



**Střední průmyslová škola sdělovací techniky
Panská 3
Praha 1**

© Jaroslav Reichl, 2009



Teoretická mechanika

Jaroslav Reichl

inspirováno přednáškami

doc. RNDr. Jiřího Podolského, CSc., DSc.

OBSAH

| | |
|---|-----------|
| 1. Úvod | 4 |
| 1.1 Základní pojmy _____ | 4 |
| 1.2 Newtonovy zákony _____ | 5 |
| 1.3 Základní přístupy mechaniky _____ | 5 |
| 1.3.1 Popis gravitace | 5 |
| 1.3.2 Význam alternativních popisů..... | 6 |
| 2. Pohyb hmotných bodů podrobených vazbám | 7 |
| 2.1 Úvodní úvahy _____ | 7 |
| 2.2 Klasifikace vazeb _____ | 7 |
| 2.3 Lagrangeovy rovnice I. druhu _____ | 8 |
| 2.4 Zobecnění Lagrangeových rovnic na N hmotných bodů a v vazeb _____ | 11 |
| 2.5 d'Alembertův princip _____ | 11 |
| 2.6 ***Jourdainův a Gaussův princip _____ | 14 |
| 3. Lagrangeův formalismus | 16 |
| 3.1 Základní pojmy _____ | 16 |
| 3.2 Konfigurační prostor _____ | 16 |
| 3.2.1 Motivační příklad | 16 |
| 3.2.2 Zobecněné souřadnice | 17 |
| 3.2.3 Počet zobecněných souřadnic | 18 |
| 3.2.4 Zobecněné rychlosti | 19 |
| 3.2.5 ***Zenonovy paradoxy..... | 21 |
| 3.3 Odvození dynamického zákona _____ | 22 |
| 3.3.1 Pohyb jedné částice po úsečce | 22 |
| 3.3.2 Pohyb N hmotných bodů ve více dimenzích | 23 |
| 3.4 Lagrangeovy rovnice II. druhu ve speciálních případech _____ | 25 |
| 3.4.1 Konzervativní síly | 25 |
| 3.4.2 ***Přesné řešení matematického kyvadla..... | 27 |
| 3.4.3 Síly, které mají zobecněný potenciál..... | 30 |
| 3.5 Postup pro sestavení Lagrangeových rovnic _____ | 31 |
| 3.6 Pohyb hmotného bodu v centrálním silovém poli _____ | 31 |
| 3.7 Metody řešení Lagrangeových rovnic _____ | 34 |
| 3.8 Pohyb hmotného objektu v poli centrální cíly _____ | 36 |
| 3.9 Pohyb planet kolem Slunce aneb Keplerova úloha _____ | 37 |
| 3.9.1 Obecné odvození..... | 37 |
| 3.9.2 První Keplerův zákon..... | 39 |
| 3.9.3 Druhý Keplerův zákon..... | 40 |
| 3.9.4 Třetí Keplerův zákon | 40 |
| 3.10 Metoda efektivního potenciálu _____ | 41 |
| 3.10.1 Newtonovský efektivní potenciál..... | 41 |
| 3.10.2 Efektivní potenciál obecné teorie relativity..... | 43 |
| 3.11 Rozptyl nabitých částic _____ | 44 |
| 3.12 Problém dvou těles _____ | 47 |
| 3.13 Problém tří těles _____ | 48 |
| 4. Hamiltonův formalismus | 50 |
| 4.1 Úloha o brachistochroně - motivace variačního principu _____ | 50 |
| 4.2 Definice akce _____ | 50 |
| 4.3 Hamiltonův variační princip _____ | 51 |
| 4.4 Eulerovy - Lagrangeovy rovnice _____ | 54 |
| 4.5 Úloha o brachistochroně _____ | 54 |
| 4.6 Invariance Lagrangeovy funkce a zákony zachování _____ | 57 |
| 4.6.1 Obecné pojmy | 57 |

