{bz} = 0$$

$$-2,0 \cdot 0,866 - N_{cx} \cdot 0,5 = 0$$

$$N_{bx} = 0$$

po vyriešení uvedenej sústavy rovníc dostaneme veľkosti síl (reakcií):

$$N_{ax} = 3,464 \text{ kN}, N_{az} = 0, N_{bx} = 0, N_{by} = 0$$

$$N_{bz} = 2,0 \text{ kN}, N_{cx} = -3,464 \text{ kN}$$

Poznámka: Sila N_{cx} bude mať opačnú orientáciu, ako sme predpokladali.

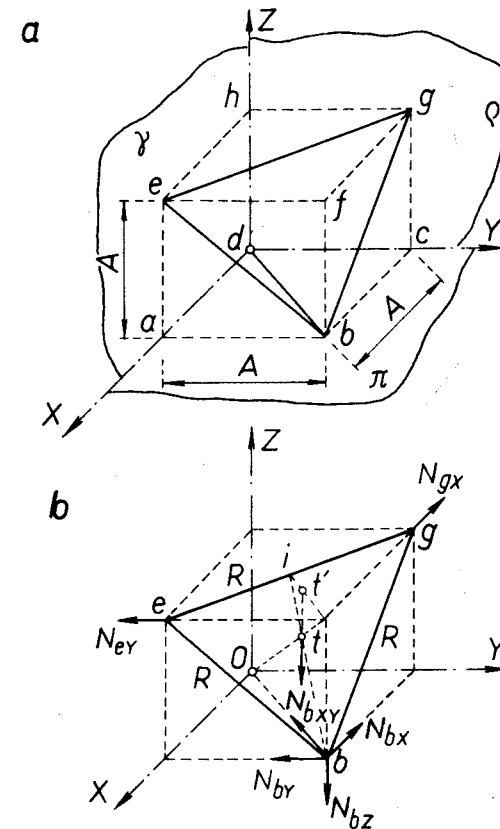
Správnosť výpočtu prekontrolujeme tak, že si k ľubovoľnej osi zvolíme momentovú podmienku, napr. k osi $\overline{b'd}$ a k osi $\overline{a'b'}$,

$$\begin{aligned} \Sigma M_{\overline{b'd}} = 0 &\rightarrow -N_{cx} \cdot \overline{ab} - N_{ax} \cdot \overline{ab} + N_{by} \cdot \overline{bb'} = 0 \\ &\rightarrow -(-3,464) \cdot 4 - 3,464 \cdot 4 = 0, \Delta = 0,0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_{\overline{a'b'}} = 0 &\rightarrow -N_{cx} \cdot \overline{a'c} - N_{az} \cdot \overline{aa'} - N_{bz} \cdot \overline{bb'} = 0 \\ &\rightarrow -(-3,464) \cdot 0,5 - 2 \cdot 0,866 = 0, \Delta = 0,0 \end{aligned}$$

Príklad 2.2-7:

Trojuholníková doska beg , ktorej rozmery a poloha sú určené podľa obr. 2.2-7a (rovnostranný trojuholník so stranou R , jeho strany sú spojnice



Obr. 2.2-7a,b.

vrcholov, b, e, g kocky so stranou A), je podopretá vo vrchole e o dokonale hladkú rovinu v , podobne je podopretá vo vrchole g , resp. b rovinou ρ , resp. π ; vo vrchole b je uchytená ťahadlom \overline{bd} . Určte reakcie vo vrcholoch b, e, g od sily tiaže G trojuholníkovej dosky, ktorej veľkosť je $6,975$ kN. Strana kocky, do ktorej je tvar dosky vpísaný, je $A = 4,0$ m.

Riešenie:

Zvolíme si súradnicový systém X, Y, Z tak, ako je naznačený na obr. 2.2-7b. Väzbu dokonale hladkým vedením (roviny π, v, ρ) nahradzame silou (reakciou) pôsobiacou v bode e , ktorej smer je kolmý na rovinu vedenia v ; podobne postupujeme pri uvoľňovaní väzieb v bode g , resp. b ; väzbu ťahadlom \overline{bd} v bode b nahradíme silou (reakciou), ktorej smer je určený spojnicou \overline{bd} .

Orientáciu síl predpokladáme tak, ako je to naznačené na obr. 2.2-7b, pričom sily rozložíme do smerov súradnicových osí (v tejto úlohe rozkladáme len silu v ťahadle, pretože pri ostatných silách je ich smer totožný so smerom niektorej súradnicovej osi). Dostaneme priestorovú všeobecnú sústavu síl a neznáme sily vypočítame zo šiestich statických podmienok rovnováhy. Najprv však určíme pomocné veličiny. Strana trojuholníka $R = \sqrt{2 \cdot A^2} = \sqrt{2 \cdot 4^2} = 5,657$ m (obr. 2.2-7a). Súradnica ťažiska $t(x_t, y_t, z_t)$ trojuholníkovej dosky

$$x_t = y_t = z_t = \frac{A}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{A}{2} = \frac{2}{3}A$$

Statické podmienky rovnováhy

$$\sum_i P_{ix} + \sum_k N_{kx} = 0 \rightarrow -N_{bx} - N_{ax} = 0$$

$$\sum_i P_{iy} + \sum_k N_{ky} = 0 \rightarrow -N_{ey} - N_{by} = 0$$

$$\sum_i P_{iz} + \sum_k N_{kz} = 0 \rightarrow -G - N_{bz} = 0$$

$$\sum_i M_{ix} + \sum_k M_{kx} = 0 \rightarrow G \cdot y_t - N_{ey} \cdot A + N_{bz} \cdot A = 0$$

$$\sum_i M_{iy} + \sum_k M_{ky} = 0 \rightarrow -G \cdot x_t - N_{ax} \cdot A - N_{bz} \cdot A = 0$$

$$\sum_i M_{iz} + \sum_k M_{kz} = 0 \rightarrow N_{ey} \cdot A - N_{ax} \cdot A + N_{by} \cdot A - N_{bx} \cdot A = 0$$

Do statických podmienok rovnováhy dosadíme číselné hodnoty pomocných aj zadaných veličín a dostaneme:

$$-N_{bx} - N_{ax} = 0$$

$$-N_{ey} - N_{by} = 0$$

$$-6,975 - N_{bz} = 0$$

$$6,975 \cdot \frac{2}{3} - N_{ey} + N_{bz} = 0$$

$$-6,975 \cdot \frac{2}{3} - N_{ax} - N_{bx} = 0$$

po vyriešení sústavy rovníc dostaneme veľkosti síl (reakcií):

$$N_{bx} = 2,325 \text{ kN}, N_{by} = 2,325 \text{ kN}, N_{bz} = -6,975 \text{ kN},$$

$$N_{ey} = -2,325 \text{ kN}, N_{ax} = -2,325 \text{ kN}$$

Sila v ťahadle \overline{db} :

$$N_{bxy} = \sqrt{N_{bx}^2 + N_{by}^2} = \sqrt{2,325^2 + 2,325^2} = 3,288 \text{ kN}$$

Na kontrolu výpočtu použijeme momentovú podmienku rovnováhy k osi Z , do ktorej dosadíme číselné hodnoty

$$-2,325 - (-2,325) + 2,325 - 2,325 = 0 \quad \Delta = 0,0$$

Príklad 2.2-8:

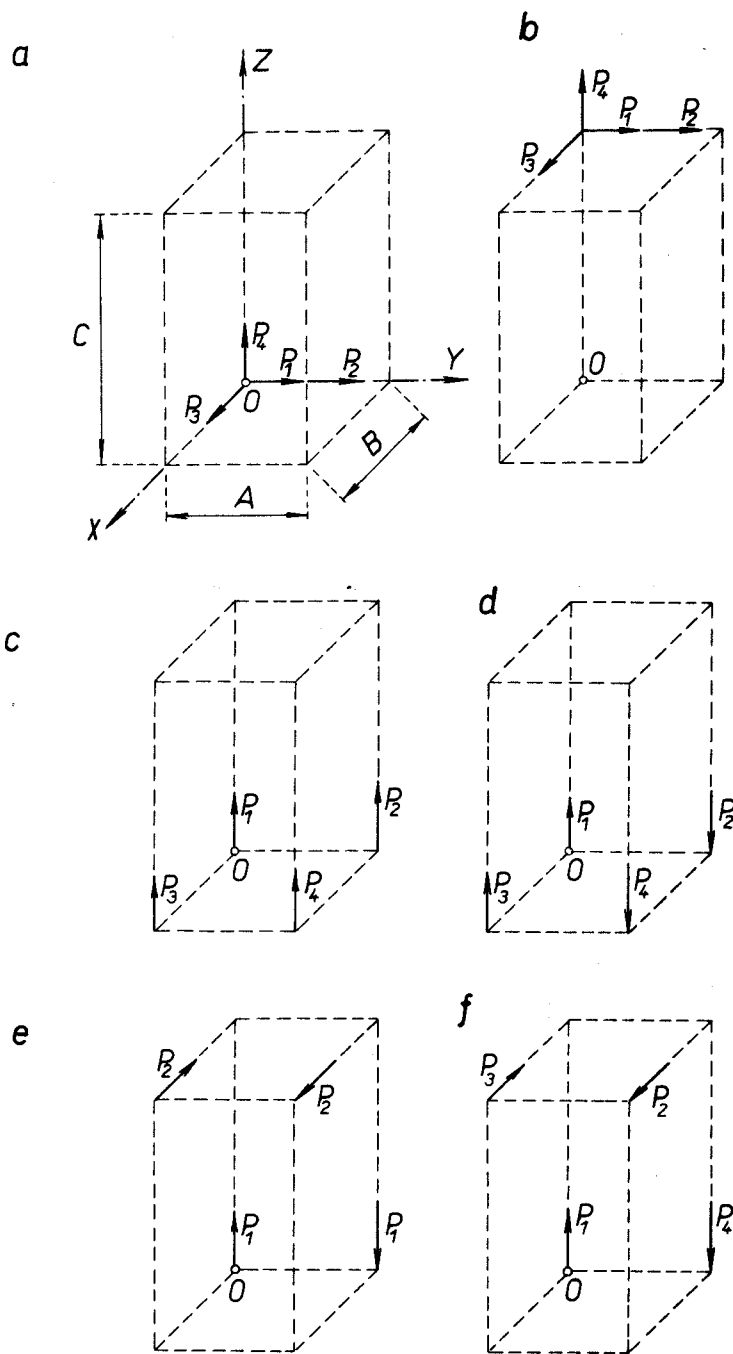
Sústavu štyroch síl $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_4$, ktorá pôsobí podľa obr. 2.2-8a až f v hranách hranola, nahradte vektorom výslednice \mathbf{R} a vektorom výslednej silovej dvojice \mathbf{M} , ktoré pôsobia vo vrchole O zvoleného súradnicového systému X, Y, Z podľa obr. 2.2-8a. Súradnicový silový systém je vo všetkých prípadoch zvolený rovnako, ako je to vyznačené na obr. 2.2-8a. Riešenie vykonajte pre všetky alternatívy uvedené na obr. 2.2-8a až f. Vonkajšie sily, ktoré pôsobia na hranol, sú dané veľkosťami: $P_1 = 10$ kN, $P_2 = 20$ kN, $P_3 = 30$ kN, $P_4 = 40$ kN; dĺžka strán hranola $A = 1,0$ m, $B = 2,0$ m, $C = 3,0$ m.

Riešenie pre alternatívu:

$$a) \quad R_x = 30 \text{ kN}, R_y = 30 \text{ kN}, R_z = 40 \text{ kN}, R = 58,31 \text{ kN}$$

$$\alpha_R = 59^\circ 02', \beta_R = 59^\circ 02', \gamma_R = 46^\circ 41'$$

$$M_x = 0, M_y = 0, M_z = 0$$

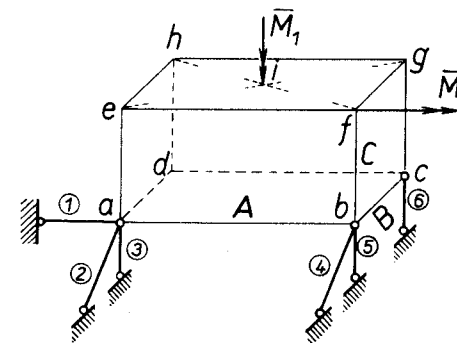


Obr. 2.2-8a,b,c,d,e,f.

- b) $R_x = 30 \text{ kN}$, $R_y = 30 \text{ kN}$, $R_z = 40 \text{ kN}$, $R = 58,31 \text{ kN}$
 $\alpha_R = 59^\circ 02'$, $\beta_R = 59^\circ 02'$, $\gamma_R = 46^\circ 41'$
 $M_x = 90 \text{ kNm}$, $M_y = -90 \text{ kNm}$, $M_z = 0$, $M = 127,3 \text{ kNm}$
 $\alpha_M = 45^\circ$, $\beta_M = 45^\circ$, $\gamma_M = 90^\circ$
- c) $R_x = 0$, $R_y = 0$, $R_z = 110 \text{ kN}$, $R = 110 \text{ kN}$
 $\alpha_R = 90^\circ$, $\beta_R = 90^\circ$, $\gamma_R = 0^\circ$
 $M_x = -60 \text{ kNm}$, $M_y = 140 \text{ kNm}$, $M_z = 0$, $M = 152,3 \text{ kNm}$
 $\alpha_M = 66^\circ 48'$, $\beta_M = 23^\circ 11'$, $\gamma_M = 90^\circ$
- d) $R_x = 0$, $R_y = 0$, $R_z = -20 \text{ kN}$, $R = 20 \text{ kN}$
 $\alpha_R = 90^\circ$, $\beta_R = 90^\circ$, $\gamma_R = 0^\circ$
 $M_x = 60 \text{ kNm}$, $M_y = -20 \text{ kNm}$, $M_z = 0$, $M = 63,25 \text{ kNm}$
 $\alpha_M = 18^\circ 27'$, $\beta_M = 71^\circ 34'$, $\gamma_M = 90^\circ$
- e) $R_x = 0$, $R_y = 0$, $R_z = 0$, $R = 0$
 $M_x = 10 \text{ kNm}$, $M_y = 0$, $M_z = 20 \text{ kNm}$, $M = 23,36 \text{ kNm}$
 $\alpha_M = 63^\circ 26'$, $\beta_M = 90^\circ$, $\gamma_M = 26^\circ 34'$
- f) $R_x = -10 \text{ kN}$, $R_y = 0$, $R_z = -30 \text{ kN}$, $R = 31,62 \text{ kN}$
 $\alpha_R = 71^\circ 34'$, $\beta_R = 90^\circ$, $\gamma_R = 18^\circ 26'$
 $M_x = 40 \text{ kNm}$, $M_y = 30 \text{ kNm}$, $M_z = 20 \text{ kNm}$, $M = 53,85 \text{ kNm}$
 $\alpha_M = 42^\circ 02'$, $\beta_M = 56^\circ 09'$, $\gamma_M = 68^\circ 12'$

Príklad 2.2-9:

Určte reakcie telesa (sily v kyvných prútoch), na ktoré pôsobí vektor silovej dvojice \bar{M}_1 v bode i a vektor silovej dvojice \bar{M}_2 v bode f . Vázby, geometrický tvar a pôsobenie vonkajšieho zaťaženia sú opísané podľa obr. 2.2-9. Rozmery hranola



Obr. 2.2-9.

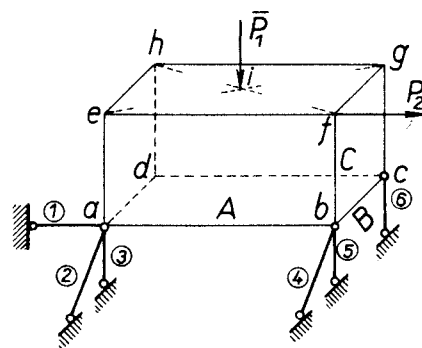
$A = 3,0 \text{ m}$, $B = 2,0 \text{ m}$, $C = 3,0 \text{ m}$; veľkosť silových dvojíc $M_1 = 30 \text{ kNm}$, $M_2 = 40 \text{ kNm}$.

Riešenie:

Teoretický postup pozri v príklade 2.2-5. Výsledné číselné hodnoty po uskutočnení výpočtu: $N_1 = 0$, $N_2 = -11,547 \text{ kN}$, $N_3 = 5,7735 \text{ kN}$, $N_4 = 11,547 \text{ kN}$, $N_5 = 34,2265 \text{ kN}$, $N_6 = -40,00 \text{ kN}$.

Príklad 2.2-10:

Určte reakcie (sily v kyvných prútoch) na telese, ktoré je zaťažené silou P_1 , pôsobiacou v bode i a silou P_2 , pôsobiacou v bode f . Väzby, geometrický tvar a pôsobenie vonkajšieho zaťaženia sú opísané podľa obr. 2.2-10. Rozmery hranola $A = 3,0 \text{ m}$, $B = 2,0 \text{ m}$, $C = 3,0 \text{ m}$; veľkosť síl $P_1 = 10 \text{ kN}$, $P_2 = 20 \text{ kN}$.



Obr. 2.2-10.

Riešenie:

Všeobecný postup pozri v príklade 2.2-5. Výsledné reakcie (sily v kyvných prútoch) po vykonaní výpočtu: $N_1 = 20 \text{ kN}$, $N_2 = 0$, $N_3 = 15,0 \text{ kN}$, $N_4 = 0$, $N_5 = 20,0 \text{ kN}$, $N_6 = -5 \text{ kN}$.

Poznámka: Sily v kyvných prútoch (reakcie) predpokladáme pri zostavovaní statických podmienok rovnováhy ako ťahy, preto znamienko mínus pri sile (reakcii) predstavuje skutočný zmysel opačný, ako sa predpokladá.

Príklad 2.2-11:

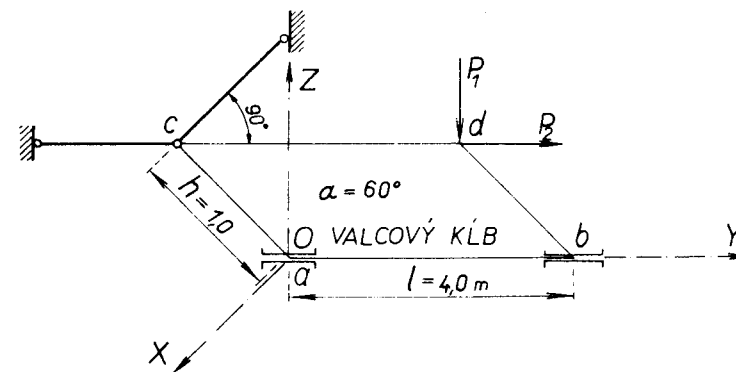
Určte reakcie na doske (telese) $abcd$, ktorá je v mieste d zaťažená zvislou silou P_1 , ktorej veľkosť je $2,0 \text{ kN}$ a vodorovnou silou veľkosti $P_2 = 4,0 \text{ kN}$, obr. 2.2-11.

Riešenie:

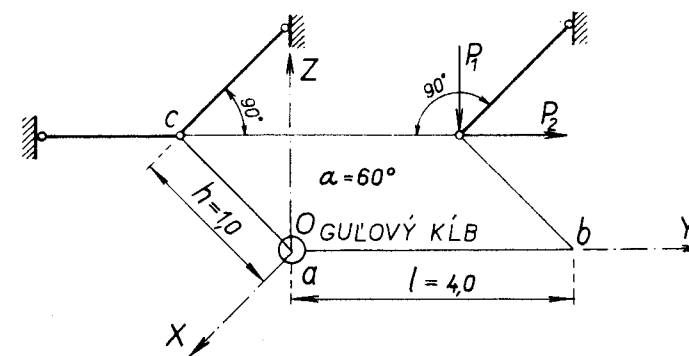
Všeobecný postup je rovnaký ako v príklade 2.2-5. Súradnicový systém sme zvolili podľa obrázka. Po vyčíslení dostaneme veľkosti zložiek reakcií:

$$N_{ax} = -3,464 \text{ kN}, \quad N_{az} = 0, \quad N_{bx} = 0, \quad N_{bz} = 2,0 \text{ kN},$$

$$N_{cx} = -3,464 \text{ kN}, \quad N_{cy} = -4,0 \text{ kN}.$$



Obr. 2.2-11.



Obr. 2.2-12.

Poznámka: Prvý index pri sile (reakcii) N znamená miesto pôsobenia reakcie a druhý index smer reakcie, ktorý je rovnobežný s príslušným smerom súradnicovej osi; znamienko mínus pri reakcii znamená, že zmysel reakcie je opačný, ako kladne orientovaný zmysel príslušnej súradnicovej osi.

Príklad 2.2-12:

Určte reakcie na doske (telese) $abcd$, ktorá je v mieste d zaťažaná zvislou silou veľkosti $P_1 = 2,0$ kN a vodorovnou silou veľkosti $P_2 = 4,0$ kN, obr. 2.2-12. Doska je v bode a podopretá guľovým kĺbom, v mieste c sú dva vodorovné kyvné prúty a v bode d je jeden vodorovný kyvný prút. Rozmery a poloha dosky sú znázornené na obr. 2.2-12:

Riešenie:

Všeobecný postup bol v príklade 2.2-5. Súradnicový systém volíme tak, ako je to vyznačené na obrázku. Po vyriešení dostaneme veľkosť zložiek reakcií:

$$N_{ax} = 3,463 \text{ kN}, N_{ay} = 16 \text{ kN}, N_{az} = 2,0 \text{ kN}, N_{cx} = 0 \\ N_{cy} = -20 \text{ kN}, N_{dx} = -3,463 \text{ kN}$$

III. ŤAŽISKO ČIAR, PLOCH A TELIES

Prv ako sa naučíme určiť polohu ťažiska, musíme si objasniť pojem grafickej kvadratury.

3.1. GRAFICKÁ KVADRATÚRA

Pri grafickej kvadratúre sa premieňa akákoľvek plocha na plochu obdĺžnika s rovnakou veľkosťou plochy.

Jeden rozmer obdĺžnika si zvolíme ľubovoľne a nazveme ho *základňou* e , druhý rozmer je tým väčší, čím má plocha S väčšiu hodnotu a tento druhý rozmer sa nazýva *určovací úsek* x .

Plochu potom vypočítame zo vzťahu

$$S = e \cdot x$$

Ak máme dve plochy S_1 a S_2 , ktoré majú rôznu veľkosť a tvar, môžeme ich premeniť na obdĺžnik s rovnakou základňou e .

Pre prvú plochu S_1 platí

$$S_1 = e \cdot x_1$$

Pre druhú

$$S_2 = e \cdot x_2$$

Utvorme pomer

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{e \cdot x_1}{e \cdot x_2} \quad \text{teda} \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{x_1}{x_2}$$

Vidíme, že veľkosti plôch sú v rovnakom pomere ako ich určovacie úseky. Dvojmerné plochy sme nahradili jednorozmernými úsekmi, ktoré môžeme

pokladať za sily (pretože základňa e je pri všetkých plochách rovnaká, neberieme ju do úvahy).

Tieto určovacie úseky x_1, x_2, \dots reprezentujú potom — ako myslené sily — príslušné plôšky s_1, s_2, \dots , z ktorých sa celá zložená plocha S prierezu skladá. Tým máme umožnené manipulovať s myslenými silami a nie s plochami.

Ostatné vzťahy platné pri grafickej kvadrature a rektifikácii (rozvinutí) oblúkov sa uvedú v postupe riešenia príslušných príkladov.

3.2. ŤAŽISKO ROVINNÝCH ČIAR

Pri určovaní ťažiska rovinných čiar je potrebné určiť:

- ťažisko úsečky,
- ťažisko rovinatej lomenej čiary,
- ťažisko rovinatej krivky.

3.2.1. Ťažisko úsečky

Ťažiskom úsečky je jej stred. Ide vždy o úsečku obalenú hmotou, teda nie o geometrickú (nehmotnú) úsečku.

3.2.2. Ťažisko rovinatej lomenej čiary

Lomená čiara sa skladá z jednotlivých hmotných úsečiek, ktorých ťažiská sú v ich strede. Ťažiskami t_1 až t_n úsečiek necháme pôsobiť sily P_1 až P_n , ktoré sú úmerné dĺžkam úsečiek. Za sily P_1 až P_n považujeme celú alebo redukovanú dĺžku úsečiek, z ktorých sa lomená čiara skladá.

Ak súradnice ťažísk t_1 až t_n označíme x_1, y_1 až x_n, y_n , polohu ťažiska lomenej čiary vypočítame z výrazov

$$x_t = \frac{\sum_{i=1}^n P_i x_i}{\sum_{i=1}^n P_i}, \quad y_t = \frac{\sum_{i=1}^n P_i y_i}{\sum_{i=1}^n P_i}, \quad (1)$$

3.2.3. Ťažisko rovinatej krivky

Výpočtom zistíme ťažisko zo vzťahov

$$x_t = \frac{\int x ds}{\int ds}, \quad y_t = \frac{\int y ds}{\int ds}, \quad (2)$$

kde x_t, y_t sú súradnice ťažiska t vzhľadom k pravouhlým osiam X, Y vedeným ľubovoľným vzťažným bodom o roviny krivky,

$\int ds = S$ je dĺžka celej uvažovanej hmotnej krivky,

$\int x ds$ — súčet statických momentov elementárnych oblúčikov ds k zvislej osi Y ,

$\int y ds$ — súčet statických momentov elementárnych oblúčikov ds k vodorovnej osi X .

3.2.4. Ťažisko kruhového oblúka

Polohu ťažiska určíme z úmery

$$\overline{ot} : \overline{oc} = \overline{ab} : \widehat{ab}$$

kde \overline{ot} je vzdialenosť ťažiska od stredu krivosti o oblúka,

\overline{oc} — polomer oblúka,

\overline{ab} — tetiva oblúka,

\widehat{ab} — dĺžka hmotného oblúka (rozvinutý oblúk).

Každý oblúk má os súmernosti, na ktorej leží aj ťažisko oblúka.

3.3. ŤAŽISKO ROVINNÝCH PLOCH

Rovinné plochy, ktoré sa vyskytujú v praxi, môžu mať rôzny tvar. Rozoznávame:

- priamočiare obrazce,
- zmiešanočiare obrazce,
- krivočiare obrazce.

3.3.1. Ťažisko priamočiarych obrazcov

Patrí sem určenie ťažiska trojuholníka, štvoruholníka, lichobežníka a mnohoholníka.

3.3.2. Ťažisko zmiešanočiarych obrazcov

Ide tu o stanovenie ťažiska kruhového výseku, kruhového odseku, parabolického odseku a zloženého obrazca obmedzeného úsečkami, ako aj krivkami.

3.3.3. Ťažisko krivočiarych obrazcov

Ak má obrazec nekonečné množstvo súmerností, ide o ťažisko kruhu a priesečník týchto osí súmernosti je ťažisko kruhu (stred krivosti s kružnice, ktorá tvorí obvod kruhu).

V prípade, že obrazec je obmedzený uzavretou krivkou, ktorá má jednu os súmernosti, ťažisko obrazca leží na tejto osi súmernosti.

Keď je obrazec obmedzený ľubovoľnou krivkou, ktorá nemá nijakú os súmernosti, potom polohu ťažiska vypočítame z výrazov

$$x_t = \frac{\int x ds}{\int ds}, \quad y_t = \frac{\int y ds}{\int ds} \quad (3)$$

kde x_t, y_t sú súradnice ťažiska obrazca k pravouhlým osiam X, Y , ktoré vedieme ľubovoľným vzťažným bodom o roviny obrazca,

$\int ds = S$ — celá plocha obrazca (ide vždy o hmotný obrazec),

$\int x ds$ — statický moment obrazca k zvislej osi Y ,

$\int y ds$ — statický moment obrazca k vodorovnej osi X .

3.4. ŤAŽISKO PRIESTOROVEJ KRIVKY

Hľadáme ťažisko t priestorovej krivky S , ktorá je obložená hmotou.

Súradnice ťažiska dostaneme z výrazov

$$x_t = \frac{\int x ds}{S}, \quad y_t = \frac{\int y ds}{S}, \quad z_t = \frac{\int z ds}{S} \quad (4)$$

kde $S = \int ds$ je dĺžka celej priestorovej krivky,

$\int x ds, \int y ds, \int z ds$ — statické momenty krivky k rovinám YZ, ZX a XY .

Ak priestorovú krivku S rozdelíme na konečné úseky S_i je

$$x_t = \frac{\sum_{i=1}^n x_i S_i}{S}, \quad y_t = \frac{\sum_{i=1}^n y_i S_i}{S}, \quad z_t = \frac{\sum_{i=1}^n z_i S_i}{S} \quad (5)$$

3.5. ŤAŽISKO PRIESTOROVEJ PLOCHY

Máme určiť polohu ťažiska t priestorovej plochy S obloženej hmotou. Z momentovej vety platnej aj pre plochy vyplýva, že

$$x_t = \frac{\int x dS}{S}, \quad y_t = \frac{\int y dS}{S}, \quad z_t = \frac{\int z dS}{S} \quad (6)$$

kde $S = \int dS$ je veľkosť celej priestorovej plochy,

$\int x dS, \int y dS, \int z dS$ sú statické momenty plochy k rovinám YZ, ZX a XY . Ak priestorovú plochu rozdelíme na konečné časti S , platia vzťahy

$$x_t = \frac{\sum_{i=1}^n x_i S_i}{S}, \quad y_t = \frac{\sum_{i=1}^n y_i S_i}{S}, \quad z_t = \frac{\sum_{i=1}^n z_i S_i}{S} \quad (7)$$

3.6. ŤAŽISKO TUHÉHO TELESA

Ťažisko telesa je bod, ktorým prechádza lúč výslednice síl tiaže, a to pri každej polohe telesa.

Súradnice x_t, y_t, z_t ťažiska telesa t majú hodnotu

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{\int x dG}{G} = \frac{\int x dm}{m} = \frac{\int x dV}{V} \\ y_t &= \frac{\int y dG}{G} = \frac{\int y dm}{m} = \frac{\int y dV}{V} \\ z_t &= \frac{\int z dG}{G} = \frac{\int z dm}{m} = \frac{\int z dV}{V} \end{aligned} \quad (8)$$

kde dG je zvislá sila tiaže hmotného elementu telesa s hmotnosťou dm ,

$G = \int dG$ — tiaž celého telesa,

$\int x dG, \int y dG, \int z dG$ — statický moment síl tiaže všetkých elementov telesa k rovinám YZ, ZX, XY ,

$m = \int dm$ — hmotnosť celého telesa,

$\int x dm, \int y dm, \int z dm$ — statický moment hmotností všetkých elementov telesa k rovinám YZ, ZX, XY ,

$\int x dV, \int y dV, \int z dV$ — statický moment elementárnych objemov dV všetkých hmotných prvkov telesa k rovinám YZ, ZX, XY ,

$V = \int dV$ — objem celého telesa.

Ak teleso hmotnosti m , tiaže G a objemu V vieme rozložiť na jednoduchšie konečné časti s hmotnosťou m_i , tiažou G_i a objemom V_i , pre súradnice ťažiska platia podobné rovnice, len integrály nahradíme súčtami.

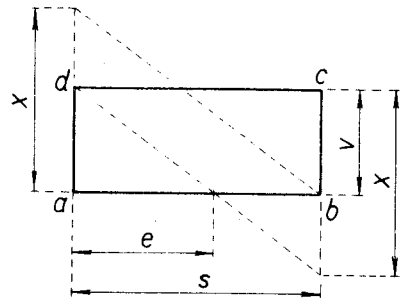
Preto platí, že súradnice ťažiska telesa

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i G_i}{G} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i V_i}{V} \\ y_t &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i G_i}{G} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i V_i}{V} \end{aligned}$$

$$z_i = \frac{\sum_{i=1}^n z_i G_i}{G} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i m_i}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i V_i}{V} \quad (9)$$

Príklad 3-1:

Obdĺžnik $abcd$ treba premeniť na rovnakoplochy obdĺžnik, ktorého základňa je e . Nech obdĺžnik má dĺžku $l = 7,0$ m, výšku $v = 3,0$ m, zvolená základňa $e = 4,0$ m (obr. 3-1).



Obr. 3.1.

Keďže obdĺžnik má mať základňu e menšiu, ako je dĺžka l , určovací úsek x nového obdĺžnika je väčší ako v .

Vychádzame z rovnosti oboch obdĺžnikov

$$l \cdot v = e \cdot x$$

z čoho určovací úsek nového obdĺžnika

$$x = \frac{l \cdot v}{e} = \frac{7,0 \cdot 3,0}{4,0} = 5,25 \text{ m}$$

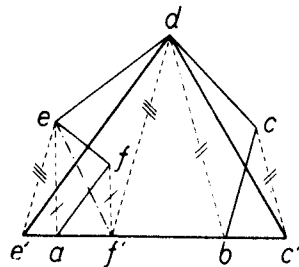
Z rovnosti plochy obdĺžnikov vyplýva úmera

$$e : v = l : x$$

Úlohu vyriešime graficky a určovací úsek x nového obdĺžnika zostrojíme z podobnosti dvoch pravouhlých trojuholníkov, ako to znázorňuje obr. 3.1-1.

Príklad 3-2:

Nepravidelný šesťuholník treba premeniť na rovnakoplochy trojuholník (obr. 3-2).



Obr. 3.2.

Ak máme akýkoľvek nepravidelný n -uholník premeniť na rovnakoplochy trojuholník, postupne vylučujeme jednotlivé vrcholy, čo znamená, že z n -uholníka urobíme $(n-1)$ uholník, $(n-2)$ uholník, až dostaneme trojuholník s rovnakou plochou.

Vychádzame z poznatku, že plocha trojuholníka sa nemení, ak ponecháme jeho základňu a nemeníme k nej príslušnú výšku.

V našom prípade postupujeme podľa obr. 3-2

$$pl. abcdef = pl. f'bcde = pl. f'c'de = \triangle e'c'd$$

Najprv sme zo šesťuholníka vylúčili vrchol f , a to jeho posunutím $\overline{ff'} \parallel \overline{ea}$ do bodu f' , čím sme dostali rovnakoplochy päťuholník, ďalej sme posunuli vrchol $c \parallel \overline{bd}$ do bodu c' a nakoniec sme viedli $\overline{ee'} \parallel \overline{f'd}$ a dostali sme nový vrchol e' rovnakoplochého trojuholníka $e'c'd$.

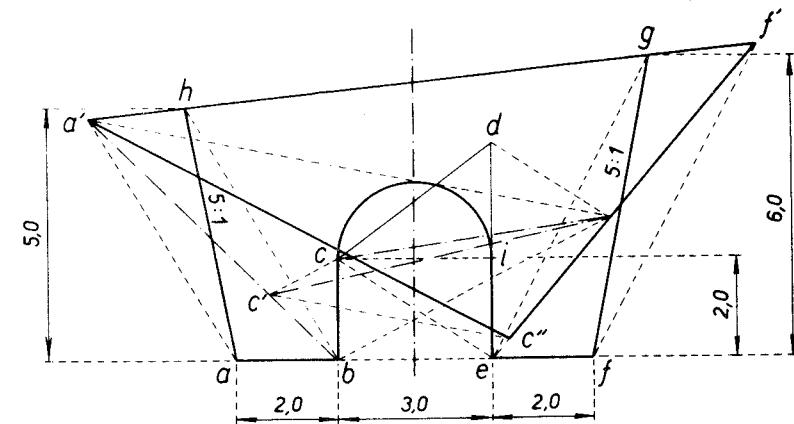
Podobne by sme postupovali pri akomkoľvek nepravidelnom mnohoúhľovníku. Na poradi odstraňovania jednotlivých vrcholov nezáleží.

Príklad 3-3:

Treba stanoviť veľkosť plochy prierezu zemného telesa naznačeného na obr. 3-3.

Predovšetkým premeníme plochu polkruhu na rovnakoplochy trojuholník — graficky (obr. 3-3a).

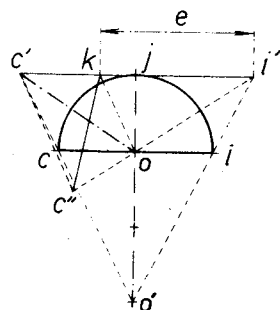
Potrebné je k tomu rozvinúť polkružnicu \widehat{ci} na dotyčnicu v bode j . Zo stredu krivosti o kružnice naniesieme na os symetrie polkružnice dĺžku $\overline{oo'} = 2\overline{oc} = 3,0$ m a z bodu o' premietneme koncové body polkružnice do bodov c' a i' .



Obr. 3.3.

Dostali sme tak úsečku $c'i'$, ktorá sa rovná dĺžke rozvinutého oblúka polkružnice. Keďže plocha polkruhu sa skladá z elementárnych trojuholníčkov, ktoré všetky majú rovnakú výšku, rovnajúcu sa polomeru kružnice, musí sa plocha trojuholníka $c'i'o$ rovnať ploche polkruhu s polomerom oc .

Teraz už iba premeníme plochu $\triangle c'i'o$ na plochu trojuholníka so základňou $e = 2oc = i'k = 3,0$ m. Keďže základňa $e = 3,0$ m nového trojuholníka je menšia ako základňa $i'c'$ pôvodného trojuholníka $i'c'o$, bude mať nový trojuholník so základňou e väčšiu výšku. Vrchol c'' dostaneme, keď vedieme $c'c'' \parallel ko$.



Obr. 3.3a.

Tým sme dostali $\triangle i'kc'' = \triangle i'c'o$. Výšku tohto trojuholníka vzťahovanú na základňu $i'k = e$ naniesieme v obr. 3-3 od bodu i na predĺžený smer strany ei , čím dostaneme vrchol d rovnakoplochého trojuholníka $\triangle cid$.

A teraz premeníme osemuholník s plochou $abcdefgh$ na trojuholník s rovnakou veľkosťou plochy.

Postupuje sa podľa nasledujúcej schémy

$$\begin{aligned} \text{pl. } abcdefgh &= \text{pl. } a'bcdefg = \text{pl. } a'bcdef' = \text{pl. } a'bcd'f' = \\ &= \text{pl. } a'c'd'f' = \triangle a'c''f' \end{aligned}$$

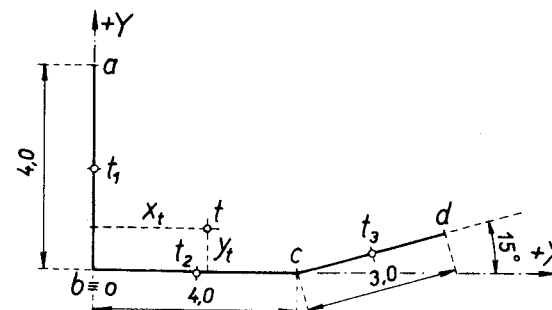
Z pôvodnej plochy nepravidelného osemuholníka — postupným vylučovaním vrcholov — dostaneme rovnakoploché trojuholník $a'c''f'$. Postup je podobný ako v príklade 3-2.

Príklad 3-4:

Počtovo aj graficky máme určiť ťažisko t rovinatej lomenej čiary, ktorá sa

skladá z troch úsečiek (obr. 3-4). Úsečka $\overline{ab} = 4,0$ m $= \overline{bc}$, $\overline{cd} = 3,0$ m a od vodorovného smeru je odklonená o 15° .

Počtové riešenie: Zvolíme si začiatok o pravouhlého súradnicového systému (v našom prípade najlepšie bodom b). Naznačíme si ťažiská t_1 až t_3 všetkých troch úsečiek. Súradnice ťažísk úsečiek x_1, y_1 až x_3, y_3 si ľahko vypočítame.



Obr. 3.4.

Ťažisko t_1 úsečky \overline{ab} má súradnice

$$x_1 = 0, \quad y_1 = \frac{\overline{ab}}{2} = \frac{4,0}{2} = 2,0 \text{ m}$$

Ťažisko t_2 má súradnice

$$x_2 = \frac{\overline{bc}}{2} = \frac{4,0}{2} = 2,0 \text{ m}, \quad y_2 = 0$$

Ťažisko t_3 je dané súradnicami

$$x_3 = \overline{bc} + \frac{\overline{cd}}{2} \cos 15^\circ = 4,0 + 1,5 \cdot 0,96593 \doteq 5,45 \text{ m}$$

$$y_3 = \frac{\overline{cd}}{2} \cdot \sin 15^\circ = 1,5 \cdot 0,25882 \doteq 0,39 \text{ m}$$

Polohu ťažiska t celej lomenej čiary vypočítame z rovnice 1

$$x_t = \frac{\sum_{i=1}^3 P_i x_i}{\sum_{i=1}^3 P_i}, \quad y_t = \frac{\sum_{i=1}^3 P_i y_i}{\sum_{i=1}^3 P_i}$$

Ak v našom prípade dosadíme za $P_1 = 4,0$, $P_2 = 4,0$, $P_3 = 3,0$ je

$$x_t = \frac{P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + P_3 \cdot x_3}{P_1 + P_2 + P_3} = \frac{4,0 \cdot 0 + 4,0 \cdot 2,0 + 3,0 \cdot 5,45}{4,0 + 4,0 + 3,0} = \frac{24,35}{11,0} \doteq 2,21 \text{ m}$$

Vzdialenosť ťažiska t lomenej čiary od zvislej osi Y je 2,21 m. Podobne vyčíslíme vzdialenosť ťažiska od vodorovnej osi X , a to zo vzťahu

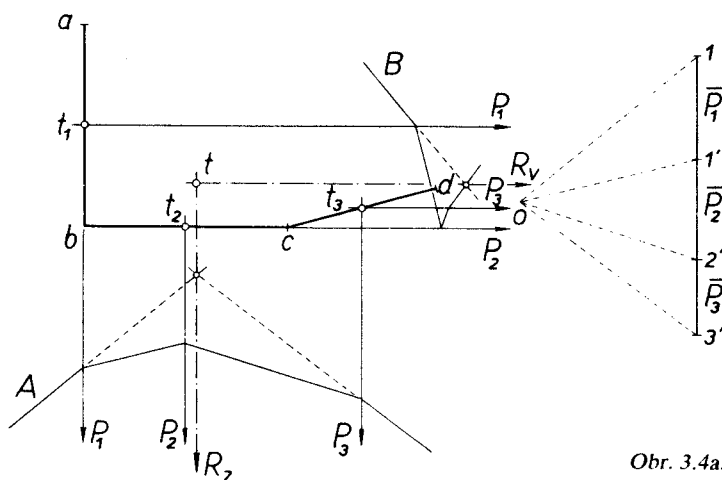
$$y_t = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3}{P_1 + P_2 + P_3} = \frac{4,0 \cdot 2,0 + 4,0 \cdot 0 + 3,0 \cdot 0,39}{4,0 + 4,0 + 3,0} = \frac{9,17}{11,0} \doteq 0,83 \text{ m}$$

Grafické určenie ťažiska lomenej rovinnej čiary (obr. 3-4').

V ťažiskách t_1 až t_3 úsečiek necháme pôsobiť súbežné sily P_1 až P_3 úmerné dĺžkam úsečiek. Platí teda vzťah

$$P_1 : P_2 : P_3 = \overline{ab} : \overline{bc} : \overline{cd}$$

a stanovíme statický stred tejto sústavy rovnobežných síl.



Obr. 3.4a.

V našom prípade za určovacie úseky síl P_1 až P_3 považujeme polovice dĺžok úsečiek, z ktorých sa lomená čiara skladá. Dĺžky úsečiek môžeme v ľubovoľnom pomere redukovať, polohu ťažiska tým nezmeníme.

Strany výslednicovej čiary B kreslíme kolmo na príslušné pólóve lúče \overline{OI} až $\overline{O3'}$.

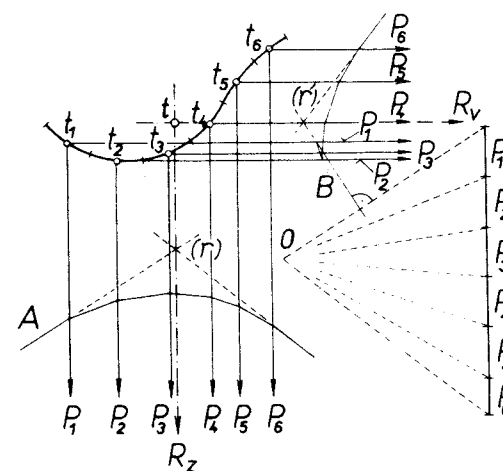
Príklad 3-5:

Treba stanoviť polohu ťažiska t rovinnej krivky naznačenej na obr. 3-5. Počtovo sa zistí ťažisko t rovinnej krivky z rovnice (2).

$$x_t = \frac{\int x ds}{\int ds}, \quad y_t = \frac{\int y ds}{\int ds}$$

Keďže matematické vyjadrenie rovnice krivky nepoznáme, ťažisko určíme graficky.

Krivku rozdelíme na vhodný počet dielikov obvykle rovnakej dĺžky a tieto nahradíme tetivami oblúčikov (posledný dielik má všeobecne menšiu dĺžku).



Obr. 3.5.

V ťažiskách dielikov necháme pôsobiť sily úmerné dĺžkam dielikov a nájdeme ich výslednicu, ktorá je už jednou ťažnicou. V našom prípade sme najprv našli ťažnicu R_z vo zvislom smere (pomocou výslednicovej čiary A), potom sme rovnaké sily nechali pôsobiť vodorovne (výslednicová čiara B rysovaná kolmo na pólóve lúče \overline{OI} až $\overline{O7'}$).

Príklad 3-6:

Treba nájsť ťažisko t kruhového oblúka \widehat{ab} . Nech polomer oblúka $\overline{oa} = 3,0$ m, stredový uhol $\alpha = 90^\circ$ (obr. 3-6).

V matematike je odvodený nasledovný vzťah platný pre polohu ťažiska oblúka

$$\overline{ot} : \overline{oc} = \overline{ab} : \widehat{ab}$$

Ak pravú stranu úmery vydělíme dvoma, dostaneme výraz

$$\overline{ot} : \overline{oc} = \frac{\overline{ab}}{2} : \frac{\widehat{ab}}{2} \quad (1)$$

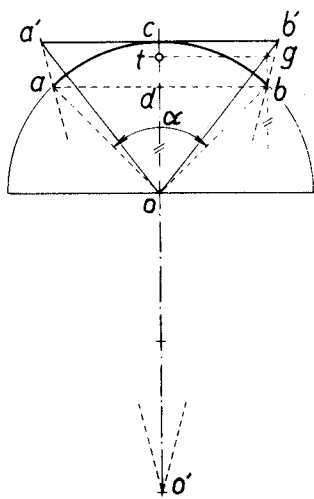
$$\frac{\overline{ab}}{2} = \overline{ob} \cdot \sin 45^\circ = 3,0 \cdot 0,70711 \doteq 2,12 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{ab}}{2} &= \overline{ob} \cdot \text{arc } 45^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 45 \cdot 3 = \\ &= 0,01745329 \cdot 45 \cdot 3 = 0,78540 \cdot 3,0 \doteq 2,36 \text{ m} \end{aligned}$$

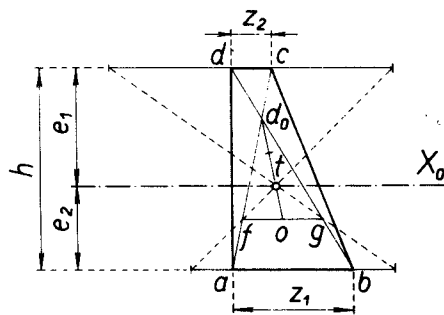
$$\overline{oc} = \overline{oa} = 3,0 \text{ m}$$

Z úmery (1) určíme vzdialenosť ťažiska t od stredu krivosti o kruhového oblúka

$$\overline{ot} = \frac{3,0 \cdot 2,12}{2,36} \doteq 2,7 \text{ m}$$



Obr. 3.6.



Obr. 3.7.

Pri grafickom zostrojení polohy ťažiska t kruhového oblúka rozvineme (rektifikujeme) najprv oblúk \widehat{ab} na dotyčnicu, ktorú vedieme vrcholom c oblúka.

Na os symetrie oblúka nanesieme úsek $\overline{oo'} = 2\overline{oa} = 2 \cdot 3,0 = 6,0 \text{ m}$ a z bodu o' premietneme koncové body a, b oblúka na dotyčnicu do bodov a', b' . Tým sme dostali dĺžku rozvinutého oblúka $\widehat{ab} = \overline{a'b'}$.

Polohu ťažiska t oblúka dostaneme z podobnosti dvoch pravouhlých trojuholníkov, ktorá je vyjadrená úmerou z výrazu (1).

Ak hľadáme ťažisko kruhového oblúka v tvare polkružnice s polomerom $r = 3,0 \text{ m}$, použijeme opäť výraz (1), v ktorom

$$\overline{oc} = r = 3,0 \text{ m}, \quad \frac{\overline{ab}}{2} = \frac{2r}{2} = r = 3,0 \text{ m}$$

$$\frac{\widehat{ab}}{2} = 1,57080 \cdot 3,0 \doteq 4,71 \text{ m}$$

Po dosadení veličín zodpovedajúcich uhlu $\alpha = 180^\circ$ dostaneme vzdialenosť ťažiska t polkružnice od stredu krivosti o polkružnice

$$\overline{ot} = \frac{3,0 \cdot 3,0}{4,71} \doteq 1,91 \text{ m}$$

Príklad 3-7:

Stanovte ťažisko t lichobežníkového prierezu (obr. 3-7); základňa $z_1 = 3,0 \text{ m}$, $z_2 = 1,0 \text{ m}$, $h = 5,0 \text{ m}$.

Výpočtom zistíme polohu ťažiska t zo známych vzťahov

$$e_1 = \frac{h}{3} \cdot \frac{2z_1 + z_2}{z_1 + z_2}, \quad e_2 = \frac{h}{3} \cdot \frac{z_1 + 2z_2}{z_1 + z_2}$$

po dosadení

$$e_1 = \frac{5,0}{3} \cdot \frac{2 \cdot 3,0 + 1,0}{3,0 + 1,0} = 2,91 \text{ m}$$

$$e_2 = \frac{5,0}{3} \cdot \frac{3,0 + 2 \cdot 1,0}{3,0 + 1,0} = 2,09 \text{ m}$$

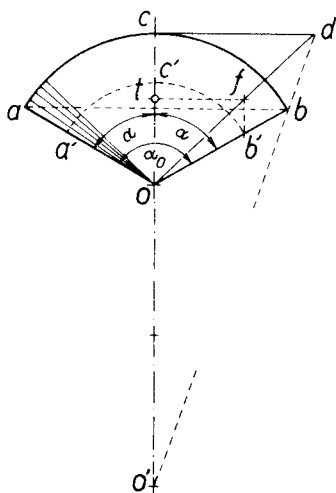
Pri grafickom riešení narysujeme uhlopriečky, nanesieme úsek $\overline{af} = \overline{d_0c}$, ďalej $\overline{bg} = \overline{d_0d}$, tým dostaneme $\triangle fgd_0$ a jeho ťažisko je už ťažiskom t lichobežníka $abcd$ ($\overline{fo} = \overline{og}$; $\overline{ot} = 1/3 \overline{od_0}$).

Ťažisko lichobežníka možno nájsť aj tým spôsobom, že od bodov c , d nanesieme vzdialenosť z_1 a od vrcholov a , b lichobežníka úsek z_2 a koncové body úsekov krížom spojíme, čím dostaneme ťažisko t .

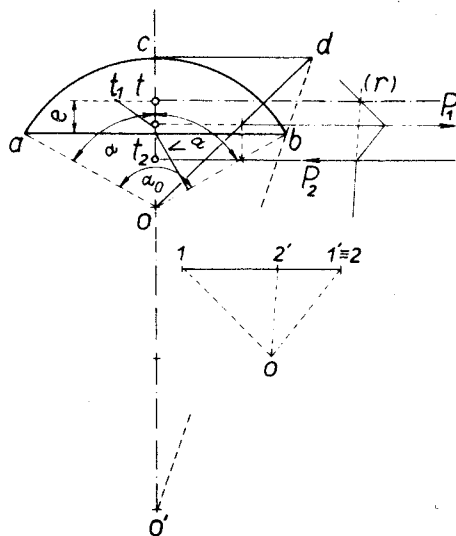
Príklad 3-8:

Treba určiť ťažisko t kruhového výseku. Stredový uhol $\alpha_0 = 120^\circ$, $r = 3,0$ m (obr. 3-8).

Os symetrie kruhového výseku je už jednou ťažnicou, na ktorej leží aj ťažisko t výseku.



Obr. 3.8.



Obr. 3.9.

Plochu kruhového výseku možno rozdeliť na elementárne trojuholníčky, ťažiská ktorých vytvárajú kruhový oblúk s polomerom

$$r = \frac{2}{3} \overline{oa} = \overline{oa'} = \overline{ob'}$$

Ak zostrojíme ťažisko kruhového oblúka $\widehat{a'b'}$, našli sme aj ťažisko kruhového výseku. Namiesto oblúka $\widehat{b'c'}$ výhodnejšie je rektifikovať oblúk \widehat{bc} . Vedeťme $\overline{b'f}$ súbežne s osou symetrie a \overline{ft} kolmo na \overline{oc} .

Na základe výpočtu dostaneme tento vzťah

$$\overline{ot} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a \cdot r^2}{S}$$

pričom úsečka

$$a = \frac{\overline{ab}}{2} = \overline{ob} \sin \alpha = 3,0 \cdot \sin 60^\circ = 3,0 \cdot 0,866 03 \doteq 2,6 \text{ m}$$

$$r = \overline{ob} = 3,0 \text{ m}$$

Plocha kruhového výseku

$$S = \frac{\alpha^\circ}{180} \pi \cdot r^2 = \frac{60}{180} 3,141 59 \cdot 3,0^2 \doteq 9,425 \text{ m}^2$$

Po dosadení vypočítaných veličín vzdialenosť ťažiska t od stredy krivosti o má hodnotu

$$\overline{ot} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2,6 \cdot 3,0^2}{9,425} \doteq 1,66 \text{ m}$$

Príklad 3-9:

Stanovte ťažisko t kruhového odseku, pričom polomer $r = 3,0$ m, stredový uhol $\alpha_0 = 120^\circ$ (obr. 3-9).

Kruhový odsek acb sa rovná ploche kruhového výseku $oacb$ bez plochy trojuholníka oab . Ťažisko t leží na osi súmernosti kruhového odseku.

Známy spôsobom zostrojíme ťažisko t_1 kruhového výseku $oaco$ a ťažisko t_2 trojuholníka oab . Ťažiskami t_1 , t_2 vedieme sily $P_1 = \overline{cd} = \overline{11'} = \overline{c'b}$ a $P_2 = \overline{v} = \overline{22'}$ (má opačný zmysel, lebo plochu trojuholníka oab treba odčítať, je to záporná plocha), ktoré sú úmerné veľkostiam *oboch* plôch. Uvedli sme ich na základňu $e = \overline{oa}$.

Výslednica R týchto síl, pôsobiach v opačnom zmysle, leží na strane väčšej sily P_1 a pretína os symetrie odseku v ťažisku t .

Počtovo určíme vzdialenosť e ťažiska t od tetivy \overline{ab} oblúka ab zo vzťahu

$$e = r \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sin^3 \alpha}{\overline{\alpha} - \sin \alpha \cos \alpha} - \cos \alpha \right)$$

$$\text{kde } r = \overline{oa} = 3,0 \text{ m, } \sin \alpha = \sin 60^\circ = 0,866 03$$

$$\cos \alpha = \cos 60^\circ = 0,5, \sin^3 \alpha = 0,866 03^3 \doteq 0,649$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0,866 03 \cdot 0,5 \doteq 0,433$$

$$\overline{\alpha} = 1,0472$$

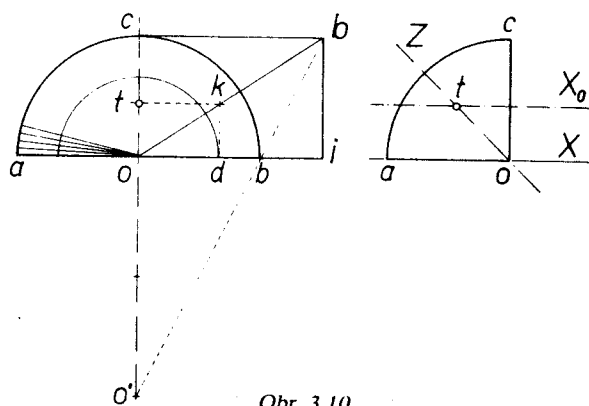
$$e = 3,0 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{0,649}{1,0472 - 0,433} - 0,5 \right) = 3,0 \left(\frac{1,298}{1,843} - 0,5 \right) = 0,621 \text{ m}$$

Stanovenie polohy ťažiska výpočtom súhlasí s grafickým riešením.

Príklad 3-10:

Je potrebné stanoviť ťažisko polkruhového prierezu; polomer $r = \overline{oa} = 3,0$ m (obr. 3-10).

Polohu ťažiska zistíme graficky tak isto ako pri kruhovom výseku (príklad 3-8). Rozvinieme štvrtkružnicu $\widehat{bc} = \widehat{cb'}$. Trojuholník ocb' sa rovná približne ploche štvrtkruhu a obdĺžnik $oib'c$ ploche polkruhu. Oblúk s polomerom $\overline{od} = \frac{2}{3}\overline{ob}$ je spojnicou ťažísk elementárnych trojuholníčkov a jeho ťažisko je aj ťažiskom polkruhu.



Obr. 3.10.

Počtovo je vzdialenosť ťažiska t od stredu krivosti o daná výrazom

$$\frac{t}{r} = \frac{4r}{3\pi} \approx 0,4244r = 0,4244 \cdot 3,0 \approx 1,273 \text{ m}$$

Vzdialenosť ťažiska t od vrcholového bodu c

$$\frac{ct}{r} = \frac{3\pi - 4}{3\pi} r \approx 0,5756r = 0,5756 \cdot 3,0 \approx 1,727 \text{ m}$$

taktiež

$$\overline{ct} = r - \overline{ot} = 3,0 - 1,273 = 1,727 \text{ m}$$

Ak chceme nájsť ťažisko štvrtkruhu (obr. 3-10'), vedieme os symetrie Z a os X_0 súbežne s osou X v rovnakej vzdialenosti, ako to platilo pre ťažisko polkruhového prierezu. Priesečník osí Z a X_0 dáva ťažisko t štvrtkruhu.

Za predpokladu, že polomer štvrtkruhu $r = 3,0$ m, vzdialenosť osí X a X_0 je 1,273 m.

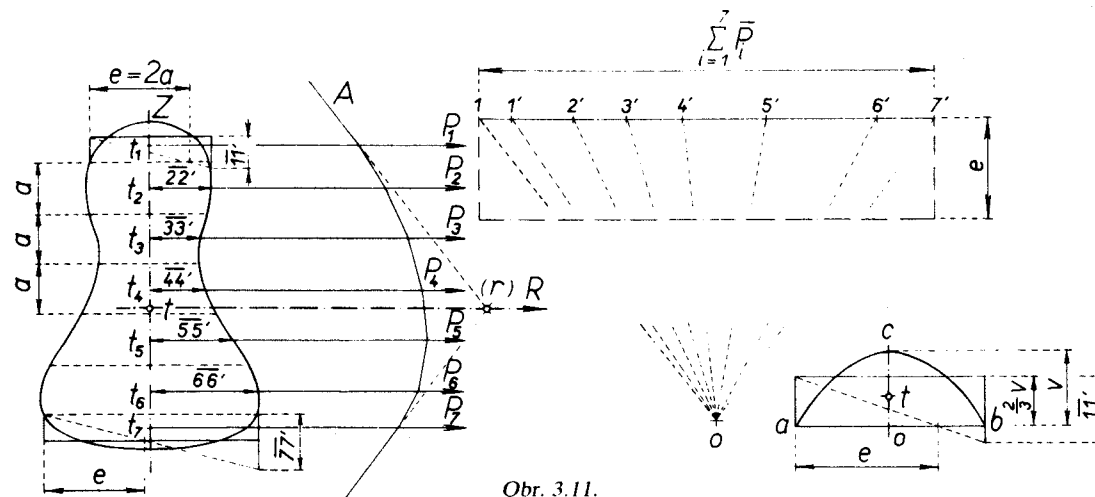
Polohu ťažísk rôznych plošných prierezov uvádzajú statické tabuľky.

Príklad 3-11:

Je potrebné nájsť polohu ťažiska prierezu ohraničeného ľubovoľnou krivkou. Obrázec má jednu os súmernosti (obr. 3-11).

V našom prípade plocha prierezu má zvislú os súmernosti Z . Os súmernosti obrazca je už jednou ťažnicou.

Pretože v tomto prípade nepoznáme matematické vyjadrenie prierezovej plochy, musíme úlohu riešiť graficky.



Obr. 3.11.

Obrázec rozdelíme po šírke na úzke pásiky a (ich šírku vhodne volíme). Pásiky považujeme za zmiešanočiare lichobežníky (v prípade, že ich šírka je veľmi malá, môžeme ich brať do úvahy ako obdĺžničky). Okrajové pásiky sú parabolickými odsekmi a taktiež ich nahradíme rovnakoplochými obdĺžnikmi.

Ľubovoľne si zvolíme základňu e pre všetky pásiky (zvyčajne celý počet šírky pásikov) a zistíme druhé rozmery pásikov — ako určovacie úseky plôšok, ktoré necháme pôsobiť v ťažiskách pásikov ako sily. Výslednica síl R je druhou ťažnicou a priesečník zvislej osi symetrie Z a výslednice R dáva ťažisko t prierezu.

V našom prípade sme si zvolili $e = 2a$, preto plocha napr. druhého pásika zhora

$$l_2 = a \cdot y_2 = e \cdot P_2$$

kde y_2 je strednica druhého pásika,

P_2 — určovací úsek plochy druhého pásika,

$$P_2 = \frac{a \cdot y_2}{e} = \frac{a \cdot y_2}{2a} = \frac{y_2}{2}$$

Keďže sme základňu e oproti šírke pásika a dvakrát zväčšili, strednicu y musíme dvakrát zmenšiť.

Horný a dolný pásik je parabolickým odsekom. Parabolický odsek vieme premeniť na rovnakoplochý obdĺžnik (obr. 3-11') a ten na obdĺžnik s ľubovoľnou základňou e .

Parabolický odsek sa rovná ploche obdĺžnika, ktorého jeden rozmer je tetiva \overline{ab} paraboly a druhý rozmer je $\frac{2}{3}v$, pričom v je vzdialenosť vrcholu c paraboly od jej tetivy \overline{ab} .

Ťažisko parabolického odseku je vo vzdialenosti

$$\overline{ot} = \frac{2}{5}v = \frac{2}{5}oc$$

Veľkosť plochy prierezu môžeme vyjadriť ako súčin dvoch úsekov, teda plochou obdĺžnika, ktorého jeden rozmer je zvolená základňa e , druhý rozmer je súčet určovacích úsekov všetkých pásikov, teda plocha

$$S = e \sum_{i=1}^7 P_i$$

Ak obrazec ohraničený všeobecnou krivkou nemá ani jednu os súmernosti, rozdelíme plochu na úzke pásiky vo dvoch rôznych smeroch a priesečník oboch výsledníc dáva ťažisko nesymetrického prierezu.

Príklad 3-12:

Stanovte výpočtom aj graficky polohu ťažiska prierezu zloženého z plochy polkruhu (s_1), plochy obdĺžnika (s_2) a trojuholníka (s_3); rozmer $a = 3,0$ m, $b = 4,0$ m (obr. 3-12).

Pri hľadaní ťažiska zloženého prierezu výpočtom zvolíme si najskôr vzťažnú os, najlepšie vodorovnú os X , a to spodným vrcholom trojuholníka.

Vychádzame z vety, že statický moment plochy S celého zloženého prierezu sa rovná statickému momentu jednotlivých častí prierezu. Túto momentovú podmienku napíšeme k zvolenej vzťažnej osi X

$$S \cdot z_t = s_1 \cdot z_1 + s_2 \cdot z_2 + s_3 \cdot z_3$$

z čoho vzdialenosť ťažiska od osi X

$$z_t = \frac{s_1 \cdot z_1 + s_2 \cdot z_2 + s_3 \cdot z_3}{S} =$$

$$= \frac{\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{1}{2} z_1 + a \cdot b \cdot z_2 + a \frac{a}{2} \frac{1}{2} z_3}{s_1 + s_2 + s_3}$$

Celá plocha prierezu

$$S = 3,14 \cdot 1,5^2 \cdot 0,5 + 3,0 \cdot 4,0 + 3,0 \cdot 1,5 \cdot 0,5 =$$

$$= 3,533 + 12,0 + 2,25 = 17,783 \text{ m}^2$$

Vzdialenosť z_1 až z_3 ťažísk plôšok s_1 až s_3 od osi X

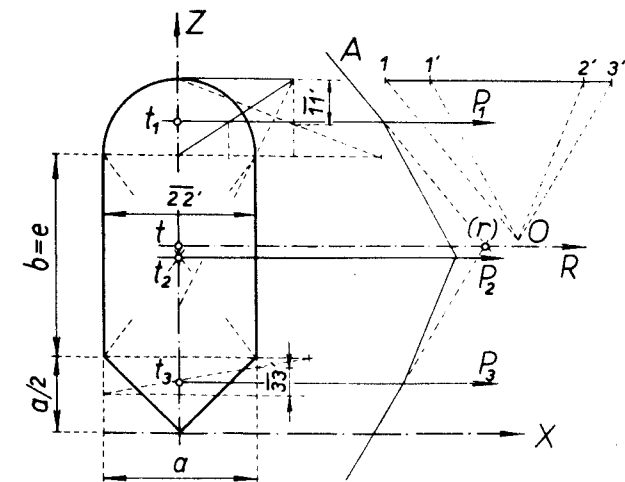
$$z_1 = \frac{a}{2} + b + 0,4244 \frac{a}{2} = 1,5 + 4,0 + 0,637 = 6,14 \text{ m}$$

$$z_2 = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 1,5 + 2,0 = 3,5 \text{ m}, \quad z_3 = \frac{2}{3} \frac{a}{2} = 1,0 \text{ m}$$

po dosadení dostaneme

$$z_t = \frac{3,533 \cdot 6,14 + 12,0 \cdot 3,5 + 2,25 \cdot 1,0}{17,783} =$$

$$= \frac{21,69 + 42,0 + 2,25}{17,783} = \frac{65,94}{17,783} = 3,71 \text{ m}$$



Obr. 3.12.

Vzdialenosť ťažiska z_1 celej plochy prierezu S osi X je väčšia ako vzdialenosť z_2 ťažiska obdĺžnika, teda $z_1 > z_2$, $3,71 > 3,5$, pretože plocha s_1 polkruhu má väčšiu hodnotu ako plocha s_3 trojuholníka.

Grafické riešenie je na obr. 3-12.

Najprv sme našli ťažiská t_1 až t_3 plôšok s_1 až s_3 . Plôšky s_1 až s_3 sme uviedli na rovnakú základňu, v našom prípade sme volili $e = b = 4,0$ m. Určili sme určovacie úseky $\overline{11'}$, $\overline{22'}$ a $\overline{33'}$ plôšok s_1 až s_3 a nechali sme ich pôsobiť ako sily $P_1 = \overline{11'}$, $P_2 = \overline{22'}$, $P_3 = \overline{33'}$ v ťažiskách t_1 až t_3 plôšok.

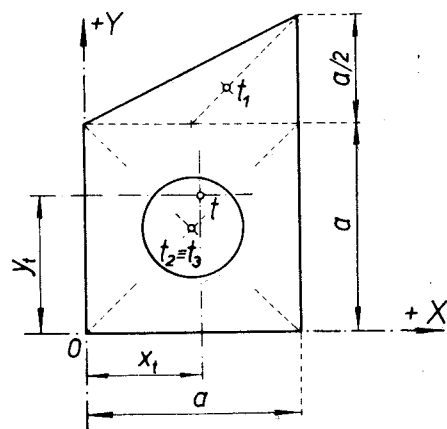
Výslednica $\mathbf{R} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{P}_i = \overline{11'} + \overline{22'} + \overline{33'} = \overline{13'}$ ide priesečníkom (r) prvej a poslednej strany výslednicovej čiary A a je už ďalšou ťažnicou prierezu. Priesečník t výslednice R so zvislou osou symetrie Z prierezu je ťažiskom celého zloženého prierezu.

Grafické riešenie súhlasí s počtovým stanovením polohy ťažiska.

Ak má obrazec dve osi súmernosti, sú obidve jeho ťažnicami a ich priesečník je ťažiskom t obrazca (zloženého prierezu).