| | | |
|-------------|---|-----------|
| 4.6.2 | Homogenita prostoru..... | 58 |
| 4.6.3 | Izotropie prostoru..... | 58 |
| 4.6.4 | Homogenita času..... | 59 |
| 4.6.5 | Lokální symetrie..... | 59 |
| 4.7 | Kalibrační transformace a kalibrační symetrie | 59 |
| 4.8 | Hamiltonovy rovnice | 60 |
| 4.8.1 | Kanonická hybnost..... | 60 |
| 4.8.2 | Fázový prostor..... | 61 |
| 4.8.3 | Hamiltonova funkce..... | 62 |
| 4.8.4 | Formulace a důkaz Hamiltonových kanonických rovnic..... | 63 |
| 4.9 | Ilustrace použití Hamiltonových kanonických rovnic | 64 |
| 4.9.1 | Harmonický oscilátor..... | 64 |
| 4.9.2 | Třírozměrný pohyb částice v poli potenciální energie..... | 65 |
| 4.9.2.1 | Popis pohybu částice v kartézských souřadnicích..... | 65 |
| 4.9.2.2 | Popis pohybu částice v cylindrických souřadnicích..... | 65 |
| 4.9.2.3 | Popis pohybu částice ve sférických souřadnicích..... | 66 |
| 4.9.3 | Nabitá částice v elektromagnetickém poli..... | 67 |
| 4.9.4 | Hamiltonián v dalších oborech fyziky..... | 67 |
| 4.10 | Poissonovy závorky | 68 |
| 4.10.1 | Definice a matematické vlastnosti..... | 68 |
| 4.10.2 | Fundamentální Poissonovy závorky..... | 68 |
| 4.11 | Kanonické transformace | 70 |
| 4.11.1 | Definice a základní vztahy kanonických transformací..... | 70 |
| 4.11.2 | Vlastnosti kanonických transformací..... | 72 |
| 4.11.3 | Ověřování kanoničnosti transformace..... | 73 |
| 4.12 | Hamiltonova - Jacobiho teorie | 75 |
| 4.12.1 | Hamiltonova - Jacobiho rovnice..... | 75 |
| 4.12.2 | Postup řešení Hamiltonovy - Jacobiho rovnice..... | 76 |
| 5. | Tuhé těleso | 78 |
| 5.1 | Kinematika tuhého tělesa | 78 |
| 5.1.1 | Tuhé těleso a popis jeho pohybu..... | 78 |
| 5.1.2 | Zavedení úhlové rychlosti..... | 80 |
| 5.1.3 | Rotace s pevnou osou..... | 83 |
| 5.1.4 | Skládání rotací a vektorů úhlových rychlostí..... | 83 |
| 5.1.5 | Popis rotace tuhého tělesa - Eulerovy kinematické rovnice..... | 84 |
| 5.2 | Dynamika tuhého tělesa | 86 |
| 5.2.1 | Motivace..... | 86 |
| 5.2.2 | Tenzor setrvačnosti..... | 86 |
| 5.2.3 | Moment setrvačnosti..... | 89 |
| 5.2.4 | Eulerovy dynamické rovnice..... | 92 |
| 5.2.5 | Bezmomentový setrvačnick..... | 93 |

Text je psán pomocí několika zvláštních stylů:

Běžný text, odvozování vztahů, výsledné vztahy, ...

DEFINICE DŮLEŽITÝCH FYZIKÁLNÍCH POJMŮ, ZÁKONŮ, ROVNIC, ...

Komentář, který probíranou látku rozšiřuje, upřesňuje či doplňuje.

Zjednodušená tvrzení pro lepší pochopení, která jsou tedy z fyzikálního hlediska nepřesná, ale která mohou napomoci k lepšímu pochopení probírané látky.

Zadání a řešení úloh zařazených přímo do přednášky.