Príklad 3-13:

Vypočítajte polohu ťažiska nesymetrického prierezu, ktorý sa skladá z plochy trojuholníka (s_1), z plochy štvorca so stranou $a = 4,2$ m (ploška s_2) a z plochy



Obr. 3.13.

kruhu, ktorého stred s je v priesečníku uhlopriečok štvorca. Plochu kruhu (s_3) treba brať do úvahy ako zápornú, keďže ku kladnej prierezovej ploche nepatrí (otvor); polomer $r = 1,0$ m (obr. 3-13).

Ťažiská plôšok s_1 až s_3 označíme t_1 až t_3 . Súradnice x_i , y_i ťažiska t vypočítame z rovníc (momentová veta k osi Y a X)

$$S \cdot x_t = s_1 \cdot x_1 + s_2 \cdot x_2 - s_3 \cdot x_3$$

$$S \cdot y_t = s_1 \cdot y_1 + s_2 \cdot y_2 - s_3 \cdot y_3$$

Kde celá plocha zloženého prierezu

$$S = s_1 + s_2 - s_3$$

pričom

$$s_1 = a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{4} = \frac{4,2^2}{4} = \frac{17,64}{4} = 4,41 \text{ m}^2$$

$$s_2 = a \cdot a = a^2 = 4,2^2 = 17,64 \text{ m}^2$$

$$s_3 = \pi \cdot 1,0^2 = 3,14159 \text{ m}^2$$

$$S = 4,41 + 17,64 - 3,14159 = 18,91 \text{ m}^2$$

Vzdialenosť ťažisk t_1 až t_3 od zvislej osi Y

$$x_1 = \frac{a}{2} + \frac{a}{6} = \frac{2}{3} \cdot 4,2 = 2,8 \text{ m}, \quad x_2 = x_3 = \frac{a}{2} = \frac{4,2}{2} = 2,1 \text{ m}$$

$$x_t = \frac{s_1 \cdot x_1 + s_2 \cdot x_2 - s_3 \cdot x_3}{S} = \frac{4,41 \cdot 2,8 + 17,64 \cdot 2,1 - 3,14 \cdot 2,1}{18,91} = \frac{42,798}{18,91} = 2,26 \text{ m}$$

$$y_1 = a + \frac{a}{6} = 4,2 + \frac{4,2}{6} = 4,9 \text{ m}, \quad y_2 = y_3 = \frac{a}{2} = \frac{4,2}{2} = 2,1 \text{ m}$$

$$y_t = \frac{s_1 \cdot y_1 + s_2 \cdot y_2 - s_3 \cdot y_3}{S} = \frac{4,41 \cdot 4,9 + 17,64 \cdot 2,1 - 3,14 \cdot 2,1}{18,91} = \frac{52,059}{18,91} = 2,75 \text{ m}$$

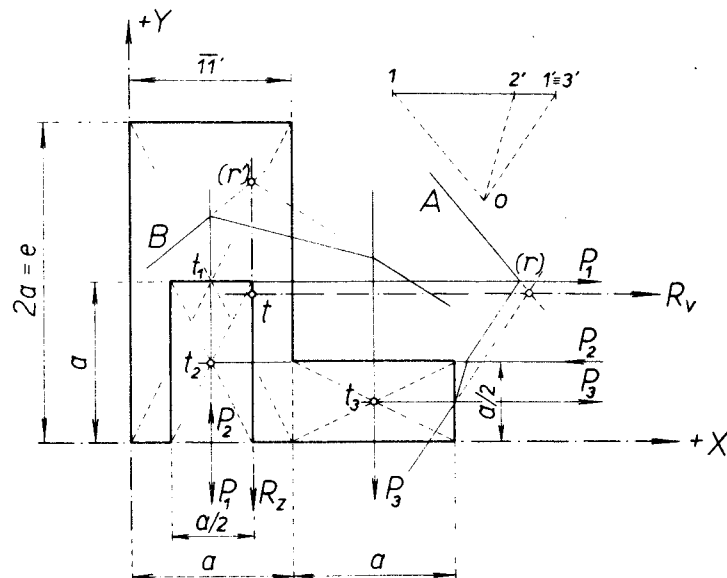
Príklad 3-14:

Stanovte výpočtom aj graficky ťažisko zloženého obrazca znázorneného na obr. 3-14; rozmer $a = 3,2$ m.

Zložený prierez s veľkosťou plochy S sa skladá z plochy troch obdĺžnikov, z ktorých plocha $s_1 = a \cdot 2a = 2a^2 = 2 \cdot 3,2^2 = 2 \cdot 10,24 = 20,48 \text{ m}^2$, plochy s_2 a s_3

majú rovnakú veľkosť $s_2 = s_3 = a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2} = \frac{3,2^2}{2} = \frac{10,24}{2} = 5,12 \text{ m}^2$. Plocha s_2 však k zloženému prierezu nepatrí, preto má záporné znamienko.

Pretože zložený prierez je nesymetrický, musíme vypočítať vzdialenosť ťažiska t od osi X aj od osi Y .



Obr. 3.14.

Tak isto ako v príklade 3-13 platia rovnice

$$S \cdot x_t = s_1 \cdot x_1 - s_2 \cdot x_2 + s_3 \cdot x_3$$

$$S \cdot y_t = s_1 \cdot y_1 - s_2 \cdot y_2 + s_3 \cdot y_3$$

príčom celá plocha zloženého prierezu

$$S = s_1 - s_2 + s_3 = 20,48 - 5,12 + 5,12 = 20,48 \text{ m}^2$$

$$x_1 = x_2 = \frac{a}{2} = \frac{3,2}{2} = 1,6 \text{ m}, \quad x_3 = a + \frac{a}{2} = 3,2 + 1,6 = 4,8 \text{ m}$$

$$y_1 = a = 3,2 \text{ m}, \quad y_2 = \frac{a}{2} = \frac{3,2}{2} = 1,6 \text{ m}, \quad y_3 = \frac{a}{4} = \frac{3,2}{4} = 0,8 \text{ m}$$

$$x_t = \frac{s_1 \cdot x_1 - s_2 \cdot x_2 + s_3 \cdot x_3}{S} =$$

$$= \frac{20,48 \cdot 1,6 - 5,12 \cdot 1,6 + 5,12 \cdot 4,8}{20,48} = \frac{49,152}{20,48} = 2,4 \text{ m}$$

$$y_t = \frac{s_1 \cdot y_1 - s_2 \cdot y_2 + s_3 \cdot y_3}{S} =$$

$$= \frac{20,48 \cdot 3,2 - 5,12 \cdot 1,6 + 5,12 \cdot 0,8}{20,48} = \frac{61,44}{20,48} = 3,0 \text{ m}$$

Pri grafickom hľadaní polohy ťažiska zloženého prierezu si zvolíme spoločnú základňu e pre všetky plochy s_1 až s_3 . V našom prípade nech $e = 2a = 2 \cdot 3,2 = 6,4 \text{ m}$.

Pri ploche s_1 nám vyjde určovací úsek $P_1 = \overline{11}' = a = 3,2$, pri ploche s_2 je $P_2 = \overline{22}' = \frac{a}{4} = \frac{3,2}{4} = 0,8 = P_3$. Keďže plocha s_2 je záporná, aj P_2 má opačný zmysel, ako má P_1 alebo P_3 .

Určovacie úseky plošok necháme pôsobiť v ťažiskách t_1 až t_3 ako sily a nájdeme ich výslednicu R_v vo vodorovnom smere (výslednicová čiara A).

Podobne zostrojíme výslednicu R_z vo zvislom smere, pomocou výslednicovej čiary B , ktorej strany kreslíme kolmo na pólové lúče $\overline{01}$ až $\overline{03}'$. Obe výslednice sú ťažnicami, ich priesečník je ťažiskom t zloženého prierezu.

Pri presnom rysovaní dostaneme rovnaký výsledok ako pri riešení polohy ťažiska výpočtom.

Príklad 3-15:

Treba určiť ťažisko prierezu zloženého zo štvorca, obdĺžnika a zápornej plochy lichobežníka (obr. 3-15), rozmer $a = 8,0 \text{ m}$.

Úlohu budeme riešiť počtovo.

Vhodne si zvolíme pravouhlé súradnicové osi a nájdeme vzdialenosť ťažiska t celého prierezu S od týchto osí – x_t a y_t zo známych vzťahov

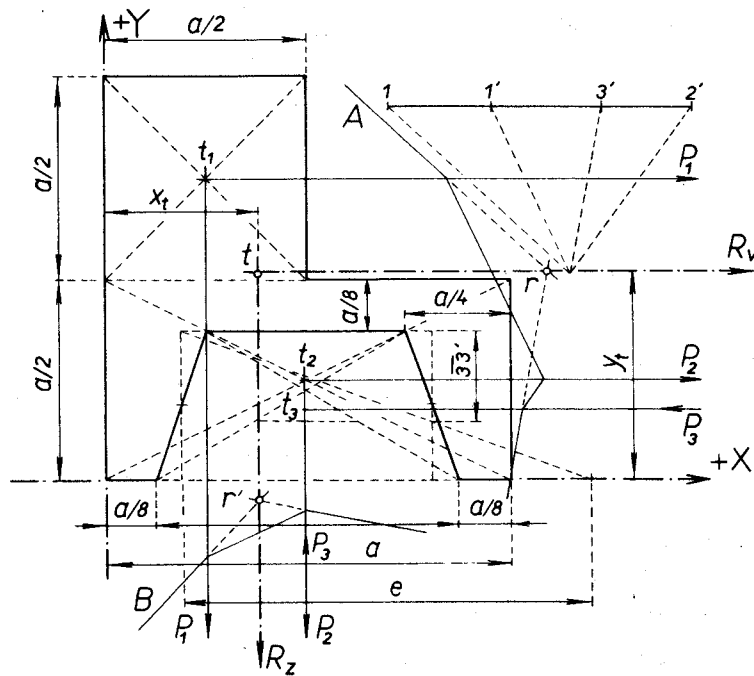
$$x_t = \frac{s_1 \cdot x_1 + s_2 \cdot x_2 - s_3 \cdot x_3}{S}, \quad y_t = \frac{s_1 \cdot y_1 + s_2 \cdot y_2 - s_3 \cdot y_3}{S}$$

kde plocha štvorca

$$s_1 = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4} = \frac{8,0^2}{4} = 16,0 \text{ m}^2$$

plocha obdĺžnika

$$s_2 = a \cdot \frac{a}{2} = 8,0 \cdot 4,0 = 32,0 \text{ m}^2$$



Obr. 3.15.

plocha lichobežníka

$$s_3 = \left(\frac{3}{4}a + \frac{a}{2}\right) \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}a = (6 + 4)0,5 \cdot 3,0 = 15,0 \text{ m}^2$$

$$S = s_1 + s_2 - s_3 = 16,0 + 32,0 - 15,0 = 33,0 \text{ m}^2$$

Súradnice ťažísk t_1 až t_3

$$x_1 = \frac{a}{4} = \frac{8,0}{4} = 2,0 \text{ m}, \quad x_2 = x_3 = \frac{a}{2} = 4,0 \text{ m}$$

$$y_1 = \frac{3}{4}a = 6,0 \text{ m}, \quad y_2 = \frac{a}{4} = 2,0 \text{ m}, \quad y_3 = \frac{h}{3} \frac{z_1 + 2z_2}{z_1 + z_2} \text{ v našom prípade}$$

$$h = \frac{3}{8}a = 3,0 \text{ m}, \quad z_1 = \frac{3}{4}a = \frac{3}{4}8,0 = 6,0 \text{ m}, \quad z_2 = 4,0 \text{ m}$$

$$y_3 = \frac{3,0}{3} \frac{6,0 + 2 \cdot 4,0}{6,0 + 4,0} = \frac{14,0}{10,0} = 1,4 \text{ m}$$

ak dosadíme

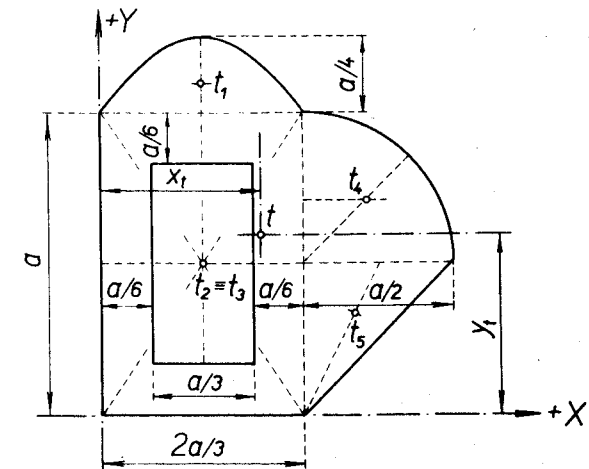
$$x_r = \frac{16,0 \cdot 2,0 + 32,0 \cdot 4,0 - 15,0 \cdot 4,0}{33,0} = \frac{100,0}{33,0} \approx 3,0 \text{ m}$$

$$y_r = \frac{16,0 \cdot 6,0 + 32,0 \cdot 2,0 - 15,0 \cdot 1,4}{33,0} = \frac{139,0}{33,0} \approx 4,21 \text{ m}$$

Grafické riešenie je jasné z obr. 3-15. Za základňu sme si zvolili $e = a = 8,0 \text{ m}$.

Príklad 3-16:

Vypočítajte polohu ťažiska zloženého prierezu vyznačeného na obr. 3-16, rozmer $a = 6,0 \text{ m}$.



Obr. 3.16.

Zložený prierez sa skladá z plôšok s_1 až s_5 . Ich ťažiská sú t_1 až t_5 .

Plocha s_3 vnútorného obdĺžnika je záporná (k prierezu nepatrí). Plocha s_1 je parabolický odsek.

Vieme už, že

$$x_r = \frac{s_1 \cdot x_1 + s_2 \cdot x_2 - s_3 \cdot x_3 + s_4 \cdot x_4 + s_5 \cdot x_5}{s_1 + s_2 - s_3 + s_4 + s_5}$$

$$y_r = \frac{s_1 \cdot y_1 + s_2 \cdot y_2 - s_3 \cdot y_3 + s_4 \cdot y_4 + s_5 \cdot y_5}{S}$$

$$s_1 = \frac{2}{3}a \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{4} = 4,0 \cdot 1,0 = 4,0 \text{ m}^2$$

$$s_2 = \frac{2}{3}a \cdot a = 4,0 \cdot 6,0 = 24,0 \text{ m}^2$$

$$s_3 = \frac{a}{3} \cdot \frac{2}{3}a = 2,0 \cdot 4,0 = 8,0 \text{ m}^2$$

$$s_4 = \frac{1}{4} \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 7,06 \text{ m}^2, \quad s_5 = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} = 4,5 \text{ m}^2$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{a}{3} = 2,0 \text{ m},$$

$$x_4 = \frac{2}{3}a + 0,4244 \cdot \frac{a}{2} = 4,0 + 1,27 = 5,27 \text{ m}$$

$$x_5 = \frac{2}{3}a + \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{4} = 4,0 + 1,0 = 5,0 \text{ m}$$

Podobne stanovíme

$$y_1 = a + \frac{2}{5} \cdot \frac{a}{4} = 6,0 + 0,6 = 6,6 \text{ m}$$

$$y_2 = y_3 = \frac{a}{2} = 3,0 \text{ m}, \quad y_4 = \frac{a}{2} + 0,4244 \cdot \frac{a}{2} = 4,27 \text{ m}$$

$$y_5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} = 2,0 \text{ m}$$

Ak dosadíme

$$x_t = \frac{4,0 \cdot 2,0 + 24,0 \cdot 2,0 - 8,0 \cdot 2,0 + 7,06 \cdot 5,27 + 4,5 \cdot 5,0}{4,0 + 24,0 - 8,0 + 7,06 + 4,5} =$$

$$= \frac{99,7}{31,56} = 3,16 \text{ m}$$

$$y_t = \frac{4,0 \cdot 6,6 + 24,0 \cdot 3,0 - 8,0 \cdot 3,0 + 7,06 \cdot 4,27 + 4,5 \cdot 2,0}{31,56} =$$

$$= \frac{113,55}{31,56} = 3,6 \text{ m}$$

Pri grafickom riešení treba plošky s_1 až s_5 uviesť na spoločnú základňu e a v ťažiskách t_1 až t_5 plôšok nechať pôsobiť určovacie úseky plôch ako sily a nájsť ich výslednicu v dvoch smeroch (obvykle na seba kolmých). Priesečník výsledníc je ťažisko t zloženého prierezu.

Príklad 3-17:

Výpočtom stanovte ťažisko t zloženého prierezu; rozmer $a = 8,0 \text{ m}$ (obr. 3-17).

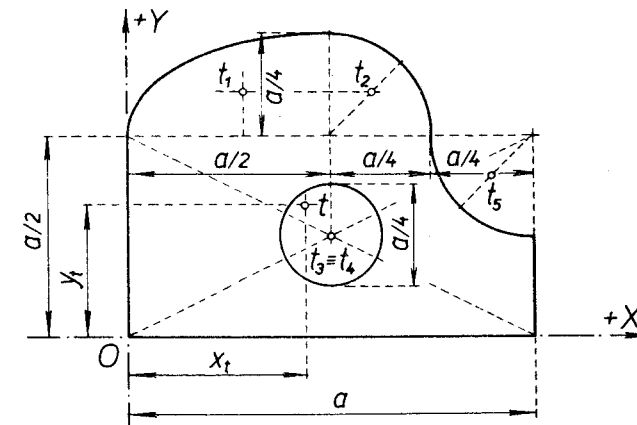
Zložený prierez sa skladá z piatich častí, z ktorých ploška s_1 je štvrtelipsa,

ostatné časti sú zrejmé z obrázka. Plôšky s_4 (kruh) a s_5 (štvrtkruh) sú záporné a treba ich od plochy obdĺžnika s_3 odčítať.

Pre súradnice x_t , y_t ťažiska t zloženého prierezu platia výrazy

$$x_t = \frac{s_1 \cdot x_1 + s_2 \cdot x_2 + s_3 \cdot x_3 - s_4 \cdot x_4 - s_5 \cdot x_5}{s_1 + s_2 + s_3 - s_4 - s_5}$$

$$y_t = \frac{s_1 \cdot y_1 + s_2 \cdot y_2 + s_3 \cdot y_3 - s_4 \cdot y_4 - s_5 \cdot y_5}{S}$$



Obr. 3.17.

Veľkosti plôšok

$$s_1 = \pi \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{1}{4} = 3,14 \cdot 4,0 \cdot 2,0 \cdot \frac{1}{4} = 6,28 \text{ m}^2$$

$$s_2 = \pi \left(\frac{a}{4}\right)^2 \frac{1}{4} = 3,14 \cdot 2,0^2 \cdot \frac{1}{4} = 3,14 \text{ m}^2$$

$$s_3 = a \cdot \frac{a}{2} = 8,0 \cdot 4,0 = 32,0 \text{ m}^2$$

$$s_4 = \pi \left(\frac{a}{8}\right)^2 = 3,14 \cdot 1,0^2 = 3,14 \text{ m}^2, \quad s_5 = s_2 = 3,14 \text{ m}^2$$

Súradnice ťažísk t_1 až t_5

$$x_1 = 0,5756 \frac{a}{2} = 0,5756 \cdot 4,0 = 2,3 \text{ m}$$

$$x_2 = \frac{a}{2} + 0,4244 \frac{a}{4} = 4,0 + 0,4244 \cdot 2,0 = 4,85 \text{ m}$$

$$x_3 = x_4 = \frac{a}{2} = 4,0 \text{ m}, \quad x_5 = 8,0 - 0,4244 \cdot 2,0 = 7,15 \text{ m}$$

$$y_1 = \frac{a}{2} + 0,4244 \frac{a}{4} = 4,85 \text{ m}, \quad y_2 = y_1 = 4,85 \text{ m}$$

$$y_3 = y_4 = \frac{a}{4} = 2,0 \text{ m}$$

$$y_5 = \frac{a}{2} - 0,4244 \frac{a}{4} = 4,0 - 0,85 = 3,15 \text{ m}$$

$$x_t = \frac{6,28 \cdot 2,3 + 3,14 \cdot 4,85 + 32,0 \cdot 4,0 - 3,14 \cdot 4,0 - 3,14 \cdot 7,15}{6,28 + 3,14 + 32,0 - 3,14 - 3,14} =$$

$$= \frac{122,662}{35,14} = 3,49 \text{ m}$$

$$y_t = \frac{6,28 \cdot 4,85 + 3,14 \cdot 4,85 + 32,0 \cdot 2,0 - 3,14 \cdot 2,0 - 3,14 \cdot 3,15}{35,14} =$$

$$= \frac{93,516}{35,14} = 2,66 \text{ m}$$

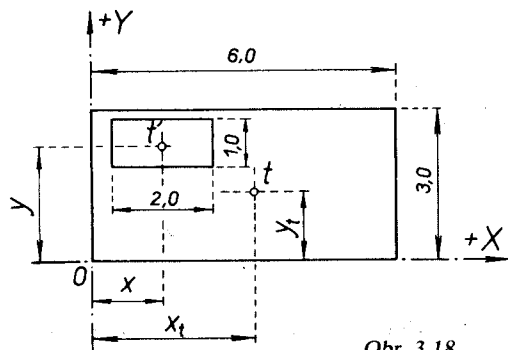
Príklad 3-18:

Z obdĺžnikovej steny rozmerov 6,0 m/3,0 m treba vyrezať obdĺžnikový otvor 2,0 m/1,0 m tak, aby ťažisko steny malo súradnice $x_t = 3,2 \text{ m}$, $y_t = 1,4 \text{ m}$ (obr. 3-18).

Pri výpočte budeme vychádzať zo známych viet

$$S \cdot x_t = \sum s_i x_i, \quad S \cdot y_t = \sum s_i y_i$$

Poznáme x_t , y_t , hľadáme však ťažisko otvoru, teda jeho polohu za predpokladu zvolenej polohy ťažiska steny t (pri otvore 2,0 m/1,0 m).



Obr. 3.18.

Výsledná plocha steny

$$S = \sum_{i=1}^2 s_i = s_1 - s_2 = 6,0 \cdot 3,0 - 2,0 \cdot 1,0 = 16,0 \text{ m}^2$$

$$x_t = \frac{s_1 \cdot x_1 - s_2 \cdot x_2}{s_1 - s_2}, \quad y_t = \frac{s_1 \cdot y_1 - s_2 \cdot y_2}{s_1 - s_2}$$

$$3,2 = \frac{6,0 \cdot 3,0 \cdot 3,0 - 2,0 \cdot 1,0 \cdot x}{16,0}, \quad 3,2 = \frac{54,0 - 2x}{16,0}$$

z čoho

$$x = 1,4 \text{ m}$$

podobne platí

$$1,4 = \frac{6,0 \cdot 3,0 \cdot 1,5 - 2,0 \cdot 1,0 \cdot y}{16,0}, \quad 1,4 = \frac{27,0 - 2y}{16,0}$$

$$y = 2,3 \text{ m}$$

Ťažisko otvoru má teda súradnice t' (1,4 m; 2,3 m).

Príklad 3-19:

Oceľové prúty hornej oceľovobetónovej výstuže sú niekedy podopreté tuhým lomeným priestorovým oceľovým prútom (obr. 3-19). Je potrebné vypočítať polohu jeho ťažiska.

Vhodne si zvolíme sústavu pravouhlých súradnicových osí X , Y , Z a zo vzťahov (5) stanovíme súradnice x_t , y_t , z_t ťažiska t .

Priestorovú lomenú čiaru máme rozdelenú na úsečky S_i (v našom prípade na úsečky a), ktoré dosadíme do vzťahov (5)

$$x_t = \frac{\sum_{i=1}^n x_i S_i}{S}, \quad y_t = \frac{\sum_{i=1}^n y_i S_i}{S}, \quad z_t = \frac{\sum_{i=1}^n z_i S_i}{S} \quad (5)$$

po dosadení za $S_i = a$ dostaneme

$$S = \sum_{i=1}^5 a_i = 5a$$

Z momentovej podmienky k rovinám YZ , ZX a XY dostaneme súradnice x_t , y_t a z_t hľadaného ťažiska lomenej priestorovej čiary

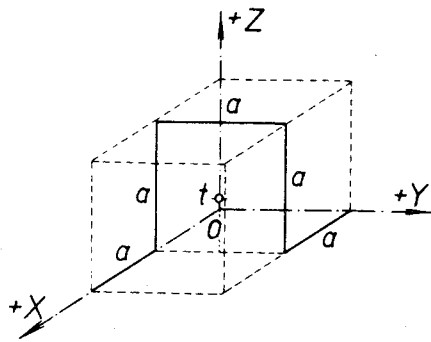
$$x_t = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i S_i}{S} = \frac{(1,5a + a + a + a + 0,5a)a}{5a} = \frac{5a^2}{5a} = a$$

$$y_i = \frac{\sum_{i=1}^5 y_i S_i}{S} = \frac{(0+0+0,5a+a+a)a}{5a} = \frac{2,5a^2}{5a} = \frac{a}{2}$$

$$z_i = \frac{\sum_{i=1}^5 z_i S_i}{S} = \frac{(0+0,5a+a+0,5a+0)a}{5a} = \frac{2a^2}{5a} = 0,4a$$

Za predpokladu, že $a = 20,0$ cm je

$$x_i = a = 20,0 \text{ cm}, \quad y_i = \frac{a}{2} = 10,0 \text{ cm}, \quad z_i = 0,4a = 8,0 \text{ cm}$$



Obr. 3.19.

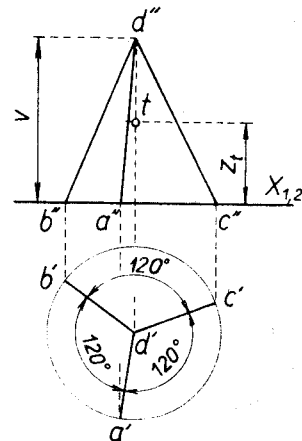
Príklad 3-20:

Nohy zdvíhadlovej trojnožky sú rovnako dlhé a rovnako ťažké prizmatické tyče. Poloha nôh trojnožky je naznačená na obr. 3-20. Treba stanoviť ťažisko trojnožky.

Jednotlivé nohy majú ťažiská v strede dĺžok a keďže všetky tri nohy majú rovnaký sklon, ich ťažiská sú aj v rovnakej výške $\frac{v}{2}$.

Preto aj ťažisko t trojnožky je vo výške

$$z_i = \frac{v}{2}$$



Obr. 3.20.

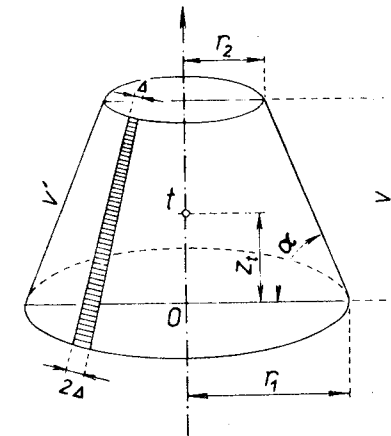
Príklad 3-21:

Určte ťažisko t pláštá zrezaného kužeľa znázorneného na obr. 3-21, pričom polomer dolnej základne $r_1 = 4,0$ m, polomer hornej základne $r_2 = 2,0$ m, výška $v = 5,0$ m (obr. 3-21).

Pretože plášť je symetrický vzhľadom na zvislú os Z , musí na tejto osi ležať aj ťažisko t pláštá. Stačí teda vypočítať súradnicu z , ťažiska.

Plášť zrezaného kužeľa rozdelíme na elementárne lichobežníky. Najprv stanovíme dĺžku povrchovej priamky pláštá v' , a to z pravouhlého trojuholníka

$$v' = \sqrt{v^2 + (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{5,0^2 + 2,0^2} = \sqrt{29} \doteq 5,39 \text{ m.}$$



Obr. 3.21.

Ťažisko z'_i elementárneho lichobežníka dostaneme zo známeho vzťahu

$$z'_i = \frac{v'}{3} \frac{z_1 + 2z_2}{z_1 + z_2} = \frac{v'}{3} \frac{2\Delta + 2\Delta}{2\Delta + \Delta} = \frac{v'}{3} \frac{4}{3} = \frac{5,39}{3} \cdot \frac{4}{3} \doteq 2,4 \text{ m}$$

Všetky elementárne lichobežníčky, z ktorých sa skladá plášť zrezaného kužeľa, majú svoje ťažiská v rovnakej vzdialenosti z'_i , od obvodovej kružnice spodnej základne; ťažisko celého pláštá je od roviny základne vo zvislej vzdialenosti

$$z_i = z'_i \cdot \sin \alpha$$

Uhol α určíme z pravouhlého trojuholníka

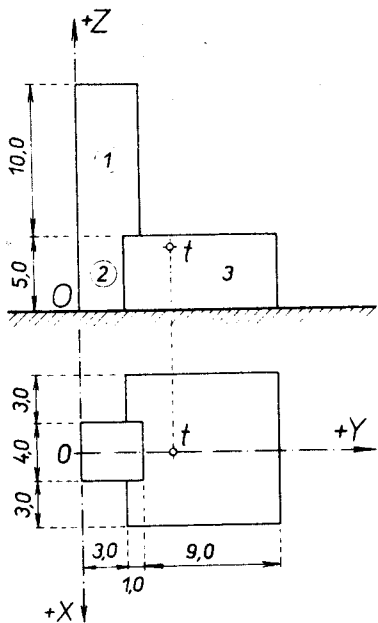
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{r_1 - r_2} = \frac{5,0}{2,0} = 2,5, \quad \alpha \doteq 68^\circ 10'$$

Zvislá vzdialenosť ťažiska plášťa zrezaného kužeľa

$$z_i = 2,4 \cdot \sin 68^\circ 10' = 2,4 \cdot 0,928 27 = 2,23 \text{ m}$$

Príklad 3-22:

Vypočítajte polohu ťažiska telesa, ktoré je znázornené na obr. 3-22. Teleso je súmerné vzhľadom na vodorovnú os Y, preto súradnica $x_i = 0$.



Obr. 3.22.

Súradnica

$$y_i = \frac{\sum_{i=1}^3 V_i y_i}{\sum_{i=1}^3 V_i} = \frac{V_1 \cdot y_1 + V_2 \cdot y_2 + V_3 \cdot y_3}{V_1 + V_2 + V_3}$$

Teleso znázornené na obrázku sa skladá z troch častí, ktorých objem je V_1 , V_2 , V_3 , pričom

$$V_1 = 4,0 \cdot 4,0 \cdot 10,0 = 160,0 \text{ m}^3$$

$$V_2 = 3,0 \cdot 4,0 \cdot 5,0 = 60,0 \text{ m}^3$$

$$V_3 = 10,0 \cdot 10,0 \cdot 5,0 = 500,0 \text{ m}^3$$

Súradnice ťažísk častí telesa

$$y_1 = 2,0 \text{ m}, \quad y_2 = 1,5 \text{ m}, \quad y_3 = 0,8 \text{ m}$$

$$y_i = \frac{160,0 \cdot 2,0 + 60,0 \cdot 1,5 + 500,0 \cdot 0,8}{160,0 + 60,0 + 500,0} = \frac{4 410,0}{720,0} = 6,125 \text{ m}$$

$$z_i = \frac{\sum_{i=1}^3 V_i z_i}{\sum_{i=1}^3 V_i} = \frac{V_1 z_1 + V_2 z_2 + V_3 z_3}{V_1 + V_2 + V_3}$$

príčom súradnice

$$z_1 = 10,0 \text{ m}, \quad z_2 = 2,5 \text{ m} = z_3$$

$$z_i = \frac{160,0 \cdot 10,0 + 60,0 \cdot 2,5 + 500,0 \cdot 2,5}{160,0 + 60,0 + 500,0} = \frac{3 000,0}{720,0} = 4,16 \text{ m}$$

Príklad 3-23:

Výpočtom stanovte polohu ťažiska homogénneho telesa znázorneného na obr. 3-23. Teleso nemá os symetrie, preto treba vypočítať súradnicu x_i , y_i , z_i ťažiska t . Všetky rozmery sú udané v metroch.

Ako znázorňuje obrázok, teleso sa skladá z dvoch hranolov a časť telesa, ktorá je spoločná obom hranolom, treba odčítať.

Súradnice ťažiska t určíme zo vzťahov

$$x_i = \frac{\sum V_i x_i}{\sum V_i}, \quad y_i = \frac{\sum V_i y_i}{\sum V_i}, \quad z_i = \frac{\sum V_i z_i}{\sum V_i}$$

$$\sum_{i=1}^3 V_i = V_1 + V_2 - V_3 = 10,0 \cdot 8,0 \cdot 15,0 + 15,0 \cdot 6,0 \cdot 5,0 - 6,0 \cdot 4,0 \cdot 5,0 = 1 530,0 \text{ m}^3$$

$$x_i = \frac{10,0 \cdot 8,0 \cdot 15,0 \cdot 4,0 + 15,0 \cdot 6,0 \cdot 5,0 \cdot 7,0 - 6,0 \cdot 4,0 \cdot 5,0 \cdot 6,0}{1 530,0}$$

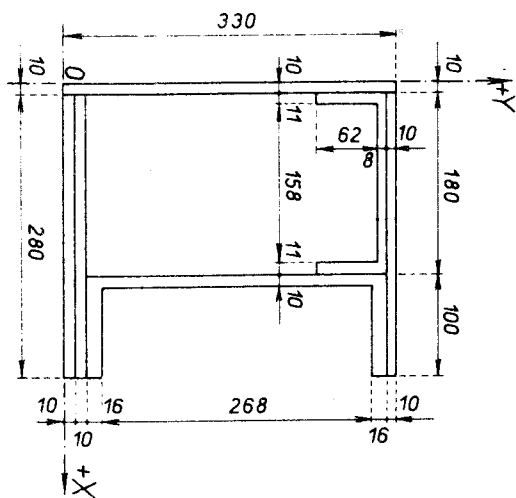
$$= \frac{7 230,0}{1 530,0} = 4,72 \text{ m}$$

$$y_i = \frac{10,0 \cdot 8,0 \cdot 15,0 \cdot 5,0 + 15,0 \cdot 6,0 \cdot 5,0 \cdot 11,5 - 6,0 \cdot 4,0 \cdot 5,0 \cdot 7,0}{1 530,0}$$

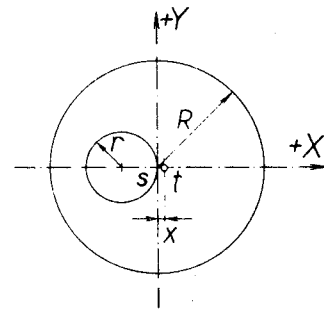
$$= \frac{10 875,0}{1 530,0} = 7,11 \text{ m}$$

$$z_r = \frac{10,0 \cdot 8,0 \cdot 15,0 \cdot 7,5 + 15,0 \cdot 6,0 \cdot 5,0 \cdot 2,5 - 6,0 \cdot 4,0 \cdot 5,0 \cdot 2,5}{1\,530,0} =$$

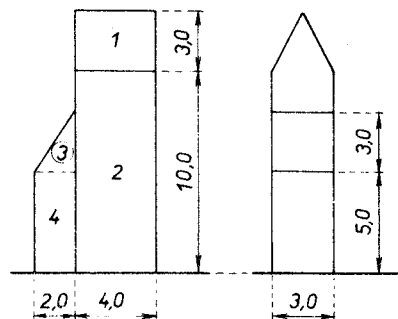
$$= \frac{9\,825,0}{1\,530,0} = 6,42 \text{ m}$$



Obr. 3.24.



Obr. 3.25.



Obr. 3.26.

Príklad 3-24:

Vypočítajte polohu ťažiska t prierezu zloženého z profilových želiel. Rozmery sú udané v mm (obr. 3-24). (Ťažisko t má súradnice $x_t \approx 140,0$ mm, $y_t \approx 164,0$ mm.)

Príklad 3-25:

Stanovte polohu ťažiska prierezu znázorneného na obr. 3-25, pričom $R = 3,0$ m, $r = 1,0$ m. Plocha menšieho kruhu k prierezu nepatří. (Ťažisko t je na vodorovnej osi symetrie vo vzdialenosti $x_t = 0,12$ m.)

Príklad 3-26:

Vypočítajte, v akej výške je ťažisko oporného piliera znázorneného na obr. 3-26. Ťažisko piliera je vo výške $z_t = 5,24$ m.

IV. MOMENTY ZOTRVAČNOSTI A DEVIACNÉ MOMENTY

4.1. MOMENTY ZOTRVAČNOSTI A DEVIACNÉ MOMENTY ROVINNÝCH OBRAZCOV

1. Prehľad používaných vzorcov

Moment zotrvačnosti k ľubovoľnej osi X rovinného obrazca definujeme ako integrál po celej ploche

$$J_x = \int_S y^2 dS \quad (1)$$

kde dS je elementárna plocha,
 y^2 — štvorec vzdialenosti elementárnej plochy od osi X .

Podobne moment zotrvačnosti k osi Y je

$$J_y = \int_S x^2 dS \quad (2)$$

Deviačný moment k osiam X, Y definujeme podľa vzťahu

$$D_{xy} = \int_S x \cdot y dS \quad (3)$$

Momenty zotrvačnosti a deviačné momenty sa vyjadrujú v cm^4, m^4 . Momenty zotrvačnosti sú vždy kladné, pretože pod znakom integrálu je plocha dS (vždy kladná) a štvorec vzdialenosti.

Deviačný moment môže byť kladný, záporný a môže sa rovnať nule. Ak máme ľubovoľný symetrický prierez a hľadáme deviačný moment k osiam, z ktorých jedna je osou symetrie, potom deviačný moment je nulový. Príspevok elementárnych plôšok dS , symetricky položených k osi symetrie na deviačný moment, má rovnakú absolútnu hodnotu, ale rozdielne znamienka. Potom aj integrál elementárnych deviačných momentov na jednej strane osi symetrie sa rovná integrálu na druhej strane osi symetrie, ale má opačné znamienko, takže celkový deviačný moment je nulový.

Polárny moment zotrvačnosti k bodu 0 (obr. 4.1-1), t. j. k priesečníku súradnicového systému X, Y je definovaný vzťahom

$$J_p = \int_S \rho^2 dS \quad (4)$$

kde ρ je vzdialenosť elementárnej plošky dS od bodu 0, pretože

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

potom

$$J_p = \int_S \rho^2 dS = \int_S (x^2 + y^2) dS = \int_S x^2 dS + \int_S y^2 dS = J_y + J_x$$

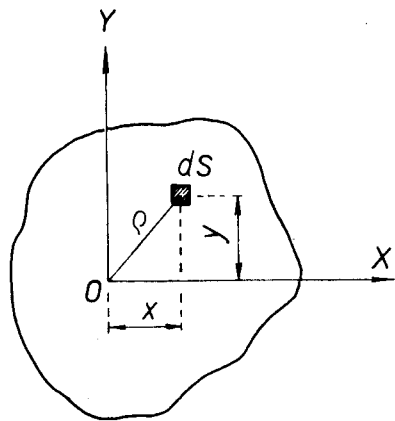
$$J_p = J_x + J_y \quad (5)$$

Polárny moment zotrvačnosti k bodu 0 sa rovná súčtu momentov zotrvačnosti k dvom navzájom kolmým osiam so začiatkom v bode 0.

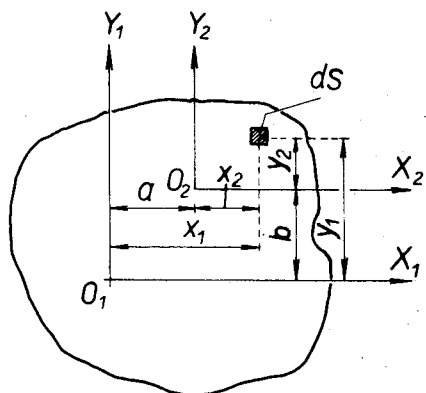
Osi zotrvačnosti so začiatkom v ťažisku obrazca nazývame centrálnymi osami, označujeme ich X_0, Y_0 a momenty zotrvačnosti k týmto osiam nazývame centrálnymi momentmi zotrvačnosti.

Momenty zotrvačnosti a deviačný moment k rovnobežným osiam

Pri riešení praktických úloh musíme často určovať momenty zotrvačnosti k osiam ľubovoľne orientovaným v rovine. Pritom sa dajú použiť i známe hodnoty momentov zotrvačnosti celého prierezu (alebo jeho časti) uvedené v literatúre.



Obr. 4.1-1.



Obr. 4.1-2.

Preto je veľmi dôležité určiť závislosť medzi momentmi zotrvačnosti toho istého obrazca k rôznym osiam.

Vo všeobecnom prípade prechod od jednej súradnicovej sústavy k inej môžeme vyjadriť ako dve postupné transformácie pôvodnej súradnicovej sústavy:

- rovnobežné premiestnenie súradnicovej sústavy do novej polohy,
- pootočenie súradníc okolo nového začiatku.

a) Rovnobežný prenos súradnicových osí

Predpokladáme, že $J_{X_1}, J_{Y_1}, D_{X_1, Y_1}$ poznáme (obr. 4.1-2).

Zvolíme si novú súradnicovú sústavu X_2, Y_2 , ktorá je rovnobežná k pôvodnej.

Označme a a b súradnice bodu O_2 v pôvodnej súradnicovej sústave X_1, Y_1 .

V novej súradnicovej sústave X_2, Y_2 budú súradnice elementárnej plochy dS

$$x_2 = x_1 - a$$

$$y_2 = y_1 - b$$

potom

$$J_{X_2} = \int_S y_2^2 dS = \int_S (y_1 - b)^2 dS = \int_S y_1^2 dS - 2b \int_S y_1 dS + b^2 \int_S dS$$

kde $\int_S y_1^2 dS$ je moment zotrvačnosti J_{X_1} ,

$\int_S y_1 dS$ — statický moment plochy k osi X_1 ,

$\int_S dS$ — plocha prierezu.

Teda

$$J_{X_2} = J_{X_1} - 2bU_{X_1} + b^2 S$$

Ak pôvodné osi X_1, Y_1 mali začiatok v ťažisku obrazca, t. j. X_1, Y_1 boli ťažiskové osi, potom $U_{X_1} = 0$ a

$$J_{X_2} = J_{X_1} + b^2 \cdot S \quad (6)$$

Zo vzťahu (6) vyplýva, že moment zotrvačnosti k ľubovoľnej osi, ktorá neprechádza ťažiskom, je väčší o hodnotu $b^2 \cdot S$.

Podobne

$$J_{Y_2} = J_{Y_1} - 2a \cdot U_{Y_1} + a^2 \cdot S$$

Ak os Y_1 prechádza ťažiskom, potom

$$J_{Y_2} = J_{Y_1} + a^2 \cdot S \quad (7)$$

Vzťahy (6), (7) sa často používajú pri výpočte momentov zotrvačnosti zložených prierezo.

Vypočítajme deviačný moment k osiam X_2, Y_2 .

$$D_{X_2 Y_2} = \int_S x_2 y_2 dS = \int_S (x_1 - a)(y_1 - b) \cdot dS =$$

$$= \int_S x_1 y_1 dS - a \int_S y_1 dS - b \int_S x_1 dS + a \cdot b \int_S dS$$

kde

$$\int_S x_1 y_1 dS = D_{X_1 Y_1}, \quad \int_S y_1 dS = U_{X_1}$$

$$\int_S x_1 dS = U_{Y_1}, \quad \int_S dS = S$$

$$D_{X_2 Y_2} = D_{X_1 Y_1} - a \cdot U_{X_1} - b \cdot U_{Y_1} + a \cdot b \cdot S$$

Ak X_1, Y_1 sú ťažiskové osi, potom

$$D_{X_2 Y_2} = D_{X_1 Y_1} + a \cdot b \cdot S \quad (8)$$

Ak je prierez symetrický a pôvodná os je osou symetrie, potom

$$D_{X_2 Y_2} = a \cdot b \cdot S \quad (9)$$

b) Momenty zotrvačnosti a deviačný moment k pootočeným osiam

Predpokladáme, že momenty zotrvačnosti J_{X_1}, J_{Y_1} a $D_{X_1 Y_1}$ poznáme. Zvolíme si novú súradnicovú sústavu X_2, Y_2 pootočenú o uhol α . Uhol α je kladný, ak sa vynáša oproti smeru hodinových ručičiek.

$$x_2 = y_1 \cdot \sin \alpha + x_1 \cdot \cos \alpha$$

$$y_2 = y_1 \cdot \cos \alpha - x_1 \cdot \sin \alpha$$

potom

$$J_{X_2} = \int_S y_2^2 \cdot dS = \int_S (y_1 \cdot \cos \alpha - x_1 \cdot \sin \alpha)^2 \cdot dS =$$

$$= \cos^2 \alpha \int_S y_1^2 dS + \sin^2 \alpha \int_S x_1^2 dS - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_S x_1 y_1 dS$$

$$J_{X_2} = J_{Y_1} \cdot \cos^2 \alpha + J_{X_1} \sin^2 \alpha - D_{X_1 Y_1} \sin 2\alpha \quad (10)$$

podobne odvodíme

$$J_{Y_2} = J_{X_1} \cdot \cos^2 \alpha + J_{Y_1} \sin^2 \alpha + D_{X_1 Y_1} \cdot \sin 2\alpha \quad (11)$$

Pri sčítaní momentov zotrvačnosti dostaneme

$$J_{X_2} + J_{Y_2} = J_{X_1} + J_{Y_1} \quad (12)$$

Súčet axiálnych momentov zotrvačnosti k dvom navzájom kolmým osiam má rovnakú hodnotu pri pootočení osi o ľubovoľný uhol α .

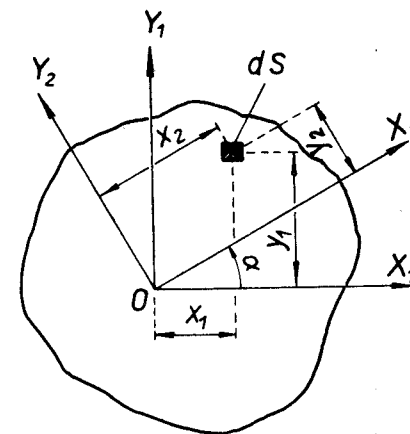
Deviačný moment k osiam X_2, Y_2

$$D_{X_2 Y_2} = \int_S x_2 y_2 dS = \int_S (y_1 \cdot \cos \alpha - x_1 \cdot \sin \alpha) \cdot (y_1 \cdot \sin \alpha + x_1 \cos \alpha) dS =$$

$$= \sin \alpha \cdot \cos \alpha \left(\int_S y_1^2 dS - \int_S x_1^2 dS \right) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cdot \int_S x_1 y_1 dS$$

po úprave

$$D_{X_2 Y_2} = \frac{J_{X_1} - J_{Y_1}}{2} \sin 2\alpha + D_{X_1 Y_1} \cos 2\alpha \quad (13)$$



Obr. 4.1-3.

Hlavné momenty zotrvačnosti

Na základe vzťahov (10), (11), (13) môžeme posúdiť, ako sa menia momenty zotrvačnosti a deviačný moment pri zmene uhla α . Pri istej hodnote uhla α axiálne momenty nadobúdajú extrémne hodnoty a deviačný moment sa rovná nule. Osi, ku ktorým sú momenty zotrvačnosti extrémne a deviačný moment sa rovná nule, nazývame hlavnými osami zotrvačnosti. Ak začiatok súradnicového systému leží v ťažisku, potom sú to hlavné centrálné osi zotrvačnosti a im zodpovedajúce momenty zotrvačnosti sú hlavnými centrálnymi momentmi zotrvačnosti. Určíme smer hlavných osí zotrvačnosti.

Uhol odklonu hlavných osí označíme α_0 a hlavné centrálné osi zotrvačnosti X, Y . Predpokladajme, že momenty zotrvačnosti a deviačný moment k ťažiskovým osiam X_0, Y_0 poznáme.

Potom

$$D_{XY} = \frac{J_{X_0} - J_{Y_0}}{2} \sin 2\alpha_0 + D_{X_0Y_0} \cdot \cos 2\alpha_0 = 0$$

odkiaľ

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2D_{X_0Y_0}}{J_{X_0} - J_{Y_0}} \quad (14)$$

Uhol α_0 udáva smer hlavnej osi zotrvačnosti, ku ktorej je hlavný moment maximálny.

Kladný uhol α_0 sa vynáša oproti smeru hodinových ručičiek, záporný v smere hodinových ručičiek, pričom môžu nastať štyri prípady:

1. $D_{X_0Y_0} > 0, J_{X_0} > J_{Y_0}$, potom uhol α_0 vynášame od osi X_0 v smere hodinových ručičiek;

2. $D_{X_0Y_0} < 0, J_{X_0} > J_{Y_0}$, potom uhol α_0 vynášame od osi X_0 oproti smeru hodinových ručičiek;

3. $D_{X_0Y_0} > 0, J_{X_0} < J_{Y_0}$, uhol α_0 vynášame od osi Y_0 oproti smeru hodinových ručičiek;

4. $D_{X_0Y_0} < 0, J_{X_0} < J_{Y_0}$, uhol α_0 vynášame od osi Y_0 v smere hodinových ručičiek.

Hlavné momenty zotrvačnosti sú:

$$J_X = J_{X_0} \cdot \cos^2 \alpha_0 + J_{Y_0} \cdot \sin^2 \alpha_0 - D_{X_0Y_0} \cdot \sin 2\alpha_0$$

$$J_Y = J_{X_0} \cdot \sin^2 \alpha_0 + J_{Y_0} \cdot \cos^2 \alpha_0 + D_{X_0Y_0} \cdot \sin 2\alpha_0$$

Výrazy môžeme upraviť na tvar

$$\begin{aligned} J_X &= \frac{J_{X_0} + J_{Y_0}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(J_{X_0} - J_{Y_0})^2 + 4D_{X_0Y_0}^2} \\ J_Y &= \frac{J_{X_0} + J_{Y_0}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(J_{X_0} - J_{Y_0})^2 + 4D_{X_0Y_0}^2} \end{aligned} \quad (15)$$

Elipsa zotrvačnosti

Výraz pre moment zotrvačnosti prierezu k ľubovoľnej osi X na základe vety o strednej hodnote integrálu môžeme vždy zapísať v tvare

$$J_X = \int_S y^2 dS = i_x^2 \int_S dS = i_x^2 S$$

kde S je plocha prierezu,

i_x — súradnica niektorého stredného bodu prierezu. Táto súradnica sa nazýva polomer zotrvačnosti prierezu vzhľadom k osi X a určuje sa zo vzťahu

$$i_x = \sqrt{\frac{J_X}{S}} \quad (16)$$

Polomery zotrvačnosti, ktoré zodpovedajú hlavným osiam zotrvačnosti, nazývajú sa hlavné polomery zotrvačnosti a elipsa zotrvačnosti, nakreslená k týmto polomerom — hlavná elipsa zotrvačnosti prierezu

$$i_x = \sqrt{\frac{J_X}{S}} \quad (17)$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_Y}{S}}$$

Polomery elipsy zotrvačnosti sa vynášajú kolmo na osi.

2. Príklady

Príklad 4.1-1:

Určte moment zotrvačnosti obdĺžnika výšky h a šírky b vzhľadom k osi X_1 , ktorá prechádza základňou (obr. 4.1-4).

Riešenie:

Za diferenciálny element plochy si zvolíme pásik rovnobežný s osou X_1 šírky b a výšky dy_1 . Jeho plocha je

$$dS = b \cdot dy_1 \quad (1)$$

Moment zotrvačnosti k osi X_1 podľa rovnice (1) bude

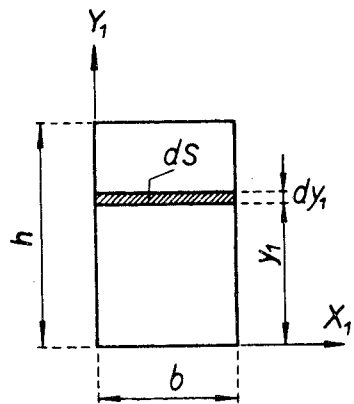
$$J_{X_1} = \int_S y_1^2 dS = \int_0^h b \cdot y_1^2 \cdot dy_1 = \left[\frac{b \cdot y_1^3}{3} \right]_0^h = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

Moment zotrvačnosti k osi Y_1 je

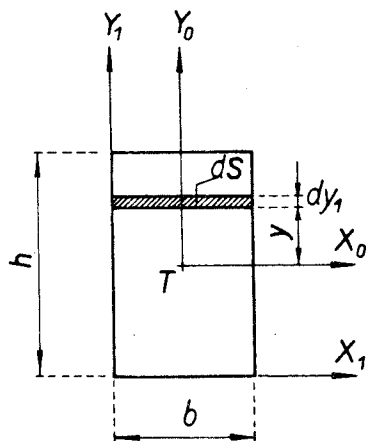
$$J_{Y_1} = \frac{b^3 \cdot h}{3}$$

Príklad 4.1-2:

Určte momenty zotrvačnosti obdĺžnika k ťažiskovým osiam X_0, Y_0 rovnobežným so stranami obdĺžnika (obr. 4.1-5).



Obr. 4.1-4.



Obr. 4.1-5.

Riešenie:

Za diferenciálny element si zvolíme pásik šírky b a výšky dy . V tomto prípade budeme integrovať v medziach $-\frac{h}{2}, +\frac{h}{2}$

$$J_{X_0} = \int_S y^2 dS = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 \cdot b \cdot dy = \left[\frac{b \cdot y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$J_{Y_0} = \frac{b^3 \cdot h}{12}$$

Moment zotrvačnosti obdĺžnika k osi X_0 môžeme určiť aj pomocou Steinerovej vety (6).

$$J_{X_0} = J_{X_1} - S \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{b \cdot h^3}{3} - \frac{b \cdot h \cdot h^2}{4} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Deviačný moment obdĺžnika k osiam X_0, Y_0 sa rovná nule. X_0, Y_0 sú osi symetrie a súčasne aj hlavné osi zotrvačnosti.

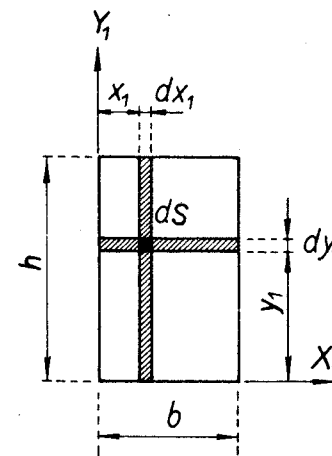
Príklad 4.1-3:

Určte deviačný moment D_{X_1, Y_1} k osiam X_1, Y_1 (obr. 4.1-6).

Riešenie:

Priamkami, ktoré sú rovnobežné s osami, vyberieme diferenciálny element plochy

$$dS = dx_1 \cdot dy_1$$



Obr. 4.1-6.

Určime najprv deviačný moment len zvislého pása výšky h a šírky dx_1 .

$$\begin{aligned} dD_{X_1, Y_1} &= \int_0^h x_1 \cdot y_1 \cdot dS = \int_0^h x_1 \cdot y_1 \cdot dx_1 \cdot dy_1 = x_1 \cdot dx_1 \int_0^h y_1 \cdot dy_1 = \\ &= x_1 \cdot dx_1 \left[\frac{y_1^2}{2} \right]_0^h = \frac{h^2}{2} x_1 \cdot dx_1 \end{aligned}$$

Zintegrojme teraz výraz dD_{X_1, Y_1} v medziach $x_1 = 0, x_1 = b$.

$$D_{X_1, Y_1} = \int_0^b \frac{h^2}{2} x_1 \cdot dx_1 = \frac{h^2}{2} \int_0^b x_1 dx_1 = \frac{h^2}{2} \left[\frac{x_1^2}{2} \right]_0^b = \frac{b^2 \cdot h^2}{4}$$

$$D_{X_1, Y_1} = \frac{b^2 \cdot h^2}{4}$$

Príklad 4.1-4:

Určte momenty zotrvačnosti trojuholníka k trom osiam X_1 , X_0 , X_2 .

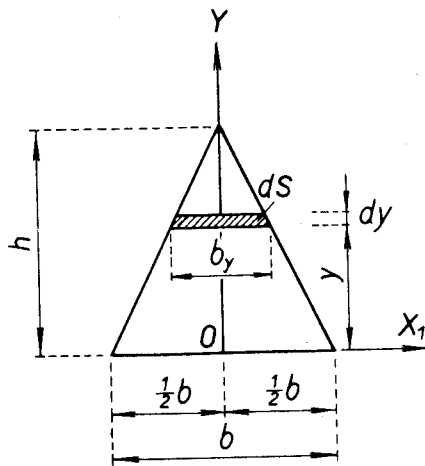
a) Os prechádza základňou trojuholníka

Riešenie:

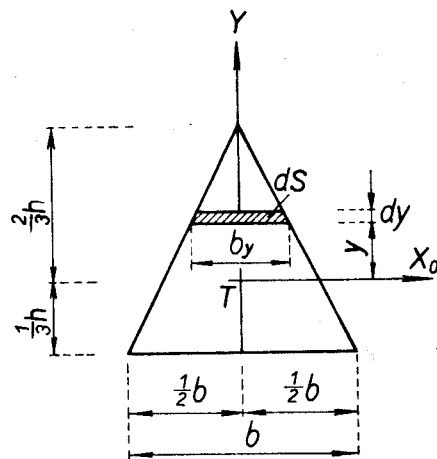
Za diferenciálny element plochy si zvolíme pásik šírky b_y a výšky dy .

$$b_y = b \frac{h-y}{h}, \quad dS = b_y \cdot dy = b \frac{h-y}{h} dy$$

$$J_{X_1} = \int_S y^2 \cdot dS = \int_0^h y^2 \cdot b \frac{h-y}{h} dy = \frac{b}{h} \left[\frac{y^3 \cdot h}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^h = \frac{b \cdot h^3}{12}$$



Obr. 4.1-7.



Obr. 4.1-8.

b) Os prechádza ťažiskom trojuholníka rovnobežne so základňou.

Riešenie:

$$b_y = b \frac{2}{3} \frac{h-y}{h}$$

$$dS = b_y \cdot dy = b \frac{2}{3} \frac{h-y}{h} dy$$

$$J_{X_0} = \int_S y^2 \cdot dS = \int_{-\frac{h}{3}}^{+\frac{2}{3}h} y^2 \cdot b \frac{2}{3} \frac{h-y}{h} dy = \frac{b}{3h} \int_{-\frac{h}{3}}^{+\frac{2}{3}h} y^2 (2h-3y) \cdot dy =$$

$$= \frac{b}{3h} \left[\frac{y^3 \cdot 2h}{3} - \frac{3y^4}{4} \right]_{-\frac{h}{3}}^{+\frac{2}{3}h} = \frac{bh^3}{36}$$

c) Os prechádza vrcholom trojuholníka rovnobežne so základňou (obr. 4.1-9).

Riešenie:

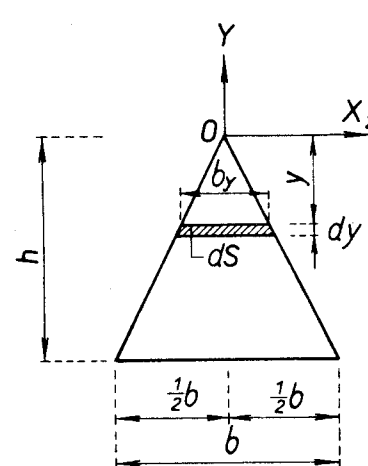
$$b_y = -\frac{b \cdot y}{h}, \quad dS = b_y \cdot dy = \left(-\frac{b \cdot y}{h}\right) dy$$

$$J_{X_2} = \int_S y^2 \cdot dS = \int_{-h}^0 y^2 \left(-\frac{b \cdot y}{h}\right) dy = -\frac{b}{h} \int_{-h}^0 y^3 \cdot dy =$$

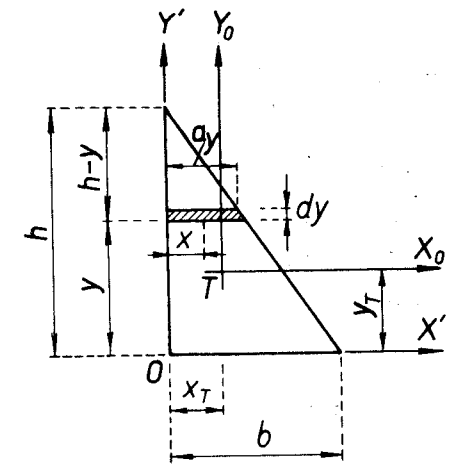
$$= -\frac{b}{h} \left[\frac{y^4}{4} \right]_{-h}^0 = \frac{b \cdot h^3}{4}$$

$$J_{X_2} = \frac{b \cdot h^3}{4}$$

Výrazy pre momenty zotrvačnosti sú odvodené pre rovnoramenný trojuholník, ale sú platné aj pre nerovnoramenný trojuholník.



Obr. 4.1-9.



Obr. 4.1-10.

Príklad 4.1-5:

Určte deviačný moment pravouhlého trojuholníka vzhľadom k osiam X' , Y' a X_0 , Y_0 , ktoré sú rovnobežné s odvesnami (obr. 4.1-10).

Riešenie:

Priamkami, ktoré sú rovnobežné so základňou, rozdelíme prierez trojuholníka na elementárne pásiky, ktoré pokladáme za obdĺžniky výšky dy , šírky a_y .

$$a_y = \frac{b(h-y)}{h}, \quad dS = a_y \cdot dy$$

$$dS = \frac{b(h-y)}{h} dy$$

Vzdialenosť ťažiska elementárneho pásika od osi Y' je

$$x = \frac{a_y}{2} = \frac{b(h-y)}{2h}$$

$$\begin{aligned} D_{X'Y'} &= \int_S x \cdot y \cdot dS = \int_0^h \frac{b(h-y)}{2h} y \frac{b(h-y)}{h} dy = \\ &= \frac{b^2}{2h^2} \int_0^h (h-y)^2 \cdot y \cdot dy = \frac{b^2}{2h^2} \left(\frac{h^4}{2} - \frac{2h^4}{3} + \frac{h^4}{4} \right) = \frac{b^2 \cdot h^2}{24} \end{aligned}$$

Deviačný moment k osiam X_0 , Y_0 , ktoré prechádzajú ťažiskom, vypočítame zo vzťahu (8)

$$D_{X_0Y_0} = D_{X'Y'} - S \cdot x_T \cdot y_T = \frac{b^2 \cdot h^2}{24} - \frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{b \cdot h}{3} = -\frac{b^2 \cdot h^2}{72}$$

Ak zmeníme smer jednej zo súradníc, zmení sa aj znamienko deviačného momentu.

Príklad 4.1-6:

Určte polohu hlavných centrálnych osí zotrvačnosti a hodnoty hlavných momentov zotrvačnosti pre pravouhlý trojuholník.

Riešenie:

Z príkladov 4 a 5 sme dostali výrazy

$$J_{X_0} = \frac{b \cdot h^3}{36}, \quad J_{Y_0} = \frac{h \cdot b^3}{36}, \quad D_{X_0Y_0} = -\frac{b^2 \cdot h^2}{72}$$

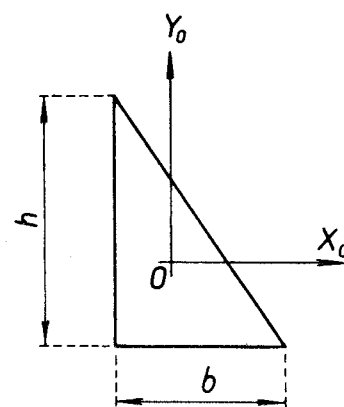
Smer hlavných osí zotrvačnosti je

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2D_{X_0Y_0}}{J_{X_0} - J_{Y_0}} = -\frac{2 \left(-\frac{b^2 \cdot h^2}{72} \right)}{\frac{b \cdot h^3}{36} - \frac{b^3 \cdot h}{36}} = \frac{b \cdot h}{h^2 - b^2}$$

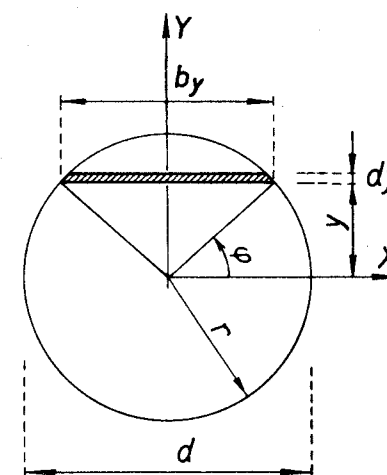
$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{b \cdot h}{h^2 - b^2}$$

Hlavné momenty zotrvačnosti

$$\begin{aligned} J_{\max} \\ \min} &= \frac{J_{X_0} + J_{Y_0}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{X_0} - J_{Y_0})^2 + 4D_{X_0Y_0}^2} = \\ &= \frac{\frac{b \cdot h^3}{36} + \frac{b^3 \cdot h}{36}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{b \cdot h^3}{36} - \frac{h \cdot b^3}{36} \right)^2 + 4 \left(-\frac{b^2 \cdot h^2}{72} \right)^2} = \\ &= \frac{b \cdot h^3 + h \cdot b^3}{72} \pm \\ &\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^2 \cdot h^6}{36^2} - 2 \frac{b^4 \cdot h^4}{36^2} + \frac{b^6 \cdot h^2}{36^2} + \frac{b^4 \cdot h^4}{36^2}} = \\ &= \frac{b \cdot h^3 + h \cdot b^3}{72} \pm \frac{1}{2} \frac{b \cdot h}{36} \sqrt{h^4 - b^2 \cdot h^2 + b^4} \end{aligned}$$



Obr. 4.1-11.



Obr. 4.1-12.

$$J_{\max}^{\min} = \frac{b \cdot h}{72} [h^2 + b^2 \pm \sqrt{h^4 - b^2 \cdot h^2 + b^4}]$$

Príklad 4.1-7:

Určte moment zotrvačnosti kruhového prierezu k osi X prechádzajúcej ťažiskom (obr. 4.1-12).

Riešenie:

Za diferenciálny element plochy si zvolíme pásik rovnobežný s osou X , ktorý pokladáme za obdĺžnik šírky b_y a výšky dy .

$$dS = b_y \cdot dy$$

$$J_x = \int_S y^2 dS = \int_S b_y \cdot y^2 dy$$

Zavedme novú premennú φ , potom

$$b_y = 2r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

$$dy = r \cdot \cos \varphi d\varphi$$

$$dS = 2r \cdot \cos \varphi \cdot r \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi = 2r^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot d\varphi$$

$$J_x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r \cdot \sin \varphi)^2 \cdot 2r^2 \cdot \cos^2 \varphi d\varphi =$$

$$= 2r^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi \cdot d\varphi = 2r^4 \left[\frac{\varphi}{8} - \frac{\sin 4\varphi}{32} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$$

$$J_x = \frac{\pi \cdot r^4}{4} \quad \text{alebo} \quad J_x = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$$

podobne

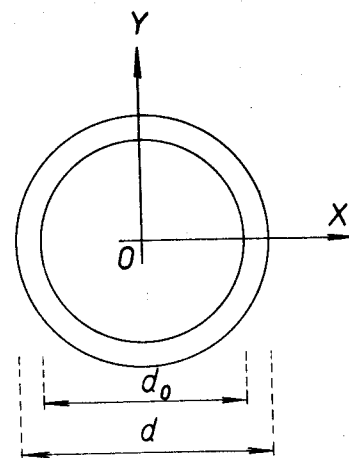
$$J_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$$

Polárny moment pre kruhový prierez je

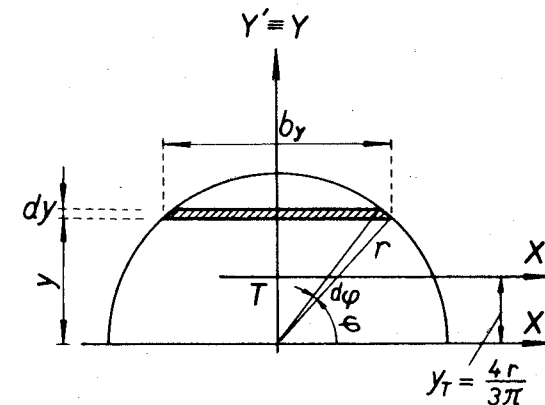
$$J_p = J_x + J_y = \frac{\pi d^4}{64} + \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi d^4}{32}$$

Príklad 4.1-8:

Určte momenty zotrvačnosti medzikruhového prierezu (obr. 4.1-13).



Obr. 4.1-13.



Obr. 4.1-14.

Riešenie:

Moment zotrvačnosti medzikruhového prierezu s vonkajším priemerom d a vnútorným d_0 môžeme určiť ako rozdiel medzi momentmi zotrvačnosti vonkajšieho a vnútorného kruhu.

$$J_x = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{\pi d_0^4}{64} = \frac{\pi d^4}{64} \left[1 - \left(\frac{d_0}{d} \right)^4 \right]$$

ak označíme

$$\frac{d_0}{d} = c$$

potom

$$J_x = \frac{\pi d^4}{64} (1 - c^4)$$

Príklad 4.1-9:

Určte hlavné centrálné momenty zotrvačnosti prierezu v tvare polkruhu k osiam X, Y (obr. 4.1-14).

Riešenie:

Najprv určíme moment zotrvačnosti k osi X' . Diferenciálny element plochy si zvolíme v tvare pásika šírky b_y a výšky dy , ktorý pokladáme za obdĺžnik.

$$dS = b_y \cdot dy$$

Zavedme novú premennú φ , potom

$$b_y = 2r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

$$dy = r \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi$$

$$dS = 2r^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot d\varphi$$

$$J_x = \int_S y^2 dS = \int_S b_y \cdot y^2 \cdot dy = 2r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi \cdot d\varphi = \left[\frac{\varphi}{8} - \frac{\sin 4\varphi}{32} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi \cdot r^4}{8}$$

Moment zotrvačnosti k ťažiskovej osi X určíme zo vzťahu (6)

$$J_x = J_x - S \cdot y_r^2 = \frac{\pi \cdot r^4}{8} - \frac{\pi \cdot r^2}{2} \left(\frac{4r}{3\pi} \right)^2 = \frac{\pi \cdot r^4}{8} \left(1 - \frac{64}{9\pi^2} \right)$$

Moment zotrvačnosti pásika k osi Y bude

$$\begin{aligned} dJ_y &= \frac{1}{12} b_y^3 \cdot dy = \frac{1}{12} r \cdot \cos \varphi (2r \cdot \cos \varphi)^3 \cdot d\varphi = \\ &= \frac{8}{12} r^4 \cdot \cos^4 \varphi \cdot d\varphi \end{aligned}$$

$$J_y = \int_S dJ_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{12} r^4 \cdot \cos^4 \varphi \cdot d\varphi =$$

$$= \frac{8}{12} r^4 \left[\frac{3}{8} \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{1}{32} \sin 4\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi \cdot r^4}{8}$$

$$J_y = \frac{\pi \cdot r^4}{8}$$

Príklad 4.1-10:

Určte hlavné centrálné momenty zotrvačnosti pre prierez v tvare polprstenca (obr. 4.1-15).

Riešenie:

Najprv určíme moment zotrvačnosti k osi X' . Diferenciálny element vytveme dvoma radiálnymi rezmi. Elementárna plocha je

$$dS = t \cdot ds = t \cdot r \cdot d\varphi$$

Potom celá plocha je

$$S = \int_0^{\pi} t \cdot r \cdot d\varphi = \pi \cdot r \cdot t$$

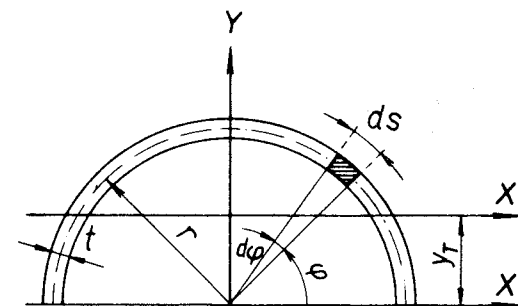
Súradnice ťažiska elementárnej plochy dS

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

Moment zotrvačnosti k osi X' je

$$J_{X'} = \int_S y^2 \cdot dS = \int_0^{\pi} r^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot r \cdot t \cdot d\varphi = r^3 \cdot t \left[\frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right]_0^{\pi} = \frac{r^3 \cdot t \cdot \pi}{2}$$



Obr. 4.1-15.

Moment zotrvačnosti k hlavnej osi X určíme zo vzťahu (6)

$$J_x = J_{X'} - S \cdot y_r^2$$

kde $y_r = \frac{2r}{\pi}$

$$J_x = \frac{r^3 \cdot t \cdot \pi}{2} - \pi r \cdot t \left(\frac{2r}{\pi} \right)^2 = \frac{r^3 \cdot t}{2\pi} (\pi^2 - 8)$$

Moment zotrvačnosti k osi Y

$$J_y = \int_S x^2 \cdot dS$$

$$J_y = \int_0^{\pi} r^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot r \cdot t \cdot d\varphi = r^3 \cdot t \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi \cdot d\varphi = \frac{r^3 \cdot t \cdot \pi}{2}$$

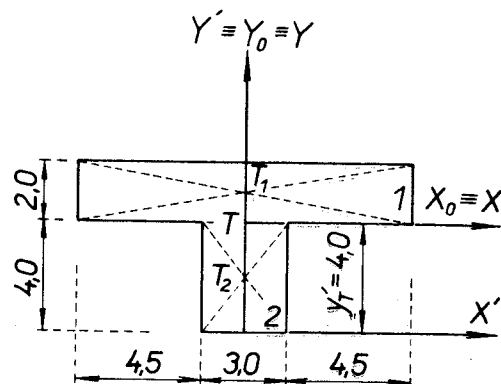
$$J_y = \frac{r^3 \cdot t \cdot \pi}{2}$$

Príklad 4.1-11:

Určte hlavné centrálné momenty zotrvačnosti pre prierez uvedený na obr. 4.1-16.

Riešenie:

Najprv určíme polohu ťažiska. Vzhľadom na to, že prierez je symetrický k osi Y, je os Y súčasne hlavnou osou zotrvačnosti prierezu. Stačí preto určiť len jednu súradnicu ťažiska y_T .



Obr. 4.1-16.

Prierez rozdelíme na dva obdĺžniky

$$S_1 = 2 \cdot 12 = 24 \text{ cm}^2 \quad T_1 (0; 5)$$

$$S_2 = 3 \cdot 4 = 12 \text{ cm}^2 \quad T_2 (0; 2)$$

$$y'_T = \frac{U_{X'}}{S} = \frac{24 \cdot 5 + 12 \cdot 2}{24 + 12} = \frac{144}{36} = 4 \text{ cm}$$

Momenty zotrvačnosti

$$J_X = \frac{12 \cdot 2^3}{3} + \frac{3 \cdot 4^3}{3} = 32 + 64 = 96 \text{ cm}^4$$

$$J_Y = \frac{2 \cdot 12^3}{12} + \frac{4 \cdot 3^3}{12} = 288 + 9 = 297 \text{ cm}^4$$

Príklad 4.1-12:

Určte hlavnú centrálnu elipsu zotrvačnosti pre prierez uvedený na obr. 4.1-17.

Riešenie:

Prierez rozdelíme na dva obdĺžniky

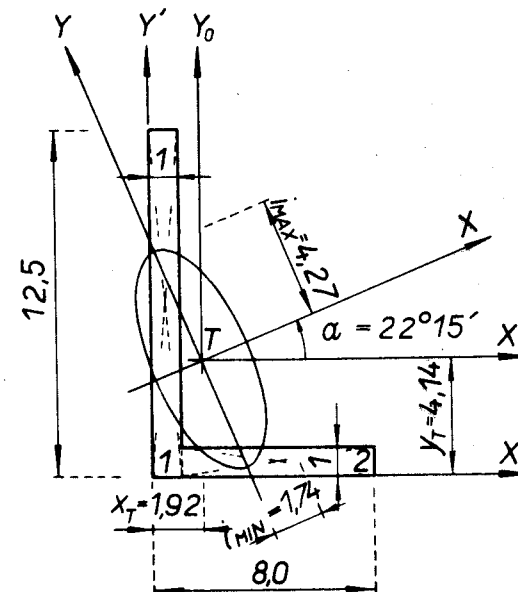
$$S_1 = 1 \cdot 12,5 = 12,5 \text{ cm}^2 \quad T_1 (0,5; 6,25)$$

$$S_2 = 1 \cdot 7,0 = 7,0 \text{ cm}^2 \quad T_2 (4,5; 0,5)$$

Určíme polohu ťažiska prierezu

$$y'_T = \frac{U_{X'}}{S} = \frac{S_1 \cdot y'_{T_1} + S_2 \cdot y'_{T_2}}{S_1 + S_2} = \frac{12,5 \cdot 6,25 + 7,0 \cdot 0,5}{12,5 + 7,0} = 4,14 \text{ cm}$$

$$x'_T = \frac{U_{Y'}}{S} = \frac{12,5 \cdot 0,5 + 7,0 \cdot 4,5}{19,5} = 1,92 \text{ cm}$$



Obr. 4.1-17.

Súradnice ťažísk v osiach X_0, Y_0 sú

$$x_{T_1} = -1,42 \text{ cm}, \quad x_{T_2} = 2,58 \text{ cm}, \quad y_{T_1} = 2,11 \text{ cm}, \quad y_{T_2} = -3,64 \text{ cm}$$

Momenty zotrvačnosti k osiam X_0, Y_0 vypočítame podľa vzťahu (6).

$$J_{X_0} = \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 12,5^3 + 12,5 \cdot 2,11^2 + \frac{1}{12} \cdot 7 \cdot 1^3 + 7 \cdot (-3,64)^2 = 162,75 + 55,62 + 0,6 + 92,8 \approx 312,0 \text{ cm}^4$$

$$J_{Y_0} = \frac{1}{12} \cdot 12,5 \cdot 1^3 + 12,5(-1,42)^2 + \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 7^3 +$$

$$+ 7 \cdot 2,58^2 = 1,0 + 25,25 + 28,6 + 46,6 \doteq 102,0 \text{ cm}^4$$

Deviačný moment k osiam X_0, Y_0 vypočítame podľa vzťahu (9)

$$D_{X_0, Y_0} = 12,5 \cdot (-1,42) \cdot 2,11 + 7 \cdot 2,58(-3,64) =$$

$$= -37,45 - 65,74 = -103,2 \text{ cm}^4$$

Smer hlavných osí zotrvačnosti

$$\text{tg } 2\alpha_0 = -\frac{2(-103,2)}{312 - 102} = -\frac{-206,4}{210} = 0,982$$

$$2\alpha_0 = 44^\circ 30', \quad \alpha_0 = 22^\circ 15'$$

Uhol α_0 vynášame od osi X_0 oproti smeru hodinových ručičiek. Hlavné momenty zotrvačnosti vypočítame zo vzťahu (15).

$$J_{\max/\min} = \frac{312 + 102}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(312 - 102)^2 + 4(-103,2)^2} =$$

$$= 207 \pm \frac{1}{2} \sqrt{44\,100 + 42\,600} = 207 \pm \frac{1}{2} 296$$

$$J_{\max} = 207 + 148 = 355 \text{ cm}^4$$

$$J_{\min} = 207 - 148 = 59 \text{ cm}^4$$

Polosi elipsy zotrvačnosti

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{J_{\max}}{S}} = \sqrt{\frac{355}{19,5}} = 4,27 \text{ cm}$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{S}} = \sqrt{\frac{59}{19,5}} = 1,74 \text{ cm}$$

Vynášame i_{\max} kolmo na os s maximálnym momentom zotrvačnosti (osi X) a i_{\min} kolmo na os s minimálnym momentom (osi Y).

Príklad 4.1-13:

Určte polohu hlavných osí zotrvačnosti a hlavné momenty zotrvačnosti zloženého prierezu (obr. 4.1-18).

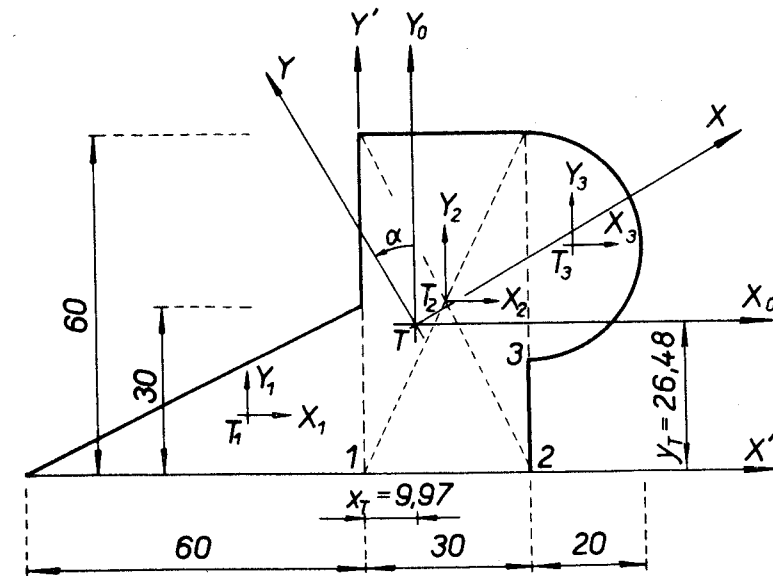
Riešenie:

Prierez rozdelíme na trojuholník, obdĺžnik a polkruh.

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 30 = 900 \text{ cm}^2, \quad T_1(-20; 10)$$

$$S_2 = 30 \cdot 60 = 1\,800 \text{ cm}^2, \quad T_2(15; 30)$$

$$S_3 = \frac{3 \cdot 14 \cdot 20^2}{2} = 628 \text{ cm}^2, \quad T_3(38,5; 40)$$



Obr. 4.1-18.

Určte polohu ťažiska prierezu.

$$x'_r = \frac{U_{Y'}}{S} = \frac{900 \cdot (-20) + 1\,800 \cdot 15 + 628 \cdot 38,5}{900 + 1\,800 + 628} =$$

$$= \frac{-18\,000 + 27\,000 + 24\,178}{3\,328} = \frac{33\,178}{3\,328} = 9,969 = 9,97 \text{ cm}$$

$$y'_r = \frac{U_{X'}}{S} = \frac{900 \cdot 10 + 1\,800 \cdot 30 + 628 \cdot 40}{3\,328} =$$

$$= \frac{900 + 54\,000 + 25\,120}{3\,328} = \frac{88\,120}{3\,328} = 26,48 \text{ cm}$$

Vypočítajme polohu ťažísk jednotlivých obrazcov v ťažiskových osiach X_0, Y_0 .

$$T_1 (-29,97; -16,48), \quad T_2 (5,03; 3,52), \quad T_3 (28,53; 13,52)$$

Vypočítajme moment zotrvačnosti a deviačný moment k osiam X_0, Y_0 podľa vzťahov (6), (7), (8).

$$\begin{aligned} J_{X_0} &= \frac{60 \cdot 30^3}{36} + 900 (-16,48)^2 + \frac{30 \cdot 60^3}{12} + 1\,800 \cdot 3,52^2 + \\ &+ \frac{3,14 \cdot 20^4}{8} + \frac{3,14 \cdot 20^2}{2} \cdot 13,52^2 = \\ &= \frac{1\,620\,000}{36} + 900 \cdot 271,6 + \frac{6\,480\,000}{12} + 1\,800 \cdot 12,39 + \\ &+ 62\,800 + 114\,798 = 45\,000 + 244\,430 + 540\,000 + \\ &+ 22\,302 + 62\,800 + 114\,792 = 1\,029\,324 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{Y_0} &= \frac{30 \cdot 60^3}{36} + 900 \cdot (-29,97)^2 + \frac{60 \cdot 30^3}{12} + 1\,800 \cdot 5,03^2 + \\ &+ \frac{3,14 \cdot 20^4}{8} \left(1 - \frac{64}{9 \cdot 3,14^2}\right) + 628 \cdot 28,53^2 = \\ &= 180\,000 + 808\,380 + 135\,000 + 45\,540 + 17\,584 + \\ &+ 511\,166 = 1\,697\,670 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{X_0 Y_0} &= \frac{30^2 \cdot 60^2}{72} + 900 (-29,97) \cdot (-16,48) + \\ &+ 1\,800 \cdot 5,03 \cdot 3,52 + 628 \cdot 28,53 \cdot 13,52 = \\ &= 45\,000 + 444\,510 + 31\,860 + 242\,219 = 763\,589 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Určíme smer hlavných osí zotrvačnosti

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha_0 &= -\frac{2D_{X_0 Y_0}}{J_{X_0} - J_{Y_0}} = -\frac{2 \cdot 763\,589}{1\,029\,324 - 1\,697\,670} = \\ &= -\frac{1\,527\,178}{-668\,346} = 2,285 \\ 2\alpha_0 &= 60^\circ 24', \quad \alpha_0 = 30^\circ 12' \end{aligned}$$

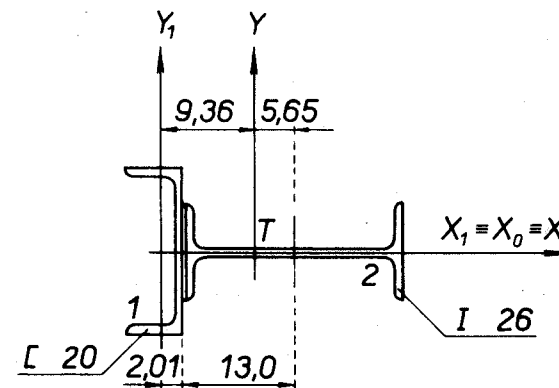
Pretože $J_{X_0} < J_{Y_0}$ a $D_{X_0 Y_0} > 0$, vynášame uhol α_0 od kladného smeru osi Y_0 oproti smeru hodinových ručičiek. Maximálny moment zotrvačnosti bude k osi Y a minimálny k osi X .

Výpočet hlavných momentov zotrvačnosti podľa vzťahu (15).

$$\begin{aligned} J_{\max/\min} &= \frac{1\,029\,324 + 1\,697\,670}{2} \pm \\ &\pm \frac{1}{2} \sqrt{(1\,029\,324 - 1\,697\,670)^2 + 4 \cdot (763\,589)^2} = \\ &= \frac{2\,726\,994}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-668\,346)^2 + 2\,332\,272\,640\,000} = \\ &= 1\,363\,497 \pm \frac{1}{2} \sqrt{446\,686\,375\,716 + 2\,332\,272\,640\,000} = \\ &= 1\,363\,497 \pm \frac{1}{2} \cdot 1\,670\,000 = 1\,363\,497 \pm 835\,000 \\ J_{\max} &= 2\,198\,497 \text{ cm}^4 \\ J_{\min} &= 520\,497 \text{ cm}^4 \\ J_{X_0} + J_{Y_0} &= 2\,726\,994 \text{ cm}^4 \\ J_{\max} + J_{\min} &= 2\,726\,994 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Príklad 4.1-14:

Vypočítajte pre prierez zložený z dvoch valcovaných profilov tvaru [č. 20 a tvaru I č. 26 hlavné centrálné momenty zotrvačnosti (obr. 4.1-19).



Obr. 4.1-19.

Riešenie:

Z tabuliek sortimentu valcovaných profilov vypíšeme prierezové veličiny.

Plochy prierezo $S_1 = 32,2 \text{ cm}^2$, $S_2 = 53,4 \text{ cm}^2$

Momenty zotrvačnosti k vlastným ťažiskovým osiam

$$J_{x_1} = 1\,910 \text{ cm}^4, \quad J_{x_2} = 5\,740 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_1} = 148 \text{ cm}^4, \quad J_{y_2} = 288 \text{ cm}^4$$

Súradnice ťažiska zloženého prierezu budú

$$x'_r = \frac{U_{y'}}{S} = \frac{53,4 \cdot 15,01}{32,2 + 53,4} = \frac{801,53}{85,6} = 9,36 \text{ cm}, \quad y'_r = 0$$

Hlavné momenty zotrvačnosti sú

$$J_x = J_{x_1} + J_{y_2} = 1\,910 + 288 = 2\,198 \text{ cm}^4$$

$$\begin{aligned} J_y &= J_{y_1} + S_1 \cdot x_r'^2 + J_{x_2} + S_2 \cdot (x_2' - x_r')^2 = \\ &= 148 + 32,2 \cdot 9,36^2 + 5\,740 + 53,4 (15,01 - 9,36)^2 = \\ &= 148 + 2\,821 + 5\,740 + 1\,704 = 10\,413 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Príklad 4.1-15:

Určte polohu hlavných centrálnych osí zotrvačnosti a hlavné momenty zotrvačnosti prierezu zloženého z nerovnoramenného uholníka $100 \times 80 \times 10$ a obdĺžnika $2 \times 16 \text{ cm}$.

Riešenie:

Geometrické charakteristiky uholníka vypíšeme z tabuliek.

$$S_1 = 17,1 \text{ cm}^2, \quad e_x = 3,10 \text{ cm}$$

$$J_{x_1} = 94,0 \text{ cm}^4, \quad e_y = 2,12 \text{ cm}$$

$$J_{y_1} = 165,7 \text{ cm}^4, \quad S_2 = 2 \cdot 16 = 32 \text{ cm}^2$$

$$D_{x_1, y_1} = 70,4 \text{ cm}^4,$$

Poloha ťažiska vzhľadom k ťažiskovým osiam obdĺžnika X_2, Y_2 :

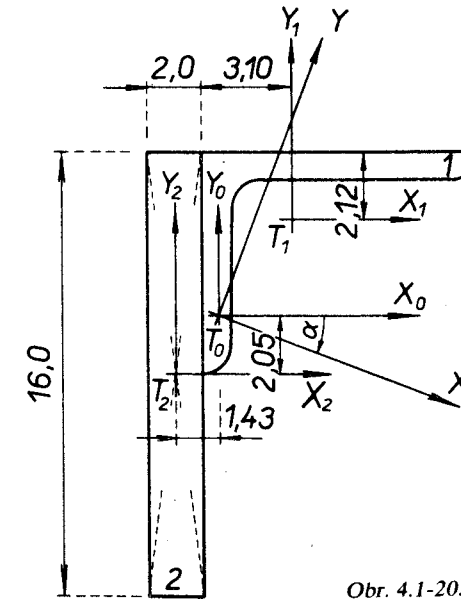
$$x_r = \frac{U_{y_2}}{S} = \frac{S_1(e_x + 1)}{S_1 + S_2} = \frac{17,1(3,10 + 1)}{17,1 + 16 \cdot 2} = \frac{70,11}{49,1} = 1,43 \text{ cm}$$

$$y_r = \frac{S_1(8 - e_y)}{S_1 + S_2} = \frac{17,1(8 - 2,12)}{49,1} = \frac{100,55}{49,1} = 2,05 \text{ cm}$$

Poloha ťažiska uholníka a obdĺžnika vzhľadom k osiam X_0, Y_0

$$x_{T_1} = 2,67 \text{ cm}, \quad x_{T_2} = -1,43 \text{ cm}$$

$$y_{T_1} = 3,83 \text{ cm}, \quad y_{T_2} = -2,05 \text{ cm}$$



Obr. 4.1-20.

Momenty zotrvačnosti prierezu vzhľadom k osiam X_0, Y_0 určíme zo vzťahov (6), (7).

$$\begin{aligned} J_{x_0} &= J_{x_1} + S_1 \cdot y_{T_1}^2 + J_{x_2} + S_2 \cdot y_{T_2}^2 = \\ &= 94,0 + 17,1 \cdot 3,83^2 + \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot 16^3 + \\ &\quad + 16 \cdot 2 \cdot (-2,05)^2 = 94,0 + 250,8 + 682,7 + 134,4 = \\ &= 1\,161,9 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{y_0} &= J_{y_1} + S_1 \cdot x_{T_1}^2 + J_{y_2} + S_2 \cdot x_{T_2}^2 = \\ &= 165,7 + 17,1 \cdot 2,67^2 + \frac{1}{12} \cdot 16 \cdot 2^3 + 32 \cdot (-1,43)^2 = \\ &= 165,7 + 121,9 + 10,7 + 65,3 = 363,6 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Devičný moment prierezu k osiam X_0, Y_0 vypočítame podľa vzťahu (8)

$$\begin{aligned} D_{X_0 Y_0} &= D_{X_1 Y_1} + S_1 \cdot x_{T_1} \cdot y_{T_1} + D_{X_2 Y_2} + S_2 \cdot x_{T_2} \cdot y_{T_2} = \\ &= 70,4 + 17,1 \cdot 2,67 \cdot 3,83 + 0 + 32(-1,43) \cdot (-2,05) = \\ &= 70,4 + 174,9 + 0 + 93,8 = 339,1 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Polohu hlavných centrálnych osí zotrvačnosti vypočítame zo vzťahu

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha_0 &= -\frac{2D_{X_0 Y_0}}{J_{X_0} - J_{Y_0}} = -\frac{2 \cdot 339,1}{1161,9 - 363,6} = -\frac{678,2}{798,3} = -0,849 \\ 2\alpha_0 &= -40^\circ 18' \quad \alpha_0 = -20^\circ 09' \end{aligned}$$

Devičný moment je kladný a $J_{X_0} > J_{Y_0}$, potom uhol vynášame od osi X_0 v smere hodinových ručičiek.

Hlavné momenty zotrvačnosti určíme zo vzťahov (15).

$$\begin{aligned} J_{\max/\min} &= \frac{1161,9 + 363,6}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1161,9 - 363,6)^2 + 4 \cdot 339,1^2} = \\ &= 762,75 \pm \frac{1}{2} \sqrt{637283 + 459952} = 762,75 \pm \frac{1}{2} 1049 = \\ &= 762,75 \pm 524,5 \end{aligned}$$

$$J_{\max} = 1287,25 \text{ cm}^4$$

$$J_{\min} = 238,25 \text{ cm}^4$$

Príklad 4.1-16:

Určte polohu hlavných centrálnych osí zotrvačnosti, hlavné momenty zotrvačnosti a nakreslite centrálnu elipsu zotrvačnosti pre prierez zložený z dvoch valcovaných profilov tvaru

1. □ č. 26,
2. L $100 \times 100 \times 10$ (obr. 4.1-21).

Riešenie:

Z tabuliek sortimentu valcovaných profilov vypíšeme prierezové veličiny. Plochy prierezov

$$S_1 = 48,3 \text{ cm}^2, \quad S_2 = 19,2 \text{ cm}^2$$

Vzdialenosť ťažísk

$$e_1 = 2,36 \text{ cm}, \quad e_2 = 2,82 \text{ cm}$$

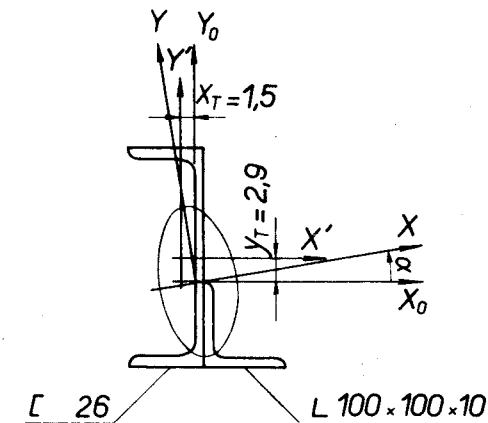
Momenty zotrvačnosti k vlastným ťažiskovým osiam

$$J_{1X} = 4820 \text{ cm}^4, \quad J_{2X} = 117 \text{ cm}^4$$

$$J_{1Y} = 317 \text{ cm}^4, \quad J_{2Y} = 117 \text{ cm}^4$$

$$D_{2XY} = 104 \text{ cm}^4$$

Vypočítame súradnice ťažiska zloženého prierezu. Za osi X', Y' si zvolíme vlastné ťažiskové osi [prierezu.



Obr. 4.1-21.

$$x'_T = \frac{S_2(e_1 + e_2)}{S_1 + S_2} = \frac{19,2(2,36 + 2,82)}{48,3 + 19,2} = 1,5 \text{ cm}$$

$$y'_T = -\frac{19,2 \cdot 10,18}{67,5} = -2,9 \text{ cm}$$

Momenty zotrvačnosti k ťažiskovým osiam X_0, Y_0 vypočítame podľa vzťahov (6), (7).

$$J_{X_0} = 4820 + 48,3(-2,9)^2 + 117 + 19,2(-7,28)^2 = 6365 \text{ cm}^4$$

$$J_{Y_0} = 317 + 48,3 \cdot 1,5^2 + 117 + 19,2 \cdot 3,68^2 = 803 \text{ cm}^4$$

Devičný moment k osiam X_0, Y_0 . Ak berieme do úvahy vlastné ťažiskové osi profilu L toho istého smeru ako X_0, Y_0 , potom devičný moment L profilu treba brať so znamienkom mínus.

$$D_{X_0 Y_0} = 48,3 \cdot 1,5(-2,9) - 104 + 19,2 \cdot 3,68 \cdot (-7,28) = -827 \text{ cm}^4$$

Smer hlavných osí zotrvačnosti

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2 \cdot (-827)}{6365 - 803} = 0,297$$

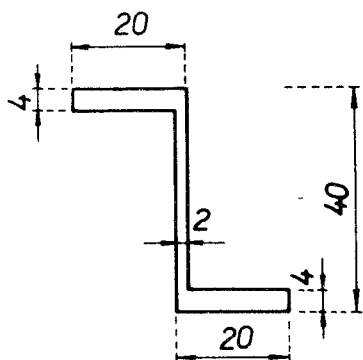
$$2\alpha_0 = 16^\circ 40', \quad \alpha_0 = 8^\circ 20'$$

Uhol α_0 vynášame od osi X_0 oproti smeru hodinových ručičiek.
Hlavné momenty zotrvačnosti

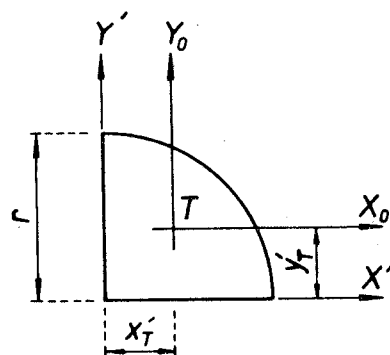
$$J_x = J_{\max} = \frac{6365 + 803}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(6365 - 803)^2 + 4(-827)^2} =$$

$$= 3584 + 2910 = 6494 \text{ cm}^4$$

$$J_y = J_{\min} = 3584 - 2910 = 674 \text{ cm}^4$$



Obr. 4.1-22.



Obr. 4.1-23.

Polomery elipsy zotrvačnosti

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{6494}{67,5}} = 9,81 \text{ cm}$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{674}{67,5}} = 3,17 \text{ cm}$$

Príklad 4.1-17:

Vypočítajte pre prierez znázornený na obr. 4.1-22 hlavné centrálné momenty zotrvačnosti (rozmery sú v cm).

$$\alpha_0 = 26^\circ 25'$$

$$J_{\max} = 70400 \text{ cm}^4$$

$$J_{\min} = 5420 \text{ cm}^4$$

Príklad 4.1-18:

Určte pre prierez tvaru štvrtkruhu deviačný moment k osiam X' , Y' , deviačný moment k osiam X_0 , Y_0 a hlavné centrálné momenty zotrvačnosti (obr. 4.1-23).

$$x'_T = y'_T = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi}$$

$$D_{X'Y'} = \frac{r^4}{8}$$

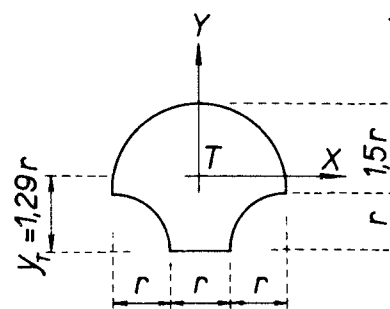
$$D_{X_0Y_0} = \frac{r^4}{8} \left(1 - \frac{32}{9\pi^2}\right)$$

Príklad 4.1-19:

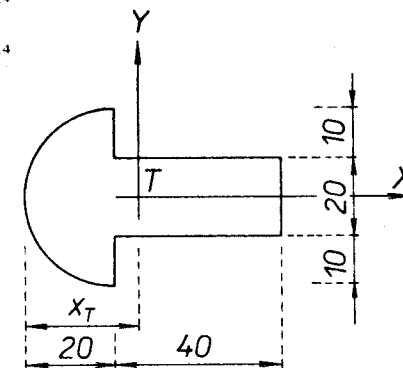
Pre prierez uvedený na obr. 4.1-24 určte hlavné momenty zotrvačnosti

$$J_{\max} = 2,30r^4$$

$$J_{\min} = 1,44r^4$$



Obr. 4.1-24.



Obr. 4.1-25.

Príklad 4.1-20:

Vypočítajte hlavné centrálné momenty zotrvačnosti pre prierez uvedený na obr. 4.1-25; rozmery sú udané v cm.

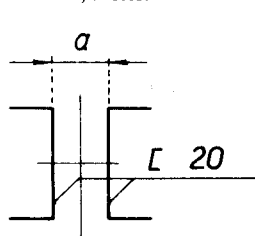
$$x_T = 27,45 \text{ cm}$$

$$J_x = 8,96 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

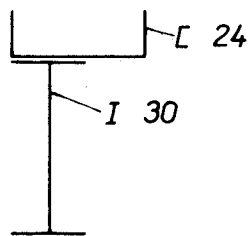
$$J_y = 40,96 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

Príklad 4.1-21:

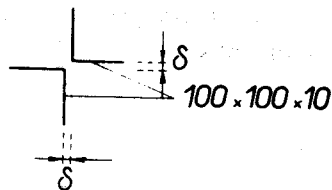
Pre prierez zložený z dvoch valcových profilov tvaru [č. 20 určte vzdialenosť a tak, aby hlavné momenty zotrvačnosti k osiam X, Y boli rovnaké (obr. 4.1-26); $a = 10,8$ cm.



Obr. 4.1-26.



Obr. 4.1-27.



Obr. 4.1-28.

Príklad 4.1-22:

Určte hlavné momenty zotrvačnosti pre prierez zložený z valcovaných profilov tvaru I č. 30 a tvaru [č. 24 (obr. 4.1-27).

$$\alpha_0 = -11^\circ$$

$$J_{\max} = 18\,323 \text{ cm}^4$$

$$J_{\min} = 4\,423 \text{ cm}^4$$

Príklad 4.1-23:

Vypočítajte hlavné momenty zotrvačnosti prierezu zloženého z dvoch rovno-ramenných uholníkov rozmerov $100 \times 100 \times 10$ (obr. 4.1-28).

$$\delta = 10 \text{ mm}$$

$$J_{\max} = 995 \text{ cm}^4$$

$$J_{\min} = 560 \text{ cm}^4$$

4.2. MOMENTY ZOTRVAČNOSTI TELIES

1. *Prehľad použitých vzorcov*

Moment zotrvačnosti telesa

$$J = \int \rho^2 \cdot dm \quad (1)$$

kde ρ je kolmá vzdialenosť elementárnej hmotnosti dm od roviny (planárny moment zotrvačnosti) alebo od osi (axiálny moment zotrvačnosti), prípadne od bodu (polárny moment zotrvačnosti).

Pre homogénne telesá je hmotnosť dm každého jeho elementu úmerná kubickému objemu dV , preto platí

$$dm = \mu dV, \quad \mu = \frac{m}{V}$$

kde μ = konštanta je merná hmotnosť telesa, potom platí

$$J = \mu \int_V \rho^2 dV = \frac{m}{V} \int_V \rho^2 dV \quad (2)$$

Ak tuhé teleso vzťahujeme k pravouhlej súradnicovej sústave X, Y, Z, potom momenty zotrvačnosti telesa k rovinám sú

$$J_{XY} = \frac{m}{V} \int_V z^2 dV, \quad J_{XZ} = \frac{m}{V} \int_V y^2 dV, \quad J_{YZ} = \frac{m}{V} \int_V x^2 dV \quad (3)$$

Moment zotrvačnosti k osi sa rovná súčtu momentov zotrvačnosti k dvom navzájom kolmým rovinám, ktorých priesečnicou je táto os, potom platí

$$J_X = J_{XY} + J_{XZ}, \quad J_Y = J_{XY} + J_{YZ}, \quad J_Z = J_{XZ} + J_{YZ} \quad (4)$$

Moment zotrvačnosti k bodu 0 (začiatku súradníc) sa rovná súčtu momentov zotrvačnosti k rovinám pretínajúcim sa v bode 0.

$$J_0 = J_{XY} + J_{YZ} + J_{XZ} \quad (5)$$

2. *Príklady*

Príklad 4.2-1:

Vypočítajte hmotné momenty zotrvačnosti kužeľa s polomerom r a s výškou h k pravouhlým osiam X, Y, Z (obr. 4.2-1).

Riešenie:

a) Moment zotrvačnosti k osi Z.

Podľa vzťahu (2)

$$J_Z = \frac{m}{V} \int_V \rho^2 dV$$

Diferenciálny element objemu vytne dvoma rovinami rovnobežnými so základňou kužeľa; je to valec výšky dz a polomeru ϱ .

Z úmery vyplýva

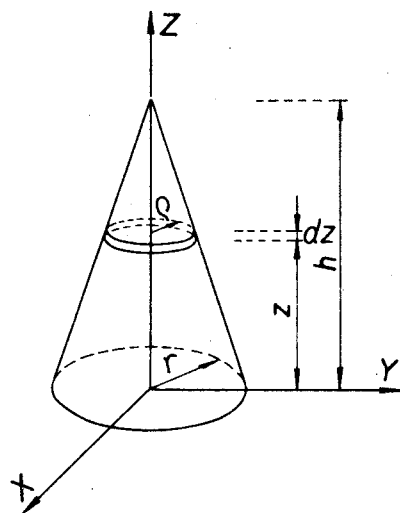
$$\varrho = \frac{r \cdot (h - z)}{h}$$

potom

$$dV = \pi \frac{r^2 (h - z)^2}{h^2} dz$$

Moment zotrvačnosti diferenciálneho elementu valca k osi Z je

$$dJ_z = \frac{1}{2} \varrho^2 dm$$



Obr. 4.2-1.

Moment zotrvačnosti kužeľa po dosadení hodnôt dV

$$\begin{aligned} J_z &= \int_V dJ_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{V} \int_V \frac{r^2 (h - z)^2}{h^2} dV = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{V} \cdot \frac{r^4}{h^4} \pi \int_0^h (h - z)^4 dz = \frac{\pi \cdot m \cdot r^4 \cdot h}{V \cdot 10} \end{aligned}$$

po dosadení za

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$J_z = \frac{3}{10} m \cdot r^2$$

b) Moment zotrvačnosti kužeľa k rovine XY .

Ako diferenciálny element objemu berieme do úvahy ten istý elementárny valec. Podľa vzťahu (3)

$$J_{xy} = \frac{m}{V} \int_V z^2 dV$$

po dosadení

$$dV = \frac{\pi \cdot r^2 (h - z)^2}{h^2} dz$$

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \frac{m \cdot \pi}{V} \int_0^h \frac{r^2 (h - z)^2}{h^2} z^2 \cdot dz = \\ &= \frac{m \pi \cdot r^2}{V \cdot h^2} \int_0^h (h^2 \cdot z^2 - 2h \cdot z^3 + z^4) dz = \\ &= \frac{m \pi \cdot r^2}{V \cdot h^2} \cdot \frac{1}{30} h^5 \end{aligned}$$

odkiaľ po dosadení $V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$ dostaneme

$$J_{xy} = \frac{m \cdot h^2}{10}$$

c) Moment zotrvačnosti k osi X

Podľa vzťahu (4)

$$J_x = J_{xy} + J_{xz}$$

Pre rotačne symetrický kužeľ

$$J_{xz} = J_{yz} = \frac{J_z}{2} = \frac{3}{20} m \cdot r^2$$

potom

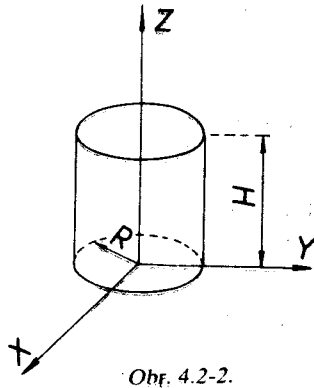
$$J_x = \frac{m \cdot h^2}{10} + \frac{3m \cdot r^2}{20} = \frac{m}{10} \left(h^2 + \frac{3}{2} r^2 \right)$$

Zo symetrie vyplýva

$$J_Y = J_X = \frac{m}{10} \left(h^2 + \frac{3}{2} r^2 \right)$$

Príklad 4.2-2:

Vypočítajte hmotný moment zotrvačnosti homogénneho valca polomeru R a H k osiam X , Y , Z .



Príklad 4.2-3:

Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénneho hranola plochy $a \times b$ a dĺžky l k osiam X , Y , Z .

V. KINEMATIKA HMOTNÉHO BODU

Kinematika je časť teoretickej mechaniky, ktorá sa zaoberá štúdiom pohybu hmotného bodu, hmotnej úsečky, dosky alebo telesa, pričom neprihliada na ich hmotnosť a sily, ktoré pri pohybe pôsobia. Základnými pojmami kinematiky sú *rýchlosť* a *zrýchlenie*, ktoré sa odvodzujú zo základných geometrických pojmov.

Kinematiku delíme na *kinematiku bodu* a *kinematiku tuhého telesa*. Osobitnou časťou kinematiky tuhého telesa je *kinematika tuhej dosky*.

Kinematika bodu je časťou kinematiky, ktorá sa zaoberá pohybom bodu. Podľa geometrického tvaru dráhy rozlišujeme priamočiary pohyb a krivočiary pohyb bodu.

Poloha bodu v rovine je určená v karteziánskej sústave súradníc dvoma súradnicami x , y , v priestore troma súradnicami x , y , z alebo polohovým vektorom \mathbf{r} , kde $\mathbf{r} = lx + jy + kz$, pričom \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} sú jednotkové vektory v smeroch osi súradnicového systému.

Ak sa bod pohybuje, jeho súradnice sú funkciami času, resp. jeho polohový vektor je funkciou času.

Dráha s je čiara, po ktorej sa bod pohyboval v časovom intervale t_0 až t_1 .

Vo vzťahu k rýchlosti a k zrýchleniu bodu rozoznávame pohyb rovnomerný, rovnomerne zrýchlený, rovnomerne spomalený a nerovnomerne zrýchlený (ak je zrýchlenie premenné).

a) Rovnomerný priamočiary pohyb bodu

Je to druh priamočiareho pohybu, pri ktorom rýchlosť je konštantná, t. j. $v = \text{konštanta}$.

Zákon dráhy rovnomerného priamočiareho pohybu bodu je vyjadrený vzťahom

$$s = s_0 + v \cdot t$$

kde v je konštanta úmernosti, ktorá predstavuje absolútnu hodnotu rýchlosti. Ak volíme začiatok úsečiek s v začiatočnej polohe bodu, je $s_0 = 0$ a dráha

$$s = v \cdot t$$

Okamžitá rýchlosť sa nazýva stredná rýchlosť za nekonečne krátky čas

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = f'(s)$$

Rýchlosť \mathbf{v} je teda prvou deriváciou dráhy podľa času. Pri rovnomernom priamočiarom pohybe zrýchlenie \mathbf{a} sa rovná nule.

b) Rovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb bodu

Ak rýchlosť rastie v závislosti od času, pohyb bodu je zrýchlený. Zrýchlenie \mathbf{a} (akcelerácia) je prírastok na rýchlosti za jednotku času.

Pri rovnomerne zrýchlenom pohybe je zrýchlenie $a = \frac{dv}{dt} = \text{konšt.}$ Rýchlosť pri rovnomerne zrýchlenom priamočiarom pohybe sa určí zo vzťahu

$$v = v_0 + a \cdot t$$

a jeho dráha

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Obyčajne je $s_0 = 0$.

c) Rovnomerne spomalený priamočiary pohyb bodu

Pre rýchlosť v a dráhu s platia rovnice

$$v = v_0 - a \cdot t$$

$$s = s_0 - v_0 \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

d) Voľný pád a vrh nahor

Vo vzduchoprázdnom priestore je pri voľnom páde $a = g$ a pri vrhu nahor $a = -g$, kde g je zrýchlenie zemskej príťažlivosti.

Pre rýchlosť v a dráhu s platia potom rovnice

$$v = v_0 \pm g \cdot t, \quad s = s_0 \cdot t \pm \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Ak padá hmotný bod z výšky h pri začiatočnej rýchlosti rovnej nule, dosiahne pri dopade rovnakú rýchlosť $v_0 = \sqrt{2g \cdot h}$, s akou bol vrhnutý.

Krivočiary pohyb bodu

Je to druh pohybu, ktorého dráha je krivka. Ak je stála len absolútna hodnota vektora rýchlosti (\mathbf{v}) = konšt., pohyb je krivočiary rovnomerný. Ak je rýchlosť premenná, pohyb je krivočiary nerovnomerný. Ak je stála len absolútna hodnota vektora zrýchlenia (\mathbf{a}) = konšt., pohyb je krivočiary rovnomerne zrýchlený. Ak je \mathbf{v} všeobecne premenné zrýchlenie, pohyb je krivočiary nerovnomerne zrýchlený.

Rozlišujeme krivočiary pohyb bodu v rovine a v priestore.

Krivočiary pohyb bodu v rovine je druh krivočiareho pohybu bodu, ktorého dráha je rovinná krivka. Dôležitým prípadom krivočiareho pohybu bodu v rovine je centrálny pohyb bodu, šikmý vrh a vodorovný vrh.

Najjednoduchším centrálnym pohybom je rovnomerný kruhový pohyb bodu. Pri tomto pohybe bod obieha rovnomerne s absolútnou hodnotou postupnej rýchlosti \mathbf{v} pozdĺž obvodu kružnice s polomerom r .

Medzi postupnou rýchlosťou \mathbf{v} , uhlovou rýchlosťou ω a polohovým vektorom \mathbf{r} platí nasledujúci vzťah

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$$

pri skalárnom vyjadrení $v = \omega \cdot r$.

Vlastná kruhová frekvencia pohybu (uhlová rýchlosť) $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Periódou pohybu

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Frekvencia pohybu

$$f = \frac{1}{T}$$

5.1. PRIAMOČIARE POHYBY BODU

Príklad 5.1-1:

Po zápalnej šnúre sa šíri plameň rýchlosťou 3,2 m/min. Aká dlhá má byť šnúra, aby odpaľovač nálož mohol včas odísť do vzdialenosti 300 m, ak sa vzdaluje rýchlosťou 2 m · s⁻¹?

Riešenie:

$$t = \frac{s_1}{v} = \frac{300}{2} = 150 \text{ s}$$

$$150/60 = 2,5 \text{ min}$$

Potrebná dĺžka šnúry je

$$s_2 = v \cdot t = 3,2 \cdot 2,5 = 8 \text{ m}$$

Príklad 5.1-2:

Osobný automobil sa pohybuje priamočiarym rovnomerným pohybom rýchlosťou $v = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Akú dráhu vykoná v metroch za 3 min?

Riešenie:

$$v = 72 \cdot \frac{1}{3,6} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Dráhu vypočítame

$$s = v \cdot t = 20 \cdot 180 = 3\,600 \text{ m}$$

Príklad 5.1-3:

Prechodné stanice A , B sú priamo spojené železničnou dráhou. Ich letecká vzdialenosť je 30 km. Treba určiť:

a) akou rovnomernou rýchlosťou ide vlak, ktorý prechádza stanicami A , B v časovom intervale 25 min;

b) do akej vzdialenosti príde za 10 min a 3 s, keď sa pohybuje rovnomerne rýchlosťou $40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Riešenie:

a) ide o rovnomerný pohyb, keď $s = v \cdot t$, $s = 30 \text{ km}$, $t = 25 \text{ min}$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{30}{25} = 1,2 \text{ km/min}$$

$$v = \frac{30\,000}{25 \cdot 60} = \frac{30\,000}{1\,500} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) zo vzorca

$$s = v \cdot t$$

$$v = 40 \text{ km/h} \cdot \frac{40\,000}{3\,600} = 11,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

a pri

$$t = 10 \text{ min } 30 \text{ s} = 630 \text{ s}$$

$$s = 11,1 \cdot 630 = 7\,000 \text{ m} = 7 \text{ km}$$

Príklad 5.1-4:

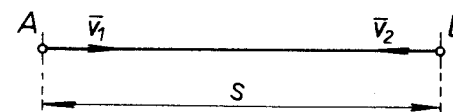
Kolesový traktor Z-3011 má pri zaradenom V. rýchlostnom stupni rýchlosť $v = 25,4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Aká je jeho rýchlosť v [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$]?

Riešenie:

$$v = 25,4 = 25,4 \cdot \frac{1}{3,6} = 7,05 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Príklad 5.1-5:

Traktor Z-3011 s prívesom prepravuje stavebný materiál z miesta naloženia A na miesto vyprázdnenia prívesu voza B . Vzdialenosť medzi pracovnými miestami A , $B = 5 \text{ km}$. Určte, koľkokrát sa traktor obráti za 8 pracovných hodín, keď jazdí s nákladom na III. prevodovom stupni s priemernou rýchlosťou $v_1 = 9,9 \text{ kmh}^{-1}$. Pri



Obr. 5.1-1.

jazde naprázdno traktor so zaradeným IV. prevodovým stupňom jazdí priemernou rýchlosťou $v_2 = 15,2 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Čas potrebný na nakladanie $t_1 = 5 \text{ min}$ a čas potrebný na vyprázdnenie $t_2 = 4 \text{ min}$.

Riešenie:

Celkový čas obrátenia jedného traktora je

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$$

kde t je celkový pracovný čas [h],

t_1 — čas potrebný na nakladanie,

t_2 — čas potrebný na vyprázdnenie prívesu,

t_3 — čas potrebný na jazdu s nákladom,

t_4 — čas potrebný na jazdu bez nákladu.

Vieme, že $t_1 = 5$ min a $t_2 = 4$ min, čas potrebný na jazdu s nákladom.

$$t_3 = \frac{s}{v_1} = \frac{5}{9,9} = 0,505 \text{ h} = 30 \text{ min } 18 \text{ s}$$

Čas potrebný na jazdu bez nákladu je

$$t_4 = \frac{s}{v_2} = \frac{5}{15,2} = 0,328 \text{ h} = 19 \text{ min } 41 \text{ s}$$

potom čas potrebný na jedno obrátenie

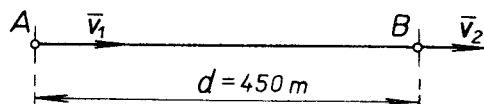
$$t = 5 \text{ min} + 4 \text{ min} + 30 \text{ min } 18 \text{ s} + 19 \text{ min } 41 \text{ s} = 58 \text{ min } 59 \text{ s}$$

Počet obrátení traktora Z-3011 za 8 hodín je

$$X = \frac{8 \text{ h } 3 \text{ 600 s}}{3 \text{ 539 s}} = \frac{28 \text{ 800 s}}{3 \text{ 539 s}} = 7,13$$

Príklad 5.1-6:

Dva body A a B sa pohybujú konštantnými rýchlosťami v_1 , v_2 na tej istej priamke. Za aký čas sa zrazia, keď sa pohybujú za sebou ($v_1 > v_2$); vzdialenosť bodov $d = 450$ m, $v_1 = 25$ m \cdot s $^{-1}$ a $v_2 = 10$ m \cdot s $^{-1}$.



Obr. 5.1-2.

Riešenie:

Dráha prvého bodu A

$$s_1 = v_1 \cdot t$$

Dráha druhého bodu B

$$s_2 = v_2 \cdot t$$

pričom t je čas, za ktorý sa body zrazia. Z podmienky spoločnej dráhy vychádza

$$s_1 = d + s_2$$

t. j.

$$v_1 \cdot t = d + v_2 \cdot t$$

čiže

$$t = \frac{d}{v_1 - v_2} = \frac{450}{25 - 10} = \frac{450}{15} = 30 \text{ s}$$

Kontrola správnosti výpočtu:

$$s_1 = v_1 \cdot t = 25 \cdot 30 = 750 \text{ m}$$

$$s_2 = v_2 \cdot t = 10 \cdot 30 = 300 \text{ m}$$

$$s_2 = s_1 - d = 750 - 450 = 300 \text{ m}$$

Príklad 5.1-7:

Osobný automobil MB-1000 dosiahol rýchlosť z 0 na 90 km \cdot h $^{-1}$ za 22 s. Vypočítajte zrýchlenie a dráhu s , ktorú automobil prešiel za uvedený čas.

Riešenie:

Rýchlosť v km h $^{-1}$ prepočítame na rýchlosť v m s $^{-1}$

$$v = 90 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right] \cdot \frac{1 \text{ 000 m}}{3 \text{ 600 s}} = 25 \text{ m s}^{-1}$$

zrýchlenie je

$$a = \frac{v}{t} = \frac{25}{22} = 1,135 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Dráhu vypočítame podľa vzorca

$$s = \frac{1}{2} a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,135 (22)^2 = 274,67 \text{ m}$$

Príklad 5.1-8:

Vypočítajte rýchlosť nákladného automobilu V-3S, keď sa na dráhe $s = 160$ m rozbíha zrýchlením $a = 0,5$ m \cdot s $^{-2}$.

Riešenie:

$$s = \frac{1}{2} v \cdot t, \quad t = \frac{v}{a}$$

dosadením za t do rovnice, dostaneme

$$s = \frac{1}{2} v \left(\frac{v}{a} \right) = \frac{v^2}{2a}$$

$$v = \sqrt{2a \cdot s} = \sqrt{2 \cdot 0,5 \cdot 160} = 12,65 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

a rýchlosť v km/h

$$v = 12,65 \cdot 3,6 = 45,54 \text{ km h}^{-1}$$

Príklad 5.1-9:

Automobil pri predbiehaní iného vozidla zvýšil rýchlosť z $v = 64 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ na $v = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ za $t = 5 \text{ s}$. Zistite vykonanú dráhu s , veľkosť zrýchlenia a čas predbiehania.

Riešenie:

Začiatková rýchlosť

$$v = \frac{64}{3,6} = 17,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Konečná rýchlosť

$$v = \frac{72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}}{3,6} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Veľkosť zrýchlenia vypočítame zo vzorca

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} - 17,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{5 \text{ s}} = 0,44 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

a dráhu zo vzorca

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{(20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2 - (17,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{2 \cdot 0,44 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 95 \text{ m}$$

Príklad 5.1-10:

Vodič automobilu má udržiavať od značky v uzavretej obci rýchlosť $v = 50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. V akej minimálnej vzdialenosti a aký minimálny čas musí pred značkou začať brzdiť, ak jeho rýchlosť je $v = 80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ a minimálne spomalenie $a = 5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-2}$?

Riešenie:

Začiatková rýchlosť

$$v_0 = \frac{80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}}{3,6} = 22,22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Konečná rýchlosť

$$v = \frac{50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}}{3,6} = 13,88 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Čas brzdzenia vypočítame zo vzorca

$$t = \frac{v_0 - v}{a} = \frac{22,22 - 13,88}{5} = 1,668 \text{ s}$$

a brzдовú dráhu zo vzorca

$$s = \frac{v_0^2 - v^2}{2a} = \frac{(22,22)^2 - (13,88)^2}{2,5} = 30,00 \text{ m}$$

Príklad 5.1-11:

Vlak sa rozbieha za stavu pokoja so zrýchlením $a_1 = 0,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, čas trvania 30 s. Určitý čas sa pohybuje rovnakou rýchlosťou, potom sa rýchlosť brzdením znižuje so stálym spomalením $a_2 = 0,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, až kým sa zastaví. Treba určiť čas, v ktorom sa vlak pohyboval rovnomerne a trvanie cesty, ak vlak prešiel 5 km.

Riešenie:

Za 30 s vlak dosiahol rýchlosť

$$v_1 = a_1 \cdot t_1 = 0,3 \cdot 30 = 9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

pritom prešiel dráhu

$$s_1 = \frac{1}{2} a_1 \cdot t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,3 \cdot 900 = 135 \text{ m}$$

Čas potrebný na zastavenie vlaku pri rýchlosti $v_1 = 9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ pri danom spomalení je

$$t_2 = \frac{v_1}{a_2} = \frac{9}{0,4} = 22,5 \text{ s}$$

pritom vlak prešiel dráhu

$$s_2 = \frac{1}{2} a_2 \cdot t_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot 500 = 101 \text{ m}$$

dráha, po ktorej sa pohyboval rovnomerne, je

$$s_3 = s - s_1 - s_2 = 5000 - 135 - 101 = 4764 \text{ m}$$

a čas, za ktorý sa vlak takto pohyboval

$$t_3 = \frac{s_3}{v_1} = \frac{4\,764}{9} = 529,33 \text{ s}$$

Celá cesta trvala

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = 30 + 22,5 + 529,33 = 581,33 \text{ s}$$

Príklad 5.1-12:

Vozidlo má na určitom mieste svojej dráhy rýchlosť $v = 60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ a $s = 100 \text{ m}$, ďalej rýchlosť $v = 40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Aké je jeho spomalenie?

Riešenie:

Pretože čas nie je udaný, dostaneme spomalenie z rovníc

$$v - v_0 = a \cdot t$$

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Ak dosadíme do druhej rovnice za t z prvej rovnice, dostaneme

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s}$$

Rýchlosti udané v $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ prepočítame na $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, keď ich vydáme hodnotou 3,6, potom

$$a = \frac{11,2^2 - 16,7^2}{2 \cdot 100} = 0,78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Príklad 5.1-13:

Klietka banského výťahu stúpala smerom hore rýchlosťou $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ v čase, keď prasklo ťažné lano. Bezpečnostné zariadenie, ktoré začne účinkovať 2 sekundy po poruche lana, klietku zastaví. Kde sa nachádza v tom okamihu klietka výťahu?

Riešenie:

Po roztrhnutí ťažného lana klietka vystúpi do výšky

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{10^2}{2 \cdot 9,81} = 5,37 \text{ m}$$

trvá to

$$t = \frac{v}{g} = \frac{10}{9,81} = 1,02 \text{ s} \approx 1,0 \text{ s}$$

Preto ďalšiu 1 sekundu klietka padá, kým začne pracovať zariadenie, ktoré trením o vedenie klietky klietku zastaví. Klietka na konci prvej sekundy padá rýchlosťou

$$v = t \cdot g = 1 \cdot 9,81 = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

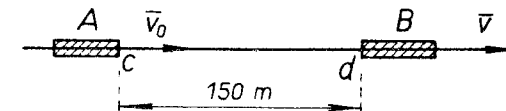
a prejde dráhu

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{10^2}{2 \cdot 9,81} = 5,07 \text{ m}$$

Z výpočtov vyplýva, že pri uvedení bezpečnostného zariadenia do činnosti klietka je práve v tom mieste, kde prasklo ťažné lano.

Príklad 5.1-14:

Rušňovodič rýchlika idúceho rýchlosťou $v = 100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ spozoroval pred sebou iný vlak, ktorý uháňal v tom istom smere rýchlosťou $v = 50,0 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Vzďialenosť oboch vlakov bola $150,0 \text{ m}$ a pohyb sa konal v priamke na vodorovnej rovine. Rýchlik brzdil tak, že spomalenie bolo $a = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Je potrebné zistiť, či sa vlaky zrazili.



Obr. 5.1-3.

Riešenie:

V mieste C spozoroval rušňovodič rýchlika pred sebou vlak vo vzdialenosti $150,0 \text{ m}$. Začal ihneď brzdíť pri spomalení $a = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Rovnomerný pohyb rýchlika sa zmenil na pohyb rovnomerne spomalený a rýchlik sa zastavil.

Pre rýchlosť platí rovnica

$$v = v_0 - a \cdot t$$

a pre dráhu

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Najprv zistíme čas, za ktorý sa rýchlik zastaví (vtedy bude jeho rýchlosť $v = 0$). V plnej jazde je rýchlosť $v_0 = 100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ a spomalenie $a = 2.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Z rovnice pre rýchlosť dostaneme čas t , za ktorý sa rýchlik zastaví

$$0 = v_0 - a \cdot t$$

z čoho

$$t = \frac{v_0}{a} = \frac{100\,000}{3\,600 \cdot 2} = 13,89 \text{ s}$$

Za tento čas t ubehne rýchlik dráhu

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2 = \frac{100\,000 \cdot 13,89}{3\,600} - \frac{1}{2} \cdot 2,0 \cdot 13,89^2 = 193,5 \text{ m}$$

v tom čase $t = 13,89 \text{ s}$ prešiel vlak B rovnomerne dráhu

$$s_1 = v \cdot t = \frac{50\,000}{3\,600} \cdot 13,89 = 193 \text{ m}$$

Pri zastavení rýchlika boli vlaky od seba vzdialené

$$d = 150 + 193 - 193,5 = 149,5 \text{ m}$$

Kritický čas, keď sa majú oba vlaky zraziť, nie je však pri rýchlosti $v = 0$ (rýchlika), ale pri rýchlosti, akú má prvý vlak, v našom prípade pri rýchlosti $v = 50,0 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ (vtedy sa rýchlosti oboch vlakov vyrovnávajú). Keď totiž má vlak už menšiu rýchlosť ako $50,0 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, vtedy sa vzdialenosť oboch vlakov ustavične zväčšuje.

Vypočítame čas, za ktorý sa rýchlosti oboch vlakov vyrovnávajú, a to z rovnice

$$v = v_0 - a \cdot t$$

z čoho

$$t = \frac{v_0 - v}{a} = \frac{100\,000 - 50\,000}{3\,600 \cdot 2,0} = 6,95 \text{ s}$$

Dráha, ktorú rýchlik ubehne, kým spomalí svoju rýchlosť na $50,0 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, je

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2 = \frac{100\,000 \cdot 6,95}{3\,600} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6,95^2 = 144,8 \text{ m}$$

Kým rýchlik zníži rýchlosť zo $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ na $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, potrebuje čas $6,95 \text{ s}$, za ktorý prejde dráhu $144,8 \text{ m}$. Vlak B prejde za $6,95 \text{ s}$ dráhu

$$s = v \cdot t = \frac{50\,000}{3\,600} \cdot 6,95 = 96,5 \text{ m}$$

V kritickom čase bola vzdialenosť oboch vlakov

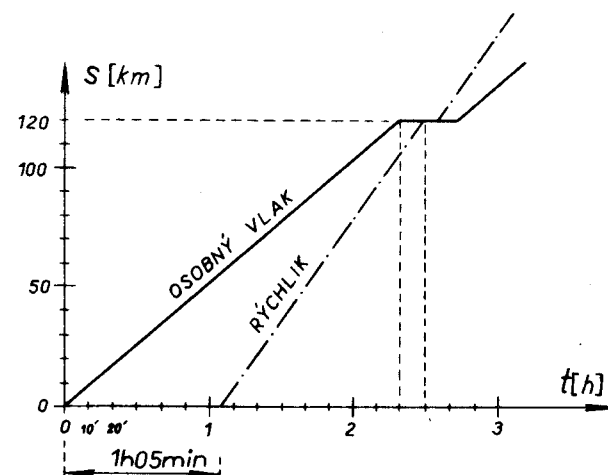
$$d = 150,0 + 96,5 - 144,8 = 101,70 \text{ m}$$

Výpočtom sme zistili, že vlaky sa nezrazili.

Príklad 5.1-15:

Osobný vlak prejde trať \overline{AB} dlhú 120 km za 2 h a 20 min . Rýchlik prejde tú istú trať za 1 h a 25 min . O čo neskoršie musí odísť rýchlik z miesta A ako osobný vlak, aby došiel 10 min za osobným vlakom do miesta B ?

Zastávka osobného vlaku je 25 min , rýchlika 5 min . Diagram dráhy oboch vlakov naznačte graficky.



Obr. 5.1-4.

Riešenie:

Zvolíme si pravouhlé súradnicové osi. Na vodorovnú os nanášame hodnoty času a na zvislú os prejdené dráhy.

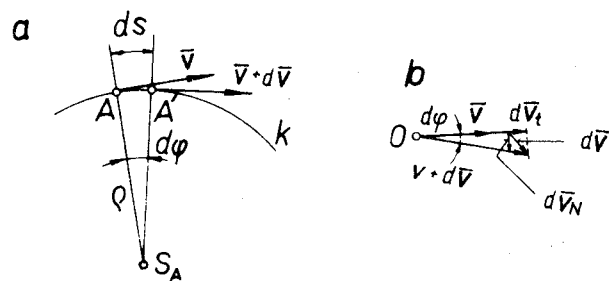
Rýchlik sa pohne zo stanice A o 1 h a 5 min po odchode osobného vlaku.

5.2. KRIVOČIARE POHYBY BODU

Ak rýchlosť mení svoj smer, vznikne krivočiary pohyb. Všeobecne sa pritom mení aj veľkosť rýchlosti.

Úvaha:

Bod A , ktorý sa pohybuje po rovinatej krivke, má v polohe A rýchlosť \mathbf{v} . Za čas dt opíše oblúk ds a v polohe A' má rýchlosť $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$, ktorá sa zmenila oproti rýchlosti \mathbf{v} tak v smere, ako aj vo veľkosti. Ak naniesieme z bodu O (obr. 5.2-1b) vektory obidvoch rýchlostí, určuje spojnice konečných bodov vektorov rýchlosti geometrický prírastok $d\mathbf{v}$ rýchlosti v čase dt . Tento prírastok môžeme rozložiť do



Obr. 5.2-1.

zložky $d\mathbf{v}$, v smere dotýčnice k dráhe (teda do smeru rýchlosti) a do zložky dv_n v smere normály; nazývame ich celkové zrýchlenie

$$\frac{dv}{dt} = a$$

dotýčnicová zložka zrýchlenia

$$\frac{dv}{dt} = a_t$$

normálová zložka zrýchlenia

$$\frac{dv_n}{dt} = \frac{v^2}{\rho} = a_n$$

Príklad 5.2-1:

Vlak odchádza zo stanice, rozbieha sa pohybom rovnomerne zrýchleným po zakrivenej trati polomerom $\rho = 600$ m.

Vypočítajte tangenciálne zrýchlenie a_t , normálne a_n a celkové zrýchlenie vlaku za 3 min, keď sa prejde dráha rovná 1 620 m.

Riešenie:

V začiatočnom momente sa dráha vlaku s_0 a rýchlosť v_0 rovnajú nule. Vlak prešiel dráhu

$$s = \frac{a_t \cdot t^2}{2}, \quad a_t = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 1\,620}{(3 \cdot 60)^2} = 0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Za 3 min po odchode zo stanice bude mať vlak rýchlosť

$$v = a_t \cdot t = 0,1 \cdot 3 \cdot 60 = 0,1 \cdot 180 = 18 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Normálová zložka zrýchlenia sa rovná

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{18^2}{600} = \frac{324}{600} = 0,54 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Celkové zrýchlenie

$$a^2 = a_n^2 + a_t^2$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{0,54^2 + 0,12} = 0,55 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Príklad 5.2-2:

Koleso na hriadeli sa začína otáčať zo stavu pokoja a dosiahne za čas $t = 20$ s, $n = 200$ ot/min. Aké je jeho uhlové zrýchlenie za predpokladu, že je za roztočenia stále? Koľko ráz sa koleso obráti?

Riešenie:

Máme udané otáčky za minútu. Uhlová rýchlosť ľubovoľného bodu kolesa je

$$\omega = 2\pi \cdot f$$

kde (frekvencia) f udáva, koľko ráz za sekundu sa celý pohyb opakuje. Frekvencia vyjadrená za min je

$$n = 60 \cdot f$$

takže uhlová rýchlosť v okamihu t je

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{3,14 \cdot 200}{30} = 21 \text{ s}$$

Ak začína pohyb zo stavu pokoja, uhlové zrýchlenie je

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{21}{21} = 1,05 \text{ s}^{-2}$$

Počet otáčok za 20 s: za tento čas opíše ľubovoľný bod stredový uhol

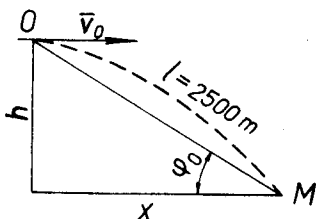
$$\varphi = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot t^2 = \frac{1}{2} 1,05 \cdot 400 = 201$$

Ak delíme s 2π , dostaneme počet otáčok kola za 20 s, čiže

$$201/2\pi = 33,4 \text{ otáčky}$$

Príklad 5.2-3:

Svah má dĺžku $l = 2\,500$ m a uhol sklonu $\varphi_0 = 30^\circ$. Akou rýchlosťou treba z horného konca svahu hodiť teleso vodorovne, aby dopadlo na dolný koniec?



Obr. 5.2-2.