1. ÚVOD

1.1 Základní pojmy

Mechanika se zabývá popisem objektů v určitém stavu, které se pohybují v prostoru a čase. Proto je nutné tyto pojmy vymezit:

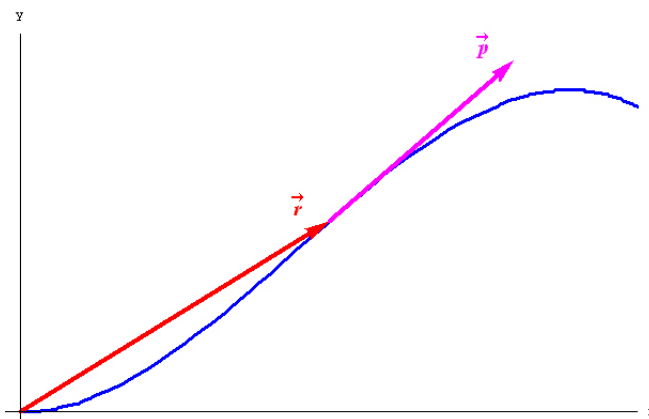
1. prostor - je spojitý, trojdimenzionální, euklidovský, homogenní a izotropní. Homogenní prostor znamená, že je všech bodech stejný, izotropní je takový prostor, jehož vlastnosti se nemění v závislosti na směru (je tedy ve všech směrech stejný).

Místo toho, že prostor je spojitý, můžeme říct, že se jedná o diferencovatelnou varietu.

2. čas - je spojitý, jednorozměrný, rovnoměrný, jednosměrný, synchronizovaný a absolutní;
3. objekty - jsou idealizovány soustavou rozlišitelných hmotných bodů;

Hmotné body mají tedy svoji identitu - lze je očíslovat, pojmenovat, ...

4. stav hmotného bodu - je plně a jednoznačně popsán polohovým vektorem \vec{r} a vektorem hybnosti \vec{p} (viz obr. 1). Na základě tohoto popisu lze jednoznačně zkonstruovat trajektorii pohybu hmotného bodu a tím je zaručena rozlišitelnost jednotlivých hmotných bodů.



obr. 1

Žádná z výše uvedených charakteristik prostoru, času, objektů nebo stavů hmotných bodů neplatí obecně:

1. Prostor z hlediska teorie relativity sám o sobě nemá smysl - je součástí obecnějšího prostoročasu. Ten je v okolí velmi hmotných těles neeuklidovský - tj. je zakřivený. Těleso se pak pohybuje v tomto zakřiveném prostoročase bez působení vnější síly po geodetice. Ale např. ve Sluneční soustavě je toto zakřivení malé - proto lze např. k výpočtům trajektorií kosmických sond použít klasickou mechaniku.

Pohyb bez působení vnější síly je dán právě zakřivením prostoročasu - těleso se pohybuje v dolíku, který prostoročas vytváří.

2. Z hlediska teorie relativity je čas každého pozorovatele jiný - závisí na pohybovém stavu pozorovatele, na tom, v jakém gravitačním poli se nachází, ... Při pohybu rychlostí, jejíž velikost je zanedbatelná vzhledem k velikosti rychlosti světla ve vakuu, a ve velkých vzdálenostech od hmotných objektů lze opět použít klasickou mechaniku.
3. Z hlediska kvantové mechaniky jsou objekty, které zkoumá (elektrony, atomy, ...), navzájem nerozlišitelné.
4. Stav hmotného bodu (tj. jeho polohu a hybnost) lze měřit jen s určitou nepřesností, jak vyplývá z Heisenbergových relací neurčitosti. Stav objektů (elektrony, atomy, ...) je popsán pomocí pravděpodobnosti a pomocí vlnové funkce.