Riešenie:

Pri výpočte použijeme rovnice

$$Y_M = h + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = h + v_0 \cdot t \cdot \sin \varphi - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$X_M = v_{0x} \cdot t = v_0 \cdot t \cdot \cos \varphi$$

kde $\varphi = 0^\circ$

$$h = l \sin \varphi, \quad x = l \cos \varphi, \quad y = 0$$

Po dosadení dostávame rovnice

$$l \cos \varphi = v_0 \cdot t$$

$$0 = l \sin \varphi - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

z ktorých treba vypočítať v_0

$$t = \frac{l \cdot \cos \varphi}{v_0}$$

$$0 = l \cdot \sin \varphi - \frac{1}{2} g \left(\frac{l \cdot \cos \varphi}{v_0} \right)^2$$

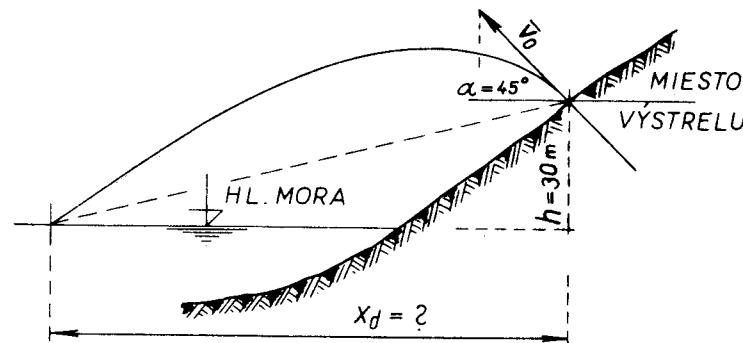
$$\frac{g \cdot l^2 \cos^2 \varphi}{2v_0^2} = l \cdot \sin \varphi \Rightarrow 2v_0^2 \cdot l \cdot \sin \varphi = g \cdot l^2 \cdot \cos^2 \varphi$$

$$v_0^2 = \frac{l^2 \cdot \cos^2 \varphi}{2 \cdot l \cdot \sin \varphi} = \frac{g \cdot l \cos^2 \varphi}{2 \sin \varphi}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{g \cdot l}{2 \sin \varphi}} \cdot \cos \varphi = \sqrt{\frac{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 2\,500 \text{ m}}{2 \sin 30^\circ}} \cdot \cos 30^\circ \doteq 136 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Príklad 5.2-4:

Z dela pobrežného delostrelectva, umiesteného vo výške 30 m nad hladinou mora, je vystrelená strela pod uhlom $\alpha = 45^\circ$ voči horizontálnej rovine so začiatkovou rýchlosťou $v_0 = 1\,000$ m · s⁻¹. Aká je vodorovná vzdialenosť dela od miesta, v ktorom strela zasiahla cieľ ležiaci na hladine mora? (Odpor vzduchu neberieme do úvahy.)



Obr. 5.2-3.

Riešenie:

Uvažujme prípad šikmého vrhu. Vzdialenosť doletu X_d (diaľkodoletu) je

$$X_d = v_0 \cdot t_d \cdot \cos \alpha = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} = \frac{(10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2 \sin 90^\circ}{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} =$$

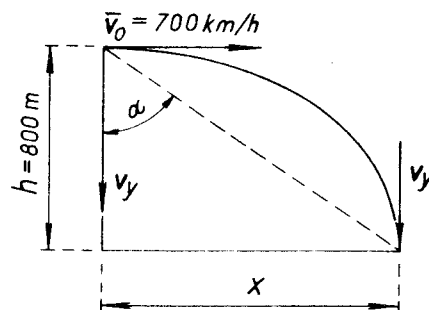
$$= \frac{10^6 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot 1}{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = \frac{100 \cdot 10^4}{9,81} \text{ m} = 10,2 \cdot 10^4 \text{ m} = 102\,000 \text{ m} = 102 \text{ km}$$

Príklad 5.2-5:

Z lietadla, ktoré letí rýchlosťou $v_0 = 700 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ padá bomba začiatočnou rýchlosťou $v_y = 0$. Lietadlo letí vo výške 800 m nad cieľom.

Treba určiť:

- rýchlosť, s akou bomba zvislo dopadne,
- čas dopadu,
- vzdialenosť x , v ktorej sa musí bomba zhodiť pred cieľom, aby ho zasiahla,
- uhol α , pod ktorým musí letec zamerať cieľ,
- skutočnú rýchlosť, s akou bomba cieľ zasiahne.



Obr. 5.2-4.

Riešenie:

- Výška lietadla nad zemou $h = 800 \text{ m}$ je daná

$$v_y = \sqrt{2g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 800} = 125,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

- $v_y = g \cdot t \rightarrow t = \frac{v_y}{g} = \frac{125,2}{9,81} = 12,8 \text{ s}$

- $x = v_0 \cdot t = 700 \cdot \frac{1}{3,6} \cdot 12,8 = 2\,485 \text{ m}$

- $\text{tg } \alpha = \frac{x}{h} = \frac{2\,485}{800} = 0,312, \quad \alpha = 17^\circ 20'$

- $v = \sqrt{v_0^2 + v_y^2} = \sqrt{194,5^2 + 125,2^2} = 232 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$v_0 = 700 \text{ km/h} = 700 \cdot \frac{1\,000}{3\,600} = 194,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Príklad 5.2-6:

Hmotný bod sa pohybuje po kružnici s polomerom $r = 70 \text{ cm}$ s frekvenciou $f = 1\,200 \text{ ot/min}$. Vypočítajte periódu T , obvodovú rýchlosť v , uhlovú rýchlosť ω a dostredivé zrýchlenie.

Riešenie:

$$f = 1200 [1/\text{min}] = 20 [1/\text{s}]$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{20} = 0,05 \text{ s}$$

$$v = 2\pi \cdot r \cdot f = 2\pi \cdot 70 \cdot 20 = 2800\pi = 8796,0 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 20 = 125,6 \text{ s}^{-1}$$

$$a = \omega^2 \cdot r = (125,6)^2 \cdot 70 = 11\,042,5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$$

Príklad 5.2-7:

Bubon miešačky má pri miešaní betonovej zmesi obvodovú rýchlosť $v = 4 \text{ m/min}$.

Zistite počet otáčok bubna priemeru $D = 750 \text{ mm}$.

Riešenie:

Vychádzame zo vzorca

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\pi \cdot D \cdot n}{60}$$

a z toho

$$n = \frac{60 \cdot v}{\pi \cdot D} = \frac{60 \cdot 4}{3,14 \cdot 0,75} = 102,1 \text{ ot min}^{-1}$$

Príklad 5.2-8:

Vypočítajte uhlovú rýchlosť kolesa traktora s priemerom $D = 120 \text{ cm}$, ak ide rýchlosťou $v = 6,1 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Riešenie:

$$v = 6,1 = \frac{6\,100}{60 \cdot 60} = 1,695 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

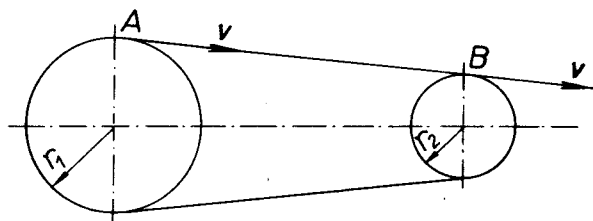
$$v = 2\pi \cdot r \cdot f$$

$$f = \frac{v}{2\pi \cdot r} = \frac{1,695}{2 \cdot 3,14 \cdot 0,60} = 0,45 \text{ ot s}^{-1}$$

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,45 = 6,28 \cdot 0,45 = 2,82 \text{ ot s}^{-1}$$

Príklad 5.2-9:

Remeňom sa vykonáva otáčavý pohyb z remenice A priemeru 50 cm 30 ot/min na remenicu B priemeru 30 cm. Koľko otáčok za minútu urobí remenica B?



Obr. 5.2-5.

Riešenie:

Podľa obrázka majú obidve remenice rovnakú obvodovú rýchlosť v

$$v = \omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

kde

$$d = 2r$$

Uhlová rýchlosť ω je úmerná otáčkam n , takže

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{d_1}{d_2}$$

$$n_2 = n_1 \frac{d_1}{d_2} = 30 \frac{50}{30} = 50 \text{ m}^{-1}$$

Remenica B urobí 50 ot m^{-1} .

VI. TUHÉ TELESO A TUHÁ DOSKA

Impulz sily, hybnosť a moment hybnosti tuhého telesa

Impulz sily je miera časového účinku sily, pôsobiacej na hmotný bod v určitom časovom intervale, vyjadrená vzťahom

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dI = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{P} \cdot dt$$

kde I je impulz sily,

dI — elementárny impulz sily.

Hybnosť hmotného bodu je charakteristika okamihového pohybového stavu daného hmotného bodu vyjadrená vzťahom

$$\mathbf{H}_i = m_i \cdot \mathbf{v}_i$$

kde m_i je hmotnosť hmotného bodu,

\mathbf{v}_i — vektor rýchlosti.

Impulz danej sily, ktorý vyvinie sila pôsobením na hmotný bod v danom časovom intervale, rovná sa zmene hybnosti hmotného bodu

$$I = m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_0)$$

kde \mathbf{v}_0 je vektor rýchlosti v čase t_1 ,

\mathbf{v}_i — vektor rýchlosti v čase t_2 .

Hybnosť tuhého telesa sa rovná hybnosti hmotnosti telesa sústredenej v ťažisku

$$\mathbf{H} = \int dm \cdot \mathbf{v} = m \cdot \mathbf{v}$$

kde \mathbf{v} je rýchlosť ťažiska.

Hybnosť telesa vzhľadom na ťažisko sa rovná nule.

Ťažisko tuhého telesa mení svoj pohybový stav iba pôsobením vonkajších síl.

Pohybová rovnica

$$m \cdot \mathbf{a}_i = \Sigma \mathbf{P}$$

$$m \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d(m \cdot \mathbf{v}_i)}{dt} = \Sigma \mathbf{P}$$

čo znamená, že derivácia hybnosti tuhého telesa podľa času sa rovná výslednici vonkajších síl pôsobiacich na teleso.

Rozmer hybnosti [kg m s⁻¹].

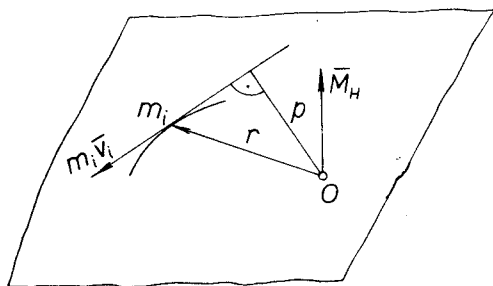
Moment hybnosti \mathbf{b}_i hmotného bodu, vzhľadom na bod 0, je vektor vyjadrený výrazom

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{r} \times \mathbf{H}_i = \mathbf{r} \times (m_i \cdot \mathbf{v}_i)$$

V skalárnom vyjadrení pozri obr. 6-1.

$$b_i = m_i \cdot v_i \cdot p$$

Vektor hybnosti je kolmý na rovinu určenú vektormi \mathbf{r} , $\mathbf{H}_i = m_i \cdot \mathbf{v}_i$. Statický moment hybnosti sa nazýva tiež impulzový moment hmotného bodu.



Obr. 6.1.

Časová zmena momentu hybnosti hmotného bodu k danému bodu sa rovná súčtu statických momentov vonkajších síl, pôsobiacich na hmotný bod, k tomu istému bodu

$$\frac{d\mathbf{b}_i}{dt} = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{P}) = \mathbf{M}$$

kde \mathbf{M} je výsledný statický moment.

Ak statický moment vonkajších síl k danému bodu sa rovná nule, moment hybnosti k tomuto bodu je konštantný.

Moment hybnosti \mathbf{b}_i tuhého telesa k danému bodu sa rovná momentu

hybnosti hmoty tuhého telesa sústredenej v ťažisku k danému bodu a momentu hybnosti telesa k ťažisku

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{r}_i \times m \cdot \mathbf{v}_i + \int (\mathbf{r} \times dm \cdot \mathbf{v})$$

kde \mathbf{r}_i je polohový vektor hmoty tuhého telesa k danému bodu,

\mathbf{r} — polohový vektor hmotného elementu telesa vzhľadom na ťažisko,

\mathbf{v} — rýchlosť elementu vzhľadom na ťažisko

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \omega \times \mathbf{r}$$

Moment hybnosti tuhého telesa, otáčajúceho sa okolo pevnej osi vzhľadom na túto os, rovná sa súčinu momentu zotrvačnosti telesa k danej osi a uhlovej rýchlosti otáčajúceho sa tuhého telesa.

$$\mathbf{b} = J \cdot \omega$$

Rozmer momentu hybnosti [kg m² s⁻¹].

Všeobecný postup pri riešení príkladov

1. Tuhé teleso zobrazíme v časovom okamihu.
2. Zobrazíme všetky sily pôsobiace na tuhé teleso v časovom okamihu.
3. Zvolíme si súradnicový systém.
4. Zostavíme pohybové rovnice.
5. Z rovníc určíme hľadanú neznámu.

Príklad 6-1:

Určte rýchlosť, ktorú nadobudne teleso hmotnosti m , voľne padajúce v čase t , ak jeho začiatočná rýchlosť v_0 bola nulová.

Riešenie:

Vydeme z rovnice zmeny hybnosti, ktorá hovorí, že prírastok hybnosti v určitom časovom intervale je daný impulzom pôsobiacich síl v danom časovom intervale

$$m \cdot \mathbf{v} - m \cdot \mathbf{v}_0 = I = \int_{t_0}^t \mathbf{P} \cdot dt$$

V priemete do pravouhlých súradnicových osí môžeme rovnice zmeny hybnosti napísať

$$m \cdot v_x - m \cdot v_{0x} = \int_{t_0}^t P_x \cdot dt$$

$$m \cdot v_y - m \cdot v_{0y} = \int_{t_0}^t P_y \cdot dt$$

kde $v_x = 0, v_{0x} = 0, P_x = 0$

$$v_y = v, v_{0y} = 0, P_y = m \cdot g$$

Začiatočná sila, tiaž telesa $P_y = P = m \cdot g$. Potom rovnica zmeny hybnosti je daná

$$m \cdot v = \int_0^t m \cdot g \cdot dt$$

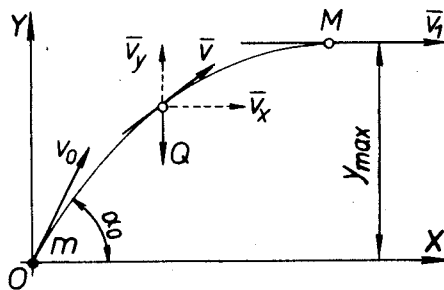
a po integrácii

$$m \cdot v = m \cdot g \int_0^t dt = m \cdot g \cdot t$$

z ktorej určíme rýchlosť padajúceho telesa v čase t — pohybová rovnica voľného pádu

$$v = g \cdot t$$

Ak teleso padá v čase $t = 5$ s, nadobudne rýchlosť $v = 49,03 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.



Obr. 6.2.

Príklad 6-2:

Nájdite výslednicu síl pôsobiacich na hmotný bod tiaže Q za čas, keď hmotný bod, ktorý bol hodený začiatočnou rýchlosťou v_0 pod uhlom α_0 od vodorovnej roviny z bodu O , prejde do bodu M s maximálnou výškou h . Rýchlosť hmotného bodu v bode M je v_1 — vektor rýchlosti je rovnobežný s vodorovnou rovinou (obr. 6-2).

Riešenie:

Impulz sily určíme z rovnice zmeny hybnosti hmotného bodu v danom časovom intervale

$$I = \int_0^t \mathbf{P} \cdot dt = m \cdot \mathbf{v} - m \cdot \mathbf{v}_0$$

Výslednú silu rozložíme do pravouhlých súradnicových osí so začiatkom v bode O . Platí

$$m \cdot v_{1x} - m \cdot v_{0x} = \int_0^t P_x \cdot dt$$

kde $m = \frac{Q}{g}$

$$m \cdot v_{1y} - m \cdot v_{0y} = \int_0^t P_y \cdot dt$$

Zložky rýchlosti do súradnicových osí X a Y

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha_0, \quad v_{1x} = v_1$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin \alpha_0, \quad v_{1y} = 0$$

Ak dosadíme zložky rýchlosti do rovníc hybnosti, získame zložky výslednice

$$P_x = \frac{Q}{g} (v_1 - v_0 \cos \alpha_0)$$

$$P_y = -\frac{Q}{g} v_0 \sin \alpha_0$$

Veľkosť výslednice a uhol odklonu od osi X sú dané vzťahmi

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{P_y}{P_x}$$

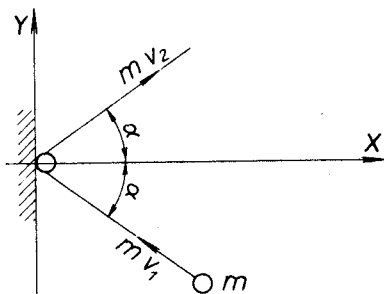
Ak $Q = 1,0 \text{ kN}$, $v_0 = 500 \text{ m/s}$, $v_1 = 200 \text{ m/s}$, $\alpha_0 = 60^\circ$, potom

$$P_x = \frac{1,0}{9,806} (200 - 500 \cdot 0,5) = -5,10 \text{ kN}$$

$$P_y = \frac{1,0}{9,806} (-500 \cdot 0,866) = -44,10 \text{ kN}$$

Príklad 6-3:

Pružná guľa s hmotnosťou $m = 0,2$ kg narazila na stenu v smere, ktorý zvierá s normálou k stene uhol $\alpha = 60^\circ$ a bez straty rýchlosti sa odrazila od steny pod rovnakým uhlom. Máme určiť, aký impulz dá stena guľe a aká bude hodnota sily pôsobiacej na guľu pri náraze, ak rýchlosť guľe bola 10 m/s a náraz trval 0,05 s (obr. 6-3).



Obr. 6.3.

Riešenie:

Impulz sily, ktorou pôsobí stena pri zrážke na guľu, rovná sa zmene hybnosti vyjadrenej rovnicou

$$I = m \cdot v_2 - m \cdot v_1$$

Rýchlosť $v_2 = -v_1 = v$ je rýchlosť letiacej guľe.

Premietnime si rýchlosti do zvolených pravouhlých osí.

Priemet do osi X

$$v_{1x} = -v_1 \cdot \cos \alpha$$

$$v_{2x} = v_2 \cdot \cos \alpha_0$$

Dosadením do rovnice impulzu

$$I_x = m(v_{2x} - v_{1x}) = 2m \cdot v \cdot \cos \alpha$$

získame veľkosť impulzu, číselne vyjadrenú $I_x = 2 \cdot 0,2 \cdot 10 \cdot 0,5 = 2,0$ kgm/s.

Časová zmena hybnosti telesa sa rovná výslednej sile, pôsobiacej na teleso.

Stredná hodnota sily bude $\frac{dH}{dt} = \mathbf{P}$. V priemete na os X, pričom $\mathbf{P} = P_x$, vyjadríme časovú zmenu hybnosti

$$m \cdot v_{2x} - m \cdot v_{1x} = \int_0^t P_x \cdot dt = P_x \cdot t$$

odkiaľ určíme $P_x = \mathbf{P}$

$$P = \frac{m}{t} 2v \cdot \cos \alpha$$

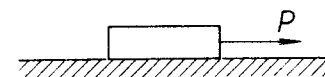
a číselne

$$P = \frac{0,2}{0,05} 2 \cdot 10 \cdot 0,5 \text{ N} = 40,0 \text{ N}$$

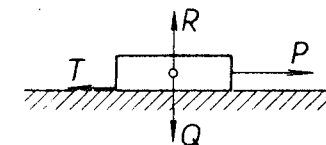
$$P = 40,0 \text{ N} = 0,04 \text{ kN}$$

Príklad 6-4:

Tuhé teleso tiaže Q sa začína pohybovať po horizontálnej, drsnej rovine pôsobením sily P priamo úmernej času $P = k \cdot t$ (obr. 6-4). Máme určiť rýchlosť, ktorú teleso získa za čas t od začiatku pohybu, keď začiatočná rýchlosť $v_0 = 0$ a súčiniteľ trenia sa rovná f .



Obr. 6.4.



Obr. 6.5.

Riešenie:

Nakreslíme sily, ktoré pôsobia na teleso v časovom okamihu t (obr. 6-5).

kde Q je tiaž telesa,

P — pohybová sila $P = k \cdot t$,

T — sila trenia $T = R \cdot f = Q \cdot f$,

R — reakcia podložia.

Impulz danej sily, ktorý sila pôsobením na teleso vyvinie v určitom časovom intervale, rovná sa zmene hybnosti telesa. Vyjadríme zmenu hybnosti telesa v priemete na os X

$$m \cdot v_x - m \cdot v_{0x} = \Sigma I_x$$

kde v_x je rýchlosť telesa za pôsobenia sily P v čase t , premietnutá do osi X,

v_{0x} — rýchlosť telesa pred pôsobením sily P ,

$v_{0x} = v_0 = 0$,

ΣI_x — súčet impulzov jednotlivých síl v priemete na os X za čas t ,

$$\Sigma I_x = \int_0^t P \cdot dt - T \cdot t = k \int_0^t t \cdot dt - T \cdot t = k \frac{t^2}{2} - f \cdot Q \cdot t$$

Rovnica zmeny hybnosti v priemete na os X

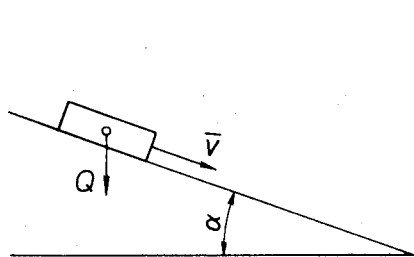
$$m \cdot v_x = k \frac{t^2}{2} - f \cdot Q \cdot t, \quad m = \frac{Q}{g}$$

Z rovnice určíme rýchlosť telesa pôsobením sily P za čas t

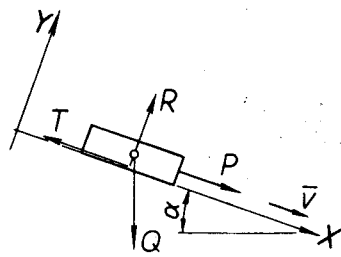
$$v_x = g \cdot t \left(k \frac{t}{2Q} - f \right)$$

Príklad 6-5:

Teleso tiaže Q sa spúšťa po naklonenej rovine, odklonenej od vodorovnej roviny o uhol α (obr. 6-6). Jeho začiatková rýchlosť je v_0 . Za aký čas sa rýchlosť zdvojnásobí, ak súčiniteľ trenia telesa po naklonenej rovine je f .



Obr. 6.6.



Obr. 6.7.

Riešenie:

Naznačme sily pôsobiace na teleso v časovom okamihu podľa obr. 6-7; zvolme si súradnicový systém naznačený na obrázku. Sily pôsobiace na teleso sú: reakcia naklonenej roviny

$$R = Q \cdot \cos \alpha$$

sila trenia

$$T = f \cdot R = f \cdot Q \cdot \cos \alpha$$

sila, ktorá spôsobuje posun telesa

$$P = Q \cdot \sin \alpha$$

Rovnica zmeny hybnosti v priemete do osi X je vyjadrená vzťahom

$$m \cdot v_x - m \cdot v_{0x} = \Sigma I_x$$

kde

$$m = \frac{Q}{g}$$

$v_{0x} = v_0$ je začiatková rýchlosť telesa,

$v_x = 2v_0$ - rýchlosť telesa získaná za čas t .

Súčet impulzov od síl pôsobiacich na teleso v smere osi X bude

$$\begin{aligned} \Sigma I_x &= P \cdot t - T \cdot t = t(Q \cdot \sin \alpha - f \cdot Q \cdot \cos \alpha) = \\ &= Q \cdot t (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha) \end{aligned}$$

Po dosadení do rovnice hybnosti získame rovnicu, z ktorej určíme hľadaný čas t , za ktorý sa rýchlosť telesa zdvojnásobí.

$$\frac{Q}{g} (2v_0 - v_0) = Q \cdot t (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)$$

$$t = \frac{v_0}{g (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)}$$

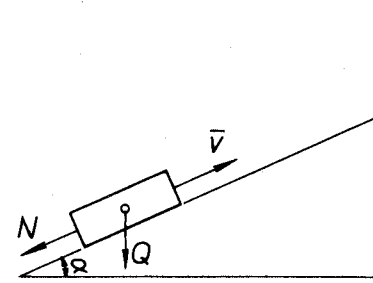
Príklad 6-6:

Máme určiť rýchlosť v , ktorú musíme dať telesu tiaže Q , aby za 4 s vystúpilo po naklonenej rovine, odklonenej od vodorovnej roviny o uhol α , ak okrem vlastnej tiaže pôsobí na teleso spätná sila $N = m \cdot g \cdot e^{-t}$. Súčiniteľ trenia $f = 0,2$, uhol odklonu naklonenej roviny $\alpha = 30^\circ$ (obr. 6-8).

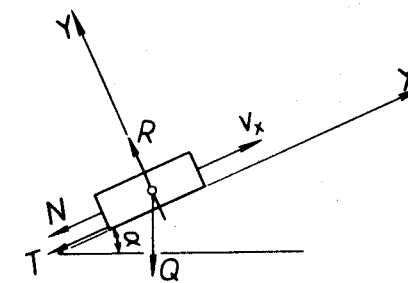
Riešenie:

Sily, ktoré pôsobia na teleso v časovom okamihu, sú znázornené na obr. 6-9.

Zostavíme rovnice zmeny hybnosti telesa do zvolených súradnicových osí X a Y , naznačených na obrázku



Obr. 6.8.



Obr. 6.9.

$$m \cdot v_x - m \cdot v_{0x} = \Sigma I_x = \int_0^t X \cdot dt$$

$$m \cdot v_y - m \cdot v_{0y} = \Sigma I_y = \int_0^t Y \cdot dt$$

Sily pôsobiace v smere osi X

$$Q_x = -Q \cdot \sin \alpha$$

$$T_x = -f \cdot R = -f \cdot Q \cdot \cos \alpha$$

$$N_x = -N = -m \cdot g \cdot e^{-t}$$

Sily pôsobiace v smere osi Y

$$Q_y = -Q \cdot \cos \alpha$$

$$N_y = T_y = 0$$

$$R_y = R = Q \cdot \cos \alpha$$

Súčet síl v smere osi X a v smere osi Y bude

$$X = \Sigma X_i = Q_x + N_x + T_x = -(Q \cdot \sin \alpha + f \cdot Q \cdot \cos \alpha + m \cdot g \cdot e^{-t})$$

$$Y = \Sigma Y_i = Q_y + R_y + N_y = R - Q \cdot \cos \alpha$$

Priemety rýchlostí telesa do súradnicových osí

$$v_x = v = 0, \quad v_y = 0$$

$$v_{0x} = v_0, \quad v_{0y} = 0$$

Dosadením do rovníc zmeny hybnosti telesa dostaneme

$$-m \cdot v_0 = - \int_0^4 (Q \cdot \sin \alpha + f \cdot Q \cdot \cos \alpha + m \cdot g \cdot e^{-t}) dt$$

$$0 = \int_0^4 (R - Q \cdot \cos \alpha) dt$$

Z druhej rovnice vychádza $R = Q \cdot \cos \alpha$ a z prvej rovnice určíme integráciou hľadanú rýchlosť v_0 , aby za čas $t = 4$ s bolo teleso v pohybe a vystúpilo po naklonenej rovine.

$$m \cdot v_0 = [Q \cdot \sin \alpha \cdot t + f \cdot t \cdot Q \cdot \cos \alpha - m \cdot g \cdot e^{-t}]_0^4$$

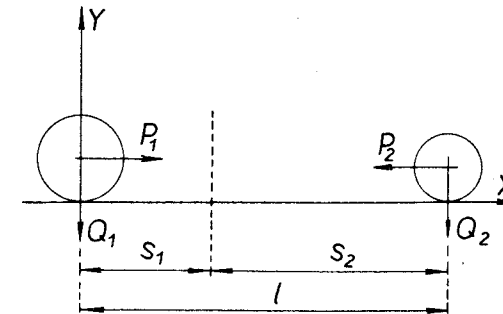
$$v_0 = g [(\sin \alpha + f \cdot \cos \alpha)t - e^{-t}]_0^4, \quad \alpha = 30^\circ$$

po číselnom dosadení dostaneme

$$v_0 = 9,806 (0,5 + 0,2 \cdot 0,866)4 - 0,018 + 1 = 36,04 \text{ m/s}$$

Příklad 6-7:

Dve telesá tiaže Q_1 a Q_2 sa začnú pohybovať proti sebe zo vzdialenosti l pôsobením síl $P_1 = P_2 = P$. Máme určiť vzdialenosť, rýchlosť aj čas ich stretnutia (obr. 6-10).



Obr. 6.10.

Riešenie:

Podľa obr. 6-10 si zvolíme súradnicový systém a uvažujeme sily, ktoré na telesá pôsobia. Pôsobením síl $P_1 = P_2 = P$ sa začnú telesá pohybovať. Hybnosť jednotlivých telies premietnutá na os X

$$m_1 \cdot v_{1x} - m_1 \cdot v_{0x} = P \cdot t$$

$$m_2 \cdot v_{2x} - m_2 \cdot v_{0x} = P \cdot t$$

kde $v_{0x} = v_0 = 0$ je začiatková rýchlosť telies,

v_{1x}, v_{2x} — rýchlosti telies, ktoré telesá nadobudnú pôsobením síl $P_1 = P_2 = P$.

Pravé strany rovníc hybnosti sú rovnaké, preto i absolútna hodnota hybnosti oboch rovníc musí byť rovnaká

$$m_1 \cdot v_{1x} = m_2 \cdot v_{2x}$$

ak dosadíme za

$$v_{1x} = \frac{dx_1}{dt} \quad \text{a} \quad v_{2x} = \frac{dx_2}{dt}$$

kde x_1 a x_2 sú dráhy telies premietnuté na os X a $m_1 = \frac{Q_1}{g}$, $m_2 = \frac{Q_2}{g}$, platí rovnosť

$$\frac{Q_1}{g} \cdot \frac{dx_1}{dt} = \frac{Q_2}{g} \cdot \frac{dx_2}{dt}$$

Integrovaním rovnice v hraniciach od 0 po s_1 a od 0 po s_2 (t. j. dráh telies po vzájomnom stretnutí), získame rovnice

$$\int_0^{s_1} Q_1 \cdot dx_1 = \int_0^{s_2} Q_2 \cdot dx_2$$

a po integrácii

$$Q_1 \cdot s_1 = Q_2 \cdot s_2$$

Pri premiestení telies až po ich stretnutí musí platiť vzťah

$$s_1 + s_2 = l$$

Pomocou týchto dvoch rovníc určíme dráhy telies

$$s_1 = \frac{Q_2}{Q_1}, \quad s_2 = \frac{Q_2}{Q_1} (l - s_1), \quad s_1 = l \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2}$$

$$s_2 = (l - s_1) = l \left(1 - \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2}\right), \quad s_2 = l \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2}$$

Keď uplatníme rovnicu

$$P = a \cdot m$$

pre teleso tiaže Q_1 platí

$$P = \frac{Q_1}{g} a_1$$

odkiaľ

$$a_1 = \frac{g}{Q_1} P$$

Čas potrebný na premiestenie telesa po dráhe s_1 pohybom rovnomerne zrýchleným určíme z rovnice

$$s_1 = \frac{1}{2} t \cdot v_1 = \frac{1}{2} t^2 \cdot a_1 = \frac{1}{2} t^2 \cdot \frac{g}{Q_1} P$$

potrebný čas t

$$t = \sqrt{\frac{2s_1 \cdot Q_1}{g \cdot P}} = \sqrt{\frac{2l \cdot Q_1 \cdot Q_2}{g \cdot P \cdot (Q_1 + Q_2)}}$$

Za ten čas nadobudne teleso tiaže Q_1 rýchlosť v_1 danú vzťahom

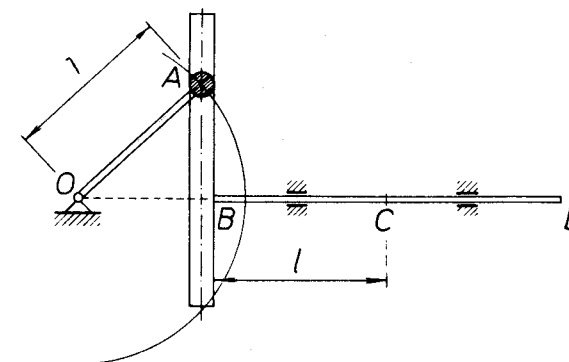
$$v_1 = a_1 \cdot t = \frac{g}{Q_1} P \sqrt{\frac{2l \cdot Q_1 \cdot Q_2}{g \cdot P \cdot (Q_1 + Q_2)}} = \sqrt{\frac{2g \cdot l \cdot P \cdot Q_2}{Q_1(Q_1 + Q_2)}}$$

Rovnako určíme rýchlosť telesa tiaže Q_2

$$v_2 = a_2 \cdot t = \sqrt{\frac{2g \cdot l \cdot P \cdot Q_1}{Q_2(Q_1 + Q_2)}}$$

Príklad 6-8:

Určte výslednú hybnosť mechanizmu znázorneného na obr. 6-11, ak tiaž kľuky OA sa rovná Q_1 , kameň kulisy A má tiaž Q_2 a tiaž kulisy a tyče BD , ktorých ťažisko je v bode C , je Q_3 . Dĺžka $OA = BC = l$. Čelná kľuka sa pohybuje konštantnou rýchlosťou, t. j. uhlovou rýchlosťou.



Obr. 6.11.

Riešenie:

Zistíme si pravouhlý súradnicový systém XY , ktorého začiatok je v bode O . Tiaž jednotlivých častí necháme pôsobiť v ťažiskách a určíme ich súradnice.

V určitom časovom okamihu t bude mechanizmus v polohe podľa obr. 6-12 a uhol pootočenia kľuky φ bude závislý od času a uhlovej rýchlosti $\varphi = t \cdot \omega$.

Hybnosť sústavy sa prejaví v smere horizontálnej aj vertikálnej osi. Rovnice hybnosti ťažiska mechanizmu v smere osí sú dané vzťahmi

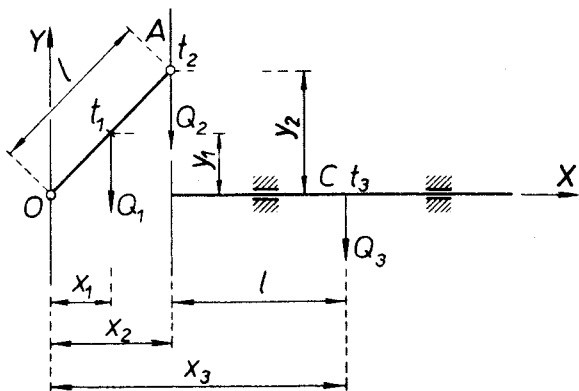
$$H_x = m \cdot v_x, \quad H_y = m \cdot v_y$$

a celková hybnosť bude

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2}$$

Hmotnosť celej sústavy

$$m = \sum m_i = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{g}$$



Obr. 6.12.

Túto celkovú hmotnosť uvažujeme sústredenú v ťažisku mechanizmu, ktorého súradnice získame pomocou momentovej vety k súradnicovým osiam XY, označíme ich x_i a y_i ,

$$x_i = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{m}, \quad y_i = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{m}$$

kde x_i a y_i sú súradnice ťažísk jednotlivých častí mechanizmu vyjadrené závislosťami

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{l}{2} \cos \omega t, & y_1 &= \frac{l}{2} \sin \omega t \\ x_2 &= l \cdot \cos \omega t, & y_2 &= l \cdot \sin \omega t \\ x_3 &= l(\cos \omega t + 1), & y_3 &= 0 \end{aligned}$$

Po dosadení hodnôt m , m_i a y_i budú mať súradnice ťažiska mechanizmu tvar

$$x_i = \frac{m_1 \cdot \frac{l}{2} \cos \omega t + m_2 \cdot l \cdot \cos \omega t + m_3 \cdot l(1 + \cos \omega t)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$y_i = \frac{m_1 \cdot \frac{l}{2} \sin \omega t + m_2 \cdot l \cdot \sin \omega t}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Po dosadení $m_i = \frac{Q_i}{g}$ a úprave získame súradnice ťažiska celého mechanizmu v tvare

$$x_i = \frac{Q_3 \cdot l}{Q_1 + Q_2 + Q_3} + \frac{l \cdot \cos \omega t (Q_1 + 2Q_2 + Q_3)}{2(Q_1 + Q_2 + Q_3)}$$

$$y_i = \frac{l \cdot \sin \omega t (Q_1 + 2Q_2)}{2(Q_1 + Q_2 + Q_3)}$$

Rýchlosť ťažiska premietnutá do súradnicových osí X a Y

$$v_x = \frac{dx_i}{dt} = -\omega \cdot l \cdot \sin \omega t \frac{Q_1 + 2Q_2 + Q_3}{2(Q_1 + Q_2 + Q_3)}$$

$$v_y = \frac{dy_i}{dt} = \omega \cdot l \cdot \cos \omega t \frac{Q_1 + 2Q_2}{2(Q_1 + Q_2 + Q_3)}$$

Hybnosť mechanizmu v smere osi X

$$H_x = m \cdot v_x = -\omega \cdot l \cdot \sin \omega t \frac{Q_1 + 2Q_2 + Q_3}{2g}$$

Hybnosť mechanizmu v smere osi Y

$$H_y = m \cdot v_y = \omega \cdot l \cdot \cos \omega t \frac{Q_1 + 2Q_2}{2g}$$

Po úprave dostaneme výslednú hybnosť mechanizmu

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} = \frac{\omega \cdot l}{2g} \sqrt{(Q_1 + 2Q_2 + Q_3)^2 \sin^2 \omega t + (Q_1 + 2Q_2)^2 \cos^2 \omega t}$$

Príklad 6-9:

Po vodorovnej rovine sa pohybuje vozidlo tiaže Q_1 rýchlosťou v_1 a vieze bremeno tiaže Q_2 . Určte rýchlosť vozidla v , ak z neho odhodíme bremeno

rýchlosťou v_2 smerom dozadu, a rýchlosť vozidla, ak z neho odhodíme bremeno rýchlosťou v_2 smerom dopredu.

Riešenie:

Vozidlo aj bremeno tvoria sústavu dvoch hmotných bodov, na ktorú pôsobia pri odhadzovaní bremena iba vnútorné sily. Ich vplyvom sa rýchlosť vozidla zmení z hodnoty v_1 na v . Celková hybnosť sústavy pred odhodením bremena a počas pohybu sa nezmení.

Hybnosť sústavy pri rýchlosti v_1 označíme $H^{(1)}$ a jej veľkosť vyjadríme pri priemete do osi X vzťahom

$$H^{(1)} = m \cdot v_{1x}, \quad m = \frac{Q_1 + Q_2}{g}$$

ak $v_{1x} = v_1$, potom

$$H^{(1)} = \frac{Q_1 + Q_2}{g} v_1$$

Po odhodení bremena smerom dozadu rýchlosťou v_2 , zmení sa rýchlosť vozidla na rýchlosť v a hybnosť vozidla bude

$$H = \frac{Q_1}{g} v$$

Hybnosť odhodeneho bremena smerom dozadu bude

$$H^{(2)} = -\frac{Q_2}{g} v_2$$

Súčet hybností H a $H^{(2)}$ sa musí rovnať začiatočnej hybnosti sústavy, pretože na sústavu nepôsobila nijaká vonkajšia sila. Platí

$$H + H^{(2)} = H^{(1)}$$

po dosadení získame rovnicu

$$\frac{Q_1}{g} v - \frac{Q_2}{g} v_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{g} v_1$$

Rýchlosť vozidla po odhodení bremena dozadu vyjadríme z rovnice

$$v = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} v_1 + \frac{Q_2}{Q_1} v_2 = v_1 + \frac{Q_2}{Q_1} (v_1 + v_2)$$

Ak bremeno odhodíme v smere pohybu vozidla rýchlosťou v_2 , hybnosť bremena je v smere pohybu vozidla a pripočíta sa k hybnosti vozidla bez bremena, t. j.

$$H^{(2)} = +\frac{Q_2}{g} v_2$$

Konečná rovnica hybnosti je

$$\frac{Q_1}{g} v + \frac{Q_2}{g} v_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{g} v_1$$

Rýchlosť vozidla po odhodení bremena v smere pohybu vozidla určíme z rovnice

$$v = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} v_1 - \frac{Q_2}{Q_1} v_2 = v_1 + \frac{Q_2}{Q_1} (v_1 - v_2)$$

Po porovnaní rýchlosti vozidla pri odhodení bremena je zrejmé, že vozidlo nadobudne väčšiu rýchlosť pri odhodení bremena smerom dozadu.

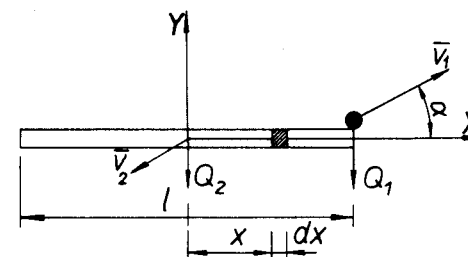
Príklad 6-10:

Hmotný bod sa odrazí pod uhlom α od konca tyče dĺžky l rýchlosťou v_1 . Tiaž hmotného bodu je Q_1 a tiaž tyče Q_2 . Máme určiť pohyb tyče po odraze hmotného bodu (obr. 6-13).

Riešenie:

Hybnosť sústavy tyče a hmotného bodu sa na začiatku rovná nule. Vonkajšie sily na sústavu nepôsobia, preto hybnosť sústavy aj po odraze hmotného bodu sa bude rovnať nule.

Hybnosť hmotného bodu premietneme do súradnicových osí X , Y , ktorých začiatok je totožný so stredom tyče (obr. 6-13). Označíme hybnosť hmotného bodu $H^{(1)}$ a hybnosť tyče $H^{(2)}$, rýchlosť hmotného bodu v_1 , rýchlosť tyče v_2 .



Obr. 6.13.

Zložky rýchlostí do súradnicových osí

$$v_{1x} = v_1 \cdot \cos \alpha$$

$$v_{1y} = v_1 \cdot \sin \alpha$$

Hybnosť hmotného bodu premietnutá do súradnicových osí

$$H_x^{(1)} = m_1 \cdot v_{1x} = \frac{Q_1}{g} v_1 \cdot \cos \alpha$$

$$H_y^{(1)} = m_1 \cdot v_{1y} = \frac{Q_1}{g} v_1 \cdot \sin \alpha$$

Hybnosť tyče premietnutá do súradnicových osí

$$H_x^{(2)} = m_2 \cdot v_{2x} = \frac{Q_2}{g} v_{2x}$$

$$H_y^{(2)} = m_2 \cdot v_{2y} = \frac{Q_2}{g} v_{2y}$$

Súčet hybností premietnutých do pravouhlých súradnicových osí X a Y sa musí rovnať nule.

$$H_x^{(1)} + H_x^{(2)} = 0$$

$$H_y^{(1)} + H_y^{(2)} = 0$$

Po dosadení hodnôt jednotlivých hybností a po úprave získame rýchlosť tyče premietnutú do súradnicových osí v_{2x} a v_{2y} .

$$\frac{Q_1}{g} v_1 \cdot \cos \alpha + \frac{Q_2}{g} v_{2x} = 0, \quad v_{2x} = -\frac{Q_1}{Q_2} v_1 \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{Q_1}{g} v_1 \cdot \sin \alpha + \frac{Q_2}{g} v_{2y} = 0, \quad v_{2y} = -\frac{Q_1}{Q_2} v_1 \cdot \sin \alpha$$

Ťažisko tyče po odraze hmotného bodu sa bude pohybovať rýchlosťou

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = \frac{Q_1}{Q_2} v_1$$

v smere odklonenom o uhol φ od vodorovnej osi

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_{2y}}{v_{2x}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

Po odraze hmotného bodu sa tyč bude pohybovať opačne ako hmotný bod a začne sa otáčať okolo ťažiska 0. Keďže pohyb nezapríčinila nijaká vonkajšia sila,

musí sa súčet momentu hybnosti hmotného bodu $b^{(1)}$ a momentu hybnosti tyče $b^{(2)}$ vzhľadom na bod 0 rovnať nule

$$b^{(1)} + b^{(2)} = 0$$

Moment hybnosti hmotného bodu

$$b^{(1)} = \frac{Q_1}{g} v_1 \frac{l}{2} \sin \alpha$$

Moment hybnosti tyče k bodu 0

$$b^{(2)} = 2 \int_0^{l/2} dm_2 \cdot \omega \cdot x^2$$

Hmota elementu

kde

$$dm_2 = \rho \cdot dx$$

Hmota dĺžkovej jednotky

$$\rho = \frac{Q_2}{g \cdot l}$$

Po dosadení hodnôt a integrácii bude moment hybnosti tyče

$$b^{(2)} = 2 \int_0^{l/2} \frac{Q_2}{g \cdot l} \omega \cdot x^2 \cdot dx = \frac{\omega \cdot l^2 \cdot Q_2}{12g}$$

Keďže súčet momentov hybnosti sa musí rovnať nule, môžeme z daného vzťahu určiť uhlovú rýchlosť tyče

$$\frac{Q_1}{g} v_1 \frac{l}{2} \sin \alpha + \frac{\omega \cdot l^2 \cdot Q_2}{12g} = 0$$

$$\omega = -\frac{6Q_1}{l \cdot Q_2} v_1 \cdot \sin \alpha$$

Príklad 6-11:

Cez nehmotnú kladku polomeru r je prevesené uzavreté lano tiaže Q_2 , na ktorom je upevnený človek tiaže Q_1 a je vyvážený protizávažím tej istej tiaže. Určte absolútnu rýchlosť človeka aj závažia, ak človek začne ťahať lano relatívnou rýchlosťou v_r , aby sa dostal ku kladke (obr. 6-14).

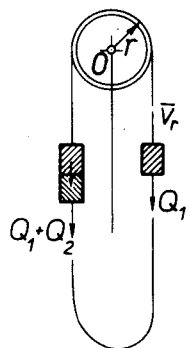
Riešenie:

Moment hybnosti človeka k stredú otáčania kladky

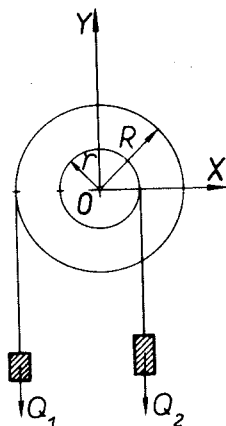
$$b^{(1)} = \frac{Q_1}{g} v_1 \cdot r$$

kde v_1 je absolútna rýchlosť pohybu človeka,
 v_2 — rýchlosť závažia aj lana

$$v_1 = v_r - v_2$$



Obr. 6.14.



Obr. 6.15.

Moment hybnosti závažia i lana k osi otáčania kladky označme $b^{(2)}$ a vyjadruje ho vzťah

$$b^{(2)} = -\frac{Q_1 + Q_2}{g} v_2 \cdot r$$

Sústava sa dostala do pohybu len vplyvom vnútornej sily človeka, preto súčet momentov hybnosti musí byť v rovnováhe, musí sa rovnať nule

$$b^{(1)} + b^{(2)} = 0$$

t. j.

$$\frac{Q_1}{g} (v_r - v_2) r - \frac{Q_1 + Q_2}{g} v_2 \cdot r = 0$$

Z rovnice určíme rýchlosť lana aj závažia

$$v_2 = \frac{Q_1 \cdot v_r}{2Q_1 + Q_2}$$

Pre výpočet rýchlosti človeka využijeme vzťah

$$v_1 = v_r - v_2$$

Absolútna rýchlosť človeka bude

$$v_1 = v_r \frac{Q_1 + Q_2}{2Q_1 + Q_2}$$

Pri porovnávaní rýchlostí v_1 a v_2 zistíme, že človek sa bude pohybovať rýchlejšie ako závažia a lano, čiže dosiahne kladku skôr. Ak by sme nebrali do úvahy tiaž lana Q_2 , bola by rýchlosť človeka aj závažia na druhej strane lana rovnaká a rovnala by sa polovici relatívnej rýchlosti človeka

$$v_1 = v_2 = v_r \frac{Q_1}{2Q_1} = \frac{v_r}{2}$$

Príklad 6-12:

Na dvojitej kladke sú navinuté laná, na ktorých visia závažia tiaže Q_1 a Q_2 , ktoré sú vzdialené od osi otáčania kladky o polomery R a r (obr. 6-15). Hmotný moment zotrvačnosti kladky k osi otáčania je J . Určte uhlové zrýchlenie kladky a zrýchlenie závažia Q_1 aj Q_2 .

Riešenie:

Kladka a závažia tvoria sústavu troch tuhých telies, na ktorú pôsobia tiaže závaží ako vonkajšie sily a reakcia v osi otáčania kladky. Vnútorými silami sú ťahy v lanách.

Časová zmena momentu hybnosti sústavy vzhľadom na os otáčania kladky sa musí rovnať momentu vonkajších síl vzhľadom na os

$$\Sigma \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{b}}{dt}$$

kde $\Sigma \mathbf{M} = Q_1 \cdot R - Q_2 \cdot r$

Moment hybnosti sústavy sa bude rovnať súčtu momentov hybností jednotlivých telies

$$b = \frac{Q_1}{g} v_1 \cdot R + \frac{Q_2}{g} v_2 \cdot r + J \cdot \omega$$

kde $v_1 = \omega \cdot R$, $v_2 = \omega \cdot r$

Časová zmena momentu hybnosti bude mať rovnicu vyjadrenú nasledovne

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{Q_1}{g} R^2 \cdot \omega + \frac{Q_2}{g} r^2 \cdot \omega + J \cdot \omega \right) = Q_1 \cdot R - Q_2 \cdot r$$

Z rovnice určíme uhlové zrýchlenie kladky $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$

$$\varepsilon = \frac{Q_1 \cdot R - Q_2 \cdot r}{\frac{Q_1}{g} R^2 + \frac{Q_2}{g} r^2 + J}$$

Zrýchlenie závaží vyjadríme vztahmi

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = \frac{d(\omega \cdot R)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R = \varepsilon \cdot R$$

$$a_2 = \frac{dv_2}{dt} = \frac{d(\omega \cdot r)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r = \varepsilon \cdot r$$

Príklad 6-13:

Miešačka sa otáča voľne okolo zvislej osi rovnomernou rýchlosťou ω_0 a má hmotný moment zotrvačnosti J_0 vzhľadom na os otáčania. Do miešačky začneme nalievať vodu, pričom sa hmotný moment zotrvačnosti zmení každú sekundu o hodnotu J_1 . Určte uhlovú rýchlosť a uhlové zrýchlenie miešačky od okamihu nalievania vody.

Riešenie:

Celkový moment hybnosti sústavy miešačky a vody k osi otáčania bude počas celého pohybu konštantný a bude sa rovnať momentu hybnosti miešačky $b^{(0)}$, ktorý je daný vztahom $b^{(0)} = J_0 \cdot \omega_0$.

Za čas t sa hmotný moment zotrvačnosti zmenil o hodnotu $\Delta J = J_1 \cdot t$ a rovná sa $J = J_0 + J_1 \cdot t$.

Moment hybnosti sústavy v čase t bude mať hodnotu

$$b = J \cdot \omega = (J_0 + J_1 \cdot t) \omega$$

kde ω je rýchlosť otáčania v čase t .

Moment hybnosti miešačky v čase t sa musí rovnať momentu hybnosti miešačky na začiatku, pred pridávaním vody.

$$b = b^{(0)}$$

Z tejto rovnice po dosadení jednotlivých momentov hybností určíme uhlovú rýchlosť miešačky od okamihu nalievania vody

$$\omega (J_0 + J_1 \cdot t) = J_0 \cdot \omega_0$$

odkiaľ

$$\omega = \frac{J_0 \cdot \omega_0}{J_0 + J_1 \cdot t}$$

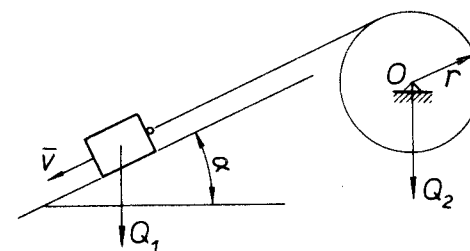
Uhlové zrýchlenie miešačky určíme podľa vzťahu

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

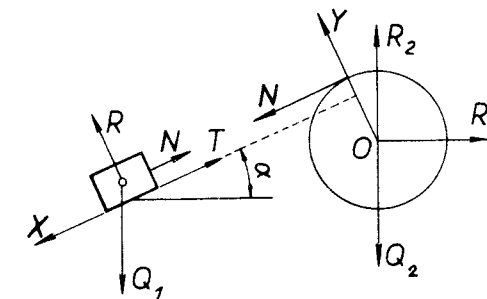
$$\varepsilon = -\frac{J_0 \cdot J_1 \cdot \omega_0}{(J_0 + J_1 \cdot t)^2}$$

Príklad 6-14:

Závažie tiaže Q_1 sa spúšťa po naklonenej rovine, odklonenej od vodorovnej roviny o uhol α , pomocou lana, otáčajúceho sa okolo kladky tiaže Q_2 , r je polomer kladky, J — moment zotrvačnosti k osi otáčania O a f je súčiniteľ trenia po naklonenej rovine. Tiaž lana neberieme do úvahy (obr. 6-16). Je potrebné určiť rýchlosť otáčania kladky.



Obr. 6.16.



Obr. 6.17.

Riešenie:

Časová zmena momentu hybnosti sa rovná súčtu statických momentov vonkajších síl, pôsobiacich na sústavu k osi otáčania. Na sústavu pôsobia sily znázornené na obr. 6-17. Sila v lane je vnútornou silou. Os X volíme v smere naklonenej roviny.

$$\frac{db}{dt} = \Sigma \mathbf{M}$$

kde $\Sigma \mathbf{M}$ je suma statických momentov vonkajších síl vzhľadom na os otáčania O (obr. 6-17) a je vyjadrená vztahom

$$\Sigma \mathbf{M} = Q_1 \cdot \sin \alpha \cdot r - T \cdot r$$

Reakcie R_1 a R_2 , ako aj tiaž kladky Q_2 dávajú nulový statický moment k osi otáčania 0. Silu trenia vyjadruje vzťah

$$T = Q_1 \cdot \cos \alpha \cdot f$$

Po dosadení do rovnice získame súčet statických momentov

$$\Sigma M = Q_1 \cdot r (\sin \alpha - \cos \alpha \cdot f)$$

Moment hybnosti sústavy sa skladá z momentu hybnosti závažia $b(1)$ a kladky $b(2)$ k osi otáčania 0

$$b = b(1) + b(2)$$

$$b(1) = \frac{Q_1}{g} v_x \cdot r$$

$$b(2) = J \cdot \omega$$

kde v_x je rýchlosť pohybu bremena po naklonenej rovine

$$v_x = v = \omega \cdot r$$

ω — rýchlosť otáčania kladky v čase t .

Celkový moment hybnosti sústavy sa rovná súčtu momentov hybností jednotlivých častí

$$b = \frac{Q_1}{g} \omega \cdot r^2 + J \cdot \omega$$

Časová zmena momentu hybností bude

$$\frac{db}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \left(\frac{Q_1}{g} r^2 + J \right)$$

kde $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ je uhlové zrýchlenie.

Dosadením uvedených vzťahov do rovnice $\frac{db}{dt} = \Sigma M$ získame rovnicu, z ktorej určíme uhlové zrýchlenie kladky

$$\left(J + \frac{Q_1}{g} r^2 \right) \varepsilon = Q_1 \cdot r (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)$$

$$\varepsilon = \frac{Q_1 \cdot r (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha) g}{J \cdot g + Q_1 \cdot r^2}$$

Uhlovú rýchlosť kladky získame integráciou v intervale času od 0 po t . Integrovaná konštanta je nulová, pretože v čase $t=0$ je uhlová rýchlosť $\omega=0$.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}, \quad d\omega = \varepsilon \cdot dt, \quad \omega = \int_0^t \varepsilon \cdot dt$$

integrovaním dostaneme

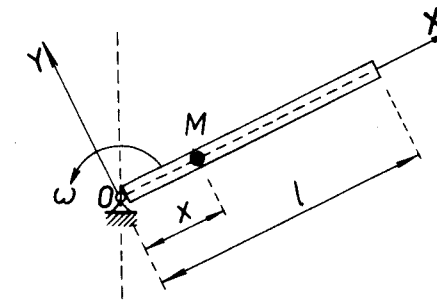
$$\omega = \frac{Q_1 \cdot r (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha) g \cdot t}{J \cdot g + Q_1 \cdot r^2}$$

Príklad 6-15:

Hmotný bod M hmotnosti m_1 sa začne pohybovať z miesta 0 v rúre (obr. 6-18), ktorá sa otáča okolo zvislej osi rovnomernou uhlovou rýchlosťou ω_0 . Hmotný moment zotrvačnosti rúry, dĺžky l a hmotnosti m_2 je daný vzťahom

$$J = \frac{1}{3} m_2 \cdot l^2$$

Určte uhlovú rýchlosť rúry v okamihu, keď ju hmotný bod opustí.



Obr. 6.18.

Riešenie:

Pravouhlý súradnicový systém orientujeme tak, že os X stotožníme s osou rúry a začiatok súradnicového systému bude v bode 0.

Hmotný bod a rúra tvoria sústavu dvoch telies, na ktorú v smere kolmom na os X pôsobia vnútorné (Coriolisove) sily.

Celkový moment hybnosti sústavy k bodu 0 bude konštantný a bude sa rovnat momentu hybnosti sústavy na začiatku, pretože na sústavu nepôsobia vonkajšie sily. Moment hybnosti sústavy označme na začiatku (0), t. j. keď hmotný bod M je v bode 0, a moment hybnosti sústavy v časovom okamihu b , ktorý bude súčtom momentu hybnosti hmotného bodu $b^{(1)}$ a momentu hybnosti rúry $b^{(2)}$ k bodu otáčania 0. Potom platí

$$b = b^{(0)}$$

Moment hybnosti rúry

$$b^{(0)} = J \cdot \omega_0 = \frac{m_2}{3} l^2 \cdot \omega_0$$

Moment hybnosti hmotného bodu

$$b^{(1)} = m_1 \cdot v_\varphi \cdot x$$

Pôsobením vnútorných síl sa uhlová rýchlosť rúry zmení na ω a zložka rýchlosti hmotného bodu v smere kolmom na os rúry (na os X) sa zmení z nuly na

$$v_\varphi = x \cdot \omega$$

kde x je vzdialenosť hmotného bodu od bodu otáčania O .

Moment hybnosti rúry v časovom okamihu bude

$$b^{(2)} = J \cdot \omega$$

Potom platí

$$(m_1 \cdot x^2 + J) \omega = J \cdot \omega_0$$

Z rovnice určíme uhlovú rýchlosť v časovom okamihu

$$\omega = \frac{J \cdot \omega_0}{m_1 \cdot x^2 + J}$$

Keď hmotný bod opustí rúru, bude vzdialenosť $x = l$ a uhlová rýchlosť rúry sa zmení na ω_1 , ktorej hodnotu vyjadríme výrazom

$$\omega_1 = \frac{J \cdot \omega_0}{m_1 \cdot l^2 + J}$$

a po dosadení hmotného momentu zotrvačnosti J získame upravený vzťah pre hľadanú uhlovú rýchlosť tyče bez hmotného bodu M

$$\omega_1 = \frac{m_2}{3m_1 + m_2} \omega_0$$

VII. PRÁCA A VÝKONNOSŤ

Práca je miera dráhového účinku danej sily medzi dvoma polohami telesa, danými polohovými vektormi r_1 a r_2 , vyjadrená vzťahom

$$A = \int_{r_1}^{r_2} dA$$

kde element práce dA danej sily sa rovná skalárnemu súčinu okamihovej hodnoty vektora sily \mathbf{P} a elementu polohového vektora $d\mathbf{r} = \mathbf{v} \cdot dt$

$$dA = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r}$$

Práca daných síl \mathbf{P}_i , ktoré pôsobia súčasne na teleso, rovná sa práci výslednice \mathbf{R} týchto síl

$$\int_{r_1}^{r_2} \Sigma \mathbf{P}_i \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{R} \cdot d\mathbf{r}$$

Ak sila P pôsobí na teleso, otáčajúce sa okolo pevnej osi Z , potom element práce je vyjadrený vzťahom

$$dA = m_z \cdot d\varphi$$

kde m_z je statický moment sily \mathbf{P} k osi otáčania,

$d\varphi$ — elementárny uhol pootočenia telesa okolo osi otáčania.

Ak statický moment m_z pôsobiacej sily P je funkciou uhla φ pootočenia telesa, t. j. $m_z(\mathbf{P}) = f(\varphi)$, potom

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} m_z \cdot d\varphi$$

Pri priamočiariom pohybe telesa, na ktoré pôsobí sila \mathbf{P} v smere dráhy, vykonáva sila prácu danú skalárnym súčinom sily P a posunu (dráhy) s

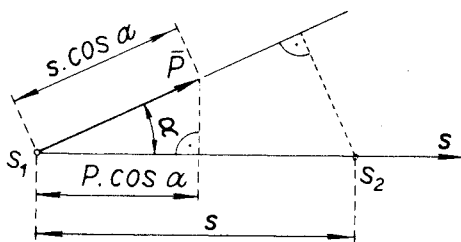
$$A = P \cdot s$$

Ak sila nepôsobí v smere dráhy pohybujúceho sa telesa, je práca definovaná ako súčin absolútnej hodnoty sily a veľkosti priemetu sily P do smeru dráhy (obr. 7-1).

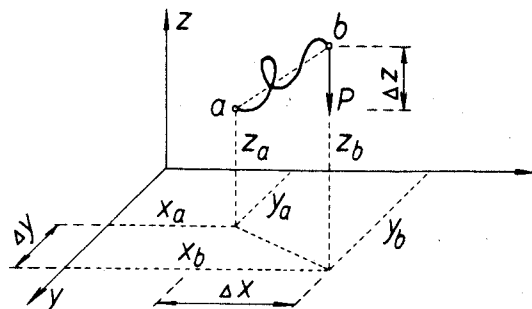
$$A = P \cdot s \cdot \cos \alpha$$

Uhol α je uhol zovretý smerom sily P a smerom dráhy s .

Práca konštantnej sily nezávisí od spôsobu prechodu jej pôsobiska zo začiatkovej polohy a do bodu b . Práca vykonaná na spojnici týchto bodov je rovnako veľká ako na akejkoľvek inej dráhe, ktorú vykoná teleso z bodu $-a$ do bodu $-b$ (obr. 7-2).



Obr. 7.1.



Obr. 7.2.

Práca sily je kladná, ak sila pôsobí v smere pohybu; práca má rozmer $[m^2 \text{ kg s}^{-1}]$.

Výkon N charakterizuje rýchlosť, s akou sa práca uskutočnila. Je to pomer prírastku elementárnej práce za časovú jednotku

$$N = \frac{dA}{dt} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} = P \cdot \cos \alpha \cdot v$$

Pri telese otáčajúcom sa okolo pevnej osi Z je výkon vyjadrený

$$N = S_z \cdot \omega$$

kde S_z je výsledný statický moment telesa k osi otáčania, ω — uhlová rýchlosť telesa.

Ak sa práca vykonáva rovnomerne, potom výkon vyjadruje vzťah

$$N = \frac{A}{t}$$

Jednotkou výkonu je watt, má rozmer $[m^2 \cdot \text{kg} \cdot s^{-3}]$.

Účinnosť η charakterizuje kvalitu a dokonalosť stroja. Je to pomer vykonanej (užitočnej) práce A_u k privedenej (potrebnej) práci A_p , resp. je to pomer užitočného výkonu k privedenému príkonu.

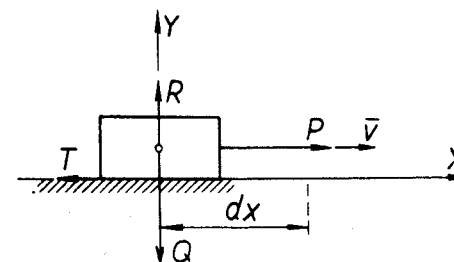
$$\eta = \frac{A_u}{A_p} = \frac{\text{výkon}}{\text{príkon}}$$

Všeobecný postup riešenia:

1. Zobrazíme teleso v časovom okamihu.
2. Zobrazíme sily pôsobiace na teleso.
3. Zvolíme si pravouhlý súradnicový systém.
4. Zostavíme rovnicu práce síl.
5. Určíme hľadanú veličinu.

Príklad 7-1:

Teleso tiaže Q sa posunuje po horizontálnej rovine pomocou horizontálnej sily P na dráhe s . Určte prácu, ktorú pri tomto pohybe koná trecia sila T , ak súčiniteľ trenia medzi rovinou a telesom je f (obr. 7-3).



Obr. 7.3.

Riešenie:

Na teleso v istom okamihu pôsobia sily P v smere pohybu, tiaž telesa Q kolmá na horizontálnu rovinu a sila trenia, ktorá pôsobí proti smeru pohybu telesa a je vyjadrená $T = f \cdot Q$. V ťažisku telesa si zvolíme pravouhlý súradnicový systém, pričom os X stotožníme s horizontálnou rovinou a kladný zmysel bude v smere pohybu telesa (obr. 7-3).

Sila trenia pôsobí proti smeru kladnej osi X , t. j. proti pohybu telesa je práca záporná. Elementárnu prácu sily trenia na dĺžke dx vyjadríme vzťahom:

$$dA = -T \cdot dx$$

Celkovú prácu sily T na dráhe s udáva vzťah

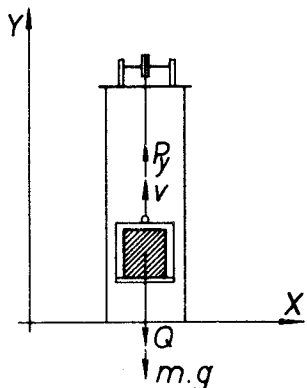
$$A = - \int_0^s T \cdot dx = -f \cdot Q \cdot s$$

Ak tiaž telesa $Q = 0,20$ kN, dĺžka dráhy $s = 6,0$ m, súčiniteľ trenia $f = 0,35$, potom vykonaná práca bude mať hodnotu

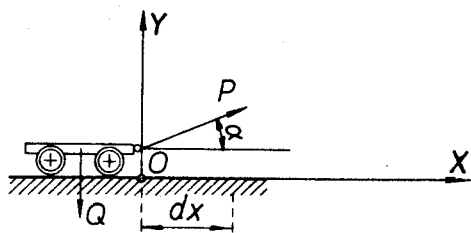
$$A = -0,35 \cdot 0,20 \cdot 6,0 = -0,42 \cdot 10^3 \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2} = -0,42 \text{ kJ} = -0,42 \text{ kW s}$$

Príklad 7-2:

Plošina výtahu, na ktorej je naložený materiál celkovej tiaže Q , je zdvíhaná konštantným zrýchlením $-a$. Určte prácu, ktorú vykonáva elektromotor za čas t (obr. 7-4).



Obr. 7.4.



Obr. 7.5.

Riešenie:

Na plošinu výtahu pôsobí sila elektromotora P_y , ktorá dvíha plošinu s materiálom tiaže Q a dáva plošine zrýchlenie $-a$; zrýchlenie vyvoláva zotrvačnú silu $m \cdot a$, ktorá pôsobí proti pohybu plošiny. Z podmienky rovnováhy síl v smere zvolenej osi Y (obr. 7-4), určíme veľkosť sily elektromotora

$$P_y - Q - m \cdot a = 0$$

$$P_y = Q \left(1 + \frac{a}{g} \right)$$

Sila elektromotora P_y pôsobí v smere pohybu a vykonáva kladnú prácu na dráhe s_y , ktorú vykoná za čas t . Dĺžka dráhy pri rovnomerne zrýchlenom pohybe sa rovná

$$s_y = \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Práca vykonaná za čas t je daná vzťahom $A = P_y \cdot s_y$. Po dosadení a úprave práca elektromotora je daná výrazom

$$A = \frac{Q}{2} \left(1 + \frac{a}{g} \right) a \cdot t^2$$

Ak celková tiaž plošiny s materiálom $Q = 15$ kN, zrýchlenie elektromotora $a = 2$ m/s² a časový interval dvíhania plošiny $t = 5$ s, veľkosť práce elektromotora bude

$$A = \frac{1,5 \cdot 10^4}{2} \left(1 + \frac{2}{9,806} \right) 2 \cdot 25 = 451,48 \cdot 10^3 \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2} = 451,48 \text{ kJ}$$

Príklad 7-3:

Vozík ťahá po horizontálnej rovine sila P , odklonená od horizontálnej roviny o uhol α , na dráhe dĺžky s . Určte prácu sily na danej dráhe (obr. 7-5).

Riešenie:

Sila, ktorá uvádza vozík do pohybu, je zložka sily P premietnutá do vodorovnej osi X ; $P_x = P \cdot \cos \alpha$. Táto sila vykonáva kladnú prácu, pretože pôsobí v smere pohybu vozíka.