Newtonova mechanika je tedy pouze modelem reality, ale ukazuje se, že v řadě případů se jedná o model velmi dobrý a pro většinu výpočtů i dostatečně přesný. Ačkoliv vývoj fyziky během 20. století oťrásl základy Newtonovské mechaniky a ukázal, že je vlastně „jen“ jakýmsi mezním případem pro pohyby, jejichž velikosti rychlostí jsou zanedbatelné ve srovnání s velikostí rychlosti světla ve vakuu, pro pohyby, které se dějí velmi daleko od velmi hmotných objektů, ..., zůstává Newtonovská mechanika oborem, který je pro moderní obory (teorie relativity, kvantová mechanika, ...) základem.

Zakladatelem klasické mechaniky je sir Isaac Newton (1643 - 1727), který v roce v roce 1686 publikoval *Philosophie naturalis principia mathematica (Matematické principy přírodních věd)*. V tomto díle položil základy nejen mechaniky, ale i jejího matematického popisu založeného na diferenciálním počtu a integrálním počtu. Na první pohled by se mohlo zdát, že mechanika je v současné době překonaným oborem a že problémy, kterými se zabývá, již byly vyřešeny. Ve skutečnosti se ale řada fyziků k mechanice v současné době vrací, neboť s rozvojem výpočetní techniky a matematických programů lze simulovat a propočítávat ty jevy, které není možné analyticky vyřešit, nebo zahrnovat do jednodušších jevů komplikovanější podmínky (tření, odporové síly, nelinearitu, ...).

1.2 Newtonovy zákony

Newtonovy zákony lze kromě klasické formulace formulovat i jinak.

PRVNÍ NEWTONŮV ZÁKON: EXISTUJE SOUŘADNÝ SYSTÉM (NAZÝVANÝ INERCIÁLNÍ), VŮČI NĚMUŽ SE KAŽDÝ IZOLOVANÝ HMOTNÝ BOD POHYBUJE ROVNOMĚRNĚ PŘÍMOČAŘE.

IZOLOVANÝ HMOTNÝ BOD JE PŘITOM BOD, NA KTERÝ NEPŮSOBÍ ŽÁDNÉ SÍLY.

Izolovaný bod je tedy odstíněn od všech „pravých“ sil - tj. vždy lze provést experiment tak, abychom dané rušivé silové působení odstranili. Jedinou silou, kterou odstínit nelze, je gravitace - i to lze ovšem experimentálně provést: budeme experimentovat ve velkých vzdálenostech od hmotných těles.

Bude-li foukat vítr, budeme experimentovat v zavřené místnosti, bude-li experiment rušit elektrostatické pole, provedeme experiment ve Faradayově kleci, ...

Tato formulace je silnější než běžná formulace prvního Newtonova zákona, protože je vlastně existenční větou pro inerciální systém. Z této formulace také vyplývá fakt, že inerciálních systémů existuje celá řada a jsou navzájem propojeny Galileovou transformací. V těchto systémech pak lze dobře formulovat druhý Newtonův zákon.

DRUHÝ NEWTONŮV ZÁKON: PRO KAŽDÝ HMOTNÝ BOD EXISTUJE KONSTANTA m A VEKTOROVÁ FUNKCE \vec{F} TAKOVÁ, ŽE JEHO POHYB VŮČI DANÉMU INERCIÁLNÍMU SYSTÉMU JE POPSÁN DIFERENCIÁLNÍ ROVNICÍ $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$.

Tato formulace druhého Newtonova zákona je vlastně implicitní definice setrvačné hmotnosti a síly.

Mechanika se nezabývá původem sil - pracuje s nimi obecně. Hledat původy a příčiny působení sil je předmětem zájmu jiných oborů fyziky:

1. teorie gravitace popisuje gravitační sílu $\vec{F}_g : \vec{F}_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}_0$;
2. teorie elektromagnetického pole popisuje sílu působící na nabitou částici, která se pohybuje v magnetickém poli: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$;
3. ...

Při popisu sil je rozumné klást jisté požadavky na jejich charakter. Síly by měly:

1. splňovat princip akce a reakce;
2. být závislé na okamžitém stavu pohybujícího se tělesa (resp. hmotného bodu);
3. splňovat princip superpozice.

Každá z výše uvedených charakteristik je splněna pouze v rámci klasické mechaniky (Newtonovské mechaniky).

Princip akce a reakce spolu se závislostí na aktuálním stavu může být problematický v nestacionárních polích, princip superpozice neplatí v silných gravitačních polích (popsaných obecnou teorií relativity).

1.3 Základní přístupy mechaniky

Mechanika při matematicko - fyzikálním popisu jevů a dějů, kterými se zabývá, uplatňuje dva základní přístupy:

1. vektorová mechanika - vyučuje se na základních školách a středních školách a při tomto popisu se využívají vektory, s nimiž pracoval už Newton, ačkoliv nebyly tehdy popsány matematicky;
2. analytická mechanika - základními veličinami, kterými se mechanika popisuje, jsou práce, kinetická energie, ...obecně tedy skaláry. Pohybové rovnice získáme derivováním skalárů podle vhodných souřadnic. Tento přístup uplatňovali Leibnitz, Euler, Lagrange, Hamilton a další.

1.3.1 Popis gravitace

Různé přístupy k popisu fyzikálních jevů a dějů lze ilustrovat na popisu gravitace. Tu lze popsat pomocí:

1. gravitační síly - popis provedl Newton a vychází z faktu, že na těleso o hmotnosti m , které se nachází ve vzdálenosti r od silového centra o hmotnosti M působí gravitační síla \vec{F}_g daná vztahem $\vec{F}_g = G \frac{Mm}{r^2} \vec{r}_0$ (viz obr. 2);
2. pole potenciálu - pomocí pole potenciálu φ popsal gravitaci poprvé Poisson na základě hustoty hmoty ρ (viz obr. 3), pro kterou platí: $\Delta\varphi = 4\pi G\rho$;

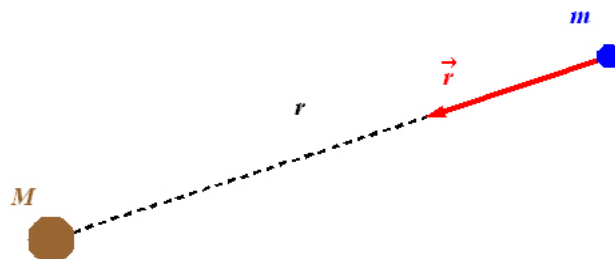
Symbol $\Delta\varphi$ znamená operátor *laplace* aplikovaný na potenciál φ .

3. pole metriky - tímto způsobem popsal gravitaci Einstein svými tenzorovými rovnicemi:

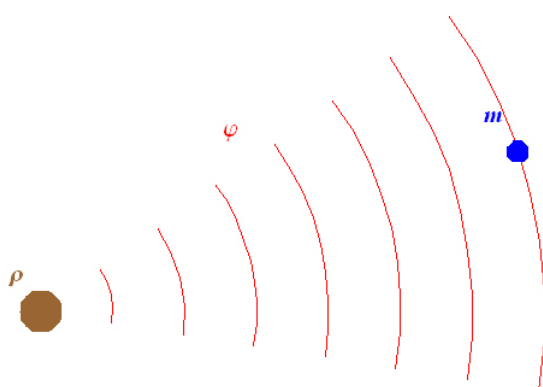
$$G_{\mu\nu}(g_{\alpha\beta}) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \text{ (viz obr. 4).}$$

Přirozený přechod mezi uvedenými přístupy k popisu gravitace přitom lze udělat mezi přístupem Poissonovým a Einsteinovým, neboť oba tyto přístupy mají společnou koncepci. Poissonovu rovnici a Einsteinovy rovnice lze chápat tak, že určitý operátor aplikován na veličinu popisující v daném přístupu gravitaci (tj. $\Delta\varphi$ resp. $G_{\mu\nu}(g_{\alpha\beta})$) je roven zdrojům gravitace (tj. $4\pi G\rho$ resp. $\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$).