Elementárna práca sily P_x na dráhe dx je daná výrazom

$$dA = P_x \cdot dx = P \cdot \cos \alpha \cdot dx$$

Celková práca na dráhe dĺžky s bude

$$A = \int_0^s P \cdot \cos \alpha \cdot dx = P \cdot \cos \alpha \cdot s$$

Ak sila $P = 0,25$ kN, dĺžka dráhy $s = 200$ m, uhol $\alpha = 32^\circ$, veľkosť vykonanej práce je daná

$$A = 0,25 \cdot 0,848 \cdot 200 = 42,40 \cdot 10^3 \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2} = 42,40 \text{ kJ}$$

Príklad 7-4:

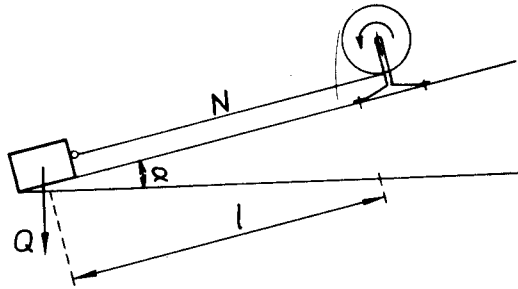
Dráha šikmého výtahu zvierá s horizontálnou rovinou uhol $\alpha = 50^\circ$ a má dĺžku $l = 30$ m. Na tejto dráhe dvíhame teleso tiaže $Q = 15,0$ kN. Určte veľkosť sily

v lane rovnobežnom s naklonenou rovinou a veľkosť vykonanej práce (obr. 7-6). Silu trenia neberieme do úvahy.

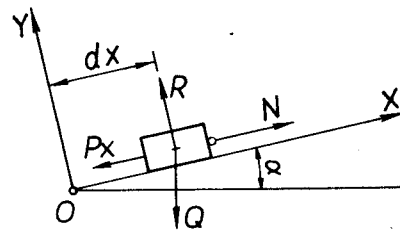
Riešenie:

Vykreslíme sily pôsobiace na bremeno v časovom okamihu (obr. 7-7). Súradnicovú os X stotožníme s naklonenou rovinou.

Na teleso pôsobí sila v lane S , ktorá pôsobí v smere osi X a v zmysle pohybu bremena po naklonenej rovine, sila tiaže telesa Q , pôsobiaca zvisle dolu, ktorej zložka v smere osi X je $P_x = Q \cdot \sin \alpha$, a zložka kolmá na naklonenú rovinu $R_y = Q \cdot \cos \alpha$. R_x je reakcia podložia.



Obr. 7.6.



Obr. 7.7.

Veľkosť sily v lane S určíme z podmienky rovnováhy síl v smere osi X , v smere naklonenej roviny

$$S - P_x = 0, \quad S = Q \cdot \sin \alpha$$

Práca, ktorá sa vykonáva pri zdvíhaní bremena tiaže Q , závisí od sily P_x . Práca tejto sily na dráhe l bude záporná, pretože sila P_x pôsobí proti pohybu bremena.

Elementárna práca sily P_x na dráhe dx je daná vzťahom

$$dA = -P_x \cdot dx$$

Celkovú prácu sily P_x na dráhe l vyjadruje vzťah

$$A = - \int_0^l P_x \cdot dx = - \int_0^l Q \cdot \sin \alpha \cdot dx = -Q \cdot \sin \alpha \cdot l$$

po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$A = -15,0 \cdot \sin 50^\circ \cdot 30 = -15,0 \cdot 0,766 \cdot 30 = -344,70 \text{ kJ}$$

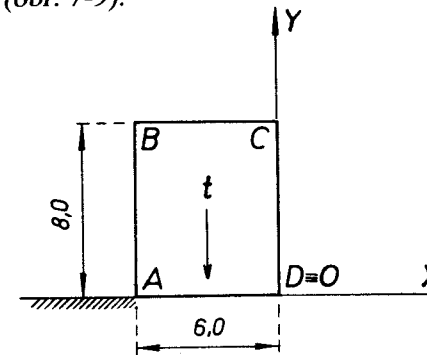
Veľkosť sily v lane $S = Q \cdot \sin 50^\circ = 15,0 \cdot 0,766 = 11,40 \text{ kN}$.

Príklad 7-5:

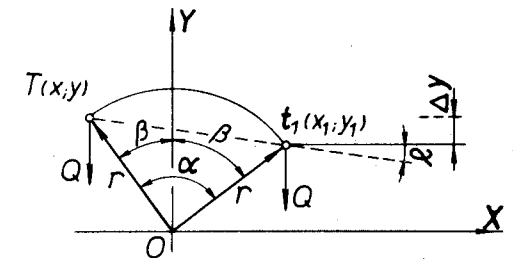
Homogénne teleso tvaru $ABCD$ s rozmermi $AB = 8,0 \text{ m}$, $AD = 6,0 \text{ m}$, tiaže $Q = 40 \text{ kN}$ máme prevrátiť okolo hrany $D \equiv O$. Určte prácu, ktorú treba vynaložiť na prevrátenie telesa (obr. 7-8).

Riešenie:

Ťažisko telesa pri prevrátení opisuje dráhu po kružnici so stredom v bode D . Ak bude začiatok súradnicového systému X, Y v bode D , má ťažisko t súradnice x, y . Po prevrátení telesa je konečná poloha ťažiska t_1 so súradnicami x_1, y_1 (obr. 7-9).



Obr. 7.8.



Obr. 7.9.

Spojnice bodov tt_1 je tetiva kružnice polomeru r , ktorú opisuje ťažisko telesa.

$$tt_1 = s = 2r \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

Uhol α je stredový uhol, ktorý vytvára dĺžka tetivy

$$\alpha = \beta_1 + \beta, \quad \text{tg } \beta = \frac{|x|}{|y|}, \quad \text{tg } \beta_1 = \frac{|x_1|}{|y_1|}$$

Prácu, ktorú musíme vynaložiť na prevrátenie telesa, udáva vzťah

$$A = Q \cdot s \cdot \sin \gamma \quad \text{alebo} \quad A = Q(y_1 - y)$$

kde γ je uhol, ktorý zvierá tetiva s vodorovnou priamkou.

Smernica priamky, spájajúca body tt_1 , je daná vzťahom

$$\text{tg } \gamma = y' = \frac{d}{dx} (kx + q) = k, \quad k = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

po dosadení číselných hodnôt $t(-3,4)$, $t_1(4,3)$, $r=5,0$ m dostaneme

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|x|}{|y|} = 0,75, \quad \beta = 36^\circ 54', \quad \alpha = 90^\circ$$

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{|x_1|}{|y_1|} = 1,33, \quad \beta_1 = 53^\circ 06',$$

$$s = 10 \cdot \sin 45^\circ = 7,071 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{y - y_1}{x - x_1} = -0,1428, \quad \gamma = -8^\circ$$

Práca potrebná na prevrhnutie telesa

$$A = Q \cdot s \cdot \sin \gamma = -40 \cdot 7,071 \cdot 0,139 = -39,3 \cdot 10^3 \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-1} = -39,30 \text{ kJ}$$

Príklad 7-6:

Uhlie z nákladnej lodi vykladá stroj, ktorého drapáková lyžica tiaže $Q = 2,0$ kN prenesie 10 kN uhlia. Za 12 hodín vyloží stroj 6,0 MN uhlia, pričom uhlie prenáša do výšky $h = 10$ m. Určte teoretickú účinnosť stroja.

Riešenie:

Užitočná práca, ktorú vykoná stroj pri jednom pracovnom cykle, je $A_1 = Q \cdot h$, kde Q je tiaž drapákovvej lyžice a uhlia, ktoré lyžica naberie. Na vyloženie 6,0 MN uhlia musí stroj urobiť 600 úkonov, teda celková práca stroja bude

$$A = 600 \cdot A_1 = 600 \cdot Q \cdot h = 600 (10 + 2) 10 = 72,0 \cdot 10^3 \text{ kJ}$$

Stroj vykoná prácu za 12 hodín, t. j.

$$t = 12 \cdot 3,6 \cdot 10^3 \text{ s}$$

$$t = 43,2 \cdot 10^3 \text{ s}$$

$$\text{Teoretický výkon stroja } N = \frac{A}{t} = \frac{72,0 \cdot 10^3}{43,2 \cdot 10^3} = 1,66 \text{ kW.}$$

Príklad 7-7:

Zistite spoločný výkon troch za sebou nasledujúcich vodopádov, z ktorých padá voda z výšok $h_1 = 12,0$ m, $h_2 = 13,0$ m, $h_3 = 15,0$ m. Stredný prietok vody v rieke je $75 \text{ m}^3/\text{s}$.

Riešenie:

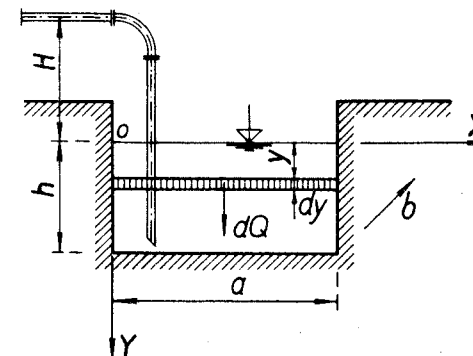
Výkon stredného prietoku vody na jednotku výšky $N_0 = 75,0 \cdot 1 = 75,0 \cdot 9,806 = 735,45 \text{ kW}$. Dráha padajúcej vody $h = h_1 + h_2 + h_3 = 40,0$ m. Výkon všetkých vodopádov bude

$$N = N_0 \cdot h = 735,45 \cdot 40 = 29,418 \cdot 10^3 \text{ kW} = 29,418 \text{ MW}$$

$$N = 29,418 \text{ MW}$$

Príklad 7-8:

Určte prácu potrebnú na vyčerpanie stavebnej jamy, ktorá má tvar hranola s pôdorysnou plochou $a \cdot b$, naplnenú vodou do výšky h . Voda sa čerpá do výšky H nad začiatočnou hladinou vody v stavebnej jame. Určte aj výkon čerpadla, ak sa voda vyčerpá za t hodín (obr. 7-10).



Obr. 7.10.

Riešenie:

Prekonávaním sily tiaže pri zdvíhaní vody sa vykonáva práca. Výška, do ktorej sa voda čerpá, je premenná. Vyznačme elementárnu hrúbku vody vo výške y od povrchu vody (obr. 7-10). Objem elementárnej časti je

$$dV = a \cdot b \cdot dy$$

Váha kvapaliny elementárnej časti

$$dQ = dV \cdot \gamma$$

kde γ je merná tiaž vody.

Elementárna časť sa pri čerpaní dvíha do výšky $H + y$ a elementárna práca je vyjadrená vzťahom

$$dA = dQ(H + h) = \gamma \cdot a \cdot b(H + h) dy$$

Celková práca potrebná na vyčerpanie vody zo stavebnej jamy

$$A = \int_0^h a \cdot b \cdot \gamma(H + h) dy = a \cdot b \cdot \gamma \left[H \cdot y + \frac{y^2}{2} \right]_0^h$$

$$A = \gamma \cdot a \cdot b \left[H \cdot h + \frac{1}{2}h^2 \right]$$

Výkon čerpadla

$$N = \frac{A}{t}$$

po dosadení číselných hodnôt $a = 6,0$ m, $b = 8,0$ m, $h = 5,0$ m, $\gamma = 9,806$ kN m⁻³ bude práca potrebná na vyčerpanie stavebnej jamy

$$A = 9,806 \cdot 6 \cdot 8 \left[2 \cdot 5 + \frac{5^2}{2} \right] = 9,806 \cdot 48 \cdot 22,5 = 10,590 48 \text{ kJ}$$

a výkon čerpadla za čas $t = 14,4 \cdot 10^3$ s

$$N = \frac{A}{t} = \frac{10,590 48 \cdot 10^3}{14,4 \cdot 10^3} = 0,735 \text{ kW}$$

Príklad 7-9:

Máme vyčerpať vodu z nádrže trojuholníkového tvaru dĺžky $l = 10$ m, a vypočítať prácu potrebnú na čerpanie vody (obr. 7-11). Čerpadlo, ktoré vodu prečerpáva, vyčerpá jamu za 4 hodiny. Vypočítajte výkon motora, ak účinnosť stroja je 75 %. Sklon stien je 1 : 1, výška hladiny $h = 5,0$ m a výška potrubia čerpaceho stroja je nad hladinou vo výške $H = 2,0$ m. Merná tiaž vody $\gamma = 9,806$ kN m⁻³.

Riešenie:

Elementárna časť vody hrúbky dy má objem závislý od poradnice y

$$dV_y = b_y \cdot l \cdot dy$$

tiaž vody $dQ = \gamma \cdot dV_y$, ktorú máme zdvihnúť do výšky $(H + y)$.

Elementárna práca bude

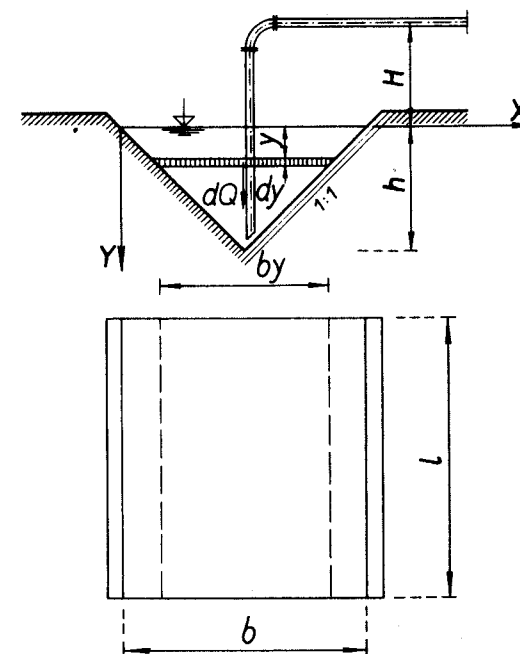
$$dA = dQ(H + y) = b_y \cdot l(H + y) dy \cdot \gamma$$

Závislosť zmeny šírky b , od výšky y je vyjadrená z úmery

$$b_y = b \frac{h - y}{h}$$

Celková práca je vyjadrená

$$A = \int_0^h \gamma \cdot b \cdot l \frac{h - y}{h} (H + y) dy = \frac{\gamma \cdot b \cdot l}{h} \int_0^h [H \cdot h - y(H - h) - y^2] dy$$



Obr. 7.11.

Po úprave

$$A = \gamma \cdot b \cdot l \cdot h \left(\frac{1}{2}H + \frac{1}{6}h \right), \quad b = 2h$$

Výkon čerpadla za čas t [s]

$$N = \frac{A}{t}$$

Ak účinnosť stroja je 75 % účinnosti vodného čerpadla, potom jeho motor musí mať výkon

$$N_m = \frac{N}{\eta}$$

kde η je účinnosť stroja.

$$\text{Číselne: } A = 9,806 \cdot 10^3 \cdot 5 \left(\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 5 \right) = 8,989 \cdot 10^3 \text{ kJ}$$

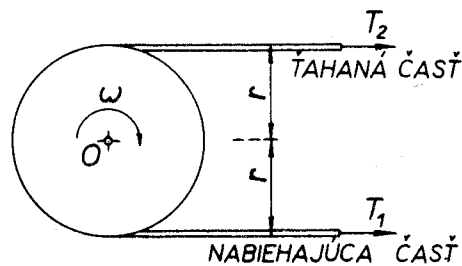
$$N = \frac{8,989 \cdot 10^3}{4 \cdot 3,6 \cdot 10^3} = 0,624 \text{ kW}$$

Výkon motora N_m

$$N_m = \frac{0,624}{0,75} = 0,832 \text{ kW}$$

Príklad 7-10:

Pomocou remenice sa prenáša výkon 10 kW. Polomer hriadeľa je $r = 0,5$ m, počet otáčok hriadeľa $n = 150$ ot/min. Určte veľkosť napätia v remeni, ak je v ťahanej časti remenice napätie dvakrát väčšie ako v nabiehajúcej remenici (obr. 7-12).



Obr. 7.12.

Riešenie:

Sily pôsobiace v remenici vyvolávajú moment, ktorý ku stredu otáčania O dáva veľkosť:

$$M_A = T_2 \cdot r - T_1 \cdot r = r(2T_1 - T_1) = T_1 \cdot r$$

Pretože napätie v nabiehajúcej časti je dvakrát väčšie, platí, že $T_2 = 2T_1$. Tento moment síl v remenici musí byť v rovnováhe s momentom, ktorý vyvodzuje motor

otáčajúci hriadeľ. Ak motor otočí hriadeľom n -otáčok za jednotku času, bude práca momentu M_m otáčajúceho motora pri n -otáčkach udávať jeho výkon N .

$$N = M_m \cdot n \cdot 2\pi = M_m \cdot \omega$$

Ak $N = 10$ kW

$$n = 150 \text{ ot/min} = 2,5 \text{ ot/s}$$

je moment motora

$$M_m = \frac{N}{2n \cdot \pi} = \frac{10,0}{2 \cdot 2,5 \cdot 3,14} = 636,943 \text{ Nm}$$

Tento moment sa musí rovnať momentu síl v remenici k bodu otáčania A, z čoho môžeme určiť, pri polomere hriadeľa $r = 0,5$ m, veľkosť sily v nabiehajúcej remenici.

$$M_A = M_m, \quad T_1 \cdot r = 636,943 \text{ Nm}$$

$$T_1 = \frac{636,943}{0,5} = 1,274 \text{ kN}$$

Veľkosť sily v ťahanej časti remenice určíme zo vzťahu

$$T_2 = 2T_1 = 2 \cdot 1,274 = 2,548 \text{ kN}$$

VIII. PRINCÍP VIRTUÁLNEJ PRÁCE

Princíp virtuálnej práce je druhý základný princíp, na ktorom je vybudovaná mechanika. Zaviedol ho Lagrange a je odvodený zo zákona o zachovaní energie. Princíp virtuálnej práce, nazývaný tiež princíp možných premiestení, je všeobecnejší, pretože ho možno použiť jednak na skúmanie dokonale tuhých telies, ktorými sa zaoberáme v našich úlohách, a jednak pre pružné telesá. Pri pružných telesách sa do celkovej práce započítava práca vonkajších a vnútorných síl na pružných deformáciách.

Pod virtuálnou prácou rozumieme prácu sily, dvojice síl (momentu) na nekonečne malom posune, respektíve pootočení, ktoré je schopné teleso vykonať vzhľadom na svoje väzby, respektíve stupne voľnosti. Výhodou tohto princípu je, že sily vo väzbách nemôžu vykonávať posuny ani pootočenia, a preto nekonajú ani virtuálnu prácu.

Princíp virtuálnej práce je vhodný na zisťovanie podmienok rovnováhy tuhých telies, hmotných bodov a ich sústav staticky i tvarove určitých aj tvarove neurčitých, pohyblivých sústav.

Všeobecne sa práca sústavy síl, ktoré pôsobia na teleso alebo sústavu telies a hmotných bodov, vyjadruje vo vektorovom tvare (skalárny súčin vektorov)

$$A = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \cdot \delta \mathbf{p}_i + \sum_{i=1}^m M_i \cdot \delta \omega_i$$

a v skalárnom tvare v rovine

$$A = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \delta p_i \cdot \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^m M_j \cdot \delta \omega_j$$

kde α_i je uhol medzi vektormi \mathbf{P}_i a $\delta \mathbf{p}_i$,

ω_j — virtuálne pootočenie dosky sústavy umožnené väzbami,

δp_i — virtuálny posun pôsobiska sily \mathbf{P}_i umožnený väzbami.

Virtuálne posuny pôsobísk síl δp môžeme obyčajne jednoducho vyjadriť z geometrických vzťahov sústavy, pomocou virtuálneho potočenia $\delta \omega$, keď nájdeme bod, okolo ktorého sa doska potočila.

Potom $\delta p = p \cdot \delta \omega$, kde p je vzdialenosť pôsobiska sily P od bodu otáčania. V takom prípade rovnica súčtu virtuálnych prác nadobudne tvar

$$A = \delta \omega \left(\sum_{i=1}^n P_i \cdot p_i \cdot \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^m M_i \right) = 0$$

Všeobecný postup riešenia úloh použitím princípu virtuálnej práce

1. Určenie stupňov voľnosti danej sústavy alebo telesa na zistenie možnosti virtuálnych posunov, respektíve pootočení. Stupne voľnosti určíme podľa toho, či ide o rovinu alebo priestorovú sústavu zo vzťahov

a) pre rovinu $S = 3n + 2m - (v_1 + 2v_2 + 3v_3)$

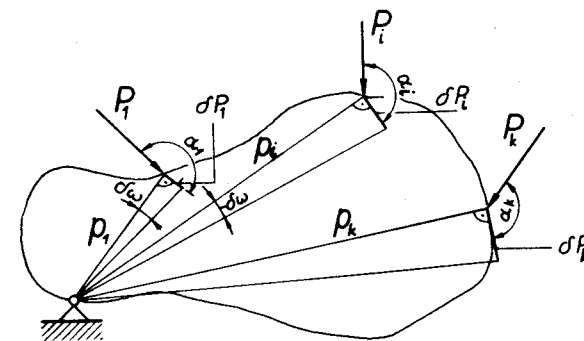
b) pre priestor $S = 6n + 3m - (v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4 + 5v_5 + 6v_6)$

kde n je počet tuhých telies alebo dosák v sústave,

m — počet hmotných bodov v sústave,

v_i — počet väzieb v sústave rušiacich i stupňov voľnosti, respektíve zabraňujúcich i -pohybom zo šiestich možných v priestore (z troch v rovine).

Keď S sa rovná nule, potom sústava je staticky určite podopretá a nemôže vykonávať nijaký, ani virtuálny pohyb. V takýchto prípadoch musíme uvoľniť potrebný stupeň voľnosti (väzbu), aby sme silu vo väzbe mohli vypočítať.



Obr. 8.

Keď S je väčšie ako nula, potom má sústava stupne voľnosti a môžeme jej priamo udeliť virtuálne pootočenie.

Keď S je menšie ako nula, sústava je staticky neurčite podopretá a musíme ju riešiť iným postupom.

2. Pri staticky určitých sústavách odstránime potrebnú väzbu a nahradíme jej účinok na sústavu silovým účinkom podľa zásad uvedených v statike.

3. Pôsobisku sily udelíme virtuálny posun alebo pootočenie podľa možnosti, ktoré sústave dáva stupeň voľnosti. Virtuálne pootočenie nastáva okolo okamžitého pólu otáčania, ktorým je obyčajne skutočná kĺbová väzba, alebo myslený kĺb ako priesečník reakcií vo zvyšujúcich dvoch väzbách — kyvných prútoch. Podľa

uvoľnenej väzby môže mať teleso v rovine až tri okamžité póly otáčania. Keď je okamžitý pól otáčania v nekonečnu (∞), potom sa teleso — doska — posunie kolmo na smery reakcií. Pri zložených sústavách je hľadanie okamžitých pólov otáčania zložitejšie a v niektorých prípadoch ukážeme, že sa zaobídeme aj bez nich. Keď postupujeme pomocou nich, musíme hľadať aj relatívne póly otáčania medzi jednotlivými doskami. Keď sú dosky spojené kĺbovou väzbou, je táto väzba priamo relatívnym kĺbom otáčania medzi nimi, v opačnom prípade platí to, čo o okamžitom myslenom póle otáčania. Relatívne póly otáčania medzi dvoma telesami — doskami ležia vždy na spojnici okamžitých pólov oboch telies. Určením pólov, relatívnych i okamžitých, môžeme ľahko vykresliť deformáciu sústavy, ktorú umožňujú vnútorné i vonkajšie väzby bez ohľadu na zaťaženie.

4. Z daných geometrických rozmerov sústavy a vyznačenej virtuálnej deformácie určíme závislosti medzi posunmi jednotlivých síl na posune, alebo pootočení jedného telesa zo sústavy. Závislosť medzi pootočeniami jednotlivých telies — dosák sústavy získame buď pomocou okamžitých a relatívnych pólov otáčania, alebo pomocou virtuálnych prác nulových silových sústav vznikajúcich vo vnútorných väzbách. V prvom prípade vychýlime relatívne póly a tie nám určia vzájomnosť pootočenia telies — dosák, z čoho ľahko určíme závislosti medzi pootočeniami jednotlivých dosák.

5. Zostavenie podmienkových rovníc vyjadrujúcich prácu rovnovážnej silovej sústavy, ktorá sa musí v každom prípade rovnať nule. Vypočítané hodnoty posunov dosadíme do všeobecnej rovnice

$$\sum_{i=1}^n P_i \cdot \delta p_i \cdot \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j \cdot \delta \omega_j = 0$$

alebo

$$\delta \omega_k \left(\sum_{i=1}^n P_i \cdot p_i \cdot \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^m M_j \right) = 0$$

6. Riešenie rovnice. Rovnica pri jednom stupni voľnosti predstavuje jednu rovnicu s jednou neznámou. Pri viacerých stupňoch voľnosti sa rovnica rozpadne na sústavu n -rovníc s n -neznámymi, kde n predstavuje počet stupňov voľnosti.

Príklad 8-1:

Dva priame prúty navzájom kĺbovo spojené (d) sú uložené na troch podperách (a, b, c) a zaťažené sústavou bremien P_1 až P_4 podľa obrázka. Určte veľkosti síl vo väzbách, keď účinok vlastnej tiaže nosníka neberieme do úvahy.

1. Určenie stupňov voľnosti:

Konštrukcia sa skladá z dvoch prútov — dosák — spojených kĺbom a navonok podopretých dvoma posuvnými a jednou kĺbovou podperou. Môžeme ju pokla-

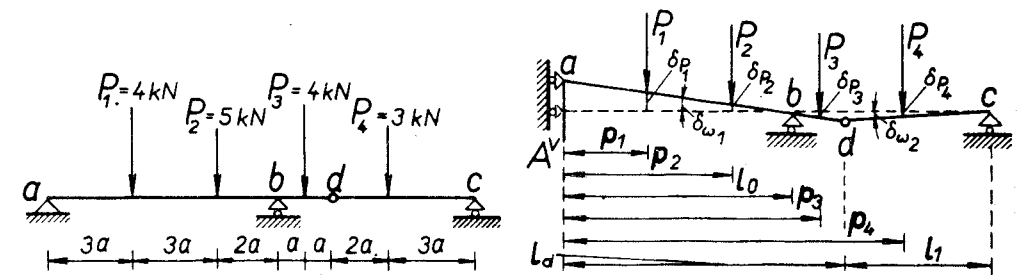
dať za rovinnú sústavu. Potom $n=2$, $m=0$, $v_1=2$, $v_2=2$ a $S=2 \times 3 + 0 \times 2 - (2 \times 1 + 2 \times 2) = 0$.

Sústava je staticky určitá. Na určenie jednotlivých reakcií musíme väzby uvoľňovať postupne.

A. Výpočet reakcie A^v

2. Kĺbovú podperu v bode a nahradíme zvisle posuvnou podperou a namiesto uvoľnenej väzby necháme na sústavu pôsobiť silu A^v .

3. Uvoľnením väzby má sústava jeden stupeň voľnosti. Prvý prút sa môže pootočiť okolo svojho okamžitého pólu otáčania, ktorým je priesečník reakcií neuvoľnených väzieb A^H a B , t. j. bod b . Pootočenie označíme $\delta \omega_1$.



Obr. 8.1a,b.

Vzhľadom na kĺbové spojenie medzi oboma prútmi nastane v ňom (d) vzájomné natočenie dosák. Druhý prút bude mať svoj okamžitý pól otáčania v priesečníku neuvoľnených väzieb $A^H = D^H$ a C , t. j. v bode c . Toto pootočenie označíme $\delta \omega_2$.

4. Určenie posunov pôsobísk jednotlivých síl.

Pôsobiská síl na prvom prúte pootočenom o $\delta \omega_1$ sa posunú ako každý bod p o $\delta p = (l_0 - p) \delta \omega_1$ na druhom prúte $\delta p = (l_d + l_1 - p) \delta \omega_2$. Závislosť medzi $\delta \omega_1$ a $\delta \omega_2$ môžeme určiť z posunu bodu d (relatívneho pólu).

$$\delta_d = (l_0 - l_d) \delta \omega_1 = l_1 \cdot \delta \omega_2$$

čiže

$$\delta \omega_2 = \frac{l_0 - l_d}{l_1} \delta \omega_1$$

potom

$$\begin{aligned} \delta_{A^v} &= l_0 \cdot \delta \omega_1, \quad \delta_{p_1} = (l_0 - p_1) \delta \omega_1, \\ \delta_{p_2} &= (l_0 - p_2) \delta \omega_1, \quad \delta_{p_3} = (l_0 - p_3) \delta \omega_1, \end{aligned}$$

$$\delta_{P_4} = (l_d + l_1 - p_4) \frac{l_0 - l_d}{l_1} \delta\omega_1$$

$$\alpha_{P_1} = \dots = \alpha_{P_4} = 180^\circ, \quad \alpha_{A^V} = 0^\circ, \quad \alpha_{P_4} = 0^\circ$$

5. Zostavenie podmienkovej rovnice

$$A = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \delta p_i \cos \alpha_i$$

$$\begin{aligned} A = & A^V \cdot \cos 0^\circ \cdot l_0 \cdot \delta\omega_1 + P_1 \cdot \cos 180^\circ (l_0 - p_1) \delta\omega_1 + \\ & + P_2 \cdot \cos 180^\circ (l_0 - p_2) \delta\omega_1 + \\ & + P_3 \cdot \cos 180^\circ (l_0 - p_3) \delta\omega_1 + \\ & + P_4 \cdot \cos 180^\circ (l_d + l_1 - p_4) \frac{l_0 - l_d}{l_1} \delta\omega_1 = 0 \end{aligned}$$

po úprave

$$l_0 A^V - (l_0 - p_1) P_1 - (l_0 - p_2) P_2 - (l_0 - p_3) P_3 - (l_d + l_1 - p_4) \frac{l_0 - l_d}{l_1} P_4 = 0$$

po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$8a A^V - 22,4a = 0$$

6. Riešenie rovnice

$$A^V = 2,8 \text{ kN}$$

B. Výpočet reakcie A^H

2. Kĺbovú podperu v bode a nahradíme vodorovne posuvnou podperou a namiesto uvoľnenej väzby necháme pôsobiť silu A^H :

3. Uvoľnením uvedenej väzby dostáva sústava jeden stupeň voľnosti, ktorým je možnosť vodorovného posunu, lebo priesečník neuvolnených väzieb A a B , t. j.

okamžitý pól otáčania, je v nekonečnu; platí to aj pre druhú dosku \overline{dc} .

4. Výpočet posunov síl

Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že posuny všetkých síl budú rovnaké, čiže

$$\delta_{A^H} = \delta_{P_1} = \delta_{P_2} = \delta_{P_3} = \delta_{P_4}, \quad \alpha_{A^H} = 0^\circ, \quad \alpha_{P_i} = 90^\circ$$

5. Zostavenie podmienkovej rovnice

$$\begin{aligned} A = & A^H \cdot \delta_{A^H} \cdot \cos 0^\circ + P_1 \cdot \delta_{A^H} \cdot \cos 90^\circ + \\ & + P_2 \cdot \delta_{A^H} \cdot \cos 90^\circ + P_3 \cdot \delta_{A^H} \cdot \cos 90^\circ + P_4 \cdot \delta_{A^H} \cdot \cos 90^\circ = 0 \end{aligned}$$

po úprave dostaneme

$$A^H \delta_{A^H} = 0.$$

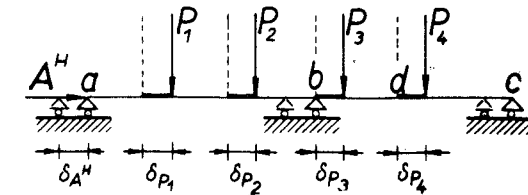
6. Riešenie rovnice

Keďže $\delta_{A^H} \neq 0$, potom $A^H = 0$

C. Výpočet reakcie B

2. Posuvnú podperu b odstránime a jej účinok na sústavu nahradíme zvislou silou B .

3. Uvoľnením tejto väzby dostáva sústava jeden stupeň voľnosti, reprezentovaný možnosťou pootočenia prvej dosky o $\delta\omega_1$. Okamžitý pól otáčania prvého



Obr. 8.1c

prúta je priesečník síl v neuvolnených väzbách A^V a A^H , t. j. bod a . Druhý prút sa vplyvom kĺbu d pootočí okolo svojho okamžitého pólu otáčania o uhol $\delta\omega_2$. Okamžitým pólom otáčania druhého prúta je priesečník síl z neuvolnených väzieb A^H s C , t. j. bod c . Priesečník A^V s C , ktorý je v nekonečnu, nemôžeme použiť.

4. Výpočet posunov síl

Každý bod prvého prúta vykoná zvislý posun $\delta p_i = p_i \cdot \delta\omega_1$, a preto $\delta_{P_1} = p_1 \cdot \delta\omega_1$, $\delta_{P_2} = p_2 \cdot \delta\omega_2$,

$$\delta_{P_3} = p_3 \cdot \delta\omega_1, \quad \delta_{P_4} = (l_d + l_1 - p_4) \delta\omega_2, \quad \delta_B = l_0 \cdot \delta\omega_1$$

Hodnotu $\delta\omega_2$ v závislosti od $\delta\omega_1$ určíme z posunu bodu d

$$\delta_d = l_d \cdot \delta\omega_1 = l_1 \cdot \delta\omega_2,$$

odtiaľ

$$\delta\omega_2 = \frac{l_d}{l_1} \delta\omega_1$$

Sily s deformáciami zvierajú

$$\alpha_{P_1} = \alpha_{P_2} = \alpha_{P_3} = \alpha_{P_4} = 180^\circ, \quad \alpha_B = 0^\circ$$

5. Zostavenie podmienkovej rovnice

$$A = P_1 \cdot p_1 \cdot \delta\omega_1 \cdot \cos 180^\circ + P_2 \cdot p_2 \cdot \delta\omega_1 \cdot \cos 180^\circ + \\ + P_3 \cdot p_3 \cdot \cos 180^\circ \cdot \delta\omega_1 + \\ + P_4(l_d + l_1 - p_4) \frac{l_d}{l_1} \delta\omega_1 \cdot \cos 180^\circ + \\ + B \cdot l_0 \cdot \delta\omega_1 \cdot \cos 0^\circ = 0$$

po úprave a po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$8a \cdot B - 96a = 0$$

6. Riešenie rovnice

$$B = 12 \text{ kN}$$

D. Výpočet reakcie C

2. Odstránime posuvnú podperu c a jej účinok nahradíme zvislou silou C.

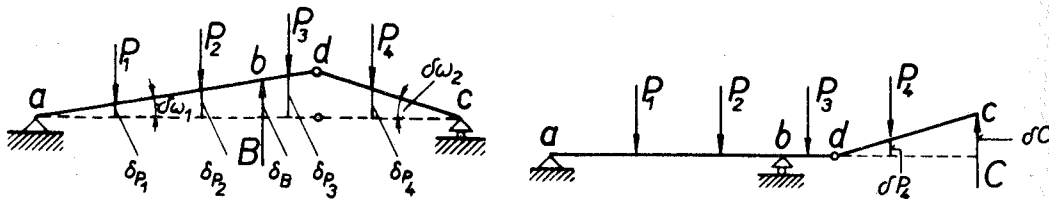
3. Uvoľnením jednej väzby získala sústava jeden stupeň voľnosti, ktorý umožňuje druhému prútu pootáčanie okolo okamžitého pólu otáčania, ktorým je v tomto prípade bod d. Je priesečníkom síl z neuvoľnenej vnútornej väzby D^v a D^h. V dôsledku toho, že 1. prút zostáva upevnený väzbami, ktoré rušia všetky jeho stupne voľnosti, nemení v tomto prípade svoju polohu, a preto $\delta\omega_1 = 0$.

4. Určenie posunov síl

$$\delta p_1 = \delta p_2 = \delta p_3 = 0, \quad \alpha_{p_{1-3}} = 180^\circ, \\ \delta p_4 = (p_4 - l_d) \delta\omega_2, \quad \delta c = l_1 \cdot \delta\omega_2, \\ \alpha_{p_4} = 180^\circ \quad \alpha_c = 0^\circ$$

5. Zostavenie podmienkovej rovnice

$$A = P_4(p_4 - l_d) \delta\omega_2 \cdot \cos 180^\circ + C \cdot l_1 \cdot \delta\omega_2 \cdot \cos 0^\circ = 0$$



Obr. 8.1d,e

po úprave dostaneme

$$-6a + C \cdot 5a = 0$$

6. Riešenie rovnice

$$C = 1,2 \text{ kN}$$

Kontrolu výpočtu môžeme urobiť ako súčet zvislých síl pre celú sústavu.

Príklad 8-2:

Na zadanej sústave zaťaženej dvoma silami P₁ a P₂ určte veľkosti síl vo vnútorných väzbách (kyvných prútoch) označených písmenami D a H. Tvar, rozmery sústavy, ako aj zaťaženie sú vyznačené v obrázku.

1. Určenie stupňov voľnosti:

Sústava sa skladá z 5 hmotných bočov navzájom pospájaných 7 kyvnými prútmi a navonok jednou kĺbovou a posuvnou podperou. Potom $n = 0$, $m = 5$, $v_1 = (7 + 1) = 8$, $v_2 = 1$, $v_3 = 0$ a $S = 0 \times 3 + 5 \times 2 - (8 \times 1 + 1 \times 2) = 0$.

Sústava je staticky určitá, preto na určenie veľkosti vnútorných síl H a D musíme uvoľniť potrebné väzby.

A. Výpočet sily v prúte H

2. Zo sústavy vyberieme prút H a jeho účinok na zvyšujúce časti nahradíme v bode d silou H_d a v bode e silou H_e. Sily H_d a H_e musia spĺňať podmienku rovnováhy v smere osi prúta $H_d - H_e = 0$. Účinok vonkajších väzieb nena-hradzujeme.

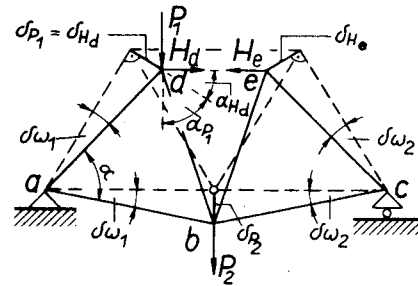
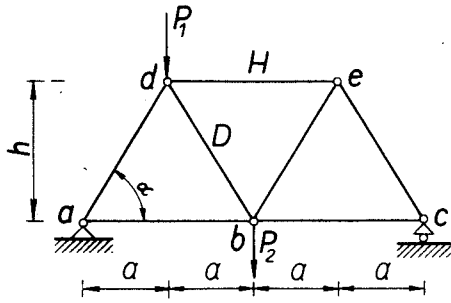
3. Vybratím prúta H sa sústava rozdelila na dve časti, ktoré tvoria tuhé dosky. Prvá doska, ktorú vytvárajú body abd je podopretá len kĺbom, ktorý je v tomto prípade tiež okamžitým pólom otáčania. Druhá doska bce je o prvú kĺbove pripojená a podopretá v bode c posuvnou podperou. Jej okamžitým pólom otáčania je priesečník síl z neuvoľnených väzieb, v bode b a c. (Doska a, b, d s kĺbmi a, b je podperou dosky b, c, e ako kyvný prút. Pootočením prvej dosky o $\delta\omega_1$ vznikne pri druhej doske pootočením $\delta\omega_2$. Bod b je relatívnym pólom otáčania medzi doskami a jeho posun môžeme vypočítať z pootočenia oboch dosiek.

4. Výpočet posunov pôsobísk síl a uhlov

$$\delta_{H_d} = \delta p_1 = \delta\omega_1 \cdot \sqrt{h^2 + a^2}$$

$$\delta p_2 = 2a \cdot \delta\omega_1 = 2a \cdot \delta\omega_2$$

$$\delta_{H_e} = \delta\omega_2 \cdot \sqrt{h^2 + a^2}$$



Obr. 8-2a,b,

(posuny sú kolmé na pôvodné polohy prútov) z δP_2 vidieť, že $\delta \omega_1 = \delta \omega_2$

$$\alpha_{H_d} = (90^\circ - \alpha), \quad \alpha_{P_1} = \alpha, \quad \alpha_{P_2} = 0^\circ, \quad \alpha_{H_e} = 90^\circ - \alpha,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{a}, \quad \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{h^2 + a^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}}$$

5. Zostavenie podmienkovej rovnice

$$A = P_1 \cdot \delta P_1 \cdot \cos \alpha + P_2 \cdot \delta P_2 \cdot \cos 0^\circ + H_d \cdot \delta H_d \cdot \cos (90^\circ - \alpha) + H_e \cdot \delta H_e \cdot \cos (90^\circ - \alpha) = 0$$

po úprave

$$P_1 \cdot a + P_2 \cdot 2a + 2H_d \cdot h = 0$$

6. Riešenie rovnice

$$H_d = H_e = \frac{-a}{2h} (P_1 + 2P_2)$$

B. Výpočet sily D

2. Uvoľníme väzbu D a jej účinok na sústavu nahradíme dvoma silami smeru osi prúta D v bodoch d (D_d) a b (D_b), ktoré musia spĺňať podmienku $D_d - D_b = 0$.

3. Uvoľnením väzby D sa sústava rozdelí na jednu dosku bce a dva hmotné body a a d , z ktorých a je pevný a d pohyblivý. Takto sústava získala jeden stupeň voľnosti, ktorý spočíva v tom, že body d a b sa môžu k sebe priblížiť. Vzájomným priblížením vyvolajú pootočenie kyvného prúta ab o uhol $\delta \omega_1$ a prúta ad o $\delta \omega_3$. Vyvolané pootočenie dosky bce označíme $\delta \omega_2$.

4. Výpočet posunov pôsobísk síl a uhlov

Posuny bodov d a b sú kolmé na pôvodné neposunuté osi prútov ad a ab .

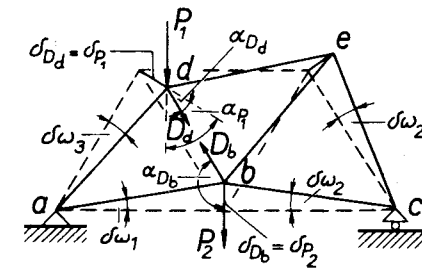
Preto $\delta_{D_d} = \delta_{P_1} = \delta \omega_3 \sqrt{h^2 + a^2}$

$$\delta_{D_b} = \delta_{P_2} = 2a \cdot \delta \omega_1 = 2a \cdot \delta \omega_2$$

odtiaľ

$$\delta \omega_1 = \delta \omega_2$$

$$\alpha_{D_d} = 2\alpha - 90^\circ, \quad \alpha_{P_1} = \alpha, \quad \alpha_{D_b} = 90^\circ - \alpha, \quad \alpha_{P_2} = 180^\circ$$



Obr. 8.2c

Zostáva nám ešte určiť vzťah medzi $\delta \omega_1$ a $\delta \omega_3$. Pretože platí $D_d - D_b = 0$, musí platiť

$$D_d \cdot \delta_{D_d} \cdot \cos \alpha_{D_d} - D_b \cdot \delta_{D_b} \cdot \cos \alpha_{D_b} = 0$$

odtiaľ po dosadení za $\cos (2\alpha - 90^\circ) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

$$\delta \omega_1 = -\delta \omega_3$$

5. Zostavenie podmienkovej rovnice

$$A = P_1 \cdot \delta \omega_1 \sqrt{h^2 + a^2} \cdot \cos \alpha + P_2 \cdot \delta \omega_1 \cdot 2a \cdot \cos 180^\circ + D_d \cdot \delta \omega_1 \sqrt{h^2 + a^2} \cos (2\alpha - 90^\circ) + D_b \cdot \delta \omega_1 \cdot 2a \cdot \cos (90^\circ - \alpha) = 0$$

po dosadení za $\cos(2\alpha - 90^\circ)$ a $D_a = D_b$ dostaneme

$$P_1 - 2P_2 + 4D_b \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}} = 0$$

6. Riešenie rovnice

$$D_b = \frac{1}{4h} (2P_2 - P_1) \sqrt{h^2 + a^2}$$

Príklad 8-3:

Tri prúty vzájomne medzi sebou kĺbovo spojené sú na jednom konci kĺbovo zavesené a na druhom udržiavané v rovnováhe vodorovnou silou $P = 500 \text{ N}$. Vzdialenosť kĺbov prvého prúta $l_1 = 50 \text{ cm}$, druhého prúta $l_2 = 2l_1$, a tretieho prúta $l_3 = 3l_1$. Tiaž každého prúta $q = 50 \text{ N/m}$. Určte uhly, ktoré jednotlivé prúty zvierajú so zvislým smerom. Zistite vplyv dĺžky prútov, keď dĺžka je o hodnotu $a = 0,2l_1$ väčšia ako vzdialenosť kĺbov.

1. Určenie stupňov voľnosti: Systava sa skladá z troch dosák vzájomne spojených dvoma kĺbmi ako vnútornými väzbami a navonok jedným kĺbom. Potom $n = 3$, $m = 0$, $v_1 = v_3 = 0$, $v_2 = 3$ a $S = 3 \times 3 + 0 \times 2 - (3 \times 2) = 3$.

Tri stupne voľnosti sústavy reprezentuje možnosť pootáčania každého prúta.

2. V tejto sústave nemusíme vzhľadom na stupne voľnosti uvoľňovať nijakú väzbu.

3. V sústave kĺb a je okamžitým kĺbom otáčania prvého prúta. Kĺb b je relatívnym kĺbom otáčania medzi prvým a druhým prútom a súčasne okamžitým pólom druhého prúta. Kĺb c je relatívnym kĺbom medzi druhým a tretím prútom a okamžitým pólom pre tretí prút. Deformáciu sústavy vzhľadom na tri stupne voľnosti budeme uskutočňovať postupne po jednotlivých prútoch. Najprv udelíme pootočenie 1. prútu okolo bodu a . Rovnobežne s posunom bodu b — konca prvého prúta posunieme aj ostatné kĺby, t. j. c a d . Potom udelíme pootočenie druhému prútu okolo posunutého bodu b . S posunutím druhého konca c potom posunieme aj kĺb d . Nakoniec pootočíme posledný prút okolo posunutého bodu c .

4. Výpočet posunov pôsobísk síl a uhlov

$$\delta_{O_1} = 0,5l_1 \delta\varphi_1, \quad \alpha_{O_1} = 90^\circ + \varphi_1$$

$$\delta_{O_2} = \delta_{O_2}^1 + \delta_{O_2}^2, \quad \delta_{O_2}^1 = l_1 \cdot \delta\varphi_1, \quad \alpha_{O_2}^1 = 90^\circ + \varphi_1$$

$$\delta_{O_2}^2 = 0,5l_2 \cdot \delta\varphi_2, \quad \alpha_{O_2}^2 = 90^\circ + \varphi_2$$

$$\delta_{O_3} = \delta_{O_3}^1 + \delta_{O_3}^2 + \delta_{O_3}^3, \quad \delta_{O_3}^1 = l_1 \cdot \delta\varphi_1, \quad \alpha_{O_3}^1 = 90^\circ + \varphi_1$$

$$\delta_{O_3}^2 = l_2 \cdot \delta\varphi_2, \quad \alpha_{O_3}^2 = 90^\circ + \varphi_2$$

$$\delta_{O_3}^3 = 0,5l_3 \cdot \delta\varphi_3, \quad \alpha_{O_3}^3 = 90^\circ + \varphi_3$$

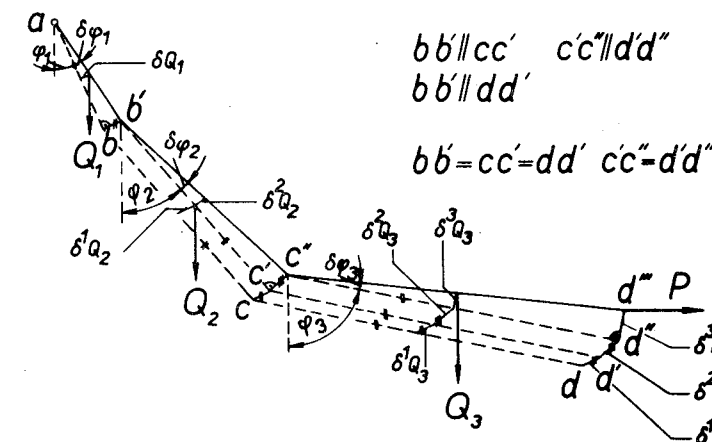
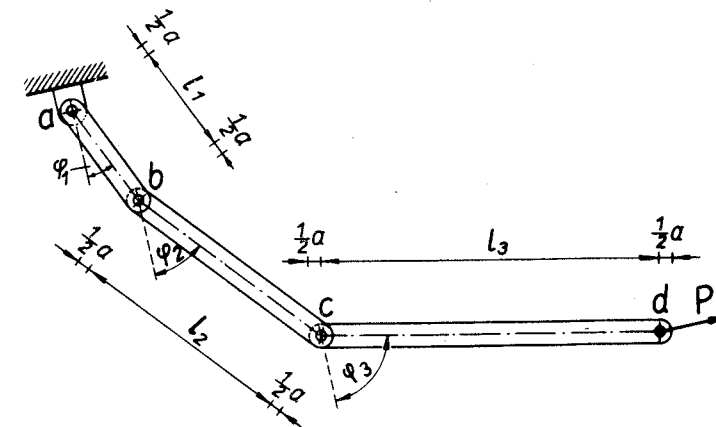
$$\delta_P = \delta_P^1 + \delta_P^2 + \delta_P^3, \quad \delta_P^1 = l_1 \cdot \delta\varphi_1, \quad \alpha_P^1 = \varphi_1$$

$$\delta_P^2 = l_2 \cdot \delta\varphi_2, \quad \alpha_P^2 = \varphi_2$$

$$\delta_P^3 = l_3 \cdot \delta\varphi_3, \quad \alpha_P^3 = \varphi_3$$

5. Zostavenie podmienkovej rovnice

$$A = Q_1 \cdot \delta_{O_1} \cdot \cos \alpha_{O_1}^1 + Q_2 (\delta_{O_2}^1 \cdot \cos \alpha_{O_2}^1 + \delta_{O_2}^2 \cdot \cos \alpha_{O_2}^2) + \\ + Q_3 (\delta_{O_3}^1 \cdot \cos \alpha_{O_3}^1 + \delta_{O_3}^2 \cdot \cos \alpha_{O_3}^2 + \delta_{O_3}^3 \cdot \cos \alpha_{O_3}^3) + \\ + P (\delta_P^1 \cdot \cos \alpha_P^1 + \delta_P^2 \cdot \cos \alpha_P^2 + \delta_P^3 \cdot \cos \alpha_P^3) = 0$$



Obr. 8.3a,b.

Po dosadení a usporiadaní výrazov podľa $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$ a $\delta\varphi_3$ dostaneme rovnicu

$$\begin{aligned} & (-Q_1 \cdot 0,5l_1 \cdot \sin \varphi_1 - Q_2 \cdot l_1 \cdot \sin \varphi_1 - Q_3 \cdot l_1 \cdot \sin \varphi_1 + \\ & + P \cdot l_1 \cdot \cos \varphi_1) \delta\varphi_1 + (-Q_2 \cdot 0,5l_2 \cdot \sin \varphi_2 - \\ & - Q_3 \cdot l_2 \cdot \sin \varphi_2 + P \cdot l_2 \cdot \cos \varphi_2) \delta\varphi_2 + \\ & + (-Q_3 \cdot 0,5l_3 \cdot \sin \varphi_3 + P \cdot l_3 \cdot \cos \varphi_3) \delta\varphi_3 = 0 \end{aligned}$$

6. Riešenie rovnice: Aby sa rovnica splnila, členy v zátvorkách — súčinitele pri pootočeníach prútov — musia sa rovnať nule a z jednej rovnice dostaneme tri, z ktorých môžeme určiť tri neznáme uhly.

$$l_1 \cdot \sin \varphi_1 (0,5Q_1 + Q_2 + Q_3) + P \cdot l_1 \cdot \cos \varphi_1 = 0 \quad (1)$$

$$l_2 \cdot \sin \varphi_2 (0,5Q_2 + Q_3) + P \cdot l_2 \cdot \cos \varphi_2 = 0 \quad (2)$$

$$l_3 \cdot \sin \varphi_3 (0,5Q_3) + P \cdot l_3 \cdot \cos \varphi_3 = 0 \quad (3)$$

Po vydelení rovníc $l_i \cdot \cos \varphi_i$, vyčlenení $\operatorname{tg} \varphi_i$ a dosadení číselných hodnôt určíme hodnoty φ_1 , φ_2 a φ_3 .

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{2P}{q(11l_1 + 5a)} = 3,636 \quad (3,0769), \quad \varphi_1 = 74^\circ 37' 25'' \quad (71^\circ 59' 44'')$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{2P}{q(8l_1 + 3a)} = 5,0000 \quad (4,3478), \quad \varphi_2 = 78^\circ 41' 14'' \quad (77^\circ 02' 46'')$$

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{2P}{q(3l_1 + a)} = 13,3333 \quad (11,7647), \quad \varphi_3 = 85^\circ 42' 32'' \quad (85^\circ 08' 30'')$$

Výsledky v zátvorke sú pre $0,5 a = 0,2l_1$; bez zátvorke pre $a = 0$.

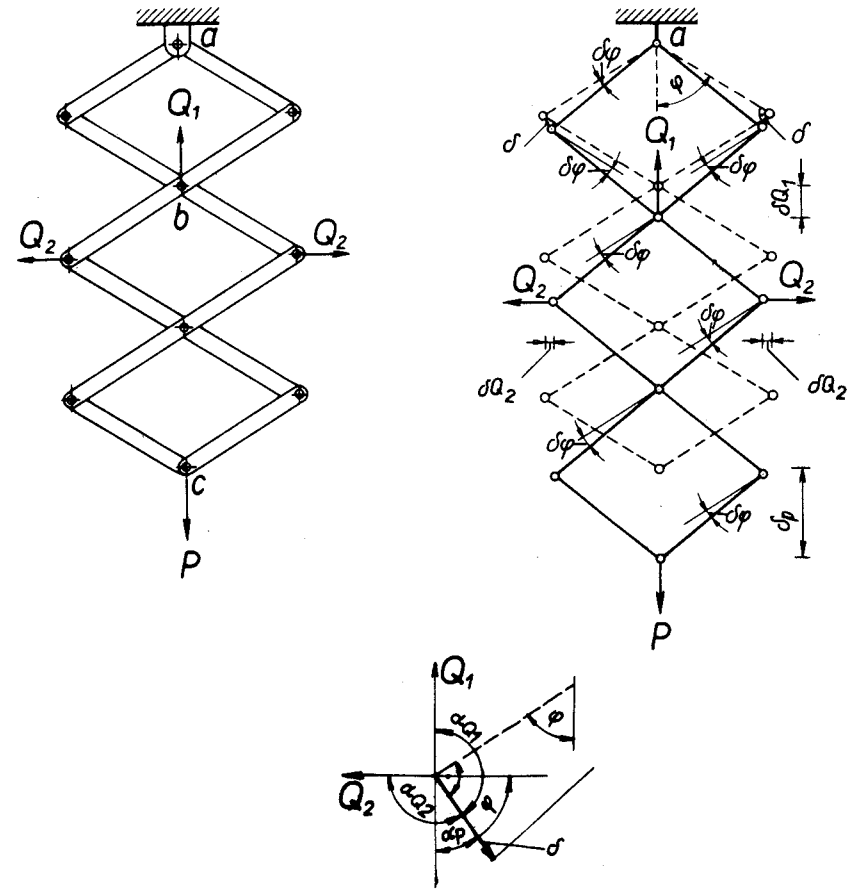
Príklad 8-4:

Sústava prútov vzájomne kĺbovo spojených podľa obrázka je zaťažená v kĺbe c zvislou silou P . Za predpokladu rovnovážneho stavu treba určiť veľkosť sily Q , keď táto pôsobí

- v bode b v zvislom smere,
- v bodoch d a e vodorovne proti sebe.

Trenie a vlastnú tiaž prútov nebudeme brať do úvahy.

- Určenie stupňov voľnosti:



Obr. 8-4a,b,c.

Sústava sa skladá z ôsmich prútov, ktoré sú vzájomne spojené 10 kĺbmi a navonok jedným kĺbom. Potom $n = 8$, $m = 0$, $v_1 = 0$, $v_2 = 10 + 1 = 11$, $v_3 = 0$ a $S = 8 \times 3 + 0 \times 2 - 11 \times 2 = 2$.

Sústava má navonok jeden stupeň voľnosti, ktorý umožňuje pootáčanie sústavy okolo vonkajšej kĺbovej väzby. Vnútorne má sústava tiež jeden stupeň voľnosti, ktorý je reprezentovaný rovnakým pootočením všetkých prútov. Vonkajší stupeň voľnosti vzhľadom na pôsobiacu silovú sústavu identicky spĺňa podmienku rovnováhy.

2. Pretože sústava má stupne voľnosti, nemusíme ani jednu väzbu uvoľňovať.

3. Spojovacie kĺby sú relatívnymi pólmi otáčania. Vzhľadom na rovnaké vzdialenosti kĺbov pootočenia prútov budú rovnaké a budú sa rovnať $\delta\varphi$ a vzhľadom na symetriu budú mať opačný zmysel. Preto vodorovné posuny symetricky uložených kĺbov budú mať opačné znamienka. Zvislé posuny sa budú postupne počítať.

4. Určenie posunov pôsobísk síl: Z pootočenia jedného prúta

$$\delta = a \cdot \delta\varphi$$

potom

$$\delta_p = \sum_{i=1}^6 \delta = 6\delta, \quad \alpha_p = (90^\circ - \varphi)$$

$$\delta_{Q_1} = \sum_{i=1}^2 \delta = 2\delta, \quad \alpha_{Q_1} = (90^\circ + \varphi)$$

$$\delta_{Q_2} = \delta, \quad \alpha_{Q_2} = (180^\circ - \varphi)$$

5. Zostavenie podmienkovej rovnice

a) pôsobenie Q_1

$$A = P \cdot \delta_p \cdot \cos \alpha_p + Q_1 \cdot \delta_{Q_1} \cdot \cos \alpha_{Q_1} = 0$$

po dosadení a úprave

$$3P - Q_1 = 0$$

6. $Q_1 = 3P$

b) pôsobenie Q_2

$$A = P \cdot \delta_p \cdot \cos \alpha_p + Q_2 \cdot \delta_{Q_2} \cdot \cos \alpha_{Q_2} + Q_2 \cdot \delta_{Q_2} \cdot \cos \alpha_{Q_2} = 0$$

po dosadení a úprave

$$3P \cdot a \cdot \sin \varphi - Q_2 \cdot a \cdot \cos \varphi = 0$$

$$Q_2 = 3P \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

Príklad 8-5:

Na vzájomne kolmých naklonených rovinách sú uložené dva vozíky vzájomne spojené ťahadlom, pripojeným kĺbmi v ich ťažiskách. Za predpokladu rovnovážneho stavu treba určiť:

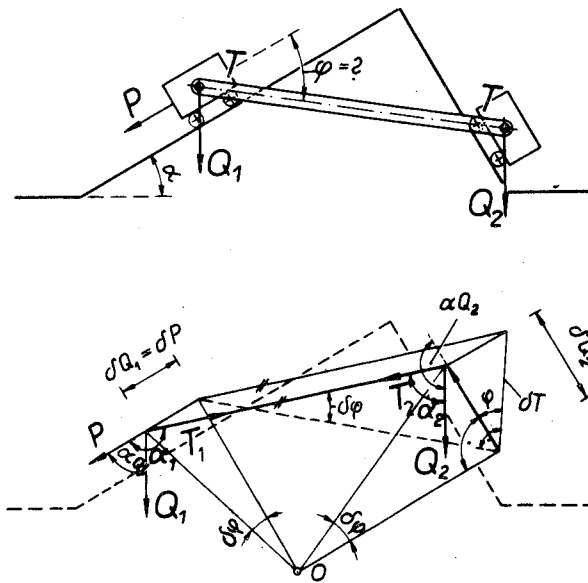
a) sklon ťahadla (φ) od roviny s menším sklonom (α), keď neberieme do úvahy účinky trenia. Ťaž vozíkov je Q_1 a Q_2 .

b) silu P , ktorou musíme pôsobiť na prvý vozík, aby uhol $\varphi - \alpha = 0$, t. j. aby ťahadlo bolo vo vodorovnej polohe.

1. Určenie stupňov voľnosti:

Vozíky predstavujú dve dosky, ktoré sú podporené 4 posuvnými podperami a medzi sebou kyvným prútom. Potom $n=2$, $m=0$, $v_1=5$, $v_2=v_3=0$ a $S=2 \times 3 + 0 \times 2 - (5 \times 1 + 0 \times 2 + 0 \times 3) = 1$.

Sústava má jeden stupeň voľnosti, ktorý umožňuje obom vozíkom posun po naklonenej rovine.



Obf. 8-5a,b.

3. Vozíku — bremenu Q_1 udelíme virtuálny posun δ_{O_1} rovnobežný s naklonenou rovinou. Vzhľadom na spojenie vozíkov ťahadlom posunie sa aj bremeno Q_2 o δ_{O_2} . Ťahadlo sa v takom prípade pootočí o uhol $\delta\varphi$. Okamžitý pól otáčania ťahadla je v priesečníku kolmíc z osí kĺbov ťahadla na naklonené roviny.

4. Výpočet posunov

Posun δ_{O_1} sme si zvolili, musíme hľadať závislosť medzi posunom δ_{O_1} a δ_{O_2} . Túto úlohu môžeme riešiť dvoma spôsobmi:

a) Z podmienky práce síl v ťahadle. Keď nahradíme účinok vnútornej väzby silami T pôsobiacimi na jeden i druhý vozík, vieme o nich, že tvoria rovnovážnu silovú sústavu $T_1 - T_2 = 0$. Jej virtuálna práca musí byť tiež nulová. Uhol medzi T_1 a δ_{O_1} , $\alpha_1 = 180^\circ - \varphi$ a medzi T_2 a δ_{O_2} , $\alpha_2 = 90^\circ - \varphi$, potom

$$T_1 \cdot \cos (180^\circ - \varphi) \delta_{O_1} + T_2 \cdot \cos (90^\circ - \varphi) \delta_{O_2} = 0$$

pretože

$$T_1 = T_2$$

$$\delta_{O_2} = \delta_{O_1} \cdot \cotg \varphi$$

b) Pomocou pootočenia ťahadla. Celkový posun jedného konca ťahadla

$$\delta_T = l \cdot \delta\varphi$$

kde l je dĺžka ťahadla.

Premietnutím tohto predĺženia do smerov δ_{O_1} a δ_{O_2} dostaneme ich veľkosť

$$\delta_{O_1} = l \cdot \sin \varphi \cdot \delta\varphi, \quad \delta_{O_2} = l \cdot \cos \varphi \cdot \delta\varphi$$

Vyjadrením l z niektorej z rovníc dostaneme

$$\delta_{O_2} = \delta_{O_1} \cdot \cotg \varphi$$

$$\delta_P = \delta_{O_1}, \quad \alpha_P = 0^\circ, \quad \alpha_{O_1} = 90^\circ - \alpha, \quad \alpha_{O_2} = 180^\circ - \alpha$$

5. Zostavenie podmienkovej rovnice

$$A = P \cdot \delta_{O_1} \cdot \cos 0^\circ + Q_1 \cdot \delta_{O_1} \cdot \cos (90^\circ - \alpha) + Q_2 \cdot \delta_{O_2} \cdot \cos (180^\circ - \alpha) = 0$$

po úprave

$$P + Q_1 \cdot \sin \alpha - Q_2 \cdot \cos \alpha \cdot \cotg \varphi = 0$$

6. Riešenie rovnice

a) Bez účinku sily P hodnotu $\tg \varphi$

$$\tg \varphi = \frac{Q_2}{Q_1} \cotg \alpha$$

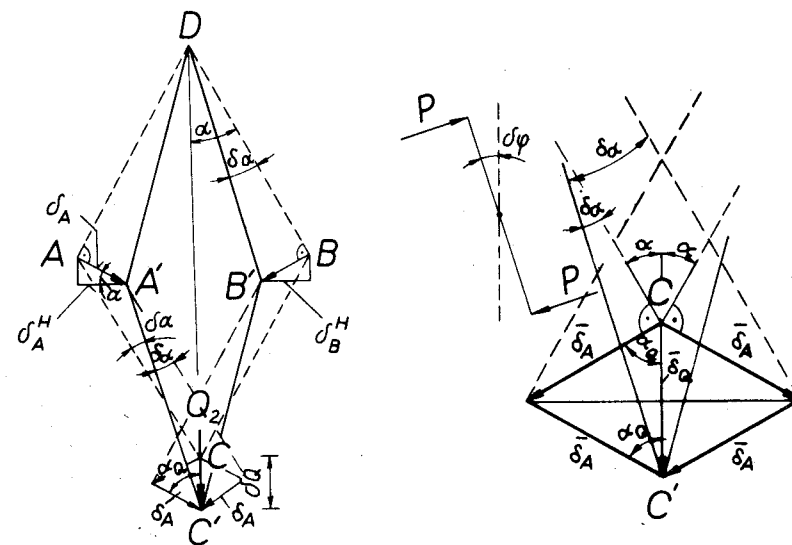
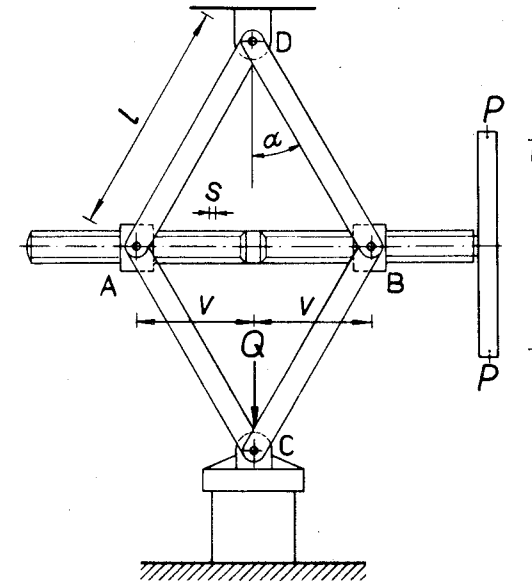
b) Veľkosť sily P pre $\varphi = \alpha$

$$P = (Q_2 \cdot \cotg^2 \alpha - Q_1) \sin \alpha$$

Príklad 8-6:

Ručný lis zhotovený zo štyroch prútov dĺžky l , ktoré sú v rovine navzájom pospájané kĺbmi, má kĺby A a B upevnené maticami na skrutke, opatrenej na jednej strane ľavotočivým a na druhej strane pravotočivým závitom s rovnakým stúpaním (s). Na jednom konci má skrutka obojstrannú páku, na ktorej koncoch pôsobi dvojica síl P so vzdialenosťou p . Na kĺbe C je umiestená doska, na ktorú pôsobí tlak Q . Určte veľkosť vyvodzovanej sily Q v závislosti od dvojice síl P .

1. Určenie stupňov voľnosti: Mechanická sústava ako rovinná sa skladá z piatich prútov navzájom pospájaných tromi dvojitémi a jedným jednoduchým kĺbom. Potom $n = 5$, $m = 0$, $v_1 = v_3 = 0$, $v_2 = 7$ a $S = 5 \times 3 + 0 \times 2 - 7 \times 2 = 1$.



Obr. 8.6a,b.

Sústava ako celok má jeden stupeň voľnosti, ktorý vzhľadom na symetriu konštrukcie a zaťažovacích síl spĺňa identicky podmienku rovnováhy. Je to pootáčanie sústavy okolo kĺbu D . Keď berieme do úvahy možnosť zmeny vzdialenosti kĺbov A a B , bude sa meniť aj vzdialenosť kĺbov D a C a sústava má jeden stupeň voľnosti.

2. Vzhľadom na možnosť zmeny vzdialenosti kĺbov A a B bez uvoľňovania väzby nepotrebujeme nahradzovať jej účinok.

3. Pootočením páky dvojicou síl Pp o uhol $\delta\varphi$, sa vplyvom skrutky body A a B priblížia, a tým sa pootočia všetky prúty v rovine o $\delta\alpha$; dôsledkom toho sa zväčší vzdialenosť \overline{DC} o $\delta\alpha$.

4. Určenie posunov pôsobísk síl

Zvolené virtuálne pootočenie spôsobí priblíženie

$$\delta_{A^H} = \frac{s}{2\pi} \delta\varphi = \delta_{B^H}$$

potom

$$\delta_A = \frac{\delta_{A^H}}{\cos \alpha}$$

a

$$\delta_O = \delta_A + \delta_A, \quad \alpha_O = (90^\circ - \alpha), \quad \delta_A = l \cdot \delta\alpha$$

5. Zostavenie podmienkovej rovnice

$$A = Pp \cdot \delta\varphi + Q \cdot 2\delta_A \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = 0$$

6. Po dosadení a úprave

$$Q = \frac{Pp}{s} \frac{\pi}{v} \sqrt{l^2 - v^2}$$

Príklad 8-7:

Na lomenom nosníku, naznačenom jeho pozdĺžnou osou, pôsobí v bode 1 statický moment M_1 , a v bode 2 sila P_2 , ako to znázorňuje obr. 8-7a. Určte v bode 2 veľkosť:

a) momentu — silovej dvojice,

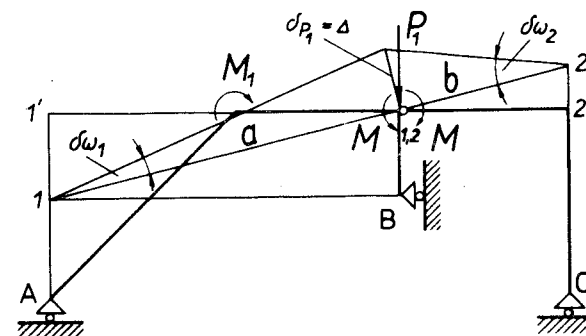
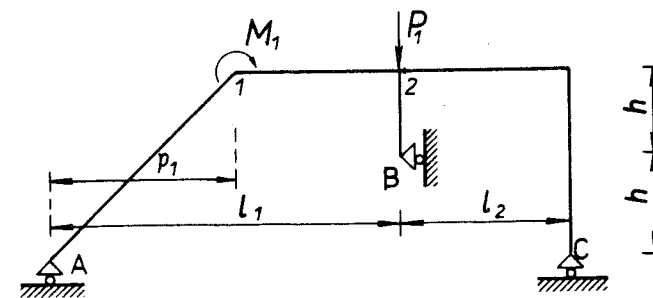
b) sily pôsobiacej kolmo na pozdĺžnu os v tomto bode.

1. Nosník predstavuje tuhú dosku v rovine upevnenú troma posuvnými podperami. Preto $n = 1$, $m = 0$, $v_1 = 3$, $v_2 = v_3 = 0$ a $S = 1 \times 3 + 0 \times 2 - 3 \times 1 = 0$.

Sústava je staticky určitá.

a) Určenie momentu

2. Keď chceme určiť veľkosť momentu v priereze 2, musíme v ňom uvoľniť väzbu, ktorá prenáša moment, t. j. zrušíme v tomto bode votknutie a nahradíme ho kĺbom. Účinok zrušenej väzby musíme nahradiť dvoma momentmi (M), pôsobiaci mi na obidve časti nosníka.



Obr. 8-7a,b

3. Vložením kĺba do osi nosníka sme uvoľnili jeden stupeň voľnosti ($S = 2 \times 3 - 3 \times 1 - 1 \times 2 = 1$), ktorý spočíva v tom, že sa obidve časti môžu okolo vloženého kĺba pootočiť.

Vložený kĺb je súčasne relatívnym pólom medzi dvoma doskami. Okamžitým pólom prvej dosky bude priesečník síl z neuvoľnených väzieb A a B . Okamžitým pólom druhej dosky bude priesečník neuvoľnenej reakcie C so spojnicou pólu prvej dosky a vloženého kĺbu. (Prvá doska je pre druhú dosku kyvným prútom.)

Relatívny kĺb je virtuálnym kĺbom, ktorému kolmo na spojnicu všetkých kĺbov udelíme vychýlenie, čím sa pootočia obe dosky o uhol $\delta\omega_1$ a $\delta\omega_2$.

4. Určenie posunov pôsobísk síl

$$\Delta = a \cdot \delta\omega_1 = b \cdot \delta\omega_2$$

z úmery v pravouhlých trojuholníkoch $\frac{a}{b} = \frac{l_1}{l_2}$

potom

$$\delta\omega_2 = \frac{l_1}{l_2} \delta\omega_1, \quad \delta p_1 = \sqrt{h^2 + l_1^2} \delta\omega_1$$

$$\alpha_p = 180^\circ - \sphericalangle 1', 2, 1, \quad \cos \alpha_p = \frac{l_1}{\sqrt{h^2 + l_1^2}}$$

5. Zostavenie podmienkovej rovnice

$$A = P_1 \cdot \delta p_1 \cdot \cos \alpha_p - M_1 \cdot \delta\omega_1 + M(\delta\omega_1 + \delta\omega_2) = 0$$

po dosadení a úprave

$$-P_1 \cdot l_1 - M_1 + M \frac{l_1 + l_2}{l_2} = 0$$

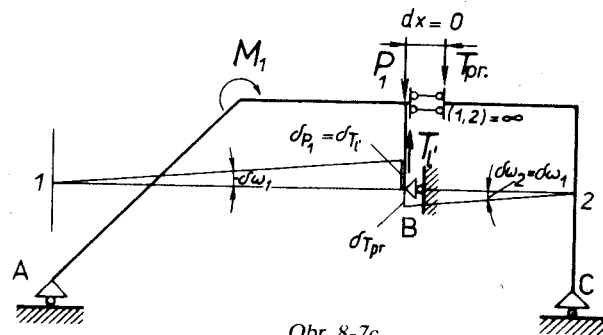
6. Riešenie rovnice

$$M = \frac{(M_1 + P_1 \cdot l_1) l_2}{l_1 + l_2}$$

b) Určenie sily kolmej na os v bode 2.

2. V bode 2 musíme nahradiť plnú väzbu — votknutie — väzbou, ktorá neprenáša silu kolmú na os. Preto vložíme do osi dva vodorovné kyvné prúty a účinok uvoľnenej väzby nahradíme dvoma zvislými silami T pôsobiacimi na obidve dosky tak, že tvoria nulovú sústavu síl.

3. Uvoľnením väzby získala sústava jeden stupeň voľnosti, ktorý umožňuje doskám v bode 2 posunúť sa proti sebe, čím sa dosky súčasne pootočia okolo svojich bodov otáčania. Relatívny bod otáčania je v nekonečne, preto musí platiť $\delta\omega_1 = \delta\omega_2$. Okamžitý pól prvej dosky je ako v predchádzajúcom prípade. Pri



Obr. 8-7c

druhej doske bude v priesečníku rovnobežky s vloženými kyvnými prútmi z prvého pólu a reakciou C .

4. Určenie posunov

$$\delta r'_T = l_1 \cdot \delta\omega_1, \quad \delta r''_T = l_2 \cdot \delta\omega_2$$

$$\delta p = l_1 \cdot \delta\omega_1, \quad \alpha_T = 0^\circ, \quad \alpha_p = 180^\circ$$

5. Zostavenie podmienkovej rovnice

$$A = T'' \cdot l_1 \cdot \delta\omega_1 \cdot \cos 0^\circ + T'' \cdot l_2 \cdot \delta\omega_1 \cdot \cos 0^\circ + P_1 \cdot l_1 \cdot \delta\omega_1 \cdot \cos 180^\circ + M_1 \cdot \delta\omega_1 = 0$$

po úprave a dosadení (pootočenie $\delta\omega_1$ je oproti smeru pôsobenia M_1)

$$T(l_1 + l_2) - P_1 \cdot l_1 - M_1 = 0$$

6. Riešenie rovnice

$$T = \frac{P_1 \cdot l_1 + M_1}{l_1 + l_2}$$

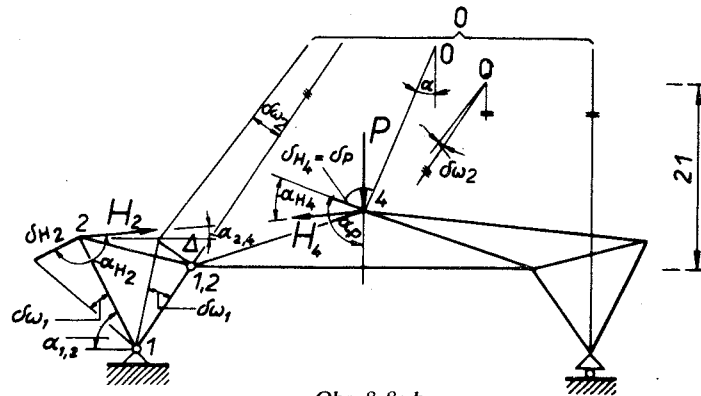
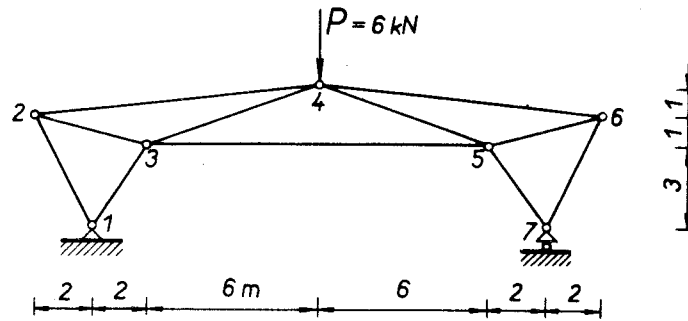
Príklad 8-8:

Nosník vytvorený sústavou kyvných prútov podľa obrázka je zaťažený silou P . Určte veľkosť sily vo vnútornej väzbe spájajúcej hmotné body 2 a 4.

1. Určenie stupňov voľnosti: Sústava je vytvorená z 11 kyvných prútov, ktoré viažu 7 hmotných bodov. Navonok je sústava podporená jednou kĺbovou a posuvnou podperou. Preto $n=0$, $m=7$, $v_1=12$, $v_2=1$, $v_3=0$ a $S = 0 \times 3 + 7 \times 2 - (12 \times 1 + 1 \times 2) = 0$. Sústava je staticky určitá, nemá ani jeden stupeň voľnosti.

2. Väzbu, v ktorej chceme určiť veľkosť sily, odstránime a jej účinok na sústavu nahradíme dvoma silami H v bodoch 2 a 4, pričom musia tvoriť nulovú sústavu síl ($H_2 - H_4 = 0$).

3. Vybratím prúta 24 dostala sústava jeden stupeň voľnosti, ktorý spočíva v možnosti vzájomného pootáčania dvoch častí sústavy okolo spoločného kĺbu 3. Ľavá časť — hmotné body 1, 2, 3 — predstavuje tuhú dosku v rovine, tak isto ako pravá, tvorená bodmi 3, 4, 5, 6 a 7. Ľavá doska má okamžitý pól otáčania v bode 1. Bod 3 je relatívnym pólom a okamžitý pól druhej dosky je v bode 0, v priesečníku zvislej reakcie v bode 7 s predĺženou osou prúta 13, pretože prvá doska je pre druhú dosku kyvnou podperou s kĺbmi 1 a 3. Relatívne pólom (1, 2 \equiv 3) udelíme vychýlenie kolmo na spojnicu kĺbov, čím sa jednotlivé dosky pootočia o virtuálne uhly $\delta\omega_1$ a $\delta\omega_2$.



Obr. 8-8a,b.

4. Určenie posunov a uhlov

$$\Delta = \delta\omega_1 \cdot 13 = \delta\omega_2 \cdot 30$$

Z úmery vyplýva

$$\frac{13}{30} = \frac{2}{14}$$

preto

$$\delta\omega_2 = \frac{1}{7} \delta\omega_1, \quad \delta_P = \delta_{H_4} = \frac{1}{7} \sqrt{19^2 + 8^2} \delta\omega_1$$

$$\delta_{H_2} = \delta\omega_1 \sqrt{20}, \quad \alpha_P = (90^\circ + \alpha),$$

$$\alpha_{H_2} = 90^\circ + \alpha_{2,4} + \alpha_{1,2}, \quad \alpha_{H_4} = \alpha + \alpha_{2,4}$$

$$\cos \alpha = \frac{19}{\sqrt{425}}, \quad \sin \alpha = \frac{8}{\sqrt{425}}, \quad \cos \alpha_{2,4} = \frac{10}{\sqrt{101}}$$

$$\sin \alpha_{2,4} = \frac{1}{\sqrt{101}}, \quad \cos \alpha_{1,2} = \frac{2}{\sqrt{20}}, \quad \sin \alpha_{1,2} = \frac{4}{\sqrt{20}}$$

5. Zostavenie podmienkovej rovnice

$$A = H_2 \cdot \delta_{H_2} \cdot \cos \alpha_{H_2} + H_4 \cdot \delta_{H_4} \cdot \cos \alpha_{H_4} + P \cdot \delta_P \cdot \cos \alpha_P = 0$$

po dosadení a úprave

$$\frac{16}{\sqrt{101}} H + \frac{8}{7} P = 0$$

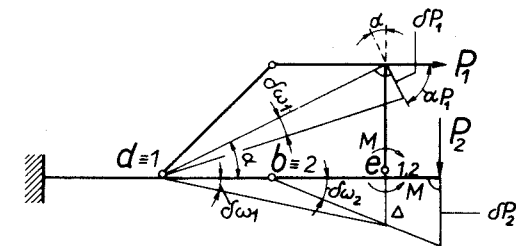
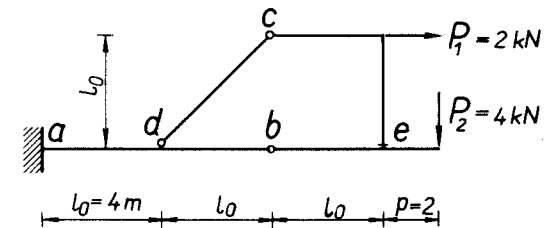
6. Riešenie rovnice

$$H = -0,7178 P = -4,307 \text{ kN}$$

Príklad 8-9:

Na konštrukciu zhotovenú z plnostenných prútov pôsobí zaťaženie P_1 a P_2 podľa obrázka. V bode e určte veľkosť momentu, ktorý pôsobí na prierez nosníka; vlastnú tiaž neberieme do úvahy.

Určenie stupňov voľnosti: Sústavu tvoria tri prúty navzájom pospájané tromi kĺbmi, sústava je navonok votknutá. Preto $n = 3$, $m = 0$, $v_1 = 0$, $v_2 = 3$, $v_3 = 1$ a $S = 3 \times 3 - 3 \times 2 - 1 \times 3 = 0$. Sústava je staticky určitá, pričom dosku \bar{dc} môžeme



Obr. 8-9a,b.

pokladať za kyvný prút, pripievňujúci druhú dosku \overline{cb} spolu s kĺbom b k prvej doske, ktorá nemá stupne voľnosti.

2. Aby sme mohli určiť hodnotu momentu v bode e , musíme zameniť votknutie kĺbom a účinok zrušenej väzby nahradiť dvoma momentmi (M), pôsobiacimi na obidve časti nosníka.

3. Uvoľnením väzby prenášajúcej v bode e moment, získala sústava jeden stupeň voľnosti, ktorý však zasahuje len druhú dosku bc . Prvá doska zostáva bez stupňov voľnosti a vo výpočte budeme brať do úvahy len druhú dosku. Časť dosky \overline{be} má svoj okamžitý pól v bode $b_{(2)}$. Vložený kĺb v bode e je relatívnym pólom.

Doska \overline{ce} má svoj okamžitý pól v priesečníku osi prúta \overline{be} s kyvným prútom \overline{dc} ($d \equiv 1$). Relatívne pól (e) udelíme zvislý posun, ktorý vyvolá pri doskách pootočenie $\delta\omega_1$ a $\delta\omega_2$.

4. Výpočet posunov a uhlov medzi silami a posunmi

$$\Delta = l_0 \cdot \delta\omega_2 = 2l_0 \cdot \delta\omega_1$$

odtiaľ

$$\delta\omega_2 = 2\delta\omega_1$$

$$\delta p_2 = (l_0 + p) \delta\omega_2 = 2(l_0 + p) \delta\omega_1$$

$$\delta p_1 = l_0 \cdot \delta\omega_1 \sqrt{5}, \quad \alpha_{p_1} = (90^\circ - \alpha), \quad \alpha_{p_2} = 0^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

5. Zostavenie podmienkovej rovnice

$$A = P_1 \cdot \delta p_1 \cdot \cos \alpha_{p_1} + P_2 \cdot \delta p_2 \cdot \cos \alpha_{p_2} + M(\delta\omega_1 - \delta\omega_2) = 0$$

po dosadení a úprave

$$P_1 \cdot l_0 + 2P_2(l_0 + p) - M = 0$$

6. Riešenie rovnice

$$M = P_1 \cdot l_0 + 2P_2(l_0 + p)$$

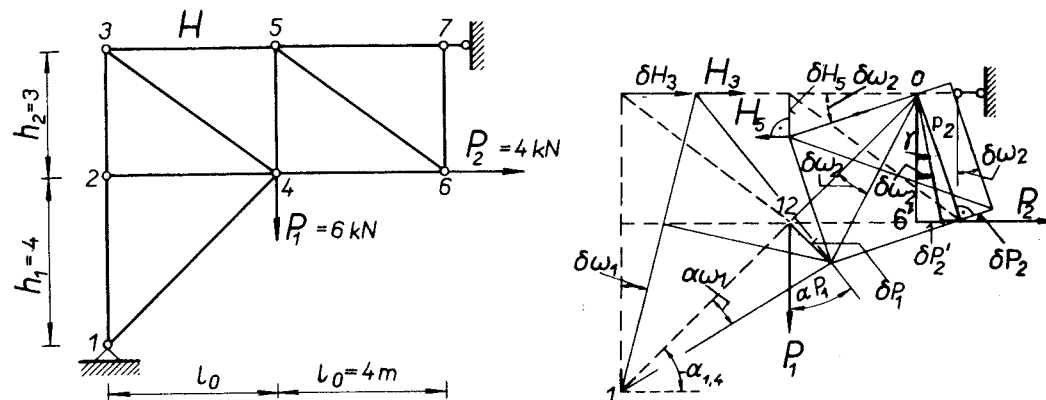
Výsledok možno skontrolovať s príkladom 1.2-11/b.

Príklad 8-10:

Na rovinnú konštrukciu z kyvných prútov pôsobia sily P_1 a P_2 podľa obrázka. Určte silu vo vnútornej väzbe medzi bodmi 3 a 5. Vlastnú tiaž nebudeme brať do úvahy.

1. Určenie stupňov voľnosti: Sústava má 7 hmotných bodov, spojených medzi sebou 11 kyvnými prútmi, je podopretá jednou kĺbovou a jednou posuvnou podperou. Preto $n = 0$, $m = 7$, $v_1 = 12$, $v_2 = 1$, $v_3 = 0$ a $S = 7 \times 2 - 12 \times 1 - 1 \times 2 = 0$. Sústava je staticky určitá.

2. Väzbu, v ktorej hľadáme veľkosť sily, odstránime a jej účinok na sústavu nahradíme dvoma silami S_3 a S_5 rovnakých hodnôt a opačného smeru ($S_3 - S_5 = 0$).



Obr. 8-10a,b.

3. Vybratím jedného kyvného prúta získala sústava jeden stupeň voľnosti, ktorý spočíva v možnosti vzájomného pootočenia vzniknutých dvoch dosiek okolo spoločného kĺbu v bode 4. Okamžitý pól dosky 1, 2, 3, 4 je v bode 1. Relatívnym pólom je kĺb v bode 4. Okamžitým pólom druhej dosky 4, 5, 6, 7 bude priesečník spojnice kĺbov 1 a 4 s reakciou neuvolnenej väzby v bode 7, t. j. v bode 0. Relatívne kĺbu udelíme kolmo na spojnicu pól posunutie, ktoré vyvolá pootočenie dosiek o uhly $\delta\omega_1$ a $\delta\omega_2$.

4. Výpočet posunov a uhlov

$$\delta p_1 = l_{1,4} \cdot \delta\omega_1 = l_{4,2} \cdot \delta\omega_2$$

$$l_{1,4} = \sqrt{h_1^2 + l_0^2}, \quad l_{4,2} = h_2 \sqrt{2}$$

$$\delta\omega_2 = \frac{1}{h_2 \sqrt{2}} \sqrt{h_1^2 + l_0^2} \delta\omega_1$$

$$\delta H_3 = (h_1 + h_2) \delta\omega_1, \quad \delta H_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{h_1^2 + l_0^2} \delta\omega_1$$

$$\delta_{P_1} = \delta\omega_1 \sqrt{h_1^2 + l_0^2}, \quad \delta'_{P_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{h_1^2 + l_0^2} \delta\omega_1$$

$$\alpha_{H_3} = \alpha'_{P_2} = 0^\circ, \quad \alpha_{H_5} = 90^\circ, \quad \alpha_{P_1} = \alpha_{1,4}$$

$$\cos \alpha_{1,4} = \frac{l_0}{\sqrt{h_1^2 + l_0^2}}$$

5. Zostavenie podmienkovej rovnice

$$A = P_1 \cdot \delta_{P_1} \cdot \cos \alpha_{P_1} + P_2 \cdot \delta'_{P_2} \cdot \cos \alpha'_{P_2} + \\ + H_3 \cdot \delta_{H_3} \cdot \cos \alpha_{H_3} + H_5 \cdot \delta_{H_5} \cdot \cos \alpha_{H_5} = 0$$

po dosadení a úprave

$$P_1 \cdot l_0 + P_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{h_1^2 + l_0^2} + H(h_1 + h_2) = 0$$

6. Riešenie rovnice

$$H = - \frac{P_1 \cdot l_0 + P_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{h_1^2 + l_0^2}}{h_1 + h_2} = -5,7143 \text{ kN}$$

Poznámka: Pri určovaní virtuálnej práce sily P_2 sme využili výhodu vzťahu pre prácu (skalárny súčin) v tom, že za pôsobisko sily sme nepovažovali bod 6, ale iný vhodný bod (6') na lúči sily P vzhľadom na jednoduchšie vyjadrenie posunu δ'_{P_2} . Pretože platí

$$P_2 \cdot \delta_{P_2} \cos \alpha_{P_2} = P_2 \cdot \delta'_{P_2} \cdot \cos \alpha'_{P_2},$$

$$\delta_{P_2} = P_2 \cdot \delta\omega_2, \quad \delta'_{P_2} = h_2 \cdot \delta\omega_2, \quad \alpha_{P_2} = \gamma, \quad \alpha'_{P_2} = 0^\circ,$$

$$P_2 = \frac{h_2}{\cos \gamma}, \quad P_2 \frac{h_2}{\cos \gamma} \delta\omega_2 \cdot \cos \gamma = P_2 \cdot h_2 \cdot \delta\omega_2 \cdot \cos 0^\circ,$$

IX. KINETICKÁ A POTENCIÁLNA ENERGIA

Energia je schopnosť telesa vykonávať prácu.

Ak chceme zastaviť teleso, ktoré sa pohybuje rýchlosťou v , musíme naň pôsobiť silou P' , a to proti pohybu telesa. Podľa princípu akcie a reakcie platí

$$P' = -P, \quad P = m \cdot a$$

Sila P' vykonáva pri zastavení telesa prácu

$$A = \int_{s_0}^s P' \cdot ds = - \int_{s_0}^s m \cdot a \cdot ds = -m \int_{s_0}^s \frac{dv}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} dt = -m \int_{v_0}^v v \cdot dv$$

$$A = -m \left(\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 \right)$$

kde v je konečná rýchlosť,

v_0 — začiatočná rýchlosť.

Pri zastavení telesa bude rýchlosť $v = 0$ a práca sily P' , ktorá pôsobí proti pohybu telesa, je daná vzťahom

$$A = \frac{1}{2} m \cdot v_0^2$$

Pohybujúce sa teleso má teda schopnosť vykonávať prácu — má energiu, ktorá má svoju príčinu v pohybe.

Energii pohybujúceho sa telesa nazývame *kinetickou energiou*. Je to skalárna veličina, ktorá sa rovná polovičnému súčinu hmotnosti m a štvorcu rýchlosti v daného telesa (bodu), čiže kinetická energia pri transláčnom pohybe bude

$$K = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Kinetická energia tuhého telesa pri rotačnom pohybe, t. j. keď teleso vykonáva otáčavý pohyb okolo osi 0 uhlovou rýchlosťou ω , je vyjadrená vzťahom

$$K = \frac{J_0 \cdot \omega^2}{2}$$

kde J_0 je moment zotrvačnosti telesa k osi otáčania.

Kinetická energia telesa pri všeobecnom pohybe (zloženom z translačného a rotačného pohybu) sa rovná súčtu kinetickej energie hmotnosti sústredenej v ťažisku a kinetickej energie telesa vzhľadom na ťažisko

$$K = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} J_0 \cdot \omega^2$$

Práca síl pôsobiacich na teleso je vyjadrená zmenou kinetickej energie

$$\Sigma A = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_0^2$$

Potenciálnu — polohovú energiu telesa určuje práca, ktorú vykoná sila pri premiestnení telesa z vychýlenej polohy do pôvodnej — nulovej polohy.

Element potenciálnej energie dU sa rovná zápornej hodnote elementu práce dA

$$dU = -dA$$

Rozmer kinetickej energie a potenciálnej energie sa rovná rozmeru práce [N . m].

Príklad 9-1:

Do vzduchoprázdneho priestoru hodíme zvisle rýchlosťou v_0 teleso tiaže Q . Určte, akou rýchlosťou teleso spadne (obr. 9-1).

Riešenie:

Teleso vyhodené zvisle nahor do vzduchoprázdna rýchlosťou v_0 má v sebe kinetickú energiu

$$K_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{g} \cdot v_0^2$$

Teleso stúpa po dráhe s tak dlho, kým sa jeho kinetická energia K_0 vyčerpá. Pohybová energia, tým že dvíha teleso do výšky s , vykonáva prácu veľkosti $Q \cdot s$. Z rovnosti, ktorú napíšeme, môžeme určiť dráhu s , po ktorej teleso vystúpi, až kým úplne stratí kinetickú energiu.

$$K_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{g} \cdot v_0^2 = Q \cdot s = 0$$

z rovnice určíme dĺžku dráhy $s = \frac{v_0^2}{2g}$.

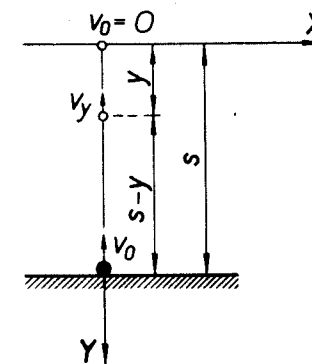
V tomto okamihu však teleso nadobudlo zmenou polohy polohovú energiu, ktorá sa rovná práci telesa na dráhe s

$$U = Q \cdot s$$

Teleso začne padať a pádom z výšky s na dráhe y stratí potenciálnu energiu veľkosti $U_y = Q \cdot y$, ale získa kinetickú energiu

$$K_y = \frac{Q \cdot v_y^2}{2g}$$

kde $v_y^2 = 2g \cdot y$



Obr. 9.1.

a po dosadení dostaneme vzťah

$$K_y = Q \cdot y = U_y$$

Tento vzťah potvrdzuje zákon o zachovaní energie.

Teleso po dopade nemá nijakú polohovú energiu, ale zato získa kinetickú energiu

$$K = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{g} \cdot v^2 = Q \cdot s$$

z rovnice určíme rýchlosť, akou teleso dopadne

$$v = \sqrt{2g \cdot s}$$

čo je rýchlosť rovnomerne zrýchleného pohybu.

Príklad 9-2:

Výtahová kabína tiaže $Q_1 = 6,0$ kN, s nákladom tiaže $Q_2 = 8,0$ kN, klesá rýchlosťou $v = m/s$. Lano sa pretrhlo a kabína sa zachytila na dráhe 10 cm. Určte veľkosť strednej brzdiacej sily T .

Riešenie:

Pohybovú energiu výtahovej kabíny tiaže $Q = Q_1 + Q_2 = 14,0$ kN vyjadruje vzťah

$$K = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{g} v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{14,0}{9,806} 1^2 = 0,7138 \text{ kNm}$$

Tým, že sa kabína po pretrhnutí lana pohybovala na dráhe 10 cm, konala prácu

$$A = Q \cdot 0,1 = 14,0 \cdot 0,1 = 1,4 \text{ kNm}$$

Brzdiaca sila T koná brzdením prácu, ktorej veľkosť určíme z podmienky, že práca brzdiacej sily sa musí rovnať práci, ktorú vykonávala tiaž kabíny a veľkosti nadobudnutej kinetickej energie

$$A_T = T \cdot 0,1 = A + K = 1,4 + 0,7138 = 2,114 \text{ kNm}$$

z rovnice určíme veľkosť strednej brzdiacej sily

$$T = 21,14 \text{ kN}$$

Príklad 9-3:

Bremeno tiaže $Q = 0,2$ kN dvíhame po naklonenej rovine, s uhlom odklonu $\alpha = 30^\circ$, pomocou lana odkloneného od naklonenej roviny o uhol $\gamma = 30^\circ$. Sila v lane je 0,15 kN. Máme nájsť dĺžku dráhy s za čas, v ktorom bremeno nadobudne rýchlosť $v = 2,0$ m/s. Súčiniteľ trenia $f = 0,2$ (obr. 9-2).

Riešenie:

Na bremeno pri dvíhaní po naklonenej rovine pôsobia v časovom okamihu sily (obr. 9-3)

Q — tiaž bremena,

N — sila v lane,

T — sila trenia; $T = f \cdot R$,

R — reakcia podložia; $R = Q \cdot \cos \alpha - N \sin \gamma$.

Zmenu kinetickej energie telesa vyjadruje vzťah

$$\Sigma A = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_0^2$$

Určíme prácu jednotlivých síl na dráhe s

$$A_O = -Q \cdot \sin \alpha \cdot s$$

$$A_N = N \cdot \cos \gamma \cdot s$$

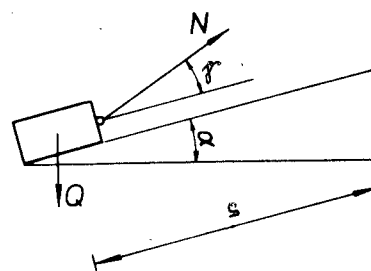
$$A_T = -T \cdot s = -f(Q \cdot \cos \alpha - N \sin \gamma)s$$

$A_R = 0$, sila R nevykonáva prácu, jej zložka do osi X je nulová.

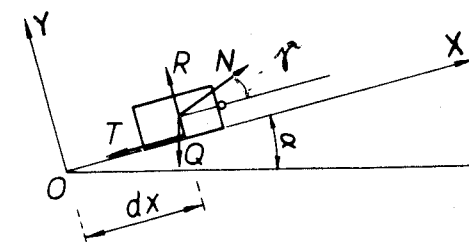
Výsledná práca síl

$$A = A_O + A_N + A_T$$

$$\begin{aligned} \Sigma A &= s(-Q \cdot \sin \alpha + N \cdot \cos \gamma - f \cdot Q \cdot \cos \alpha + f \cdot N \cdot \sin \gamma) = \\ &= s[N(\cos \gamma + f \cdot \sin \gamma) - Q(\sin \alpha + f \cdot \cos \alpha)] \end{aligned}$$



Obr. 9.2.



Obr. 9.3.

Zmenu kinetickej energie pri premiestení bremena zo začiatočnej polohy s rýchlosťou $v_0 = 0$ do polohy, keď bremeno nadobudne rýchlosť v vyjadríme vzťahom

$$K = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{g} v^2$$

Kinetická energia sa rovná súčtu prác jednotlivých síl. Podľa nasledovnej rovnice môžeme určiť dĺžku dráhy s .

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{g} v^2 = s[N(\cos \gamma + f \cdot \sin \gamma) - Q(\sin \alpha + f \cdot \cos \alpha)]$$

Dĺžka dráhy

$$s = \frac{Q \cdot v^2}{2g[N(\cos \gamma + f \cdot \sin \gamma) - Q(\sin \alpha + f \cdot \cos \alpha)]}$$

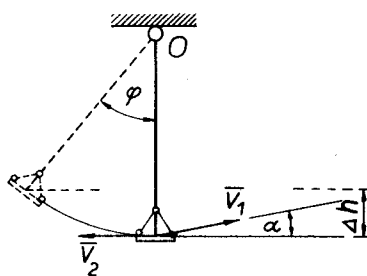
po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$s = \frac{0,2 \cdot 2^2}{2 \cdot 9,806 [0,15(0,866 + 0,2 \cdot 0,5) - 0,2(0,5 + 0,2 \cdot 0,866)]} = \frac{0,40}{9,806 \cdot 0,0103} = 3,976 \text{ m}$$

Teleso nadobudne rýchlosť 2,0 m/s na dráhe dĺžky 4,0 m.

Príklad 9-4:

Človek tiaže Q_1 stojí na hojdačke a zoskočí z nej pod elevačným uhlom α začiatočnou rýchlosťou v_1 . Tiaž hojdačky je Q_2 a dĺžka zavesenej tyče hojdačky je l . Máme určiť uhol φ , o ktorý sa hojdačka vychýli po zoskoku človeka (obr. 9-4).



Obr. 9.4.

Riešenie:

Moment hybnosti človeka b_1 po zoskoku vzhľadom na bod otáčania hojdačky 0 vyjadríme

$$b_1 = m_1 \cdot v_1 \cdot \cos \alpha \cdot l$$

Moment hybnosti hojdačky b_2 vzhľadom na bod 0 bude

$$b_2 = m_2 \cdot v_2 \cdot l$$

Keďže stav pohybu nastal pôsobením vnútorných síl, musí sa súčet hybností rovnať nule.

$$b_1 + b_2 = 0$$

Dosaďme vzťahy jednotlivých hybností

$$\frac{Q_1}{g} v_1 \cdot \cos \alpha \cdot l + \frac{Q_2}{g} v_2 \cdot l = 0$$

$$Q_1 \cdot v_1 \cdot \cos \alpha + Q_2 \cdot v_2 = 0$$

Z rovnice vyjadríme rýchlosť hojdačky

$$v_2 = -\frac{Q_1}{Q_2} v_1 \cdot \cos \alpha$$

Po zoskoku človeka nadobudne hojdačka kinetickú energiu

$$K_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_2}{g} v_2^2$$

ktorá sa v najvyššom bode premení na potenciálnu energiu

$$U_2 = -A_2 = -(-Q_2 \cdot \Delta h) = Q_2(l - l \cdot \cos \varphi)$$

$$U_2 = Q_2 \cdot l(1 - \cos \varphi)$$

Podľa zákona o zachovaní energie musí platiť

$$K_2 = U_2$$

a po dosadení vzťahov energií

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{Q_2}{g} v_2^2 = Q_2 \cdot l(1 - \cos \varphi)$$

získame rovnicu, z ktorej vyjadríme hľadaný uhol φ , o ktorý sa hojdačka po zoskoku človeka vychýli

$$\cos \varphi = 1 - \frac{v_2^2}{2g \cdot l}$$

Príklad 9-5:

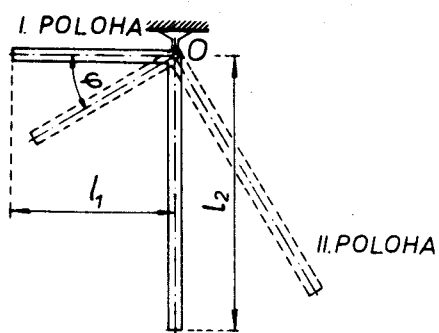
Uholník, ktorého ramená dĺžky l_1 a l_2 , tiaže Q_1 a Q_2 zvierajú pravý uhol, pustíme voľne z polohy I, v ktorej kratšie rameno dĺžky l_1 je vo vodorovnej polohe (obr. 9-5). Aký uhol φ opíšu ramená, kým prídu do druhej, konečnej polohy II?

Riešenie:

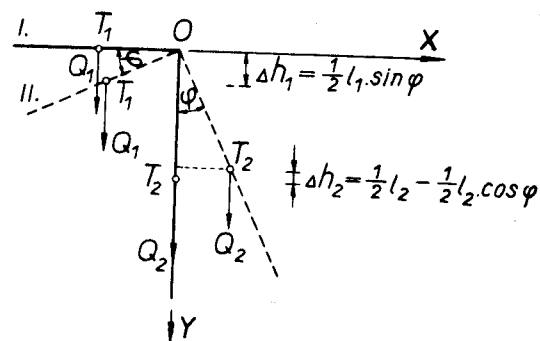
Na uholník pôsobia sily tiaže ramien Q_1 a Q_2 a zapríčinia pohyb z I. pokojovej polohy do II. pokojovej polohy (obr. 9-6). Práca týchto síl sa musí rovnať zmene kinetickej energie. Platí

$$\Sigma A = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2$$

Rýchlosť na začiatku v I. polohe aj rýchlosť na konci v II. polohe sú nulové, a teda aj kinetická energia uholníka sa musí rovnať nule.



Obr. 9.5.



Obr. 9.6.

Sila Q_1 , ktorá pôsobí na rameno dĺžky l_1 v ťažisku t_1 , koná pri zmene polohy uholníka prácu

$$A_1 = Q_1 \cdot \Delta h_1 = Q_1 \cdot 0,5 l_1 \cdot \sin \varphi$$

Rovnako vykonáva prácu sila Q_2 , ktorá pôsobí v ťažisku t_2 ramena l_2 . Jej veľkosť určíme zo vzťahu

$$A_2 = -Q_2 \cdot \Delta h_2 = -Q_2 \left(\frac{l_2}{2} - \frac{l_2}{2} \cos \varphi \right) = -\frac{l_2}{2} Q_2 (1 - \cos \varphi)$$

Súčet prác vonkajších síl sa rovná zmene kinetickej energie, ktorá sa v našom prípade rovná nule. Môžeme napísať

$$\Sigma A = 0 \quad A_1 + A_2 = 0$$

$$Q_1 \frac{1}{2} l_1 \sin \varphi - Q_2 \frac{l_2}{2} (1 - \cos \varphi) = 0$$

Veľkosť uhla φ získame

$$\frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{Q_1 \cdot l_1}{Q_2 \cdot l_2} \quad \text{tg } \frac{\varphi}{2} = \frac{Q_1 \cdot l_1}{Q_2 \cdot l_2}$$

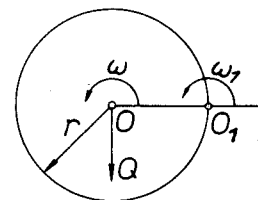
Uhol, ktorý opíšu ramená, kým prídu do II. krajnej polohy, určíme pomocou momentovej podmienky k bodu otáčania. Označme ψ — uhol, ktorý zvierá rameno dĺžky l_1 s vodorovnou rovinou pri rovnovážnej polohe. Platí

$$Q_1 \frac{l_1}{2} \cos \psi - Q_2 \frac{l_2}{2} \sin \psi = 0$$

$$\text{tg } \psi = \frac{Q_1 \cdot l_1}{Q_2 \cdot l_2} = \text{tg } \frac{\varphi}{2}$$

Príklad 9-6:

Valec tiaže Q a polomeru r sa otáča okolo osi O prechádzajúcej ťažiskom valca uhlovou rýchlosťou ω . Akou rýchlosťou ω_1 sa musí otáčať valec okolo osi O_1 , ktorá prechádza jeho povrchovou priamkou (obr. 9-7), aby sa kinetická energia nezmenila?



Obr. 9.7.

Kinetickú energiu valca otáčajúceho sa okolo osi O , ktorá prechádza ťažiskom, vyjadruje vzťah

$$K_0 = \frac{1}{2} J_0 \cdot \omega^2$$

kde J_0 je moment zotrvačnosti valca k osi otáčania O

$$J_0 = \frac{1}{2} m \cdot r^2$$

$$K_0 = \frac{1}{4} \cdot \frac{Q}{g} r^2 \cdot \omega^2$$

Kinetickú energiu valca otáčajúceho sa okolo okamžitej osi O_1 určuje vzťah

$$K_{01} = \frac{1}{4} J_1 \cdot \omega_1^2$$

kde J_1 je moment zotrvačnosti valca okolo osi O_1 , ktorý vyjadríme pomocou Steinerovej vety

$$J_1 = J_0 + m \cdot r^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{g} r^2$$

Kinetická energia

$$K_{01} = \frac{3}{4} \cdot \frac{Q}{g} r^2 \cdot \omega_1^2$$

Kinetické energie podľa podmienky musia byť rovnaké, t. j.

$$K_0 = K_{01}$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{Q}{g} r^2 \cdot \omega^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{Q}{g} r^2 \cdot \omega_1^2$$

Z rovnice určíme hľadanú uhlovú rýchlosť valca otáčajúceho sa okolo osi O_1

$$\omega^2 = 3\omega_1^2$$

$$\omega_1 = \frac{\omega}{\sqrt{3}}$$

Príklad 9-7:

Máme určiť kinetickú energiu valca tiaže Q , ktorý sa valí po vodorovnej rovine bez šmýkania rýchlosťou v (obr. 9-8).

Riešenie:

Kinetickú energiu telesa, ktoré sa valí po rovine, t. j. ktoré sa pohybuje a súčasne sa otáča okolo vlastnej osi, určuje vzťah

$$K = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$

kde J je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na ťažiskovú os $J = m \frac{r^2}{2}$

alebo vzťah

$$K = \frac{1}{2} J_0 \cdot \omega^2$$

kde J_0 je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na okamžitú os otáčania, prechádzajúcu bodom O .

Podľa Steinerovej vety platí

$$J_0 = J + m \cdot r^2 = \frac{3}{2} m \cdot r^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{g} r^2$$

Uhlová rýchlosť valca závisí od polohovej rýchlosti v a polomeru r

$$v = r \cdot \omega, \quad \omega = \frac{v}{r}$$

Dosadením hodnôt do vzťahov kinetickej energie valiaceho sa valca dostaneme veľkosť kinetickej energie

$$K = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} m \cdot \frac{r^2}{2} \left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{3}{4} m \cdot v^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{Q}{g} v^2$$

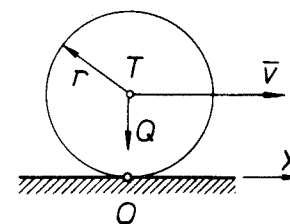
alebo

$$K = \frac{1}{2} J_0 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{g} r^2 \left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{Q}{g} v^2$$

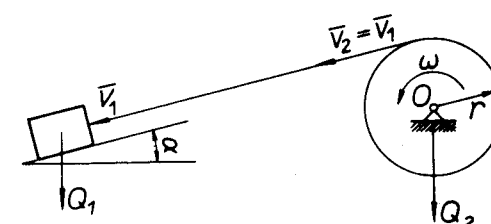
Keby sa valec nevalil, ale len posúval rýchlosťou v , jeho kinetická energia by sa rovnala kinetickej energii hmoty valca sústredenej v ťažisku t a jej hodnota sa rovná len

$$K = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{g} v^2$$

t. j. kinetickej energii telesa pohybujúceho sa translačným pohybom.



Obr. 9.8.



Obr. 9.9.

Príklad 9-8:

Bremeno tiaže Q_1 sa spúšťa po naklonenej rovine rýchlosťou v , a uvádza do pohybu valec tiaže Q_2 prostredníctvom lana namotaného na valec (obr. 9-9). Máme určiť kinetickú energiu sústavy pomocou rýchlosti spúšťajúceho sa bremena. Tiaž lana i silu trenia neberieme do úvahy.

Riešenie:

Sústava sa skladá z dvoch telies — bremena tiaže Q_1 , ktorého kinetická energia

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_1}{g} v_1^2$$

a valca tiaže Q_2 , otáčajúceho sa uhlovou rýchlosťou ω okolo osi O . Jeho kinetická energia je vyjadrená

$$K_2 = \frac{1}{2} J_0 \cdot \omega^2, \quad J_0 = \frac{1}{2} m_2 \cdot r^2$$

Rýchlosť bodu na obvode valca v_2 sa rovná rýchlosti spúšťajúceho sa telesa V_1 .

$$v_2 = v_1 = \omega \cdot r$$

odkiaľ určíme uhlovú rýchlosť

$$\omega = \frac{v_1}{r}$$

Výsledná kinetická energia je súčtom kinetických energií jednotlivých častí

$$K = K_1 + K_2$$

$$K = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_1}{g} v_1^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{Q_2}{g} v_1^2 = \frac{(2Q_1 + Q_2) v^2}{4g}$$

Príklad 9-9:

Kruhový prstenec obdĺžnikového prierezu sa otáča okolo zvislej osi konštantnou rýchlosťou ω . Ako máme zväčšiť jeho vonkajší polomer R , aby kinetická energia vzrástla na dvojnásobok pôvodnej kinetickej energie K_0 . Vnútorný polomer r a uhlová rýchlosť ω sa nemenia (obr. 9-10).

Riešenie:

Kinetická energia rotujúceho telesa s hmotnosťou m_1 so zväčšeným polomerom R_1 sa má rovnať dvojnásobnej kinetickej energii rotujúceho telesa s hmotnosťou m , pričom uhlová rýchlosť otáčajúceho sa telesa sa nemení. Platí

$$K_1 = 2K_0$$

$$2K_0 = 2 \cdot \frac{1}{2} J_0 \cdot \omega^2, \quad K_1 = \frac{1}{2} J_1 \cdot \omega^2$$

z rovnosti kinetických energií vyplýva

$$\frac{1}{2} J_1 \cdot \omega^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} J_0 \cdot \omega^2$$

$$J_1 = 2J_0$$

čo znamená, že kinetická energia rotujúceho telesa vzrastie na dvojnásobok, keď sa hmotný moment zotrvačnosti telesa zväčší dvojnásobne.

Hmotný moment zotrvačnosti telesa s polormi R a r k osi otáčania

$$J_0 = J_R - J_r = \frac{1}{2g} (Q_R \cdot R^2 - Q_r \cdot r^2)$$

$$\text{kde } Q_R = \pi \cdot R^2 \cdot h \cdot \gamma, \quad Q_r = \pi \cdot r^2 \cdot h \cdot \gamma$$

$$J_0 = \frac{\gamma \cdot \pi \cdot h}{2g} (R^4 - r^4)$$

Hmotný moment zotrvačnosti prstenca s polomerom R_1 a r je daný výrazom

$$J_1 = \frac{\pi \cdot \gamma \cdot h}{2g} (R_1^4 - r^4)$$

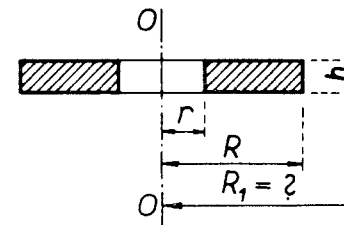
Aby kinetická energia vzrástla na dvojnásobok, musí platiť

$$\frac{\gamma \cdot \pi \cdot h}{2g} (R_1^4 - r^4) = 2 \frac{\gamma \cdot \pi \cdot h}{2g} (R^4 - r^4)$$

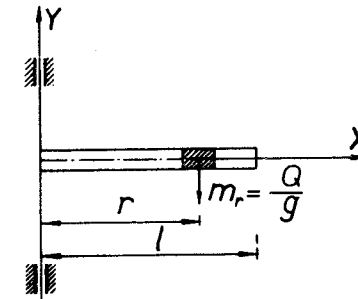
$$R_1^4 - r^4 = 2(R^4 - r^4)$$

z rovnice určíme potrebný zväčšený vonkajší polomer prstenca

$$R_1 = \sqrt[4]{2R^4 - r^4}$$



Obr. 9.10.



Obr. 9.11.

Príklad 9-10:

Tyč dĺžky l , tiaže Q , upevnená vodorovne na zvislú tyč, otáča sa uhlovou rýchlosťou ω . Máme redukovať hmotnosť tyče do vzdialenosti r tak, aby sa redukovaná hmotnosť rovnala hmote tyče (obr. 9-11).

Riešenie:

Kinetická energia redukovanej hmoty tyče K_r , vo vzdialenosti r od osi otáčania, musí sa rovnať kinetickej energii K rotujúcej tyče. Platí

$$K_r = K$$

Kinetická energia rotujúcej tyče

$$K = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$

kde $J = \frac{Q}{3g} l^2$ je moment zotrvačnosti tyče od osi otáčania.

Kinetická energia redukovanej hmotnosti tyče

$$K_r = \frac{1}{2} m_r \cdot r^2 \cdot \omega^2$$

kde $m_r = \frac{Q}{g}$ je redukovaná hmotnosť tyče vo vzdialenosti r .

Z rovnice rovnosti kinetickej energie rotujúcej tyče a redukovanej hmotnosti tyče určíme redukovanú vzdialenosť r

$$\frac{1}{2} m_r \cdot r^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{3g} l^2 \cdot \omega^2$$

$$r = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

X. ZRAZENIE TELIES A NÁRAZOVÉ SILY

Pri zrážke dvoch tuhých telies sa v pomerne krátkom čase značne zmení ich pôvodný pohybový stav, pretože telesá si vo svojom predchádzajúcom pohybe prekážajú. Túto zmenu pohybového stavu vyvolávajú nárazové sily, ktorými telesá v čase trvania dotyku na seba pôsobia.

Nárazové sily vznikajú najmä pri náraze telies a ich trvanie je tým kratšie a veľkosť tým väčšia, čím tuhšie (tvrdšie) sú telesá a čím väčšia je ich vzájomná rýchlosť. Okrem toho nárazová sila pri zrážke rastie od nuly až po svoju najväčšiu hodnotu a potom opäť klesne na nulu.

Priebeh nárazu závisí v podstate od týchto okolností:

- od rozloženia hmotnosti oboch telies,
- od ich vzájomného pohybu bezprostredne pred nárazom,
- od ich pružných konštánt,
- od charakteru ich povrchov.

Zrazenie dokonale pružných telies

Príklad 10-1:

Dve pružné gule sa pohybujú oproti sebe rovnakými rýchlosťami v . Po zrazení zastane jedna guľa v pokoji. V akom pomere sú hmotnosti gúľ?

Riešenie:

$$v_1 = -v, \quad v_2 = +v$$

Rýchlosti gúľ po zrazení sú

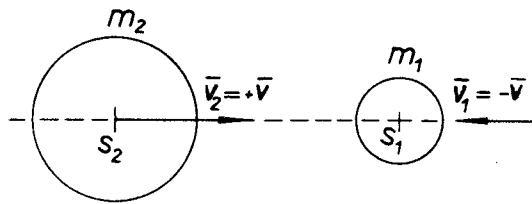
$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

$$u_2 = \frac{2m_1 \cdot v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2} = 0$$

Po dosadení za v_1 a v_2 ($-v + v$) dostaneme

$$u_1 = \frac{(m_2 - m_1)v + 2m_2 \cdot v}{m_1 + m_2}$$

$$u_2 = \frac{-2m_1 \cdot v + (m_2 - m_1)v}{m_1 + m_2}$$



Obr. 10.1.

Z poslednej rovnice vychádza

$$2m_1 + m_1 - m_2 = 0$$

$$3m_1 = m_2$$

teda

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$$

potom

$$u_1 = \frac{8m_1}{4m_1} v = 2v$$

Príklad 10-2:

Dve gule (obr. 10-2) sa pohybujú za sebou, vzdialenosť medzi nimi je $d = 30$ m. Prvá guľa má hmotnosť $m_1 = 30$ kg a rýchlosť $v_1 = 20$ m \cdot s⁻¹, druhá guľa má hmotnosť $m_2 = 50$ kg a rýchlosť $v_2 = 50$ m \cdot s⁻¹.

a) Za aký čas dobehne druhá guľa prvú?

b) Aká bude ich spoločná rýchlosť v istom okamihu (vtedy, keď na seba narazia), prvé obdobie zrazu?

c) Aké budú rýchlosti u_1 a u_2 po skončení dotyku oboch gúl? (Čím sa končí obdobie zrazenia, a tým aj celé zrazenie.)

Riešenie:

a) Druhá guľa dobehne prvú za

$$t = \frac{d}{v_2 - v_1} = \frac{30}{50 - 20} = \frac{30}{30} = 1 \text{ s}$$

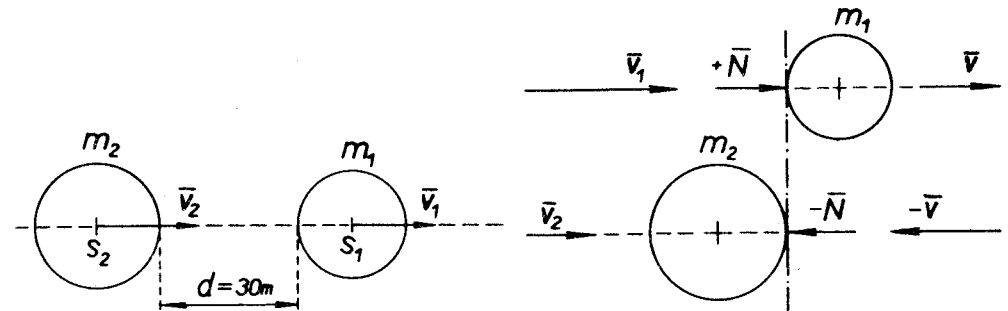
b) Nárazové sily $\pm N$ sa zväčšujú postupne od nuly až po isté maximum, ktoré nastane práve v okamihu, keď obidve gule dosiahnu tú istú rýchlosť u (obr. 103).

Podľa vety o zmene hybnosti platí pre prvú guľu vzťah

$$m_1 \cdot u - m_1 \cdot v_1 = \int N \cdot dt$$

a pre druhú guľu

$$m_2 \cdot u - m_2 \cdot v_2 = \int (-N) dt$$



Obr. 10.2.

Obr. 10.3.

Ak tieto dve rovnice sčítame, dostaneme

$$(m_1 + m_2) \cdot v - m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2 = 0$$

z čoho

$$u = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} = \frac{30 \cdot 20 + 50 \cdot 50}{30 + 50} = \frac{3100}{80} = 38,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

c) Po vyrovnaní rýchlosti oboch gúl na spoločnú rýchlosť u pôsobia však nárazové sily $\pm N$ ďalej, takže rýchlosť prvej gule sa zväčšuje a rýchlosť druhej sa spomaľuje. Nárazové sily $\pm N$ sa ustavične znižujú a v okamihu, keď sa gule prestanú dotýkať, nárazové sily klesnú až na nulu, čím sa končí druhé obdobie zrazenia, a tým aj celé zrazenie.

Zmeny rýchlostí oboch guľ sú v prvom aj v druhom období zrazenia rovnaké, preto pre prvú guľu platí vzťah

$$\mathbf{u} - \mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}$$

pre druhú

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_2$$

Z uvedených rovníc vyplýva

$$\mathbf{u}_1 = 2\mathbf{u} - \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{u}_2 = 2\mathbf{u} - \mathbf{v}_2$$

príčom podľa rovnice pre spoločnú rýchlosť je

$$\mathbf{u} = \frac{m_1 \cdot \mathbf{v}_1 + m_2 \cdot \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Dosadením za rýchlosť \mathbf{u} do rovnice pre \mathbf{u}_1 a \mathbf{u}_2 dostaneme

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2) \cdot v_1 + 2m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} = \frac{(30 - 50) \cdot 20 + 2 \cdot 50 \cdot 50}{30 + 50} = \\ = \frac{-400 + 5000}{80} = 57,50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$u_2 = \frac{2m_1 \cdot v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 30 \cdot 20 + (50 - 30)50}{30 + 50} = \\ = \frac{1200 + 1000}{80} = 27,50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

keďže

$$u = \frac{v_1 + u_1}{2} = \frac{20 + 57,50}{2} = 38,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Príklad 10-3:

Z príkladu 10-2, ak hmotnosti oboch pohybujúcich sa guľ sú rovnaké, teda $m_1 = m_2$, dosadením rovníc pre u_1 a u_2 dostaneme

$$u_1 = \frac{(m_2 - m_2) \cdot v_1 + 2m_2 \cdot v_2}{m_2 + m_2} = \frac{2m_2 \cdot v_2}{2m_2} = v_2$$

potom

$$u_1 = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$u_2 = \frac{2m_2 \cdot v_1 + (m_2 - m_2) \cdot v_2}{m_2 + m_2} = \frac{2m_2 \cdot v_1}{2m_2} = v_1$$

a napokon

$$u_2 = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Zrazenie dokonale nepružných telies

Predpokladajme, že telesá sa pred nárazom, ako aj po ňom správajú ako dokonale tuhé a že vykonávajú len posuvný pohyb.

Príklad 10-4:

Máme dve dokonale nepružné gule hmotnosti $m_1 = 20 \text{ kg}$ a $m_2 = 50 \text{ kg}$ a rýchlosti $v_1 = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a $v_2 = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Máme vypočítať:

- spoločnú rýchlosť guľ,
- úbytok kinetickej energie.

Riešenie:

a) Pri náraze ich spoločná rýchlosť bude daná vzorcom

$$u = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} = \frac{20 \cdot 20 + 50 \cdot 50}{20 + 50} = 41,42 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Gule sú však dokonale nepružné, ich deformácie sú trvalé. Len čo sa teda ich rýchlosti rovnajú, prestanú na seba pôsobiť, a preto zostávajú trvale v dotyku. Keď rýchlosti gule po zrazení sú u_1, u_2 , bude sa ich spoločná rýchlosť $u_1 = u_2 = u$, ako sme už vypočítali, rovná $41,42 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

b) Stratu kinetickej energie, ktorá vždy vzniká pri nepružnom náraze, vypočítame zo vzťahu

$$Z = \frac{1}{2}m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot v^2$$

Príklad 10-5:

Baranidlo hmotnosti $m_1 = 200 \text{ kg}$ dopadá z výšky $h = 100 \text{ cm}$ na kovový kus ležiaci na nákovke hmotnosti $m_2 = 2000 \text{ kg}$. Aká bude rýchlosť dopadu, kinetická energia baranidla a deformačná práca?

Riešenie:

Rýchlosť dopadu vypočítame z rovnice

$$v_1 = \sqrt{2g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1,00} = 4,44 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Kinetická energia baranidla je

$$E_b = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot (4,44)^2 =$$

$$= 100 \cdot 19,71 = 1\,971 = 1\,971 \text{ m} \cdot \text{N} = 1\,971 \text{ J}$$

a deformačná práca

$$\Delta E_k = E_b \cdot \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} = 1\,971 \cdot \frac{1}{1 + \frac{200}{2\,000}} =$$

$$= \frac{1\,971}{1,10} = 1\,790 = 1\,790 \text{ m} \cdot \text{N} = 1\,790 \text{ J}$$

Vidíme, že účinnosť nárazu daná pomerom práce vykonanej zdvihnutím baranidla k práci použitej na sploštenie kovaného kusa v tomto prípade je

$$\frac{\Delta E_k}{\Delta E_b} = \frac{1}{1,10} = 0,909 = 90,90 \%$$

Zrazenie čiastočne pružných telies

Reálne telesá nie sú ani úplne nepružné, ani dokonale pružné. Pomer zmien rýchlosti v druhom období zrazenia k zmenám rýchlosti v prvom období sa nazýva *súčiniteľ vzpružnosti* (reštitúcie alebo aj zrazenia). Jeho veľkosť závisí od látky telies a sily zrazenia. Je vyjadrený vzorcom

$$\frac{u_1 - u_2}{v_2 - v_1} = \bar{\varepsilon}$$

Súčinitele pre rôzne materiály určujeme experimentálne.

Príklad 10-6:

Lopta vrhnutá zvisle nahor rýchlosťou $c = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ vystúpi do výšky 6 m a spadne do východiskovej polohy rovnakou rýchlosťou (odpor vzduchu neberieme do úvahy). Akou rýchlosťou sa vráti do východiskovej polohy, ak pri stúpaní narazí na vodorovnú dosku (povalu) vo výške 3 m; súčiniteľ reštitúcie $\varepsilon = 0,7$?

Riešenie:

Z vety o energii vyplýva, že lopta narazí na povalu rýchlosťou c danou vzťahom

$$\frac{1}{2} m \cdot c^2 = \frac{1}{2} m \cdot c^2 - m \cdot g \cdot h$$

čiže

$$c^2 = c^2 - 2g \cdot h$$

ktorá sa odrazom zmení na opačnú rýchlosť veľkosti

$$v = \varepsilon \cdot c = \varepsilon \cdot \sqrt{c^2 - 2g \cdot h}$$

Rýchlosť dopadu vyplýva zasa z vety o energii vyjadrenej rovnicou

$$V^2 = v^2 + 2g \cdot h = \varepsilon^2 \cdot c^2 + (1 - \varepsilon^2) 2g \cdot h$$

Z rovnice vidíme, že lopta by sa vrátila pôvodnou rýchlosťou, keby náraz bol dokonale pružný, ak neberieme do úvahy prípad, že by povala bola práve vo výške vrhu (6 m).

Pri nepružnom náraze by lopta padala od povaly voľným pádom. Rýchlosť lopty pri návrate je inak menšia než pôvodná, ako vychádza aj z danej úlohy.

$$V^2 = (0,49 \cdot 225 + 0,51 \cdot 2 \cdot 9,81 \cdot 3) = 140,268 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

$$V = 11,85 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Príklad 10-7:

Vypočítajte súčiniteľ reštitúcie — pružnosť sklenej gučky, keď spadne na vodorovnú sklenú podložku z výšky $H = 95 \text{ cm}$ a vráti sa do polohy (výšky) 65 cm od vodorovnej dosky. Odpor vzduchu neberieme do úvahy.

Riešenie:

$$C_1 = \sqrt{2g \cdot H}$$

$$v_1 = -\varepsilon \cdot C_1 = -\varepsilon \sqrt{2g \cdot H}$$

Gučka odskočí teda do výšky h danej vzťahom

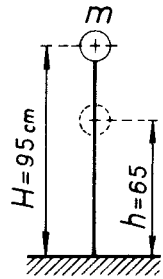
$$\sqrt{2g \cdot h} = -v_1$$

Z posledných dvoch rovníc vypočítame pružnosť

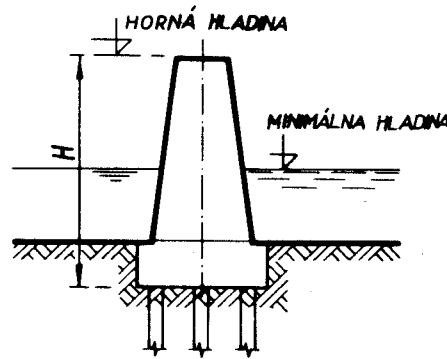
$$\varepsilon = \frac{-v_1}{C_1} = \frac{-\sqrt{2g \cdot h}}{\sqrt{2g \cdot H}} = \sqrt{\frac{h}{H}} = \sqrt{\frac{65 \text{ cm}}{95 \text{ cm}}} = 0,828$$

Únosnosť zabaranených pilót

Pilóty sú koly zhotovené z dreva, ocele alebo oceľobetónu. Po zarazení do zeme bývajú základom napr. pri pozemných, mostných a iných stavbách. Pilóty môžeme zapúšťať do podložia baranením.



Obr. 10.4.



Obr. 10.5.

Príklad 10-8:

Na málo únosnom podloží sa má založiť mostný pilier, ktorý sa bude zakladať na pilótovej rošti. Celkové zaťaženie po základovej škáru bude $R = 15\,000\text{ kN}$. Pre zjednodušenie budeme predpokladať, že každej pilóte sa prisúdi rovnaká únosnosť. Hmotnosť pilóty $m_p = 1\,500\text{ kg}$, hmotnosť baranidla $m_B = 2\,500\text{ kg}$, pričom padá z výšky $h = 1,5\text{ m}$. Pilóta vnikne posledným nárazom do zeme o $e = 1\text{ cm}$. Koľko pilót budeme potrebovať na zhotovenie pilótovej rošti, ktorý bude niesť mostný pilier?

Riešenie:

1. Dopadová rýchlosť barana

$$v_B = \sqrt{2g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1,5} = 5,42\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2. Pohybová energia barana

$$E_B = \frac{1}{2} m_B \cdot v_B^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\,500 \cdot (5,42)^2 = 36\,720,5\text{ kgm}^2 \cdot \text{s}^{-2} = \\ = 36\,720,5\text{ mN} = 36\,720,5\text{ J}$$

3. Spoločná rýchlosť oboch, barana i pilóty (rýchlosť pilóty pred zrazom $v_p = 0$)

$$v_s = \frac{m_B \cdot v_B}{m_B + m_p} = \frac{2\,500 \cdot 5,42}{2\,500 + 1\,500} = 3,327\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

4. Užitočná pohybová energia baranidla a pilóty

$$E' = \frac{1}{2} (m_B + m_p) \cdot v_s^2 = \frac{1}{2} (2\,500 + 1\,500) \cdot 3,327^2 = \\ = 22\,950\text{ mN} = 22\,950\text{ J}$$

5. Účinnosť zrazu

$$\eta' = \frac{E'}{E_B} = \frac{22\,950}{36\,720,5} = 0,625 = 62,5\%$$

6. Odpor zeminu proti vnikaniu pilóty
Platí tu vzťah, že práca

$$A = O \cdot e$$

z toho odpor zeminu

$$O = \frac{A}{e}$$

po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$A = E' + (m_B \cdot g + m_p \cdot g)e = 22\,950 + (2\,500 + 1\,500)9,81 \cdot 0,01 = \\ = 22\,950 + 392,40 = 23\,342,40\text{ N} \cdot \text{m}$$

$$O = \frac{A}{e} = \frac{23\,342,40}{0,01} = 2,334 \cdot 240\text{ N}$$

7. Únosnosť pilóty určíme zo vzťahu

$$U = \frac{O}{15} = \frac{2,334 \cdot 240}{15} = 155 \cdot 616\text{ N}$$

únosnosť sme zobrali ako 1/15 odporu O .

8. Koľko pilót budeme potrebovať na vytvorenie pilótovej rošti?

$$n = \frac{R}{U} = \frac{150 \cdot 10^3 \cdot 10^3\text{ N}}{155,616 \cdot 10^3\text{ N}} = 0,9639 \cdot 10^2 = 97$$

V tomto príklade sme nebrali do úvahy vzdialenosť medzi jednotlivými pilótami a iné kritériá. Pri použití menšieho množstva pilót by sme použili pilóty s väčšou únosnosťou.

XI. D'ALEMBERTOV PRINCÍP

Telesá, hmotné body, prípadne ich sústavy počas pohybu umožňuje výhodne skúmať d'Alembertov princíp. Vychádza z Newtonových zákonov a zavádza pojem „zotrvačné sily“, ktoré dovoľujú riešiť dynamický problém ako problém rovnováhy, t. j. statický. Ide o dynamickú rovnováhu, keď vonkajšie sily, ktoré spôsobujú pohyb, sú v každom okamihu pohybu v rovnováhe so zotrvačnými silami. Pojmom *zotrvačná sila* označujeme silu alebo moment pôsobiaci v ťažisku telesa proti smeru predpokladaného pohybu. Ich veľkosť je daná súčinom hmotnosti a zrýchlenia alebo hmotného momentu zotrvačnosti a uhlového zrýchlenia pri otáčavom pohybe. Formálne vznikli anulovaním Newtonových pohybových rovníc

$$\mathbf{P} + (-m \cdot \mathbf{a}) = 0$$

$$\mathbf{M} + (-I \cdot \epsilon) = 0$$

kde zotrvačné sily sú $(-m \cdot \mathbf{a})$ a $(-I \cdot \epsilon)$.

Všeobecný postup riešenia príkladov použitím d'Alembertovho princípu

1. Zistíme počet a druhy stupňov voľnosti sústavy, telesa alebo hmotného bodu. Počet stupňov voľnosti určíme podľa toho, či ide o rovinnú alebo priestorovú sústavu zo vzťahov

a) v rovine
$$S = 3n + 2m - (v_1 + 2v_2 + 3v_3)$$

b) v priestore
$$S = 6n + 3m - (v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4 + 5v_5 + 6v_6)$$

kde n je počet telies v sústave,

m — počet hmotných bodov v sústave,

v_i — počet vnútorných a vonkajších väzieb v sústave rušiacich i -stupňov voľnosti, respektíve zabraňujúcich i -pohybom zo šiestich možných (i sa môže rovnať jednej až šiestim).

2. Vonkajšie i vnútorné väzby nahradíme silami, ktoré v nich môžu vzniknúť, podľa zásad uvedených v statike. (Pozri úvod ku kapitole 1.2.)

3. V ťažiskách telies necháme pôsobiť, vzhľadom na možnosti ich pohybu — stupne voľnosti — zotrvačné sily proti smeru predpokladaného alebo zadaného pohybu. Pri posuvnom pohybe je to $-m \cdot \mathbf{a}$, pri otáčavom pohybe $-I \cdot \epsilon$, kde \mathbf{a} je predpokladané alebo zadané zrýchlenie telesa,

$$m \text{ — hmotnosť pohybujúceho sa telesa } \left(m = \frac{Q}{g}\right),$$

ϵ — uhlové zrýchlenie pri otáčavom pohybe buď zadané, alebo predpokladané,

I — hmotný moment zotrvačnosti okolo osi otáčania, obyčajne k ťažisku;

$$I = \int_0^m \rho^2 \cdot dm$$

4. Pre vzniknutú silovú sústavu si zvolíme vhodnú súradnicovú sústavu, obyčajne so začiatkom v ťažisku pohybujúceho sa telesa.