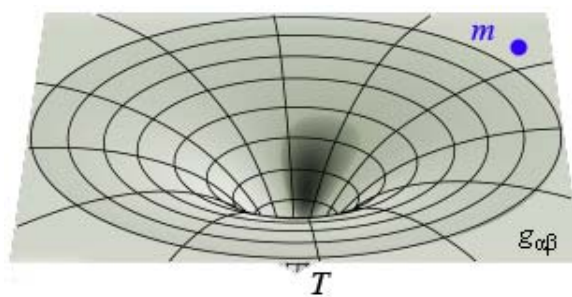
Newtonův přístup a Einsteinův přístup jsou od sebe koncepčně velmi daleko.



obr. 2



obr. 3



obr. 4

1.3.2 Význam alternativních popisů

Alternativní popisy mechaniky (tj. ty, které nevycházejí z Newtonova popisu) mají význam pro další studium fyziky:

1. otvírají cestu k popisu nemechanických oborů fyziky, protože tyto alternativní přístupy lze zobecnit snáze než klasické přístupy;
2. jsou mohutnějšími nástroji pro řešení problémů - lze na základě nich odvodit rychlejší a efektivnější postupy;
3. využívají metody pokročilé matematiky;
4. jsou krásné a elegantní.

2. POHYB HMOTNÝCH BODŮ PODROBENÝCH VAZBÁM

2.1 Úvodní úvahy

Podle druhého Newtonova zákona (viz odstavec 1.2) lze psát

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}, \quad (1)$$

kde \vec{F} představuje vtištěnou sílu (pravou sílu).

Síly definované vztahem (1) se většinou nazývají inerciální síly.

Touto silou může být:

1. síla gravitační popisující homogenní gravitační pole: $\vec{F}_g = G \frac{Mm}{r^2} \vec{r}_0$;
2. síla elektrostatická popisující homogenní elektrostatické pole: $\vec{F}_e = q\vec{E}$;
3. síla magnetická popisující homogenní magnetické pole: $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$;
4. síla modelující tření: $\vec{F}_t = -\alpha\vec{v}$;
5. ...

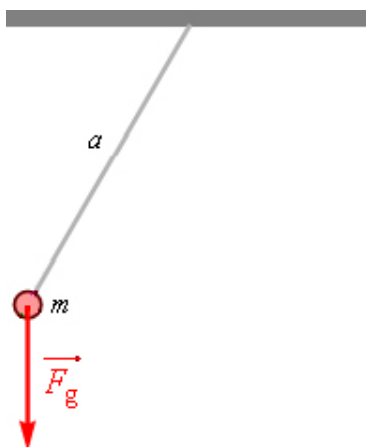
V rovnici (1) zatím není žádná omezující podmínka, a proto jí řešíme obecně v \mathbb{R}^3 .

Neznámými jsou složky polohového vektoru závislé na čase, tj. $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

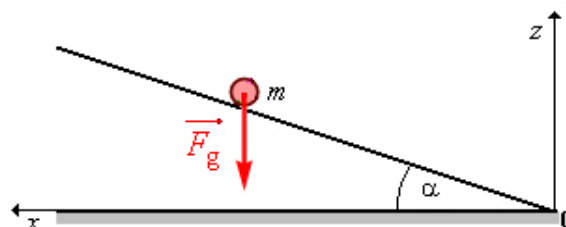
Gravitační síla popisuje volný pád. Pokud přidáme vhodnou vazbu, získáme popis např. matematického kyvadla. Hmotný bod se už nebude pohybovat po trajektorii ve tvaru úsečky, ale jeho pohyb bude nějak omezen - v tomto případě na část kružnice.

Příklad: Matematické kyvadlo

Na obr. 5 je zobrazeno matematické kyvadlo. Na hmotný bod působí gravitační síla \vec{F}_g . Podmínka, která omezí pohyb hmotného bodu tak, aby pohyb odpovídal pohybu matematického kyvadla, je: hmotný bod má konstantní vzdálenost od místa upevnění závěsu délky a . Tedy vazba $\varphi(x, y, z)$ je $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$.



obr. 5



obr. 6

Příklad: Nakloněná rovina

Pohyb tělesa po nakloněné rovině je způsoben také gravitační silou (viz obr. 6). Omezení pouze na trajektorii ve tvaru úsečky po nakloněné rovině, lze provést zavedením vazby $\varphi(x, z) = z - x \operatorname{tg} \alpha = 0$.

Obecně lze každou plochu popsat implicitní funkcí $\varphi(x, y, z) = \varphi(\vec{r}) = 0$. Tato rovnice plochy pak představuje vazbu, která může být závislá na různých parametrech (viz odstavec 2.2).

2.2 Klasifikace vazeb

Vazby lze rozdělit do tří základních skupin, které lze dále ještě dělit:

1.
 - a) vazba oboustranná - popsána rovnicí $\varphi(\vec{r}) = 0$;
 - b) vazba jednostranná - popsána nerovnicí $\varphi(\vec{r}) \geq 0$;
- 2.

a) vazba skleronomní - je vazba, která nezávisí na čase: $\varphi = \varphi(\vec{r})$;

b) vazba reonomní - je vazba, která závisí na čase: $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$;

3.

a) vazba holonomní - je vazba, která nezávisí na rychlosti: $\varphi = \varphi(\vec{r})$;

b) vazba neholonomní - je vazba, která závisí na rychlosti: $\varphi = \varphi(\vec{r}, \vec{v})$.

Tuhé těleso je soustava hmotných bodů s dostatečným počtem vazeb typu $\varphi(\vec{r}) = 0$.

Jednotlivé typy vazeb lze navzájem kombinovat - např. vazba popisující matematické kyvadlo (viz odstavec 2.1) je vazba oboustranná, skleronomní, holonomní.

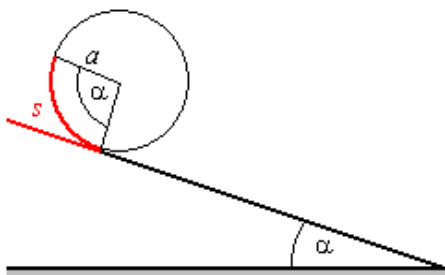
Pozor! Ne každá vazba závislá na rychlosti je vazba neholonomní. Neholonomní je jen taková vazba, v níž nelze rychlost vyintegrovat.

Pokud se lze tedy rychlosti v předpisu vazby zbavit, jedná se o vazbu holonomní.

Příklad: Nakloněná rovina s obručí

Po nakloněné rovině se valí bez podkluzování obruč o poloměru a (viz obr. 7). V určitém čase se odvalila o dráhu s a obruč se tedy otočila o úhel α . Vazba je tedy $\varphi = \dot{s} - a\dot{\alpha} = 0$. Tato podmínka je ovšem ekvivalentní podmínce $\varphi = s - a\alpha = 0$ (druhá podmínka vznikne integrací první podmínky).

První podmínka vyplývá z úvah o rovnosti rychlosti, kterou se posouvá po nakloněné rovině bod dotyku obruče s nakloněnou rovinou, a obvodové rychlosti obruče. Druhá podmínka (zintegrovaná) vyplývá z úvah o rovnosti dráhy, kterou opsala obruč na nakloněné rovině, a dráhy, o kterou se obruč pootočila.



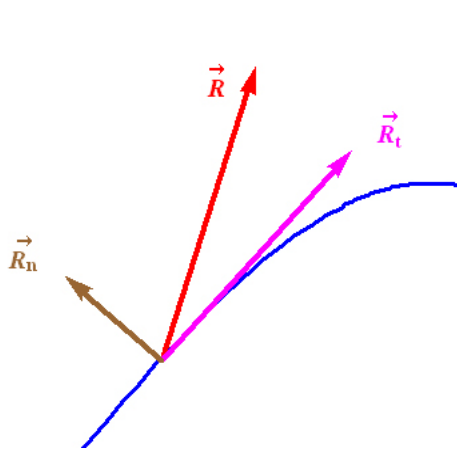
obr. 7

Vazba, která je neholonomní (tj. závisí na rychlosti), je vazba popisující např. valení mince bez podkluzování na vodorovné podložce.