5. Určíme si pre sily smery a súradnice pôsobísk v zvolenej súradnicovej sústave.

6. Zostavujeme podmienky dynamickej rovnováhy podľa zásad statickej rovnováhy. Podmienky rovnováhy môžeme písať podľa potreby buď pre celú sústavu, alebo jednotlivo pre samostatné telesá, tak ako to bude vyžadovať riešenie úlohy. Počet podmienok rovnováhy bude závisieť od toho, či sústava bude rovinná alebo priestorová. Všeobecne môžeme v priestore napísať šesť skalárnych podmienok rovnováhy k ťažisku telesa.

$$R_x = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \cos \alpha_i - \sum_{i=1}^m m_i \cdot a_{ix} = 0$$

$$R_y = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \cos \beta_i - \sum_{i=1}^m m_i \cdot a_{iy} = 0$$

$$R_z = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \cos \gamma_i - \sum_{i=1}^m m_i \cdot a_{iz} = 0$$

$$M_x = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \cos \gamma_i (y - y_i) - \sum_{i=1}^n P_i \cdot \cos \beta_i (z - z_i) +$$

$$+ \sum_{j=1}^m m_j \cdot a \cdot \cos \gamma_j (y - y_j) - \sum_{j=1}^m m_j \cdot a \cdot \cos \beta_j (z - z_j) +$$

$$+ \sum_{i=1}^k M_{ix} + \sum_{j=1}^l I_{jx} \cdot \epsilon_x = 0$$

$$M_y = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \cos \alpha_i (z - z_i) - \sum_{i=1}^n P_i \cdot \cos \gamma_i (x - x_i) + \\ + \sum_{j=1}^m m_j \cdot a \cdot \cos \alpha_j (z - z_j) - \sum_{j=1}^m m_j \cdot a \cdot \cos \gamma_j (x - x_j) + \\ + \sum_{i=1}^k M_{iy} + \sum_{j=1}^l I_{jy} \cdot \varepsilon_y = 0$$

$$M_z = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \cos \beta_i (y - y_i) - \sum_{i=1}^n P_i \cdot \cos \alpha_i (x - x_i) + \\ + \sum_{j=1}^m m_j \cdot a \cdot \cos \beta_j (y - y_j) - \sum_{j=1}^m m_j \cdot a \cdot \cos \alpha_j (x - x_j) + \\ + \sum_{i=1}^k M_{iz} + \sum_{j=1}^l I_{jz} \cdot \varepsilon_z = 0$$

Vo vzťahoch

P_i je i -tá sila sústavy,

α_i — uhol smeru sily P_i s osou X ,

β_i — uhol smeru sily P_i s osou Y ,

γ_i — uhol smeru sily P_i s osou Z ,

x_i, y_i, z_i — súradnice pôsobiska sily P_i ,

m_j — hmotnosť telesa j ,

a — zrýchlenie telesa j vo všeobecnom smere,

α_j — uhol smeru zrýchlenia s osou X ,

β_j — uhol smeru zrýchlenia s osou Y ,

γ_j — uhol smeru zrýchlenia s osou Z ,

x_j, y_j, z_j — súradnice ťažiska telesa j ,

M_{ix} — i -tá dvojica otáčajúca sa okolo osi X alebo priemet všeobecnej dvojice do tejto osi,

M_{iy} — i -tá dvojica síl otáčajúca sa okolo osi Y , alebo priemet všeobecnej dvojice do tejto osi,

M_{iz} — i -tá dvojica síl otáčajúca sa okolo osi Z , alebo priemet všeobecnej dvojice do tejto osi,

I_j — hmotný moment zotrvačnosti k ťažiskovej ose (x, y, z) telesa j ,

ε_j — uhlové zrýchlenie j -tého telesa,

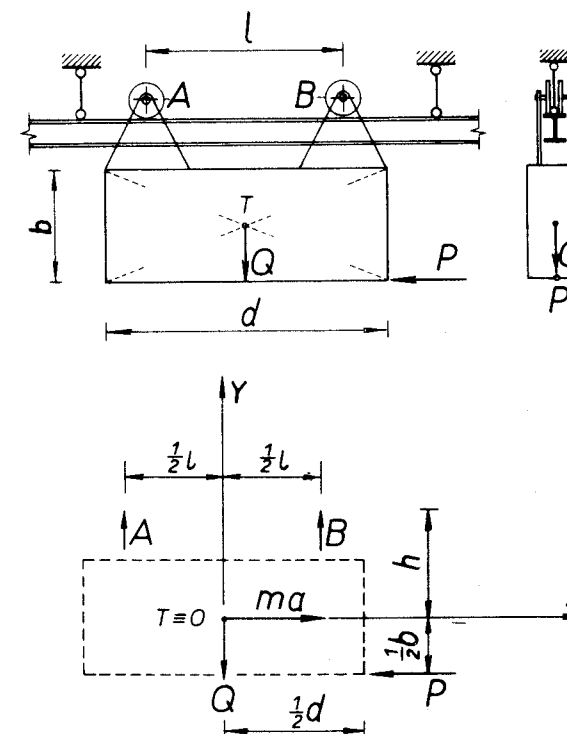
M_x, M_y, M_z sú výsledné momenty k ťažiskovým osiam.

7. Riešime sústavu rovníc.

Príklad 11-1:

Vozík celkovej tiaže Q pôsobiacej v ťažisku zavesený na dvoch kolieskach (A a B) sa pohybuje účinkom sily P (podľa obrázka) po vodorovnej dráhe. Treba určiť:

- Závislosť tlakov kolies na dráhu od sily P .
- Veľkosť sily P za predpokladu, že tlak kolieska A na dráhu je nulový a veľkosť tlaku kolieska B .
- Veľkosť zrýchlenia vozíka a , keď $A = 0$ a účinok trenia neberieme do úvahy.



Obr. 11-1a,b.

1. Určenie stupňov voľnosti:

Vozík predstavuje teleso upevnené dvoma posuvnými podperami, pričom silovú sústavu vzhľadom na symetriu v priečnom smere okolo zvislej roviny môžeme pokladať za rovinnú. Potom $n = 1$, $m = 0$, $v_1 = 2$, $v_1 = v_2 =$ atď. $= 0$ a $S = 1 \times 3 + 0 \times 2 - (2) = 1$.

Jeden stupeň voľnosti predstavuje možnosť vozíka pohybovať sa po dráhe, t. j. vodorovne.

2. Účinok koliesok na vozík nahradíme v mieste dotyku s dráhou zvislými silami (A a B), pretože ide o jednoduché posuvné podpery.

3. Pretože sa vozík môže pohybovať vodorovne, v smere sily P , necháme v ťažisku pôsobiť proti smeru zotrvačnú silu $-m \cdot \mathbf{a} = -\frac{Q}{g} \mathbf{a}$.

4. Pre vzniknutú silovú sústavu si zvolíme za začiatok ťažisko vozíka a os X bude vodorovná.

5. Určenie smerov a pôsobísk síl a smeru zrýchlenia $\alpha_A = \alpha_B = 90^\circ$, $\alpha_O = 270^\circ$, $\alpha_P = 180^\circ$, $\alpha_a = 0^\circ$,

$$x_O = x_{m\mathbf{a}} = y_O = y_{m\mathbf{a}} = 0, \quad x_A = -x_B = -0,5l, \quad y_A = y_B = h \\ x_P = 0,5d, \quad y_P = -0,5b$$

6. Zostavenie podmienok dynamickej rovnováhy. Na riešenie použijeme dve silové podmienky rovnováhy a jednu momentovú podmienku k začiatku súradnicového systému

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = A \cdot \cos 90^\circ + Q \cdot \cos 270^\circ + m \cdot a \cdot \cos 0^\circ + \\ + B \cdot \cos 90^\circ + P \cdot \cos 180^\circ = 0 \quad (1)$$

po úprave rovnice dostaneme výraz pre rovnováhu vodorovných síl

$$m \cdot a - P = 0$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = A \cdot \sin 90^\circ + Q \cdot \sin 270^\circ + m \cdot \mathbf{a} \cdot \sin 0^\circ + \\ + B \cdot \sin 90^\circ + P \cdot \sin 180^\circ = 0 \quad (2)$$

po úprave rovnice dostaneme vzťah medzi zvislými silami

$$A + B - Q = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_{i0} = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \sin \alpha_i (x - x_i) - \sum_{i=1}^n P_i \cdot \cos \alpha_i (y - y_i) = 0 \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{i0} = A \cdot \sin 90^\circ (0 - x_A) - A \cdot \cos 90^\circ (0 - y_A) + \\ + Q \cdot \sin 270^\circ (0 - x_O) - Q \cdot \cos 270^\circ (0 - x_O) + \\ + m \cdot a \cdot \sin 0^\circ (0 - x_a) - m \cdot \mathbf{a} \cdot \cos 0^\circ (0 - y_a) + \\ + B \cdot \sin 90^\circ (0 - x_B) - B \cdot \cos 90^\circ (0 - y_B) + \\ + P \cdot \sin 180^\circ (0 - x_P) - P \cdot \cos 180^\circ (0 - y_P) = 0$$

po úprave dostaneme rovnicu 3

$$0,5A \cdot l - 0,5l \cdot B + P \cdot 0,5b = 0$$

7. Riešenie rovníc

a) Zo sústavy rovníc 2 a 3 určíme A a B

$$A = 0,5Q - 0,5 \frac{b}{l} P$$

$$B = 0,5Q + 0,5 \frac{b}{l} P$$

b) zo vzťahu pre $A = 0$, $P = \frac{l}{b} Q$

po dosadení do druhého

$$B = Q$$

c) Z rovnice 1 po dosadení za P a m dostaneme

$$a = \frac{l}{b} g$$

Príklad 11-2:

Teleso s vlastnou tiažou Q_1 sa pohybuje po hladkej vodorovnej rovine konštantným zrýchlením a . Spolu s ním sa pohybuje aj prizmatický prút tiaže Q_2 a dĺžky l , ktorý je k nemu v ťažisku kĺbovo pripevnený podľa obrázka. Je potrebné určiť:

- Veľkosť sily, ktorá pohyb spôsobuje.
- Veľkosť uhla φ , ktorý bude zvierat za pohybu prizmatický prút so zvislicou.
- Reakcie, ktorými prút pôsobí na teleso. (Trenie pritom neberieme do úvahy.)

1. Určenie stupňov voľnosti: Sústava sa skladá z dvoch kĺbovo spojených telies, ktoré sú navonok podopreté hladkou rovinou rušiacou jeden stupeň voľnosti. Sústavu vzhľadom na symetriu v priečnom smere k zvislej rovine môžeme pokladať za rovinnú. Potom $n = 2$, $m = 0$, $v_1 = 1$, $v_2 = 1$, $v_3 = 0$ a $S = 2 \times 3 + 0 \times 2 - (1 \times 1 + 1 \times 2) = 3$.

Sústava telies má tri stupne voľnosti. Teleso posunujúce sa po rovine má dva stupne voľnosti, ktoré spočívajú v možnosti vodorovného posunu a pootáčania. Pootáčanie nemôže nastať, pretože silová sústava, ktorá naň pôsobí, je centrálna a nevyvodzuje momentový účinok. Preto táto podmienka rovnováhy je identicky splnená a nemusíme ju brať do úvahy. Prizmatický prút má len jeden stupeň voľnosti, a to možnosť pootáčať sa okolo kĺbu na telese.

2. Účinok jedinej vonkajšej väzby na sústavu nahradíme zvislou silou A pôsobiaceou cez ťažisko telesa, resp. v polovici dosadacej plochy. Účinok vnútornej väzby na obidve telesá nahradíme sústavou dvoch zvislých (B'_x a B''_x) a dvoch vodorovných (B'_y a B''_y) síl pôsobiacich v osi kĺbu.

3. Vzhľadom na to, že obe telesá môžu vykonávať len vodorovný pohyb, necháme v ťažisku oboch telies, proti smeru pohybu, pôsobiť zotrvačné sily $m_1 \cdot a = \frac{Q_1}{g} a$ a $m_2 \cdot a = \frac{Q_2}{g} a$. V smere pohybu necháme pôsobiť neznámu silu P , ktorá zrýchlenie a vyvolala.

4. Začiatok súradnicovej sústavy si zvolíme v ťažisku x_1 prvého telesa s vodorovnou osou x .

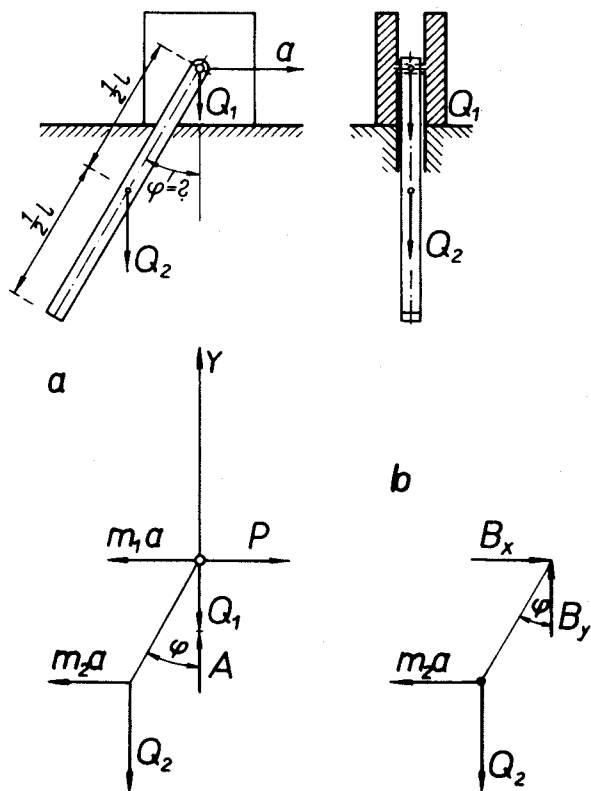
5. Určenie smerov a pôsobísk síl (vrátane zotrvačných síl)

$$\alpha_A = \alpha'_{B_y} = 90^\circ, \quad \alpha'_{B_x} = \alpha_P = 0^\circ, \quad \alpha_{Q_1} = \alpha_{Q_2} = \alpha'_{B_y} = 270^\circ$$

$$\alpha_a = \alpha_{B_x} = 180^\circ$$

$$x_{Q_2} = x_{m_2 a} = -0,5l \cdot \sin \varphi, \quad y_{Q_2} = y_{m_2 a} = -0,5l \cos \varphi$$

Súradnice ostatných síl sa rovnajú nule.



Obr. 11-2a,b.

6. Zostavenie podmienok dynamickej rovnováhy

a) Pre celú sústavu použijeme všetky tri základné podmienky rovnováhy.

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = A \cdot \cos 90^\circ + Q_1 \cdot \cos 270^\circ + Q_2 \cdot \cos 270^\circ + P \cdot \cos 0^\circ + m_1 \cdot a \cdot \cos 180^\circ + m_2 \cdot a \cdot \cos 180^\circ = 0 \quad (1)$$

po úprave dostaneme rovnicu $P - m_1 \cdot a - m_2 \cdot a = 0$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = A \cdot \sin 90^\circ + Q_1 \cdot \sin 270^\circ + Q_2 \cdot \sin 270^\circ + P \cdot \sin 0^\circ + m_1 \cdot a \cdot \sin 180^\circ + m_2 \cdot a \cdot \sin 180^\circ = 0 \quad (2)$$

po úprave rovnice dostaneme ďalší vzťah

$$A - Q_1 - Q_2 = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_{i0} = & A \cdot \sin 90^\circ (0-0) - A \cdot \cos 90^\circ (0-0) + \\ & + Q_1 \cdot \sin 270^\circ (0-0) - Q_1 \cdot \cos 270^\circ (0-0) + \\ & + Q_2 \cdot \sin 270^\circ (0-x_{Q_2}) - Q_2 \cdot \cos 270^\circ (0-y_{Q_2}) + \\ & + P \cdot \sin 0^\circ (0-0) - P \cdot \cos 0^\circ (0-0) + \\ & + m_1 \cdot a \cdot \sin 180^\circ (0-0) - m_1 \cdot a \cdot \cos 180^\circ (0-0) + \\ & + m_2 \cdot a \cdot \sin 180^\circ (0-x_a) - m_2 \cdot a \cdot \cos 180^\circ (0-y_a) = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

po úprave dostaneme rovnicu

$$Q_2 \cdot 0,5l \sin \varphi + \frac{Q_2}{g} a \cdot 0,5l \cdot \cos \varphi = 0$$

b) Pre prút použijeme len silové podmienky rovnováhy.

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = B'_x \cdot \cos 0^\circ + B'_y \cdot \cos 90^\circ + Q_2 \cdot \cos 270^\circ + m_2 \cdot a \cdot \cos 180^\circ = 0 \quad (4)$$

po úprave dostaneme rovnicu

$$B_x - \frac{Q_2}{g} a = 0$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = B'_x \cdot \sin 0^\circ + B'_y \cdot \sin 90^\circ + Q_2 \cdot \sin 270^\circ + m_2 \cdot a \cdot \sin 180^\circ = 0 \quad (5)$$

po úprave získame poslednú rovnicu

$$B_y - Q_2 = 0$$

7. Riešenie

z rovnice (1)

$$P = \frac{a}{g} (Q_1 + Q_2)$$

z rovnice (2)

$$A = Q_1 + Q_2$$

z rovnice (3) delením $\cos \varphi$ a separáciou

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{g}$$

zo zvyšujúcich rovníc

$$B_x = \frac{a}{g} Q_2 \quad \text{a} \quad B_y = Q_2$$

Príklad 11-3:

Vozík sa pohybuje po vodorovnej rovine rovnomerným zrýchlením a . Na jeho plošine je kĺbovo a ťahadlom podľa obrázka pripevnený zvisle postavený prút tiaže Q a dĺžky $l = c + d$.

Určte veľkosť reakcií vo väzbách, ktorými je prút pripevnený k vozíku.

1. Pohybujúci sa vozík predstavuje sústavu dvoch telies navzájom spojených v jeden celok — bez stupňov voľnosti. Preto zrýchlenie vozíka aj prúta je rovnaké. Sústavu vzhľadom na symetriu v priečnom smere k zvislej rovine môžeme pokladať za rovinnú. Pre prút platí $n = 1$, $m = 0$, $v_1 = 1$, $v_2 = 1$ a $S = 3 \times 1 - (1 + 1) - (1 \times y) = 0$.

2. Účinok kĺba na prút nahradíme zvislou (A_y) a vodorovnou (A_x) silou; účinok ťahadla vodorovnou silou T .

3. V ťažisku prúta necháme proti pohybu pôsobiť zotrvačnú silu $m \cdot a = \frac{Q}{g} a$.

4. Začiatok súradnicovej sústavy si zvolíme v osi kĺbu. Os X bude vodorovná.

5. Určenie smerov a pôsobísk síl

$$\alpha_{A_y} = 90^\circ, \quad \alpha_{A_x} = \alpha_T = 0^\circ, \quad \alpha_Q = 270^\circ, \quad \alpha_a = 180^\circ$$

$$x_{A_x} = x_{A_y} = x_Q = x_a = x_T = y_{A_x} = y_{A_y} = 0,$$

$$y_Q = y_a = \frac{1}{2} (c + d), \quad y_T = d$$

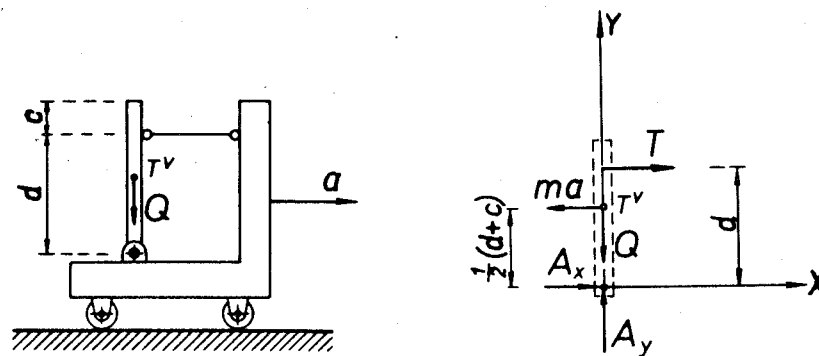
6. Zostavenie podmienok dynamickej rovnováhy: Na riešenie použijeme tri základné podmienky rovnováhy pre prút

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = A_x \cdot \cos \alpha_{A_x} + A_y \cdot \cos \alpha_{A_y} + Q \cdot \cos \alpha_Q + m \cdot a \cdot \cos \alpha_a + T \cdot \cos \alpha_T = 0 \quad (1)$$

po úprave dostaneme rovnicu

$$A_x - m \cdot a + T = 0$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = A_x \cdot \sin \alpha_{A_x} + A_y \cdot \sin \alpha_{A_y} + Q \cdot \sin \alpha_Q + m \cdot a \cdot \sin \alpha_a + T \cdot \sin \alpha_T = 0 \quad (2)$$



Obr. 11-3a,b.

po úprave dostaneme rovnicu

$$A_y - Q = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_{i0} &= A_x \cdot \sin 0^\circ (0 - 0) - A_x \cdot \cos 0^\circ (0 - 0) + \\ &+ A_y \cdot \sin 90^\circ (0 - 0) - A_y \cdot \cos 90^\circ (0 - 0) + \\ &+ Q \cdot \sin 270^\circ (0 - 0) - Q \cos 270^\circ \left[0 - \frac{1}{2} (c + d) \right] + \\ &+ m \cdot a \cdot \sin 180^\circ (0 - 0) - \\ &- m \cdot a \cdot \cos 180^\circ \left[0 - \frac{1}{2} (c + d) \right] + \\ &+ T \cdot \sin 0^\circ (0 - 0) - T \cdot \cos 0^\circ (0 - d) = P \end{aligned}$$

po úprave rovnice dostaneme

$$-\frac{1}{2}(c+d)\frac{Q}{g}a + T \cdot d = 0$$

7. Riešenie rovníc

z rovnice (3)

$$T = \frac{1}{2} \frac{(c+d)}{d} Q \frac{a}{g}$$

z rovnice (2)

$$A_y = Q$$

po dosadení za T z rovnice 1 dostaneme

$$A_x = \frac{a}{g} \frac{(d-c)}{2d} Q$$

Príklad 11-4:

Na šikmej rovine pohybujúceho sa telesa trojuholníkového tvaru, tiaže Q_1 je uložené valcové teleso tiaže Q_2 podľa obr. 11-4a. Je potrebné určiť:

a) Veľkosť vodorovnej sily P , ktorá musí pôsobiť na teleso v jeho ťažisku, aby valec na naklonenej rovine zostal v pokoji.

b) Veľkosť zrýchlenia, aké budú mať obidve telesá.

c) Veľkosť tlaku vyvolaného valcom na naklonenú rovinu. (Neberieme do úvahy účinkov trenia a tiaže valčekov, na ktorých sa teleso pohybuje.)

1. Sústavu vzhľadom na symetriu v priečnom smere k zvislej rovine môžeme pokladať za rovinnú. Skladá sa z dvoch telies, ktoré sú navonok podpreté dvoma posuvnými podperami a medzi sebou tiež len jednou posuvnou väzbou. Potom $n=2$, $m=0$, $v_1=3$ a $S=2 \times 3 + 0 \times 2 - 1 \times 3 = 3$.

Z toho jeden stupeň voľnosti má trojuholníkové teleso, lebo sa môže vodorovne pohybovať. Valec má dva stupne voľnosti, a to možnosť pootáčania a posuvu po naklonenej rovine. Pretože silová sústava pôsobiaca na valec je centrálna, momentová podmienka rovnováhy je identicky splnená a nemusíme ju ďalej brať do úvahy.

2. Účinky vonkajších väzieb nahradíme zvislými silami A a B a vo vnútornej väzbe reakciou C kolmou na naklonenú rovinu.

3. Za predpokladu pokoja valca budú mať obidve telesá rovnaké zrýchlenie čo do veľkosti aj smeru. V ťažisku valca necháme pôsobiť vodorovnú zotrvačnú silu

$$m_2 a = \frac{Q_2}{g} a \text{ a v trojuholníkovom telese } m_1 a = \frac{Q_1}{g} a.$$

4. Súradnicová sústava bude mať začiatok v ťažisku trojuholníkového telesa s vodorovnou osou X .

5. Určenie smerov síl

$$\alpha_A = \alpha_B = 90^\circ, \quad \alpha_{Q_1} = \alpha_{Q_2} = 270^\circ, \quad \alpha_a = 0^\circ,$$

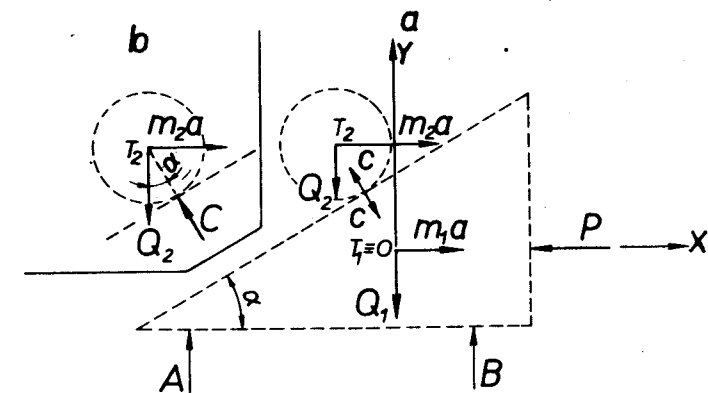
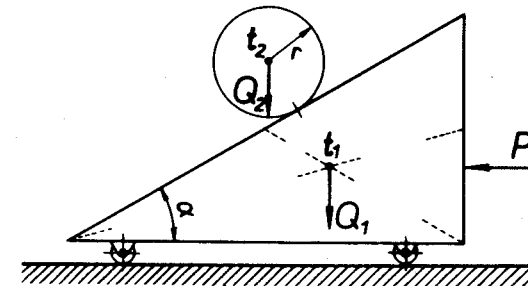
$$\alpha_P = 180^\circ, \quad \alpha_C = (90^\circ + \alpha)$$

Pôsobiská síl nemusíme počítať, pretože na určenie troch neznámych nebude potrebovať súradnice.

6. Zostavenie podmienok rovnováhy:

Pretože potrebujeme poznať tri neznáme P , zrýchlenie a aj C , ale reakcie A , B nás nezaujímajú, postačí nám napísať pre celú sústavu jednu silovú podmienku v smere vodorovnom a dve silové podmienky pre rovnováhu samotného valca. Pre celú sústavu po dosadení do všeobecného vzťahu

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = A \cdot \cos 90^\circ + B \cdot \cos 90^\circ + Q_1 \cdot \cos 270^\circ + Q_2 \cdot \cos 270^\circ + m_1 \cdot a \cdot \cos 0^\circ + m_2 \cdot a \cdot \cos 0^\circ + P \cdot \cos 180^\circ = 0 \quad (1)$$



Obr. 11-4a,b.

po úprave rovnice (1) dostaneme

$$\frac{Q_1}{g}a + \frac{Q_2}{g}a - P = 0$$

Pre valec

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = m_2 \cdot a \cdot \cos 0^\circ + C \cdot \cos (90^\circ + \alpha) + Q_2 \cdot \cos 270^\circ = 0 \quad (2)$$

po úprave rovnice (2) dostaneme

$$\frac{Q_2}{g}a - C \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = m_2 \cdot a \cdot \sin 0^\circ + C \cdot \sin (90^\circ + \alpha) + Q_2 \cdot \sin 270^\circ = 0$$

po úprave rovnice (3) bude

$$C \cdot \cos \alpha - Q_2 = 0$$

7. Riešenie rovníc

z rovnice (3) dostaneme

$$C = \frac{Q_2}{\cos \alpha}$$

po dosadení za C do rovnice (2) a po úprave dostaneme

$$a = g \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

po dosadení za a do rovnice (1) dostaneme

$$P = (Q_1 + Q_2) \operatorname{tg} \alpha$$

Príklad 11-5:

Za pohybujúcim sa vozidlom je pripevnený kyvným prútom dĺžky l_1 a tiaže Q_1 trám tiaže Q_2 a dĺžky l_2 podľa obrázka. Je potrebné určiť:

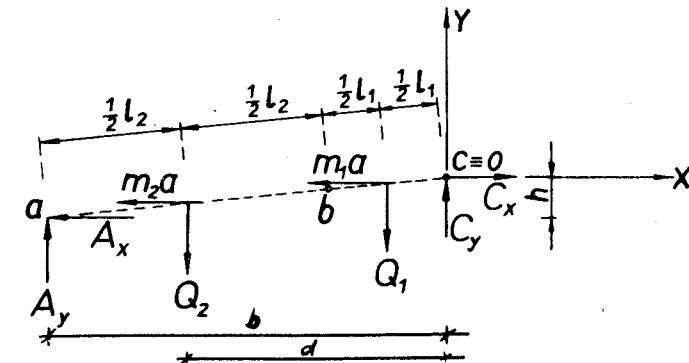
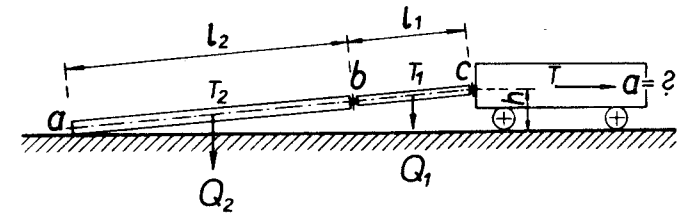
a) Veľkosť zrýchlenia, aké musí mať vozidlo pri pohybe po vodorovnej rovine, aby pozdĺžna os kyvného prúta a trámu boli v jednej priamke, keď súčiniteľ trenia $f = 0,3$ a $f = 0$.

b) Veľkosť sily, ktorou trám tlačí na rovinu, po ktorej sa pohybuje.

c) Veľkosť tlaku kyvného prúta na vozidlo. (Neberieme do úvahy priečne rozmery trámu.)

1. Sústava sa skladá z troch telies, ktoré sú medzi sebou spojené dvoma kĺbmi a navonok podopreté tromi klznými podperami. Potom $n = 3$, $m = 0$, $v_1 = 3$, $v_2 = 2$, $v_3 = 0$ a $S = 3 \times 3 + 0 \times 2 - (3 \times 1 + 2 \times 2) = 2$.

Sústava má dva stupne voľnosti, ktoré sú dané možnosťou vodorovného pohybu a možnosťou vzájomného pootáčania stredného kyvného prúta a trámu v bode b .



Obr. 11-5a,b.

2. Účinok vonkajších väzieb nahradíme tromi zvislými silami A , D a E , pričom sily D a E (reakcie vozidla na rovinu) nebudeme brať do úvahy. V kĺbe c nahradíme účinok väzby na kyvný prút a vozík dvoma zvislými a dvoma vodorovnými silami tvoriacimi nulovú sústavu (C_x a C_y). V bode a bude vodorovne pôsobiť aj sila trenia $A_x = f \cdot A_y$.

3. Pretože nás zo sústavy zaujíma len kyvný prút a trám, necháme v ich ťažiskách pôsobiť zotrvačné sily vodorovného smeru vzhľadom na možnosť pohybu.

Preto $m_1 a = \frac{Q_1}{g} a$; a $m_2 a = \frac{Q_2}{g} a$ necháme pôsobiť vodorovne proti pohybu.

4. Začiatok súradnicovej sústavy si zvolíme v bode c s vodorovnou osou X .

5. Určenie smerov a pôsobísk síl

$$\alpha_{A_y} = \alpha_{C_y} = 90^\circ, \quad \alpha_{A_x} = \alpha_a = 180^\circ, \quad \alpha_{Q_1} = \alpha_{Q_2} = 270^\circ, \quad \alpha_{C_x} = 0^\circ$$

$$x_{A_x} = x_{A_y} = -\sqrt{(l_1 + l_2)^2 - h^2}, \quad y_{A_x} = y_{A_y} = -h$$

$$x_{O_2} = x_{m_2a} = -\sqrt{(l_1 + l_2)^2 - h^2} \left(\frac{l_1 + 0,5l_2}{l_1 + l_2} \right)$$

$$y_{O_2} = y_{m_2a} = -h \frac{l_1 + 0,5l_2}{l_1 + l_2}$$

$$y_b = -h \frac{l_1}{l_1 + l_2}, \quad x_b = -\sqrt{(l_1 + l_2)^2 - h^2} \left(\frac{l_1}{l_1 + l_2} \right)$$

$$x_{O_1} = x_{m_1a} = -\sqrt{(l_1 + l_2)^2 - h^2} \left(\frac{1}{2} \frac{l_1}{l_1 + l_2} \right)$$

$$y_{O_1} = -\frac{h}{2} \frac{l_1}{l_1 + l_2} = y_{m_1a}$$

pre zjednodušenie výpočtu dosadíme do rovníc

$$b = \sqrt{(l_1 + l_2)^2 - h^2}, \quad d = b \frac{(l_1 + 0,5l_2)}{l_1 + l_2}, \quad e = b \frac{0,5l_1}{l_1 + l_2}$$

$$x_{C_x} = x_{C_y} = y_{C_x} = y_{C_y} = 0$$

6. Zostavenie podmienok rovnováhy:

a) Pre sústavu trám, kyvný prút napíšeme dve silové a jednu momentovú (k začiatku súradnicového systému) podmienku rovnováhy. Pre trám použijeme momentovú podmienku k bodu b . K bodu b urobíme momentovú podmienku aj na kyvnom prúte.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_{ic} = & A_x \cdot \sin 180^\circ (0 - x_{A_x}) - A_x \cdot \cos 180^\circ (0 - y_{A_x}) + \\ & + A_y \cdot \sin 90^\circ (0 - x_{A_y}) - A_y \cdot \cos 90^\circ (0 - y_{A_y}) + \\ & + Q_2 \cdot \sin 270^\circ (0 - x_{O_2}) - Q_2 \cdot \cos 270^\circ (0 - y_{O_2}) + \\ & + Q_1 \cdot \sin 270^\circ (0 - x_{O_1}) - Q_1 \cdot \cos 270^\circ (0 - y_{O_1}) + \\ & + m_2 \cdot a \cdot \sin 180^\circ (0 - x_{m_2a}) - m_2 \cdot a \cdot \cos 180^\circ (0 - y_{m_2a}) + \\ & + m_1 \cdot a \cdot \sin 180^\circ (0 - x_{m_1a}) - m_1 \cdot a \cdot \cos 180^\circ (0 - y_{m_1a}) + \\ & + C_y \cdot \sin 90^\circ (0 - 0) - C_y \cdot \cos 90^\circ (0 - 0) + C_x \cdot \sin 0^\circ (0 - 0) - \\ & - C_x \cdot \cos 0^\circ (0 - 0) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

po úprave rovnice (1) dostaneme

$$A_y(f \cdot h + b)(l_1 + l_2) - Q_2 \cdot b(l_1 + 0,5l_2) -$$

$$- Q_1 \cdot b \cdot 0,5l_1 + a \frac{h}{g} [Q_2(l_1 + 0,5l_2) + Q_1 \cdot 0,5l_1] = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{ix} = & A_x \cdot \cos 180^\circ + A_y \cdot \cos 90^\circ + Q_2 \cdot \cos 270^\circ + \\ & + Q_1 \cdot \cos 270^\circ + m_2 \cdot a \cdot \cos 180^\circ + m_1 \cdot a \cdot \cos 180^\circ + \\ & + C_y \cdot \cos 90^\circ + C_x \cdot \cos 0^\circ = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

po úprave rovnice dostaneme vzťah

$$-A_y f - a(Q_1 + Q_2) \frac{1}{g} + C_x = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{iy} = & A_x \cdot \sin 180^\circ + A_y \cdot \sin 90^\circ + Q_2 \cdot \sin 270^\circ + \\ & + Q_1 \cdot \sin 270^\circ + m_2 \cdot a \cdot \sin 180^\circ + \\ & + m_1 \cdot a \cdot \sin 180^\circ + C_y \cdot \sin 90^\circ + C_x \cdot \sin 0^\circ = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

po úprave rovnice dostaneme vzťah

$$A_y - Q_2 - Q_1 + C_y = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_{ib} = & A_x \cdot \sin 180^\circ (x_b - x_{A_x}) - A_x \cdot \cos 180^\circ (y_b - y_{A_x}) + \\ & + A_y \cdot \sin 90^\circ (x_b - x_{A_y}) - A_y \cdot \cos 90^\circ (y_b - y_{A_y}) + \\ & + Q_2 \cdot \sin 270^\circ (x_b - x_{O_2}) - Q_2 \cdot \cos 270^\circ (y_b - y_{O_2}) + \\ & + m_2 \cdot a \cdot \sin 180^\circ (x_b - x_{m_2a}) - m_2 \cdot a \cdot \cos 180^\circ (y_b - y_{m_2a}) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

po úprave dostaneme rovnicu

$$A_y \cdot l_2(f \cdot h + b) - Q_2 \cdot b \cdot 0,5l_2 + Q_2 \cdot a \frac{h}{g} 0,5l_2 = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_{ib} = & C_y \cdot \sin 90^\circ (x_b - x_{C_y}) - C_y \cdot \cos 90^\circ (y_b - y_{C_y}) + \\ & + C_x \cdot \sin 0^\circ (x_b - x_{C_x}) - C_x \cdot \cos 0^\circ (y_b - y_{C_x}) + \\ & + Q_1 \cdot \sin 270^\circ (x_b - x_{O_1}) - Q_1 \cdot \cos 270^\circ (y_b - y_{O_1}) + \\ & + m_1 \cdot a \cdot \sin 180^\circ (x_b - x_{m_1a}) - \\ & - m_1 \cdot a \cdot \cos 180^\circ (y_b - y_{m_1a}) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

po úprave rovnice dostaneme

$$C_x \cdot h - C_y \cdot b + Q_1 \cdot 0,5b - Q_1 \frac{a}{g} 0,5h = 0$$

7. Riešenie rovníc

Sčítaním rovníc (1) a (4) a dosadením do rovnice (5) z rovníc (2) a (3) výrazy pre C_x a C_y dostávame dve rovnice na určenie A_y a zrýchlenie. Ich riešením

$$a = \frac{g}{h} \sqrt{(l_1 + l_2)^2 - h^2}$$

a reakcia $A_y = A_x = 0$

po dosadení za A_y a a do rovnice (2) dostaneme

$$C_x = \frac{1}{h} (Q_1 + Q_2) \sqrt{(l_1 + l_2)^2 - h^2}$$

a z rovnice (3)

$$C_y = Q_1 + Q_2$$

Príklad 11-6:

Bremeno Q_1 podľa obrázka je voľne položené na plošinu vozíka tiaže Q_2 . Za predpokladu, že súčiniteľ trenia medzi plošinou a bremenom $f = 0,25$ určte:

a) Zrýchlenie, ktorým sa môže vozík pohybovať, aby sa teleso na vozíku neprevrátilo.

b) Veľkosť sily, akou sa môže vozík ťahať, aby náklad zostal v rovnováhe.

c) Veľkosť a polohu výslednice síl pôsobiacich medzi plošinou a bremenom.

1. Sústavu vzhľadom na jej symetriu v priechom smere k zvislej rovine môžeme pokladať za rovinnú. V takom prípade ide o dve telesá v rovine, ktoré sú medzi sebou spojené posuvnou podperou a navonok dvoma klznými podperami. Potom $n = 2$, $m = 0$, $v_1 = 3$, $v_2 = v_3 = 0$ a $S = 2 \times 3 + 0 \times 2 - 3 \times 1 = 3$.

Tri stupne voľnosti sústavy predstavujú možnosť vodorovného pohybu vozíka a bremena, ako aj možnosť bremena pootočiť sa okolo hrany.

2. Účinok vnútornej väzby nahradíme zvislou silou S a vodorovnou silou F od trenia, ktorá závisí od sily vťahom

$$F = N \cdot f$$

Účinok vonkajších väzieb nahradíme v miestach dotyku koliesok s rovinou zvislými silami A a B .

3. Pretože sa vozík s nákladom pohybuje ako jeden celok, ich zrýchlenie bude rovnaké a potom v ťažisku nákladu necháme vodorovne pôsobiť zotrvačnú silu

$$m_1 \cdot a = \frac{Q_1}{g} a \quad \text{v ťažisku vozíka} \quad m_2 \cdot a = \frac{Q_2}{g} a.$$

4. Začiatok súradnicovej sústavy dáme do ľavej spodnej hrany nákladu. Os X bude vodorovná.

5. Výpočet smerov a pôsobísk síl

$$\alpha_A = \alpha_B = 90^\circ, \quad \alpha_P = 0^\circ, \quad \alpha_a = 180^\circ, \quad \alpha_{Q_1} = \alpha_{Q_2} = 270^\circ$$

$$x_F = y_F = y_N = 0, \quad x_N = x, \quad x_{Q_1} = 0,5b = x_{m_1 a}, \quad y_{Q_1} = y_{m_1 a} = 0,5h$$

Súradnice ostatných pôsobísk nebudeme potrebovať.

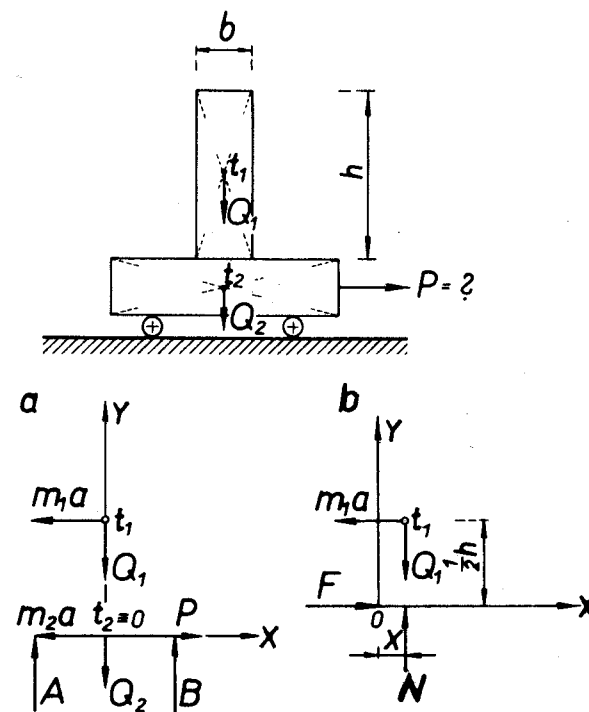
6. Zostavenie podmienok rovnováhy:

Na určenie neznámych použijeme silovú podmienku rovnováhy pre celú sústavu a tri základné podmienky rovnováhy pre bremeno.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{ix} &= A \cdot \cos 90^\circ + B \cdot \cos 90^\circ + Q_1 \cdot \cos 270^\circ + \\ &+ Q_2 \cdot \cos 270^\circ + m_1 \cdot a \cdot \cos 180^\circ + \\ &+ m_2 \cdot a \cdot \cos 180^\circ + P \cdot \cos 0^\circ = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

po úprave rovnica má tvar

$$P - \frac{Q_1}{g} a - \frac{Q_2}{g} a = 0$$



Obr. 11-6a,b.

Pre bremeno

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = S \cdot \cos 90^\circ + F \cdot \cos 0^\circ + Q_1 \cdot \cos 270^\circ + m_1 \cdot a \cdot \cos 180^\circ = 0 \quad (2)$$

po úprave dostaneme rovnicu

$$S \cdot f - \frac{Q_1}{g} a = 0$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = S \cdot \sin 90^\circ + F \cdot \sin 0^\circ + Q_1 \cdot \sin 270^\circ + m_1 \cdot a \cdot \sin 180^\circ = 0 \quad (3)$$

po úprave rovnice (3) dostaneme

$$S - Q_1 = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_{i0} = S \cdot \sin 90^\circ (0 - x_s) - S \cdot \cos 90^\circ (0 - y_s) + F \cdot \sin 0^\circ (0 - x_f) - F \cdot \cos 0^\circ (0 - y_f) + Q_1 \cdot \sin 270^\circ (0 - x_{Q_1}) - Q_1 \cdot \cos 270^\circ (0 - y_{Q_1}) + m_1 \cdot a \cdot \sin 180^\circ (0 - x_{m_1 a}) - m_1 \cdot a \cdot \cos 180^\circ (0 - y_{m_1 a}) = 0 \quad (4)$$

po úprave rovnice (4) dostaneme

$$-S \cdot x + 0,5b \cdot Q_1 - \frac{Q_1}{g} a \cdot 0,5h = 0$$

7. Riešenie rovníc

z rovnice (3)

$$S = Q_1$$

po dosadení do rovnice (2) za S určíme zrýchlenie

$$a = f \cdot g$$

dosadením do rovnice (1)

$$P = f(Q_1 + Q_2)$$

z rovnice (4) určíme x , t. j. polohu tlaku bremena na plošinu

$$x = 0,5(b - 0,25h)$$

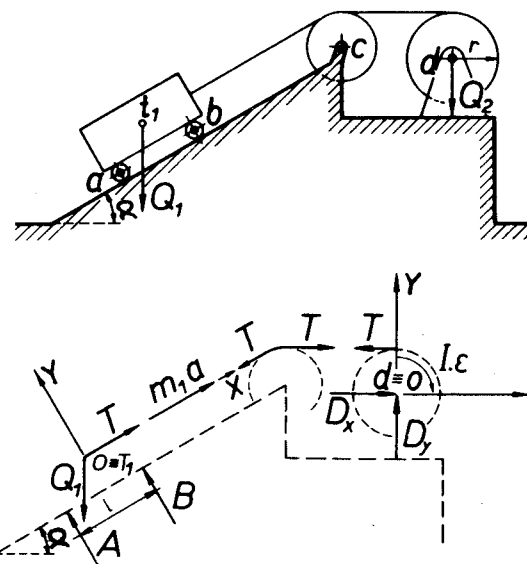
smer tlaku

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{S}{S \cdot f} = \frac{1}{f} = 4, \quad \alpha = 75^\circ 57' 50''$$

Príklad 11-7:

Na dopravu nákladom po naklonenej rovine sa používa vozík s celkovou tiažou Q_1 , ktorý ťahá lano, cez kladku pomocou vodorovne postaveného bubna polomeru r a tiaže Q_2 podľa obrázka. Je potrebné určiť:

- Veľkosť uhlového zrýchlenia bubna vyvolaného pohybom vozíka po naklonenej rovine.
- Veľkosť sily pôsobiacej v lane.
- Veľkosť tlaku na naklonenú rovinu. (Pritom neberieme do úvahy trenie a tiaž kladky.)



Obr. 11-7a,b.

1. Zariadenie predstavuje sústavu dvoch telies, ktorú možno brať ako rovinnú. Telesá sú medzi sebou spojené tuhým ohybným vláknom. Vozík ako jedno z telies je navonok podopretý dvoma posuvnými podperami a valec jednou kĺbovou podperou. Potom $n=2$, $m=0$, $v_1=2$, $v_2=1$, $v_3=0$ a $S=2 \times 3 + 0 \times 2 - (2 \times 1 + 1 \times 2) = 2$.

Dva stupne voľnosti predstavujú pri vozíku možnosť posunu po naklonenej rovine a pri valci možnosť pootáčania sa okolo osi. Pomocnú kladku, ktorou lano mení svoj smer, môžeme brať ako ďalšie teleso s jedným stupňom voľnosti.

2. Účinok vnútornej väzby na obidve telesá nahradíme v smere osi lana pri telesách osovou silou T . Tieto dve sily T rôzneho smeru necháme pôsobiť aj na pomocnú kladku.

Na vozík necháme v miestach dotyku kolies s naklonenou rovinou pôsobiť dve kolmé sily A a B . V osi valca nahradíme účinok vonkajšej väzby zvislou (D_y) a vodorovnou silou (D_x). Vonkajšiu väzbu pri kladke môžeme podobne nahradiť zvislou a vodorovnou silou.

3. Pretože vozík sa pohybuje po naklonenej rovine, necháme v jeho ťažisku proti pohybu pôsobiť zotrvačnú silu $m_1 \cdot a = \frac{Q_1}{g} a$. Pretože valec sa otáča, musíme okolo jeho osi nechať pôsobiť zotrvačný moment $I \cdot \varepsilon$, kde

$$I = \int_0^m \varrho^2 \cdot dm = \gamma (I_x + I_y) = \frac{1}{2} m \cdot r^2$$

pričom ε — uhlové zrýchlenie.

4. Pre riešenie úlohy bude najvhodnejšie zvoliť si dve samostatné súradnicové sústavy. Jednu so začiatkom v ťažisku vozíka a s osou X rovnobežnou s naklonenou rovinou a druhú so začiatkom v osi valca s vodorovnou osou X .

5. Určenie smerov a pôsobísk síl:

a) Pre vozík

$$\begin{aligned} \alpha_A = \alpha_B = 90^\circ, \quad \alpha_{Q_1} = 270^\circ - \alpha, \quad \alpha_T = \alpha_{m_1 a} = 0^\circ \\ x_{Q_1} = x_T = x_{m_1 a} = y_{Q_1} = y_T = y_{m_1 a} = 0, \quad x_A = -x_B = -0,5l \\ y_A = y_B = 0 \end{aligned}$$

b) Pre valec

$$\begin{aligned} \alpha_{D_y} = 90^\circ, \quad \alpha_{D_x} = 0^\circ, \quad \alpha_{Q_2} = 270^\circ, \quad \alpha_T = 180^\circ \\ x_T = x_{D_y} = x_{D_x} = x_{Q_2} = y_{D_y} = y_{D_x} = y_{Q_2} = 0, \quad y_T = r \end{aligned}$$

6. Zostavenie podmienok rovnováhy:

Pri oboch telesách zostavíme tri základné podmienky rovnováhy

a) Pre vozík

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{ix} = A \cdot \cos 90^\circ + B \cdot \cos 90^\circ + Q_1 \cdot \cos (270^\circ - \alpha) + \\ + T \cdot \cos 0^\circ + m_1 \cdot a \cdot \cos 0^\circ = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

po úprave rovnice (1) bude

$$\frac{Q_1}{g} a + T - Q_1 \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{iy} = A \cdot \sin 90^\circ + B \cdot \sin 90^\circ + Q_1 \cdot \sin (270^\circ - \alpha) + \\ + T \cdot \sin 0^\circ + m_1 \cdot a \cdot \sin 0^\circ = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

po úprave rovnice (2) bude

$$A + B - Q_1 \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_{oi} = A \cdot \sin 90^\circ (0 - x_A) - A \cdot \cos 90^\circ (0 - 0) + \\ + B \cdot \sin 90^\circ (0 - x_B) - B \cdot \cos 90^\circ (0 - 0) + \\ + Q_1 \cdot \sin (270^\circ - \alpha) (0 - 0) - \\ - Q_1 \cdot \cos (270^\circ - \alpha) (0 - 0) + T \cdot \sin 0^\circ (0 - 0) - \\ - T \cdot \cos 0^\circ (0 - 0) + m_1 \cdot a \cdot \sin 0^\circ (0 - 0) - \\ - m_1 \cdot a \cdot \cos 0^\circ (0 - 0) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

po úprave rovnice (3) bude

$$A \cdot 0,5l - B \cdot 0,5l = 0$$

b) Pre valec

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{ix} = D_y \cdot \cos 90^\circ + D_x \cdot \cos 0^\circ + Q_2 \cdot \cos 270^\circ + \\ + T \cdot \cos 180^\circ = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

po úprave rovnice (4) dostaneme

$$D_x - T = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{iy} = D_y \cdot \sin 90^\circ + D_x \cdot \sin 0^\circ + Q_2 \cdot \sin 270^\circ + \\ + T \cdot \sin 180^\circ = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

po úprave rovnice (5) dostaneme

$$D_y - Q_2 = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_{oi} = D_y \cdot \sin 90^\circ (0 - 0) - D_y \cdot \cos 90^\circ (0 - 0) + \\ + D_x \cdot \sin 0^\circ (0 - 0) - D_x \cdot \cos 0^\circ (0 - 0) + \\ + Q_2 \cdot \sin 270^\circ (0 - 0) - Q_2 \cdot \cos 270^\circ (0 - 0) + \\ + T \cdot \sin 180^\circ (0 - 0) - T \cdot \cos 180^\circ (0 - r) + \\ + I \cdot \varepsilon = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

po úprave rovnice (6) dostaneme

$$-T \cdot r + \frac{1}{2} \frac{Q_2}{g} r^2 \cdot \varepsilon = 0$$

7. Riešenie rovníc
z rovnice (3) $A = B$ a dosadením do rovnice (2)

$$A = B = 0,5Q_1 \cdot \cos \alpha$$

dosadením do rovnice (6) zo známeho vzťahu $a = \varepsilon \cdot r$ dostaneme rovnicu

$$-T + \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_2}{g} a = 0$$

Jej riešením spolu s rovnicou 1 dostaneme pre

$$a = g \frac{Q_1 \cdot \sin \alpha}{Q_1 + 0,5Q_2} \quad \varepsilon = \frac{g \cdot Q_1 \cdot \sin \alpha}{r(Q_1 + 0,5Q_2)}$$

$$T = \frac{1}{2} \frac{Q_1 \cdot Q_2 \sin \alpha}{(Q_1 + 0,5Q_2)}$$

XII. TRENIE

Trenie je jav veľmi zložitý a doteraz iba málo preskúmaný. Pri bezprostrednom dotyku dvoch telies pôsobí medzi nimi suché trenie. Keď je medzi telesami vrstva kvapaliny (mazadla), ide o kvapalinové trenie.

Okrem vonkajšieho trenia, ktoré pôsobí na styku telies (na ich povrchu), poznáme ešte vnútorné trenie, ktoré je odporom proti relatívnemu posúvaniu elementárnych častí hmoty. Vnútorným trením je napr. molekulárne trenie tuhých telies, s ním sa však nebudeme zaoberať.

Pri strojoch je trenie nevítaným odporom proti pohybu, inokedy je trenie pre nás vhodné, veď bez trenia by sme nemohli napr. ani chodiť.

12.1. DRUHY TRENIA

Odpor proti posúvaniu dotýkajúcich sa telies nazývame šmykovým, vlečným alebo klzným trením.

Odpor proti valeniu dvoch telies sa nazýva valivé trenie.

Čapové trenie je iba druhom šmykového trenia.

12.2. ŠMYKOVÉ TRENIE — COULOMBOVE ZÁKONY

Rozoznávame tieto druhy trenia:

- trenie v pokoji — statické trenie,
- trenie za pohybu — kinetické trenie.

Podľa Coulombovho zákona šmykové trenie v pokoji T má hodnotu

$$T = f_0 \cdot N \quad (1)$$

kde f_0 je súčiniteľ šmykového trenia v pokoji — súčiniteľ statického šmykového trenia,

N — normálová zložka tiaže telesa, ktoré pôsobí na naklonenú rovinu, pričom $f_0 = \text{tg } \varphi_0$.

Uhol φ_0 nazývame uhlom šmykového trenia v pokoji (uhol statického šmykového trenia) a tangens tohto medzného uhla φ_0 (pri ktorom nastane vplyvom vlastnej tiaže telesa rovnomerný pohyb po naklonenej rovine) nazývame súčiniteľom šmykového trenia v pokoji a označujeme ho písmenom f_0 .

Ak teleso spočívajúce na naklonenej rovine mierne postrčíme v smere sklonu naklonenej roviny, potom uhol φ , pri ktorom sa už pohyb telesa na naklonenej rovine udrží ako rovnomerný, má menšiu hodnotu ako uhol φ_0 , pri ktorom nastal svojvoľný rovnomerný pohyb telesa vplyvom jeho tiaže.

Uhol φ nazývame uhlom šmykového kinetického trenia.

Šmykové trenie za pohybu (kinetické) má potom hodnotu

$$T = f \cdot N \quad (2)$$

pričom $f = \text{tg } \varphi < f_0$

N — má rovnaký význam ako vo výraze (1).

Šmykové trenie za pohybu je teda menšie ako šmykové trenie v pokoji.

Keď v mieste dotyku dvoch telies naniesieme od normály na všetky strany v priestore uhol statického trenia φ_0 , dostaneme kužeľ šmykového statického trenia.

Stanovenie momentu čapového trenia najlepšie objasní príklad, ktorý uvádzame ďalej.

12.3. VALIVÉ TRENIÉ

Oblé telesá (napr. valec, guľa, koleso nápravy a pod.) sa môžu po podložke nielen šmýkať, ale aj valiť, čím dostávame pojem valivé trenie.

Trenie pri valivom pohybe (statické aj kinetické) je menšie ako šmykové trenie a jeho príčinou je nepružná deformácia oboch k sebe pritláčaných telies.

Ak sú kruhový valec aj podložka dokonale tuhé a hladké (idealizácia), dotýkajú sa pri akomkoľvek zaťažení valca v jedinej povrchovej priamke. Za tohto predpokladu by sa valec uviedol do otáčavého pohybu už nepatrnou dvojicou síl.

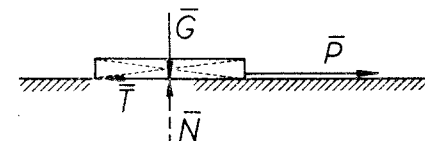
Skutočné telesá nie sú ani dokonale tuhé, ani dokonale hladké. Preto na teleso, napr. valec, musíme pôsobiť dvojicou síl istej veľkosti, aby sme ho uviedli do valivého pohybu na podložke.

Ak tiaž valca označíme **G**, reakciou podložky je sila **N**, ktorá sa čo do veľkosti rovná tiaži **G**, ale má opačný zmysel. Reakcia **N** so silou **G** vytvorí dvojicu síl opačného zmyslu, ako je hnacia dvojica **M**, a sila **N** je vždy posunutá v smere pohybu valca o istú dĺžku *a*, ktorá je tým väčšia, čím sú valec aj podložka poddajnejšie a drsnejšie.

Túto dĺžku *a* nazývame parametrom valivého trenia a ľahko ho určíme pokusom (pozri príklad 12-6).

Príklad 12-1:

Oceľový hranol s tiažou $G = 47,0 \text{ kN}$ sa pohybuje po vodorovnej oceľovej podložke. Treba stanoviť hodnotu šmykového trenia pri pohybe, ak súčiniteľ kinetického trenia $f = \text{tg } \varphi = 0,14$ (obr. 12-1).



Obr. 12.1.

Dosadením do Coulombovho zákona dostaneme veľkosť šmykového trenia pri pohybe

$$T = f \cdot N$$

V našom prípade je $N = G = 47,0 \text{ kN}$.

$$T = 0,14 \cdot 47,0 = 6,58 \text{ kN} = 6\,580 \text{ N.}$$

Príklad 12-2:

Na naklonenej rovine spočíva teleso, ktoré nesie sústredené zaťaženie $Q = 12,0 \text{ kN}$. Odklon naklonenej roviny od vodorovného smeru je $\alpha = 30^\circ$, uhol kinetického trenia $\varphi = 15^\circ$. Treba zistiť veľkosť vodorovnej sily **P**, aby sa jej pôsobením teleso rovnomerne posúvalo po naklonenej rovine smerom nahor (obr. 12-2).

Proti pohybu telesa smerom nahor pôsobí na naklonenej rovine vyvedená reakcia **R**, ktorá musí byť odklonená od normály k naklonenej rovine o uhol kinetického trenia φ .

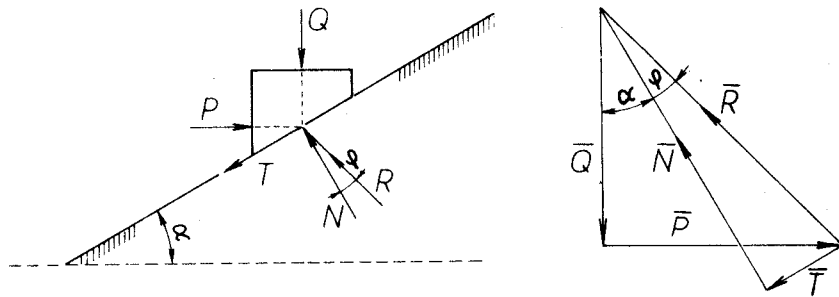
Reakcia podložky **R** sa odchyľuje od normály na tú stranu, aby zložka **T** sily **R**, pôsobiaca v smere naklonenej roviny, smerovala proti pohybu telesa. Sily **P**, **Q**, **R** musia byť spolu v rovnováhe, preto musia vytvoriť uzavretý silový trojuholník. V našom prípade je to pravouhlý trojuholník, v ktorom poznáme zvislú stranu **Q** (sústredené zaťaženie), ako aj uhly φ a α . Z týchto veličín ľahko vypočítame hľadanú vodorovnú silu **P**, ako aj reakciu podložky **R**.

$$P = Q \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = 12,0 \cdot \operatorname{tg}(30^\circ + 15^\circ) = 12,0 \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = 12,0 \text{ kN}$$

Veľkosť šikmej reakcie podložky v N

$$R = \sqrt{Q^2 + P^2} = \sqrt{12,0^2 + 12,0^2} = \sqrt{288} = 16,97 \text{ kN} = 16\,970 \text{ N}$$

Ak reakciu podložky R rozložíme do smeru normály N a naklonenej roviny, vypočítame veľkosť trenia T a normálovú zložku N reakcie R .



Obr. 12.2.

$$T = R \cdot \sin \varphi = 16,97 \cdot \sin 15^\circ = 16,97 \cdot 0,25882 = 4,392 \text{ kN}$$

$$N = R \cdot \cos \varphi = 16,97 \cdot \cos 15^\circ = 16,97 \cdot 0,96593 = 16,392 \text{ kN}$$

Grafický rozklad sily Q do smerov P a R , ako aj rozklad sily R do smerov N a T dáva rovnaké hodnoty.

Príklad 12-3:

Na zvislom múre je pomocou vlákna \overline{cd} zavesený predmet \overline{ab} (napr. obraz), pričom v bode a je opretý o zvislý múr. Treba stanoviť silu N vyvedenú vo vlákne, reakciu R v bode dotyku a s múrom a zistiť, kedy je v tomto prípade možná rovnováha (obr. 12-3).

Obraz nech má dĺžku $\overline{ab} = 2,5$ m, vlastnú tiaž $G = 600$ N, vzdialenosť závesného bodu c od koncového bodu a je $\overline{ac} = 0,7$ m, uhol sklonu $\alpha = 15^\circ$, $\overline{ad} = 1,5$ m.

Za predpokladu, že drevený rám obrazu sa opiera v bode a o zvislú drevenú stenu, je súčiniteľ statického trenia $f_0 = \operatorname{tg} \varphi_0 = 0,425$, čomu zodpovedá uhol statického trenia $\varphi_0 = 23^\circ$.

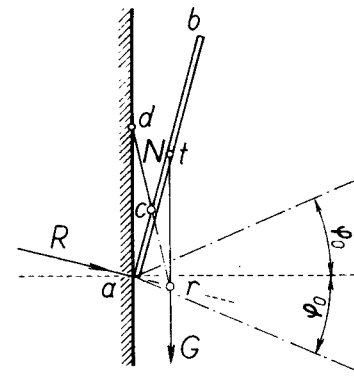
Na obraz pôsobia tri sily. Vlastná tiaž G obrazu, sila N vyvedená vo vlákne \overline{cd} a reakcia R pôsobiaca v bode a dotyku. Ak má nastať rovnováha, musia sa uvedené tri sily pretínať v jednom bode. Týmto bodom je priesečník r smerov lúčov síl G a N .

Ak v bode a vynesieme od normály na obidve strany uhol $\varphi_0 = 23^\circ$, dostaneme uhol statického trenia pre bod a a v ňom musí ležať lúč reakcie R . Keď teda priesečník r síl G , N , R padne do tohto uhla, nastane rovnováha.

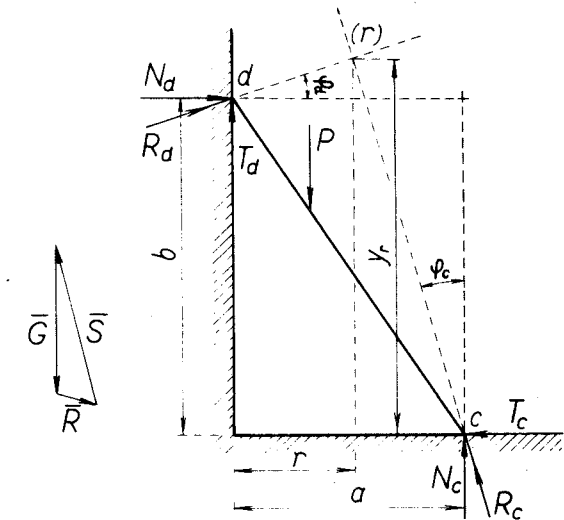
Veľkosť síl N a R určíme zo silového obrazca. V našom prípade je

$$N = 640,0 \text{ N}$$

$$R = 160,0 \text{ N}$$



Obr. 12.3.



Obr. 12.4.

Príklad 12-4:

Na rebrík pôsobí sústredené bremeno P (napr. tiaž pohybujúceho sa človeka). Vlastnú tiaž rebríka neberieme do úvahy. Treba určiť krajnú polohu bremena P , pri ktorej sa rebrík zošmykne (obr. 12-4).

Účinkom zataženia P sa snaží rebrík \overline{cd} zošmyknúť po zvislom múre smerom nadol a na vodorovnom uložení vpravo.

Posunutiu rebríka odporuje trenie v bode d ako zvislá sila T_d , smerujúca nahor a v bode c ako vodorovná sila T_c , ktorá ide vľavo. V bodoch c , d dotyku rebríka s vodorovnou a zvislou podperou pôsobia šikmé reakcie R_c a R_d , ktoré majú normálové zložky N_c a N_d .

Trenie nadobudne maximálnu hodnotu vo chvíli pohybu rebríka, teda vtedy, keď lúče reakcií R_c a R_d budú zvierat s príslušnými normálami v bodoch c , d uhly trenia φ_c , φ_d . Priesečník r lúčov síl R_c a R_d dáva krajnú polohu sily P , pri ktorej nastane pohyb rebríka.

Polohu priesečníka r vypočítame z geometrických vzťahov

$$y_c = (a - r) \operatorname{tg} (90^\circ - \varphi_c), \text{ rovnako však } y_d = b + r \cdot \operatorname{tg} \varphi_d$$

keď

$$\operatorname{tg} (90^\circ - \varphi_c) = \operatorname{cotg} \varphi_c = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_c} = \frac{1}{f_c}$$

Taktiež platí, že $\operatorname{tg} \varphi_d = f_d$

čo je súčiniteľ šmykového trenia v bode d .

Dosadením získame vzťah

$$(a - r) \frac{1}{f_c} = b + r \cdot f_d$$

alebo

$$a - r = b \cdot f_c + r \cdot f_c \cdot f_d$$

z čoho

$$r(1 + f_c \cdot f_d) = a - b \cdot f_c, \quad r = \frac{a - b \cdot f_c}{1 + f_c \cdot f_d}$$

$$r = a \frac{1 - \frac{b}{a} f_c}{1 + f_c \cdot f_d} \quad \text{a keďže} \quad \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \gamma$$

je

$$r = a \frac{1 - \operatorname{tg} \gamma \cdot f_c}{1 + f_c \cdot f_d}$$

Ak v našom prípade je $a = 2,3$ m, $\gamma = 55^\circ$, súčiniteľ šmykového trenia v bode c je $f_c = 0,29$, v bode d je $f_d = 0,32$, potom hodnota

$$r = 2,3 \frac{1 - 1,42815 \cdot 0,29}{1 + 0,29 \cdot 0,32} = \frac{2,3 \cdot 0,586}{1,0928} = \frac{1,3478}{1,0928} \doteq 1,233 \text{ m}$$

Uhly trenia φ_c a φ_d vypočítame zo známych výrazov

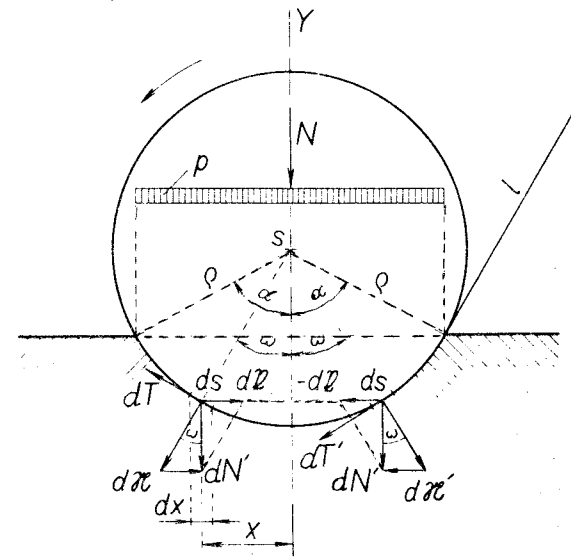
$$\operatorname{tg} \varphi_c = f_c, \quad \operatorname{tg} \varphi_d = f_d$$

$$\operatorname{tg} \varphi_c = 0,29, \quad \varphi_c \doteq 16^\circ 10'$$

$$\operatorname{tg} \varphi_d = 0,32, \quad \varphi_d \doteq 17^\circ 50'$$

Príklad 12-5:

Máme vypočítať moment M_c čapového trenia radiálneho valcového čapu zaťaženého silou $N = 7,0$ kN, ktorá pôsobí kolmo na os hriadeľa. Polomer čapu $\rho = 4,0$ cm, zapustenie čapu $\alpha = 60^\circ$, dĺžka čapu $l = 12,0$ cm, súčiniteľ šmykového trenia $f \doteq 0,05$ (obr. 12-5).



Obr. 12.5.

Za predpokladu, že tlak v čape sa rozdeľuje rovnomerne na priemet dotykovej valcovej plochy do roviny kolmej na smer zvislého tlaku N , teda do vodorovnej roviny, platí vzťah

$$p = \frac{N}{S}, \quad \text{kde plocha} \quad S = 2\rho \cdot \sin \alpha \cdot l$$

$$p = \frac{N}{2\rho \cdot \sin \alpha \cdot l}$$

Na elementárnu valcovú plošku $l \cdot ds$ pôsobí vo vodorovnej rovine (na obdĺžnik $l \cdot dx$) elementárny tlak

$$dN = p \cdot dS$$

kde $dS = l \cdot dx$

Ak dosadíme

$$dN = p \cdot l \cdot dx = \frac{N \cdot l \cdot dx}{2\rho \cdot \sin \alpha \cdot l} = \frac{N \cdot dx}{2\rho \cdot \sin \alpha}$$

Rozložme zvislú elementárnu silu dN na zložku $d\mathcal{N}$, ktorá ide kolmo na styčnú plochu čapu a ložiska, a na silu $d\mathcal{P}$ pôsobiacu vo vodorovnom smere. V elementárnom pásiku súmernom podľa zvislej osi Y pôsobí elementárna zvislá sila dN' , ktorú podobným spôsobom rozložíme na zložky $d\mathcal{N}$ a $-d\mathcal{P}$.

Vodorovné sily $d\mathcal{P}$ a $-d\mathcal{P}$ pôsobia v jednom lúči, sú rovnako veľké, opačného zmyslu, tvoria nulový systém síl (teda sa navzájom rušia) a zostávajú iba sily $d\mathcal{N} = d\mathcal{N}'$. Keďže tieto sily idú kolmo na styčnú plochu čapu a ložiska, vyvodzujú elementárne trenie dT a dT' .

Presné určenie veľkosti čapového trenia doteraz ešte nepoznáme. Na približné riešenie používame Coulombov zákon pre šmykové trenie za sucha, aj keď sú čapy zvyčajne mazané. Uvedené vzťahy sú iba približné a platia len pre čapy mierne mazané.

Z Coulombovho zákona vyplýva veľkosť elementárneho trenia dT vyvedeného na elementárnej plôške $l \cdot ds$.

$$dT = f \cdot d\mathcal{N} \quad \text{a v súmernom pásiku} \quad dT' = f \cdot d\mathcal{N}'$$

Trenie ako sila pôsobiaca proti pohybu pôsobí v smere dotýčnic k povrchu čapu.

Zložky trenia dT na ramenách rovných polomeru čapu dávajú elementárne momenty od trenia s veľkosťou

$$dM_\epsilon = dT \cdot \rho = f \cdot d\mathcal{N} \cdot \rho$$

Z obrázka vidieť, že

$$d\mathcal{N} = \frac{dN}{\cos \omega}$$

kde ω je uhol, ktorý zvierá elementárna plôška dS od zvislej osi súmernosti Y . Po dosadení

$$dM_\epsilon = f \cdot \rho \cdot \frac{dN}{\cos \omega} = f \cdot \rho \cdot \frac{N \cdot dx}{2\rho \cdot \sin \alpha \cdot \cos \omega} = \frac{f \cdot N \cdot dx}{2 \sin \alpha \cdot \cos \omega}$$

V uvedenom vzťahu je nepremenné f , N , α .

Výsledný moment čapového trenia dostaneme sčítaním všetkých elementárnych momentov v rozsahu $-\alpha$ do $+\alpha$, teda v celom rozsahu styku čapu s panvou, preto

$$M_\epsilon = \int_{-\alpha}^{+\alpha} dM_\epsilon$$

Vo výraze pre dM_ϵ máme však dve premenné, a to x a ω , preto treba poznať ich závislosť. Pre kruhový čap platí

$$x = \rho \cdot \sin \omega, \quad dx = \rho \cdot \cos \omega \cdot d\omega$$

$$dM_\epsilon = \frac{f \cdot N}{2 \sin \alpha \cdot \cos \omega} \rho \cos \omega d\omega = \frac{f \cdot N \cdot \rho \cdot d\omega}{2 \sin \alpha}$$

a integráciou od $-\alpha$ do $+\alpha$ dostaneme

$$M_\epsilon = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{f \cdot N \cdot \rho}{2 \sin \alpha} d\omega = \frac{f \cdot N \cdot \rho \cdot 2\alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{f \cdot N \cdot \rho \cdot \alpha}{\sin \alpha}$$

Výraz $\frac{f \cdot \alpha}{\sin \alpha} = f_\epsilon$ je súčiniteľ čapového trenia, preto tiež

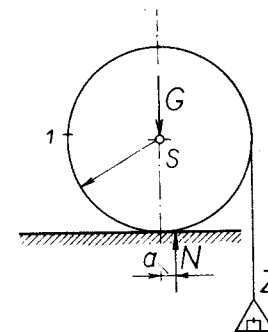
$$M_\epsilon = N \cdot \rho \cdot f_\epsilon$$

Ak dosadíme na začiatku uvedené hodnoty, dostaneme

$$M_\epsilon = \frac{f \cdot N \cdot \rho \cdot \alpha}{\sin \alpha} = \frac{0,05 \cdot 7,0 \cdot 4,0 \cdot 1,0472}{0,86603} = 1,466 \text{ kN cm} = 1\,466 \text{ N cm}$$

Príklad 12-6:

Stanovte hodnotu parametra valivého trenia valca, ktorý je zatažený zvislou silou $G = 15,0$ kN a ktorý sa pohybuje po ceste. Polomer valca $r = 0,7$ m (obr. 12-6).



Obr. 12.6.

Parameter a valivého trenia môžeme určiť jednoduchým pokusom. Na valec spočívajúci na vodorovnej podložke upevníme vlákno, ktoré zatažíme závažím Z . Závažie postupne a plynule zväčšujeme, kým valec neuvedieme do rovnomerného pohybu.

Zvislú zložku N reakcie vypočítame zo súčtovej podmienky rovnováhy síl v zvislom smere, pričom sila N je posunutá v smere pohybu o parameter a valivého trenia.

Platí tu vzťah

$$G + Z - N = 0, \quad N = G + Z$$

Parameter a valivého trenia vypočítame z momentovej podmienky rovnováhy síl k stredu s valca

$$Z \cdot r - N \cdot a = 0$$

z čoho

$$a = \frac{Z \cdot r}{N} = \frac{Z \cdot r}{G + Z}$$

V našom prípade nastane rovnomerný pohyb valca pri zaťažení $Z = 0,6$ kN. Za tohto predpokladu

$$a = \frac{0,6 \cdot 0,7}{15,0 + 0,6} = \frac{0,42}{15,60} \doteq 0,027 \text{ m} = 2,7 \text{ cm}$$

Parameter valivého trenia a je tým menší, čím je materiál pohybujúceho sa telesa aj podložky tvrdší (húževnatejší). Odpor valivého trenia závisí však aj od mnohých ďalších činiteľov.

Ak pri rovnakom zaťažení a polomere valca nastane rovnomerný pohyb valca už pri zaťažení $Z = 0,30$ kN, dostaneme parameter a valivého trenia z výrazu

$$a = \frac{Z \cdot r}{G + Z} = \frac{0,30 \cdot 0,7}{15,0 + 0,3} = \frac{2,1}{15,3} \doteq 0,014 \text{ m} = 1,4 \text{ cm}$$

čo je polovičná hodnota.

Je samozrejmé, že čím menšou silou Z uvedieme valec do rovnomerného pohybu, tým je parameter a valivého trenia menší. Pre kolesá vozov na cestách sa pohybuje v rozmedzí $a = 1,5$ až $6,0$ cm, pri valení železničných kolies po koľajniciach sa udáva hodnotou $a = 0,05$ cm.

Odpor valivého trenia je podstatne menší ako odpor šmykového trenia. V praxi sa to využíva najmä pri guľkových a valčekových ložiskách.

Príklad 12-7:

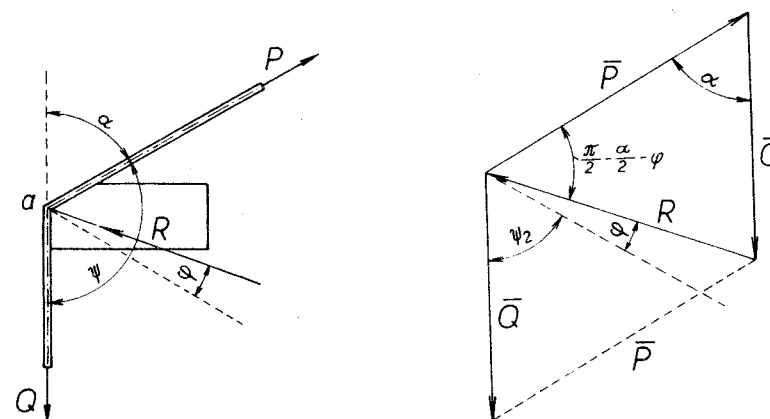
Treba určiť v lane veľkosť sily P potrebnej na dvíhanie bremena veľkosti $Q = 5,0$ kN, ak sa lano vedie cez hranu a trámu. Obidva konce lana nech zvierajú pri hrane a uhol $\psi = 120^\circ$. Uhol šmykového trenia $\varphi = 12^\circ$ (obr. 12-7).

Na jednom konci je lano zaťažené zvislým bremenom Q , na druhom konci pôsobí sila P , ktorou sa bremeno dvíha, pričom sa lano šmýka cez hranu a . Uhol α má hodnotu $\alpha = \pi - \psi = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

V bode a pôsobí trám na lano reakciou R , ktorá je so silami P a Q v rovnováhe.

Za predpokladu, že medzi lanom a trámom nie je trenie (pri dokonale hladkom tráme aj lane), platí vzťah, že sila $P = Q$ a lúč reakcie R by rozpolfoval uhol ψ medzi smermi síl P a Q .

V skutočnosti je medzi trámom a lanom trenie a účinkom trenia sa lúč reakcie R odchýli o určitý uhol φ , ktorý môžeme pokladať za uhol šmykového trenia.



Obr. 12.7.

Sily Q , P , R sú v rovnováhe, vytvárajú teda uzavretý silový trojuholník.

$$Q + P + R = 0$$

a riešením všeobecného trojuholníka vytvoreného z týchto síl vychádza zo sínusovej vety vzťah

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + \varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \varphi\right)}$$

z čoho

$$P = Q \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + \varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \varphi\right)} = Q \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \varphi\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \varphi\right)}$$

$$= Q \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \varphi + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \varphi}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \varphi - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \varphi}$$

Ak vydelíme čitateľa aj menovateľa súčinom $\cos \frac{\alpha}{2} \cos \varphi$, dostaneme

$$P = Q \frac{1 + f \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - f \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

Z Coulombovho zákona je známe, že $f = \operatorname{tg} \varphi$ je súčiniteľ šmykového trenia za pohybu.

Z matematiky vieme, že pre dosť malé hodnoty $f \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ približne platí

$$\frac{1 + f \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - f \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \doteq 1 + 2f \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

a dosadením dostaneme

$$P \doteq Q \left(1 + 2f \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)$$

V tomto prípade $Q = 5,0 \text{ kN}$, $f = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} 12^\circ$, $\frac{\alpha}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

$$P \doteq 5,0(1 + 2 \cdot \operatorname{tg} 12^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ) \doteq 5,0(1 + 2 \cdot 0,21256 \cdot 0,57735) \doteq 6,23 \text{ kN}$$

Pri spúšťaní bremana bude trenie lana na tráme priaznivé a podstatne zmenší hodnotu sily P .

Pre spúšťanie bremana Q dosadíme $-\varphi$ a $-f$ namiesto φ a f , takže platí vzťah

$$P \doteq Q \left(1 - 2f \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) = 5,0(1 - 2 \cdot 0,21256 \cdot 0,57735) \doteq 3,77 \text{ kN}$$

Príklad 12-8:

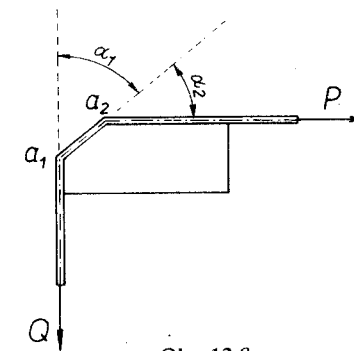
Máme stanoviť v lane veľkosť sily P potrebnej na dvíhanie bremana $Q = 5,0 \text{ kN}$, ak sa lano vedie cez dve hrany a_1, a_2 , pričom $\alpha_1 = 50^\circ$, $\alpha_2 = 40^\circ$, uhol šmykového trenia $\varphi = 12^\circ$ (obr. 12-8).

Ak označíme $P_{1,2}$ ako silu pôsobiacu v časti $\overline{a_1 a_2}$ lana, potom pri dvíhaní bremana Q platí vzťah (pozri príklad 12-7)

$$P_{1,2} = Q \frac{\cos \left(\frac{\alpha_1}{2} - \varphi \right)}{\cos \left(\frac{\alpha_1}{2} + \varphi \right)}$$

a silu P idúcu vodorovne bodom a_2 určíme z výrazu

$$P = P_{1,2} \frac{\cos \left(\frac{\alpha_2}{2} - \varphi \right)}{\cos \left(\frac{\alpha_2}{2} + \varphi \right)}$$



Obr. 12.8.

po dosadení za $P_{1,2}$

$$P = Q \frac{\cos \left(\frac{\alpha_1}{2} - \varphi \right) \cos \left(\frac{\alpha_2}{2} - \varphi \right)}{\cos \left(\frac{\alpha_1}{2} + \varphi \right) \cos \left(\frac{\alpha_2}{2} + \varphi \right)}$$

Po malej úprave je

$$P = Q \frac{1 + f \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \cdot 1 + f \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2}}{1 - f \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \cdot 1 - f \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2}}$$

a pre dosť malé hodnoty súčinov

$$f \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}, \quad f \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2}$$

približne platí

$$P \doteq Q \left(1 + 2f \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \right) \left(1 + 2f \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2} \right)$$

Po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$P \doteq 5,0(1 + 2 \cdot \operatorname{tg} 12^\circ \cdot \operatorname{tg} 25^\circ)(1 + 2 \cdot \operatorname{tg} 12^\circ \cdot \operatorname{tg} 20^\circ)$$

$$P \doteq 5,0(1 + 2 \cdot 0,21256 \cdot 0,46631)(1 + 2 \cdot 0,21256 \cdot 0,36397)$$

$$P \doteq 5,0 \cdot 1,19823 \cdot 1,15473 \doteq 6,918 \text{ kN}$$

Aby sme bremeno $Q = 5,0 \text{ kN}$ zdvihli lanom cez dve hrany trámu, potrebujeme na prekonanie trenia zväčšiť silu o $1,92 \text{ kN}$, čo je asi 38% zataženia Q .

Rovnaké bremeno Q , vedené lanom cez jednu hranu trámu (príklad 12-7), potrebovalo na zdvihnutie silu $P = 6,23 \text{ kN}$, čo je sila o $0,688 \text{ kN}$ menšia, ako keď sa lano vedie cez dve hrany trámu.

Za predpokladu, že uhol $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 40^\circ$ (sila P nie je potom vodorovná, ale ide v sklone 10° nahor), platí vzťah

$$P \doteq Q \left(1 + 2f \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^2$$

$$P \doteq 500(1 + 2 \operatorname{tg} 12^\circ \cdot \operatorname{tg} 20^\circ)^2 = 500(1 + 2 \cdot 0,21256 \cdot 0,36397)^2$$

$$P \doteq 5,0 \cdot 1,15473^2 = 5,0 \cdot 1,3334 \doteq 6,667 \text{ kN}$$

Sila P potrebná na zdvíhanie rovnakého bremena Q sa tu — oproti predošlému prípadu — o niečo zmenšila.

Príklad 12.9:

Máme určiť veľkosť sily P , ktorá je potrebná na zdvíhanie bremena $Q = 1,50 \text{ kN}$, za predpokladu, že lano nie je dokonale ohybné a do úvahy berieme aj čapové trenie. Polomer kladky $r = 10,0 \text{ cm}$, $\delta_1 = 0,8 \text{ cm}$, $\delta_2 = 0,6 \text{ cm}$, uhol trenia v čapoch $\varphi = 6^\circ$, polomer čapu $\rho = 1,0 \text{ cm}$ (obr. 12-9).

Lano vedené cez kladku je na jednom konci zatažené bremenom Q , ktoré sa zdvíha silou P . Za predpokladu dokonale ohybného lana nepôsobí čapové trenie a iné odpory proti pohybu. Podľa princípu virtuálnych prác je $P = Q$.

V skutočnosti lano nie je dokonale ohybné, jeho tuhosť pri pohybe sa prejaví tým, že v mieste navíjania na kladku mení sa zakrivenie jeho priamej časti na časť kruhovú, a to veľmi pomaly a v mieste odvíjania tak isto.

Sila Q má teda ku stredu O kladky rameno väčšie, ako je jej polomer r a síce o určitú hodnotu δ_1 . Sila P má rameno o δ_2 menšie, ako je polomer r kladky.

Napišeme momentovú podmienku rovnováhy k stredu O kladky

$$P(r - \delta_2) = Q(r + \delta_1) + M_c \quad (1)$$

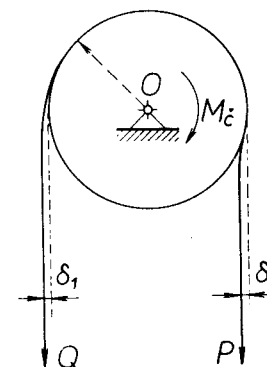
kde $m_c = (P + Q)\rho \cdot \sin \varphi$ je moment čapového trenia,

ρ — polomer čapov,

φ — uhol trenia v čapoch.

Ak za M_c dosadíme do rovnice (1), dostaneme vzťah

$$P(r - \delta_2) = Q(r + \delta_1) + (P + Q)\rho \cdot \sin \varphi$$



Obr. 12.9.

a malou úpravou dostaneme

$$P(r - \delta_2 - \rho \sin \varphi) = Q(r + \delta_1 + \rho \sin \varphi)$$

z čoho

$$P = Q \frac{r + \delta_1 + \rho \sin \varphi}{r - \delta_2 - \rho \sin \varphi} \quad (2)$$

V našom prípade po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$P = 1,50 \frac{10,0 + 0,8 + 1,0 \cdot 0,10453}{10,0 - 0,6 - 1,0 \cdot 0,10453} \doteq 1,50 \cdot 1,1731 \doteq 1,76 \text{ kN}$$

Rovnicu (2) môžeme upraviť

$$P = Q \frac{r - \delta_2 - \rho \sin \varphi + \delta_2 + \rho \sin \varphi + \delta_1 + \rho \sin \varphi}{r - \delta_2 - \rho \sin \varphi}$$

a ak v menovateli neberieme do úvahy posledné dva členy oproti r , dostaneme

$$P \doteq Q \left(1 + \frac{\delta_1 + \delta_2 + 2\rho \sin \varphi}{r} \right)$$

V našom prípade po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$P \doteq 1,50 \left(1 + \frac{0,8 + 0,6 + 2 \cdot 1,0 \cdot 0,10453}{10,0} \right)$$

$$P \doteq 1,50(1 + 0,16) = 1,74 \text{ kN}$$

Ak napíšeme

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta$$

dostaneme vzťah

$$P = Q \left(1 + \frac{2\delta}{r} + \frac{2\varrho \sin \varphi}{r} \right) = \xi \cdot Q$$

kde

$$\xi = 1 + \frac{2\delta}{r} + \frac{2\varrho \sin \varphi}{r}$$

je súčiniteľ kladky, ktorý je vždy väčší než jedna (pohybuje sa medzi 1,05 až 1,2) v tomto prípade nech

$$\delta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} = \frac{0,8 + 0,6}{2} = 0,7 \text{ cm}$$

a po dosadení

$$\xi = 1 + \frac{2 \cdot 0,7}{10,0} + \frac{2 \cdot 1,0 \cdot 0,10453}{10,0} \doteq 1,161$$

potom veľkosť sily

$$P = 1,161 \cdot 1,50 = 1,7415 \text{ kN}$$

Pre spúšťanie bremena dostaneme zámenou síl **P** a **Q** vzťah

$$P = \frac{1}{\xi} Q = \frac{1}{1,161} 1,50 = 1,292 \text{ kN}$$

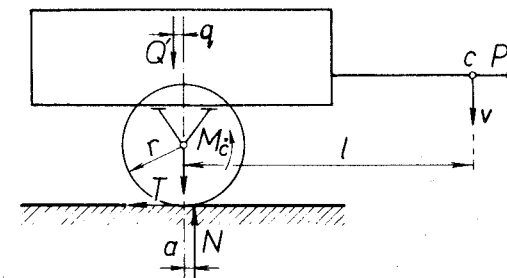
Príklad 12-10:

Treba vypočítať ťažnú silu **P** potrebnú na rovnomerný pohyb káry po vodorovnej jazdnej dráhe. Polomer kolies $r = 0,7 \text{ m}$, ťaž hornéj časti káry aj s nákladom $Q' = 4,0 \text{ kN}$, ťaž kolies $K = 0,50 \text{ kN}$, polomer čapov $\varrho = 2,5 \text{ cm}$, súčiniteľ trenia v čapoch $f_c = 0,5$, parameter valivého trenia $a = 2,1 \text{ cm}$ (obr. 12-10).

Dvojkolesová kára patrí do skupiny ťahaných vozidiel. Za predpokladu, že aj s nákladom je súmerná k zvislej rovine, ktorú vedieme pozdĺžnou osou vozidla, môžeme obidve kolesá pokladať za jediné koleso.

Ťaž hornéj časti káry aj s nákladom označme ako silu **Q'**, ťaž kolies (nápravy) **K**. Na voľnom konci oja (v bode *c*) musí okrem vodorovnej ťažnej sily **P** pôsobiť aj istá zvislá sila **V**, ktorou sa zamedzí preklopeniu káry okolo osi kolies (smerom nahor).

Reakcia jazdnej dráhy (šikmá sila) je posunutá v smere pohybu vozidla o parameter *a* valivého trenia. Jej zvislú (normálovú) zložku označme **N**, dotyčnicovú zložku **T**.



Obr. 12.10.

Zo súčtových podmienok rovnováhy síl celého vozidla vyplývajú vzťahy

$$P = T, \quad N = Q' + K + V \quad (1)$$

Aby sa kolesá nešmykali, ale valili po jazdnej dráhe, vyplýva z Coulombovho zákona, že trenie

$$T \leq f \cdot N$$

kde *f* je súčiniteľ šmykového trenia.

Ak

$$Q' + K = Q$$

je ťaž celého vozidla aj s nákladom, môžeme približne napísať

$$N \doteq Q \quad (2)$$

lebo sila **V** je malá a pri vhodnom rozložení zaťaženia je $V = 0$.

Na koleso pôsobí horná časť vozidla silou

$$Q' + V \doteq Q, \quad \text{ako aj sily } \mathbf{N} \text{ a } \mathbf{T}$$

Okrem toho proti pohybu pôsobí valivé a čapové trenie, pričom moment čapového trenia

$$M_{\epsilon} = Q \cdot \rho \cdot f_{\epsilon} \quad (3)$$

kde ρ je polomer čapov,

f_{ϵ} — súčiniteľ trenia v čapoch.

Z momentovej podmienky k osi kolies vyplýva vzťah

$$T \cdot r - N \cdot a - M_{\epsilon} = 0, \quad T \cdot r = N \cdot a + M_{\epsilon}$$

Keď dosadíme z rovníc (1), (2) a (3), dostaneme rovnicu

$$P \cdot r = Q \cdot a + Q \cdot \rho \cdot f_{\epsilon}$$

z čoho ťažná sila P má hodnotu

$$P = Q \frac{a + \rho \cdot f_{\epsilon}}{r} \quad (4)$$

Výraz pri Q označujeme ako súčiniteľ ψ ťažnej sily

$$\psi = \frac{a + \rho \cdot f_{\epsilon}}{r}$$

preto ťažná sila

$$P = \psi \cdot Q$$

po dosadení číselných hodnôt do vzťahu (4), ťažná sila je

$$P \doteq (4,0 + 0,5) \frac{2,1 + 2,5 \cdot 0,5}{70,0} \doteq 4,50 \cdot 0,048 \doteq 0,216 \text{ kN} = 216 \text{ N}$$

Súčiniteľ ťažnej sily ψ sa udáva pre vozy so železnými obručami kolies na asfaltovej vozovke hodnotou 0,01, na dláždenej alebo valcovanej štrkovanej vozovke 0,02, na vozovke novo štrkovanej 0,1, na piesčitej pôde 0,2 atď.

XIII. HYDROSTATIKA

13.1. VŠEOBECNÉ POZNATKY O KVAPALINÁCH

Kvapaliny a plyny, ktorým spolu hovoríme tekutiny, odlišujú sa od telies tuhého skupenstva najmä veľkou pohyblivosťou svojich častíc.

V stavebnej praxi ide predovšetkým o to, aby sme vedeli určiť pôsobisko (teda polohu) a veľkosť výslednice hydrostatického tlaku na ľubovoľnú plochu rôzne sklonených stien. Nemienime sa však zaoberať základnými pojmami spojeného prostredia (kontinua), aj keď je časťou teoretickej mechaniky.

Budeme hovoriť o modele tekutín založenom na predstavách klasickej, teda Newtonovej mechaniky. Ak by išlo o mikroskopické obory, zákony klasickej mechaniky by sme museli nahradiť zákonmi kvantovej čiže Planckovej mechaniky.

Skutočnou kvapalinou, aká sa nachádza v prírode, zaoberá sa hydraulika.

Kvapalina, s ktorou sa stretávame v praxi, má isté vlastnosti:

a) Má určitú súdržnosť — kohéziu, t. j. pri relatívnom posune čiastočky voči čiastočke nastáva tangenciálny odpor, ktorý nazývame vnútorným trením. Skutočné kvapaliny sú teda väzké — viskózne.

b) Voda je prakticky nestlačiteľná (pri tlaku 1 000 atmosfér zmenší svoj objem iba asi o 5 %), čo v praxi využívame pri skúšaní potrubia na vodotesnosť, pri hydraulických lisoch, zdvihákoch a pod.

c) Pri vode sa prejavuje príťažlivosť a priľnavosť, s čím súvisí povrchové napätie, kapilarita.

d) Objem skutočnej kvapaliny sa mení s teplotou.

e) V niektorých prípadoch musíme prihliadať na plyny, ktoré sú obsiahnuté v kvapaline.

Ideálnou kvapalinou sa zaoberá teoretická hydromechanika, ktorá skúma a zisťuje zákony ideálnej kvapaliny.

Ideálna kvapalina má tieto vlastnosti:

a) Prevezme vždy tvar nádoby, ktorú spojíte vyplnía.

b) Môže byť namáhaná iba tlakom (nie ťahom alebo šmykom).

c) Účinok ideálnej kvapaliny sa javí vždy ako tlak kolmý na plochu (Pascalov zákon).

d) Nemá súdržnosť — kohéziu, ani príťažlivosť — adhéziu jednotlivých hmotných častíc, ktoré sú teda dokonale posúvateľné.

e) Je nestlačiteľná, preto má stály objem a vplyvom teploty sa jej objem nemení.

Hydraulika sa opiera o zákony stanovené hydromechanikou.

Hydromechanika sa delí na dve časti:

1. *hydrostatiku* — skúma rovnováhu kvapalín a telies do nej ponorených,
2. *hydrodynamiku* — zaoberá sa pohybom kvapalín.

13.2. ZÁKLADNÁ EULEROVA DIFERENCIÁLNA ROVNICA PRE ROVNOVÁHU KVAPALÍN

Ak chceme určiť tlak p kvapaliny spôsobený jej tiažou v ľubovoľnej hĺbke h pod povrchom kvapaliny, vychádzame z prírastku merného tlaku dp , ktorý je odvodený zo základnej Eulerovej diferenciálnej rovnice pre rovnováhu kvapalín.

Za predpokladu, že v ľubovoľnom bode M kvapaliny má merný tlak hodnotu p , v susednom bode N vzdialenom od bodu M o elementárne dĺžky dx , dy , dz má prírastok dp merného tlaku hodnotu

$$dp = \mu(a_x dx + a_y dy + a_z dz) \quad (1)$$

kde μ je merná hmotnosť kvapaliny,

a_x, a_y, a_z sú zložky zrýchlenia a v smere súradnicových osí. V ťažisku elementárneho rovnobežnostenu $dx dy dz$ pôsobí vonkajšia sila $dR = dm \cdot a$, ktorej zrýchlenie a zvierá s pravouhlými súradnicovými osami X, Y, Z uhly α, β, γ , pričom platí, že

$$a_x = a \cdot \cos \alpha, \quad a_y = a \cdot \cos \beta, \quad a_z = a \cdot \cos \gamma$$

Integráciou rovnice (1) (základnej rovnice pre rovnováhu kvapaliny) stanovíme hodnotu merného tlaku p v ľubovoľnom mieste kvapaliny.

13.3. TLAK KVAPALINY NA VODOROVNÉ DNO

Veľkosť tlaku kvapaliny P na vodorovné dno s plochou S má hodnotu

$$P = \gamma \cdot h \cdot S \quad (2)$$

pričom γ je merná tiaž kvapaliny,

h — zvislá vzdialenosť dna od hladiny kvapaliny,

S — plocha vodorovného dna.

Stanovenie hydrostatického tlaku na šikmú rovinnú stenu

Hodnota hydrostatického tlaku

$$P = \gamma \cdot S \cdot z_t \quad (3)$$

kde γ je merná tiaž kvapaliny,

S — plocha, na ktorú pôsobí v šikmej stene tlak,

z_t — hĺbka ťažiska t plochy S od povrchu kvapaliny.

13.4. URČENIE PÔSOBISKA A HYDROSTATICKEHO TLAKU

Ak uvažujeme plochu S ako časť zvislej alebo šikmej steny, pôsobisko s (stred) hydrostatického tlaku sa nestotožňuje s ťažiskom t uvažovanej plochy S .

Polohu pôsobiska s hydrostatického tlaku vypočítame z rovnosti statických momentov jednotlivých elementárnych síl dP , pôsobiacich na elementárne plošky dS , ktoré sa musia rovnať statickému momentu výslednice P týchto elementárnych síl k istej vzťažnej osi X (momentová veta). Platí tu vzťah

$$y_s = \frac{\int y^2 \cdot dS}{S \cdot y_t} = \frac{J_x}{\mathcal{M}_x} \quad (4)$$

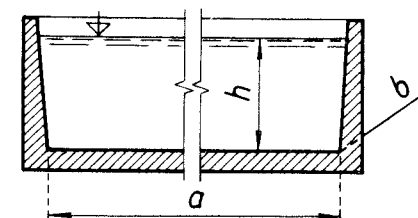
kde y_s je vzdialenosť pôsobiska s hydrostatického tlaku od vzťažnej osi X ,

$J_x = \int y^2 \cdot dS$ — moment zotrvačnosti plochy S k osi X ,

$\mathcal{M}_x = S \cdot y_t$ — statický moment plochy S k osi X .

Príklad 13-1:

Máme vypočítať veľkosť tlaku vody na vodorovné dno nádrže obdĺžnikového pôdorysu, keď výška vodného stĺpca $h = 5,2$ m, rozmery dna nádrže $a = 40,0$ m, $b = 25,0$ m (obr. 13-1).



Obr. 13.1.

Výsledný tlak vody na vodorovné dno pôsobí v ťažisku obdĺžnikového dna nádrže a jeho hodnota závisí od mernej tiaže γ vody, od veľkosti plochy S dna nádrže a od výšky h vodného stĺpca v nádrži.

V našom prípade je

$$\gamma = 9,806 \text{ kN/m}^3,$$

$$S = 40,0 \text{ m} \cdot 25,0 \text{ m} = 1\,000,0 \text{ m}^2,$$

$$h = 5,2 \text{ m}$$

Dosadením do vzťahu (2) dostaneme výsledný tlak P vody na dno nádrže

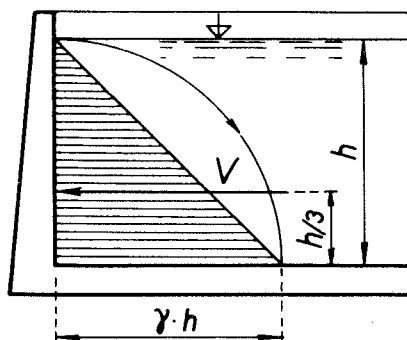
$$P = \gamma \cdot S \cdot h$$

$$P = 9,806 \cdot 1\,000,0 \cdot 5,2 = 509912 \text{ kN} = 509,912 \text{ MN}$$

Veľkosť vodného tlaku na dno nádrže nezávisí od sklonu stien nádrže, iba od veľkosti dna a výšky h vodného stĺpca (hydrostatický paradox).

Príklad 13-2:

Treba stanoviť hodnotu tlaku vody na zvislú stenu nádrže, ak výška vodného stĺpca $h = 4,0 \text{ m}$ (obr. 13-2).



Obr. 13.2.

Tlak vody P na zvislú stenu sa priamo úmerne zväčšuje s hĺbkou h uvažovaného miesta pod hladinou vodného stĺpca a závisí teda od veľkosti tlakového trojuholníka, ktorého základňou je $\gamma \cdot h$ (merný tlak vody v hĺbke h) a výškou trojuholníka je h .

Na každý meter zvislej steny pôsobí tlak P , ktorého hodnotu určíme z tlakového trojuholníka

$$P = \gamma \cdot h \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \gamma \cdot h^2$$

pričom γ je merná tiaž vody; $\gamma = 9,806 \text{ kN/m}^3$, $h = 4,0 \text{ m}$ po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$P = \frac{1}{2} 9,806 \cdot 4,0^2 = 78,448 \text{ kN} = 78\,448 \text{ N}$$

Výsledný tlak P ide kolmo na zvislú stenu, teda vodorovne a prechádza ťažiskom tlakového trojuholníka.

Ak zvislá stena má dĺžku $l = 20,0 \text{ m}$, potom celkový tlak vody P_R , ktorý na ňu pôsobí, má hodnotu

$$P_R = P \cdot l = 78,448 \cdot 20,0 = 1568,96 \text{ kN}$$

Príklad 13-3:

Máme určiť hodnotu tlaku vody na šikmú stenu, keď sklon steny je 5 : 1 a výška stĺpca vody $h = 6,0 \text{ m}$ (obr. 13-3).

Tlak vody P závisí od veľkosti tlakového trojuholníka ABC , ktorého základňou je γh a výškou $x = \overline{AB}$.

Tlak v kvapalinách sa šíri všetkými smermi, pôsobí vždy kolmo na príslušnú stenu (Pascalov zákon) a prechádza ťažiskom tlakového trojuholníka.

Vodný tlak pôsobiaci na šikmú stenu má hodnotu

$$P = \gamma \cdot h \cdot \frac{x}{2}$$

kde

$$x = \frac{h}{\cos \alpha}$$

$$P = \gamma \cdot h \cdot \frac{h}{2 \cos \alpha} = \frac{1}{2} \frac{\gamma \cdot h^2}{\cos \alpha}, \quad \cos \alpha = \frac{h}{x}$$

$$x = \sqrt{6,0^2 + 1,2^2} = \sqrt{36,0 + 1,44} \doteq 6,12 \text{ m}$$

$$\cos \alpha = \frac{6,0}{6,12} = 0,98038, \quad \alpha \doteq 11^\circ 20'$$

po dosadení dostaneme

$$P = \frac{1}{2} 9,806 \frac{6,0^2}{0,98038} = 180,038 \text{ kN}$$

Keď je stena zvislá $\alpha = 0$, veľkosť tlaku

$$P_{zv} = \frac{1}{2} \gamma \cdot h^2 = \frac{1}{2} 9,806 \cdot 6,0^2 = 176,508 \text{ kN}$$

Pri odklone steny $11^{\circ}20'$ od zvislého smeru sa tlak na šikmú stenu zväčšil o $3,603 \text{ kN} = 3603 \text{ N}$.

Veľkosť hydrostatického tlaku na zvislú alebo aj šikmú stenu môžeme stanoviť aj zo vzťahu (3)

$$P = \gamma \cdot S \cdot z_c$$

na zvislú stenu pôsobí tlak

$$P = \frac{9,806 \text{ kN}}{\text{m}^3} \cdot 6,0 \text{ m}^2 \cdot 3,0 \text{ m} = 176,508 \text{ kN}$$

na šikmú stenu pôsobí tlak

$$P = \frac{9,806 \text{ kN}}{\text{m}^3} \cdot 6,12 \text{ m}^2 \cdot 3,0 \text{ m} = 180,038 \text{ kN}$$

Dostali sme úplne rovnaký výsledok.

Príklad 13-4:

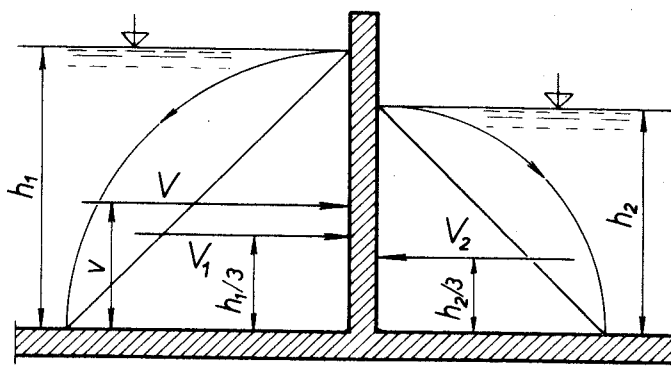
Máme zistiť výsledný tlak vody, ktorá pôsobí z oboch strán na zvislý múr, pričom $h_1 = 5,0 \text{ m}$, $h_2 = 4,0 \text{ m}$ (obr. 13-4).

Z ľavej strany pôsobí na zvislý múr vodný tlak

$$P_1 = \frac{1}{2} \gamma \cdot h_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 9,806 \cdot 5,0^2 = 122,575 \text{ kN}$$

Z pravej strany pôsobí tlak

$$P_2 = \frac{1}{2} \gamma \cdot h_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 9,806 \cdot 4,0^2 = 78,448 \text{ kN}$$



Obr. 13.4.

Výsledný tlak vody P má hodnotu

$$P = P_1 - P_2 = 122,575 - 78,448 = 44,127 \text{ kN}$$

a pôsobí v zmysle väčšieho tlaku P_1 .

Polohu v výsledného tlaku P vypočítame z momentovej vety k ľubovoľnému bodu, napr. k bodu o

$$P \cdot v = P_1 \frac{h_1}{3} - P_2 \frac{h_2}{3}$$

$$44,127 \cdot v = 122,575 \cdot 1,66 - 78,448 \cdot 1,33$$

$$v \doteq 2,25 \text{ m}$$

Výsledný tlak vody pôsobí vo výške $v \doteq 2,25 \text{ m}$ nad dnom.

Ak $h_1 = h_2$, aj $P_1 = P_2$ a vodorovný tlakový účinok vody na zvislý múr sa navzájom zruší (nulový systém vodorovných síl).

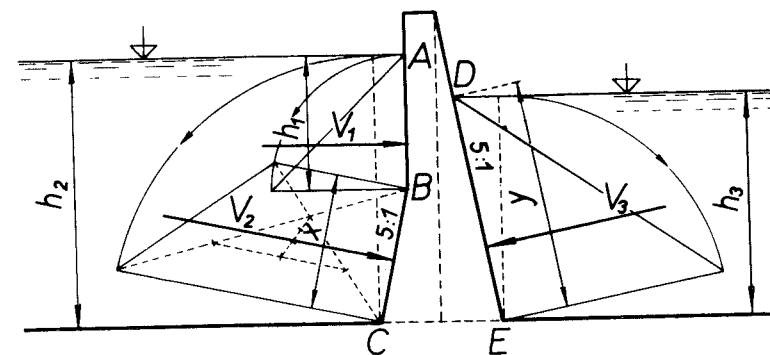
Ak je múr po jednej alebo oboch stranách šikmý, obojstranné účinky vody na múr sa v nijakom prípade nemôžu zrušiť.

Keď je múr šikmý a obidve steny má súbežné, pri rovnakom stĺpci vody pôsobiacom na steny je šikmý múr namáhaný momentom dvojice síl.

Príklad 13-5:

Treba stanoviť veľkosť výsledného tlaku vody na lomený múr, keď $h_1 = 3,0 \text{ m}$, $h_2 = 6,0 \text{ m}$, $h_3 = 5,0 \text{ m}$ (obr. 13-5).

Na každú stenu lomeného múru určíme účinok vody osobitne a čiastočné tlaky P_1 až P_3 sčítame vo výsledný účinok P .



Obr. 13.5.

Hodnota tlaku vody na zvislú stenu \overline{AB} (na bežný meter steny)

$$P_1 = \frac{1}{2} \gamma \cdot h_1^2 = \frac{1}{2} 9,806 \cdot 3,0^2 = 44,127 \text{ kN}$$

Z ľavej strany na šikmú stenu \overline{BC} pôsobí lichobežníkové zaťaženie

$$P_2 = \frac{\gamma \cdot h_1 + \gamma \cdot h_2}{2} \cdot x$$

pričom

$$x = \sqrt{(h_2 - h_1)^2 + \left(\frac{h_2 - h_1}{5}\right)^2}$$

po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$x = \sqrt{3,0^2 + 0,6^2} = \sqrt{9,36} \doteq 3,06 \text{ m}$$

$$P_2 = \frac{9,806 \cdot 3,0 + 9,806 \cdot 6,0}{2} \cdot 3,06 = 135,029 \text{ kN}$$

Z pravej strany pôsobí na šikmú stenu \overline{ED} tlak vody

$$P_3 = \gamma \cdot h_3 \cdot \frac{y}{2}$$

kde

$$y = \sqrt{h_3^2 + \left(\frac{h_3}{5}\right)^2} = \sqrt{5,0^2 + 1,0^2} = \sqrt{26,0} \doteq 5,1 \text{ m}$$

$$P_3 = 9,806 \cdot 5,0 \cdot \frac{5,1}{2} = 124,026 \text{ kN}$$

Vektorovým zložením všetkých troch čiastočných tlakov P_1 až P_3 dostaneme výsledný tlak P vody na lomený múr, teda vektorove je

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 = \overline{11'} + \overline{22'} + \overline{33'} = \overline{13'}$$

Polohu výslednice \mathbf{P} určíme pomocou výslednicovej čiary.

Príklad 13-6:

Máme vypočítať veľkosť \mathbf{P} hydrostatického tlaku na obdĺžnikovú plochu rozmerov $b = 2,0 \text{ m}$, $d = 4,0 \text{ m}$, ktorá leží v šikmej stene so sklonom 5:1. Výška

vodného stĺpca $h = 7,0 \text{ m}$. Stanovte tiež polohu s pôsobiska hydrostatického tlaku na obdĺžnikový prierez (obr. 13-6).

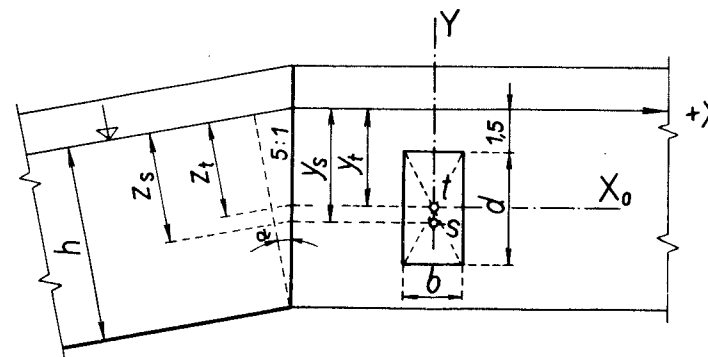
Hodnotu hydrostatického tlaku určíme z výrazu (3)

$$P = \gamma \cdot S \cdot z_i$$

kde $\gamma = 9,806 \text{ kN/m}^3$ je merná tiaž vody,

$S = b \cdot d = 2,0 \cdot 4,0 = 8,0 \text{ m}^2$ – plocha prierezu,

z_i – hĺbka ťažiska prierezu pod povrchom vodnej hladiny.



Obr. 13.6.

V tomto prípade je

$$z_i = y_i \cdot \cos \alpha,$$

kde

$$y_i = 1,5 + \frac{d}{2} = 1,5 + 2,0 = 3,5 \text{ m}$$

Uhol α vypočítame z výrazu

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{5} = 0,2, \quad \alpha' = 11^\circ 20', \quad \cos \alpha = \cos 11^\circ 20' = 0,98050$$

$$z_i = 3,5 \cdot 0,98050 \doteq 3,43 \text{ m}$$

Vodný tlak na uvedený obdĺžnikový prierez má hodnotu

$$P = \gamma \cdot S \cdot z_i = 9,806 \cdot 8,0 \cdot 3,43 = 269,077 \text{ kN}$$

Polohu s pôsobiska hydrostatického tlaku určíme z výrazu (4)

$$y_s = \frac{J_x}{\mathcal{M}_x}$$

kde J_x je moment zotrvačnosti uvažovaného prierezu k zvolenej osi X ,
 \mathfrak{M}_x — statický moment uvažovanej plochy k tej istej zvolenej osi X .
 V našom prípade je

$$J_x = J_{x_0} + U \cdot c^2 = \frac{1}{12} b \cdot d^3 + b \cdot d \cdot c^2$$

pričom

$$c = 1,5 + \frac{d}{2} = 1,5 + 2,0 = 3,5 \text{ m}$$

po dosadení

$$J_x = \frac{1}{12} 2,0 \cdot 4,0^3 + 2,0 \cdot 4,0 \cdot 3,5^2 = 10,6\dot{6} + 98,0 = 108,6\dot{6} \text{ m}^4$$

$$\mathfrak{M}_x = b \cdot d \cdot c = 2,0 \cdot 4,0 \cdot 3,5 = 28,0 \text{ cm}^3$$

$$y_s = \frac{108,6\dot{6}}{28,0} = 3,88 \text{ m}$$

Tlakové centrum s leží na zvislej osi symetrie Y pod ťažiskom t vo vzdialenosti

$$y_s - y_t = 3,88 - 3,5 = 0,38 \text{ m}$$

Vyplyva to zo skutočnosti, že hydrostatický tlak sa s rastúcou hĺbkou lineárne zväčšuje.

Príklad 13-7:

Máme určiť veľkosť a polohu pôsobiska S hydrostatického tlaku na vajcovitý prierez naznačených rozmerov, ktorý leží v šikmej stene so sklonom 5 : 1; výška vodného stĺpca $h_1 = 10,0 \text{ m}$ (obr. 13-7).

Ako nám je už známe, veľkosť vodného tlaku p stanovíme z výrazu

$$P = \gamma \cdot S \cdot z_T$$

pričom γ je merná tiaž vody,

S — plocha prierezu, ktorý berieme do úvahy,

z_T — hĺbka ťažiska T prierezu pod povrchom vodnej hladiny.

Polohu pôsobiska S hydrostatického tlaku zistíme zo známeho vzťahu

$$y_s = \frac{J_x}{\mathfrak{M}_x}$$

kde J_x je moment zotrvačnosti vajcovitého prierezu k vzťažnej osi X (volili sme ju povrchom vodnej hladiny),

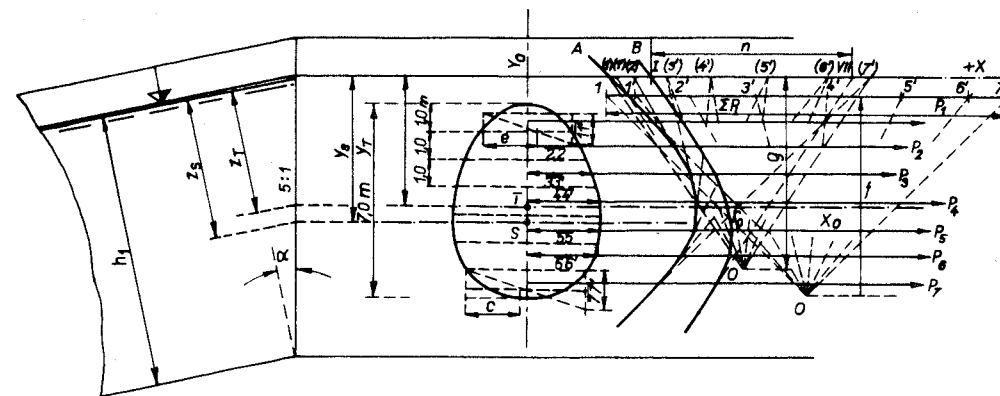
\mathfrak{M}_x — statický moment plochy prierezu k vzťažnej osi X .

Keďže matematické vyjadrenie plochy vajcovitého prierezu nepoznáme, vyriešime úlohu grafickým spôsobom.

Aby sme graficky našli polohu t ťažiska, rozdelíme plochu prierezu na pásiky šírky napr. 1,0 m.

Pásiky uvedieme na ľubovoľnú základňu e . V našom prípade sme si zvolili $e = 2,0 \text{ m}$ a určovacie úseky $\overline{11'}$, $\overline{22'}$ až $\overline{77'}$ pásikov u_1 , u_2 až u_7 považujeme za veľkosti síl P_1 až P_7 , ktoré pôsobia v ťažiskách pásikov.

Pre náš prípad je $P_1 = \overline{11'}$, $P_2 = \overline{22'}$, ..., $P_7 = \overline{77'}$.



Obr. 13.7.

Krajné pásiky u_1 a u_7 sme považovali za parabolické odseky, ostatné pásiky za zmiešanociare lichobežníky.

Plochu S vajcovitého prierezu určíme z výrazu

$$S = e \sum_{i=1}^7 \bar{P}_i = e \cdot \overline{17'} = 2,0 \text{ m} \cdot 14,6 \text{ m} = 29,2 \text{ m}^2$$

Polohu ťažiska t prierezu stanovíme pomocou výslednicovej čiary A , ktorú dostaneme rysovaním jej strán z ľubovoľného pólu O . Priesečník (r_0) prvej a poslednej strany výslednicovej čiary A dáva jeden bod vodorovnej ťažiskovej osi X_0 prierezu a jej priesečník so zvislou osou symetrie Y_0 je už ťažiskom t vajcovitého prierezu.

Odmeraním zistíme vzdialenosť y_t ťažiska od povrchu vodnej hladiny (osi $+X$), ako aj zvislú vzdialenosť z_t ťažiska prierezu pod povrchom vody.

V tomto prípade je $z_t = 4,6 \text{ m}$.

Hodnotu vodného tlaku P pôsobiaceho na vajcovitý prierez dostaneme z výrazu

$$P = \gamma \cdot S \cdot z_c = 9,806 \cdot 29,2 \cdot 4,6 = 1316,336 \text{ kN}$$

Na určenie polohy S pôsobiska hydrostatického tlaku P treba grafickým spôsobom stanoviť statický moment prierezu \mathcal{M}_x k zvolenej osi X , ako aj moment zotrvačnosti J_x prierezu k tej istej osi X .

Z predchádzajúcich kapitol už vieme, že graficky je

$$\mathcal{M}_x = e \cdot f \cdot m$$

kde e je zvolená základňa (volili sme $e = 2,0$ m),

f — pólová vzdialenosť, ktorou sme rysovali výslednicovú čiaru A , pričom je výhodné, ak volíme

$$f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^7 \bar{P}_i,$$

(v našom prípade je $f = \frac{1}{2} \cdot 14,6 = 7,3$ m),

m — výsledný momentový úsek vytatý prvou a poslednou stranou výslednicovej čiaru A na momentovej osi X . Na obr. 13-7 je $m = (1)(7') = 9,6$ m.

Po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$\mathcal{M}_x = e \cdot f \cdot m = 2,0 \text{ m} \cdot 7,3 \text{ m} \cdot 9,6 \text{ m} = 140,16 \text{ m}^3$$

Podobným spôsobom stanovíme graficky moment zotrvačnosti prierezu k osi X

$$J_x = e \cdot f \cdot g \cdot n$$

veľičiny e, f sme si už objasnili,

g je pólová vzdialenosť, ktorou rysujeme výslednicovú čiaru B (volili sme $g = 7,0$ m),

n — výsledný momentový úsek, vytatý prvou a poslednou stranou výslednicovej čiaru B na momentovej osi X (v našom prípade $n = 7,25$ m).

$$J_x = 2,0 \text{ m} \cdot 7,3 \text{ m} \cdot 7,0 \text{ m} \cdot 7,25 \text{ m} = 740,95 \text{ m}^4$$

Vzdialenosť pôsobiska hydrostatického tlaku od zvolenej vzťažnej osi X

$$y_s = \frac{J_x}{\mathcal{M}_x} = \frac{740,95}{140,16} = 5,29 \text{ m}$$

Pôsobisko hydrostatického tlaku P vajcovitého prierezu je pod povrchom vodnej hladiny v hĺbke

$$z_p = 5,2 \text{ m}$$

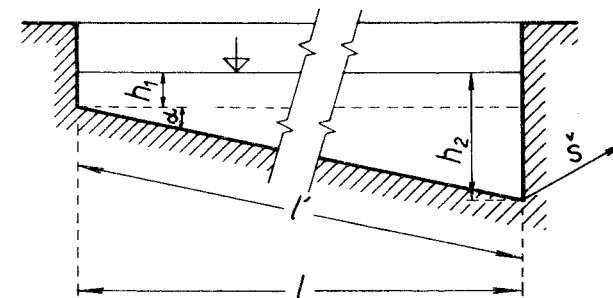
a je teda o

$$z_p - z_c = 5,2 - 4,6 = 0,60 \text{ m}$$

nižšie ako ťažisko t vajcovitého prierezu.

Príklad 13-8:

Vypočítajte veľkosť tlaku vody na dno a bočné steny bazénu, ktorého dĺžka $l = 50,0$ m, šírka $\check{s} = 10,0$ m, hĺbka vodného stĺpca $h_1 = 1,2$ m, $h_2 = 4,5$ m (obr. 13-8).



Obr. 13.8.

Tlak vody na dno bazéna

$$P_d = \gamma \cdot S \cdot z_c$$

pričom $\gamma = 9,806 \text{ kN/m}^3$ je merná tiaž vody,

S — veľkosť plochy šikmého dna bazéna,

z_c — vzdialenosť ťažiska dna bazéna od hladiny vody.

Plocha dna bazéna

$$S = l' \cdot \check{s}$$

$$l' = \sqrt{l^2 + (h_2 - h_1)^2} = \sqrt{50,0^2 + 3,3^2} = \sqrt{2510,89} \approx 50,1 \text{ m}$$

$$S = 50,1 \cdot 10,0 = 501,0 \text{ m}^2,$$

$$z_c = h_1 + \frac{h_2 - h_1}{2} = 1,2 + \frac{4,5 - 1,2}{2} = 2,85 \text{ m}$$

$$P_d = 9,806 \cdot 501,0 \cdot 2,85 = 14002,93 \text{ kN} \approx 14,003 \text{ MN}$$

Na ľavú stenu pôsobí vodný tlak

$$V_r = \gamma \cdot S_r \cdot z_i$$

$$S_r = h_1 \cdot \check{s} = 1,2 \cdot 10,0 = 12,0 \text{ m}^2,$$

$$z_i = \frac{h_1}{2} = \frac{1,2}{2} = 0,6 \text{ m}$$

$$P_r = 9,806 \cdot 12,0 \cdot 0,6 = 70,603 \text{ kN}$$

Pravá bočná stena bazéna je zaťažená vodným tlakom

$$P_p = \gamma \cdot S_p \cdot z_i$$

$$S_p = h_2 \cdot \check{s} = 4,5 \cdot 10,0 = 45,0 \text{ m}^2$$

$$z_i = \frac{h_2}{2} = \frac{4,5}{2} = 2,25 \text{ m}$$

a po dosadení číselných hodnôt

$$P_p = 9,806 \cdot 45,0 \cdot 2,25 = 992,25 \text{ kN}$$

Predná a zadná stena je rovnako zaťažená vodným tlakom

$$P_{pr} = P_z = \gamma \cdot S_{pr} \cdot z_i$$

$$S_{pr} = \frac{h_1 + h_2}{2} \cdot l = \frac{1,2 + 4,5}{2} \cdot 50 = 142,5 \text{ m}^2$$

$$z_i = \frac{1}{3} \frac{(h_2 + h_1)^2 - h_2 \cdot h_1}{h_2 + h_1} = \frac{1}{3} \frac{(4,5 + 1,2)^2 - 4,5 \cdot 1,2}{4,5 + 1,2} =$$

$$= \frac{5,7^2 - 5,4}{3 \cdot 5,7} = \frac{32,49 - 5,4}{17,1} \doteq 1,6 \text{ m}$$

$$P_{pr} = P_z = 9,806 \cdot 142,5 \cdot 1,6 = 2234,41 \text{ kN}$$

Príklad 13-9:

Určte veľkosť a polohu pôsobiska S hydrostatického tlaku P na plochu prierezu skladajúceho sa z polkruhu a štvorca, ktorý leží v zvislej stene. Strana štvorca $a = 2r = 4,0 \text{ m}$, $h = 9,0 \text{ m}$ (obr. 13-9).

Najprv vypočítame veľkosť hydrostatického tlaku P pôsobiaceho na zložený prierez

$$P = \gamma \cdot S \cdot z_i$$

$$S = a^2 + \frac{1}{2} \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 4,0^2 + \frac{1}{2} \cdot 3,14159 \cdot 2,0^2 = 16,0 + 6,283 = 22,283 \text{ m}^2$$

Vzdialenosť ťažiska z_i zloženého prierezu vypočítame z momentovej vety napísanej k osi X

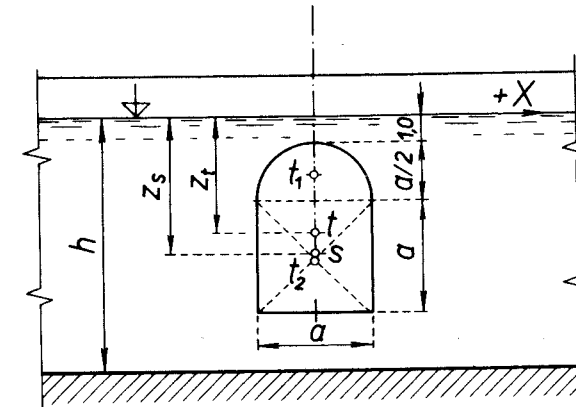
$$a) \quad S \cdot z_i = S_1 \cdot z_1 + S_2 \cdot z_2$$

kde

$$S_1 = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 6,283 \text{ m}^2, \quad S_2 = a^2 = 16,0 \text{ m}^2$$

z_1 je vzdialenosť ťažiska t_1 polkruhu od osi X ,

z_2 — vzdialenosť ťažiska t_2 štvorca od osi X ,



Obr. 13.9.

v našom prípade

$$z_1 = 1,0 + 0,5756 \cdot 2,0 \doteq 2,15 \text{ m},$$

$$z_2 = 1,0 + 2,0 + 2,0 = 5,0 \text{ m}.$$

Ak dosadíme do rovnice a), dostaneme

$$z_i = \frac{6,283 \cdot 2,15 + 16,0 \cdot 5,0}{22,283} = \frac{92,508}{22,283} \doteq 4,15 \text{ m}$$

Veľkosť hydrostatického tlaku na zložený prierez

$$P = \gamma \cdot S \cdot z_i = 9,806 \cdot 22,283 \cdot 4,15 = 906,246 \text{ kN}$$

Polohu S pôsobiska hydrostatického tlaku určíme z výrazu

$$z_s = \frac{J_x}{W_x}$$

kde

$$\mathfrak{M}_x = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot z_1 + a^2 \cdot z_2 = 6,283 \cdot 2,15 + 16,0 \cdot 5,0 = 93,508 \text{ m}^3$$

$$J_{x_1} = 0,1098 \cdot 2,0^4 + 6,283 \cdot (0,5756 \cdot 2,0 + 1,0)^2 = 1,7568 + 29,0463 = 30,803 \text{ m}^4$$

J_{x_1} je moment zotrvačnosti polkruhového prierezu k osi X ,

$$J_{x_2} = \frac{1}{12} a^4 + a^2 (a + 1,0)^2 = \frac{1}{12} 4,0^4 + 4,0^2 \cdot 5,0^2 = 21,3\dot{3} + 400 = 421,3\dot{3} \text{ m}^4$$

J_{x_2} je moment zotrvačnosti štvorcového prierezu k osi X

$$J_x = J_{x_1} + J_{x_2} = 30,803 + 421,3\dot{3} = 452,133 \text{ m}^4$$

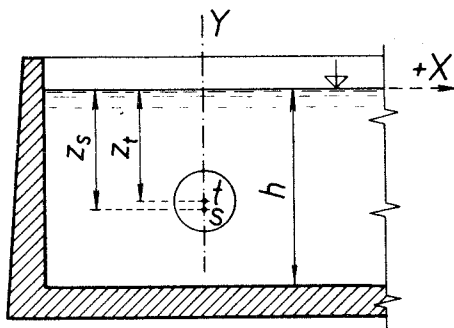
$$z_s = \frac{452,133}{93,508} \doteq 4,83 \text{ m}$$

$$z_s - z_t = 4,83 - 4,15 = 0,68 \text{ m}$$

Pôsobisko S hydrostatického tlaku pôsobiaceho na prierez sa nachádza vo vzdialenosti 0,68 m pod ťažiskom t prierezu.

Príklad 13-10:

Máme stanoviť veľkosť a polohu pôsobiska S hydrostatického tlaku P na kruhovú klapku s priemerom $d = 2,0$ m, ktorá sa nachádza v zvislej stene. Ťažisko t klapky je v hĺbke $z_t = 4,0$ m, $h = 7,0$ m (obr. 13-10).



Obr. 13.10.

Hydrostatický tlak pôsobiaci na klapku má hodnotu

$$P = \gamma \cdot S \cdot z_t$$

$$\text{pričom plocha klapky } S = \pi \cdot r^2 = 3,14159 \cdot 1,0^2 \doteq 3,1416 \text{ m}^2$$

$$P = 9,806 \cdot 3,1416 \cdot 4,0 \doteq 123,147 \text{ kN}$$

Vzdialenosť pôsobiska S hydrostatického tlaku od vzťažnej osi X (ktorú sme viedli povrchom vodnej hladiny)

$$z_s = \frac{J_x}{\mathfrak{M}_x}$$

kde

$$\mathfrak{M}_x = \pi \cdot 1,0^2 \cdot z_t = 3,14159 \cdot 1,0^2 \cdot 4,0 = 12,566 \text{ m}^3,$$

$$J_{x_0} = \frac{\pi \cdot r^4}{4} \doteq 0,7854 r^4 = 0,7854 \text{ m}^4$$

J_{x_0} je moment zotrvačnosti kruhového prierezu k ťažiskovej osi X_0 .

$$J_x = J_{x_0} + S \cdot z_t^2 = 0,7854 + 3,1416 \cdot 4,0^2 = 51,051 \text{ m}^4$$

$$z_s = \frac{51,051}{12,566} = 4,06 \text{ m}$$

LITERATÚRA

- BALAŽOVJECH, V.: Teoretická mechanika, Bratislava 1973
BALAŽOVJECH a kol. Teoretická mechanika v príkladoch I.—II., Bratislava 1967, 1969
BALAŽOVJECH, V.: Statika v príkladoch, 4. vyd., Bratislava 1971
BAŽANT, Zd.: Stavebná mechanika I, Praha 1960
BECHYNĚ, St.: Dynamika (litogr.), Bratislava 1942
BINDER, R.: Statika, Bratislava 1959
BRDLIČKA, M.: Mechanika kontinua I, II, Praha 1959
DARKOV, A. V.—KUZNECOV, V. I.: Statika sooruzenij, Moskva 1951
DAŠEK, V.: Dynamika, Praha 1955
DAŠEK, V.: Statika, Praha 1955
DUCHÁČEK a kol.: Statika stavebních konstrukcí, Praha 1967
DYCHOVIČNYJ, A. I.: Stroitel'naja mechanika, Moskva 1953
FISCHER—KAŠPAR—KUTMAN—ZENKLOVÁ: Základy mechaniky, Praha 1961
KADLČÁK, J.: Statika I, Brno 1967
KOSTKA, R.: Hydraulika, Praha 1951
LEDERER, F.: Statika I, II, Bratislava 1954, 1956
NOVÁK, O.: Stavebná mechanika I, Bratislava 1955
PROKOFJEV, I. P.: Teorija sooruzenij I, II, Moskva 1940
RABINVIČ, I. M.: Kurs stroitel'noj mechaniki I, II, Moskva 1950, 1954
RABINVIČ, I. M.: Osnovy stroitel'noj mechaniki steržnevych sistem, Moskva 1956
SALIGER, R.: Praktische statik, Wien 1947
TURECKÝ, A.: Stavebná mechanika I, Bratislava 1959
WIERZBICKI, W.: Mechanika budowli, Warszawa 1949
ŽEMOČKIN, B. N.—PAŠČEVSKIJ, D. P.: Statika sooruzenij, Moskva 1950

OBSAH

Predhovor	5
I. Sily pôsobiace v rovine (V. Kozakovič)	7
1.1. Centrálny silový systém	7
1.2. Všeobecná sústava síl v rovine (M. Hanula)	22
II. Priestorové sústavy síl (F. Trávníček)	67
2.1. Centrálny silový systém	67
2.2. Všeobecný silový systém	85
III. Ťažisko čiar, plôch a telies (V. Balážovjeh)	107
3.1. Grafická kvadratura	107
3.2. Ťažisko rovinných čiar	108
3.2.1. Ťažisko úsečky	108
3.2.2. Ťažisko rovinatej lomenej čiary	108
3.2.3. Ťažisko rovinatej krivky	108
3.2.4. Ťažisko kruhového oblúka	109
3.3. Ťažisko rovinných plôch	109
3.3.1. Ťažisko priamočiarych obrazcov	109
3.3.2. Ťažisko zmiešanočiarych obrazcov	109
3.3.3. Ťažisko krivočiarych obrazcov	110
3.4. Ťažisko priestorovej krivky	110
3.5. Ťažisko priestorovej plochy	110
3.6. Ťažisko tuhého telesa	111
IV. Momenty zotrvačnosti a deviačné momenty (V. Djubeková)	141
4.1. Momenty zotrvačnosti a deviačné momenty rovinných obrazcov	141
4.2. Momenty zotrvačnosti telies	170
V. Kinematika hmotného bodu (V. Kozakovič)	175
5.1. Priamočiare pohyby bodu	177
5.2. Krivočiare pohyby bodu	187
VI. Tuhé teleso a tuhá doska (Z. Morovjanová)	195

VII. Práca a výkonnosť (Z. Morovjanová)	221
VIII. Princíp virtuálnej práce (M. Hanula)	234
IX. Kinetická a potenciálna energia (Z. Morovjanová)	261
X. Zrazenie telies a nárazové sily (V. Kozakovič)	275
XI. D'Alenbertov princíp (M. Hanula)	284
XII. Trenie (V. Balažovjeh)	307
12.1. Druhy trenia	307
12.2. Šmykové trenie — Coulombove zákony	307
12.3. Valivé trenie	308
XIII. Hydrostatika (V. Balažovjeh)	325
13.1. Všeobecné poznatky o kvapalinách	325
13.2. Základná Eulerova diferenciálna rovnica pre rovnováhu kvapalín	326
13.3. Tlak kvapaliny na vodorovné dno	326
13.4. Určenie pôsobiska a hydrostatického tlaku	327
Literatúra	343

Publikácia je určená poslucháčom vysokých škôl stavebných fakúlt

**Prof. Ing. Vojtech Balážovjech—Ing. Valentína Djubeková
Ing. Milan Hanula—Ing. Vojtech Kozakovič
Ing. Zdena Morovjanová—Ing. František Trávníček, CSc.**

TEORETICKÁ MECHANIKA V PRÍKLADOCH

MDT 531.01(075.8)

Vydala ALFA, vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, n. p., Bratislava, Hurbanovo nám. 3,
v decembri 1977, ako svoju 5847. publikáciu

Zodpovedná redaktorka Katarína Dobšovičová
Technická redaktorka Zora Šínková

Ochranný obal a väzbu navrhol Leodegar Horváth

Vytlačila Kníhtlačiareň SVORNOSŤ, n. p., Bratislava, ul. Februárového víť. 20

343 strán, 182 obrázkov, 2 tabuľky; 20,73 AH, 21,13 VH

1. vydanie. Náklad 4000 výtlačkov

302 05

63-551-76 **Kčs 26,—**

104/23; 852