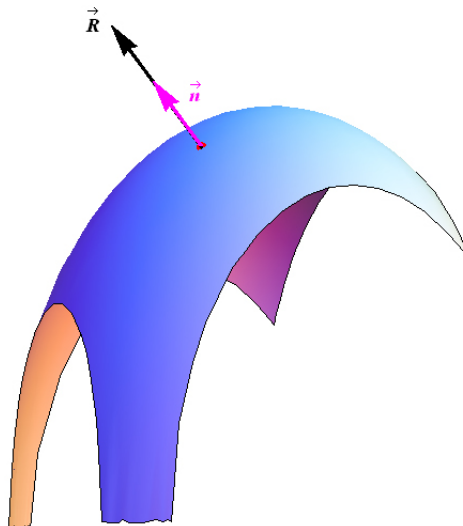
2.3 Lagrangeovy rovnice I. druhu

Na základě praxe lze vyslovit axiom:

VAZBOVÉ SÍLY \vec{R} HOLONOMNÍCH VAZEB $\varphi(\vec{r}, t) = 0$ PŮSOBÍ VŽDY KOLMO NA PLOCHU POPSANOU ROVNICÍ $\varphi = 0$.



obr. 8



obr. 9

Pokud by vazbové síly působily na plochu jinak, než kolmo (viz obr. 8), zahrneme do vazbových sil pouze složky kolmé na danou plochu. Ostatní složky vazbových sil zahrneme do vtištěných sil (pravých sil).

Tento poznatek je plně ve shodě s praxí: budeme-li uvažovat ideální situace bez třecích sil, bude mít vazbová síla vždy směr kolmý k dané ploše.

Rovnici (1) můžeme tedy přepsat ve tvaru

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} + \vec{R}. \quad (2)$$

Na základě obr. 9 lze psát

$$\vec{R} = \lambda \vec{n}, \quad (3)$$

kde \vec{n} je normálový vektor plochy dané rovnicí $\varphi = 0$ a $\lambda \in \mathbb{R}$.

Vztah (3) říká, že vektor vazbové síly \vec{R} je násobkem normálového vektoru \vec{n} plochy, což znamená, že tyto dva vektory jsou vzájemně rovnoběžné. Vzhledem k tomu, že vektor \vec{n} je kolmý k tečné rovině sestojené k dané ploše v uvažovaném bodě (tj. „je kolmý k ploše“, „je kolmý k ploše“ i vektor \vec{R} (což požadujeme).

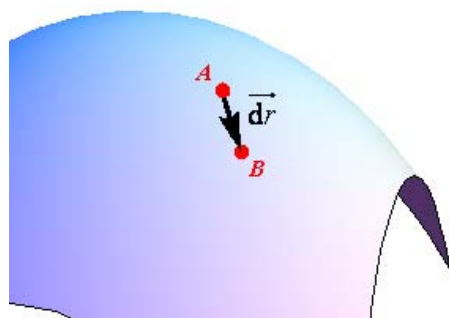
Další z matematických vlastností plochy dané rovnicí $\varphi = 0$ lze zapsat ve tvaru

$$\vec{n} = \text{grad} \varphi. \quad (4)$$

Vlastnost (4) lze dokázat matematicky jednoduchou úvahou. Předpokládejme, že na ploše jsou dány dva body $A = [x_1, x_2, x_3]$ a $B = [x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3]$ (viz obr. 10). Oba tyto body leží na ploše popsané rovnicí $\varphi(\vec{r}) = 0$. Proto platí $\varphi(\vec{r}_A) = 0$ a $\varphi(\vec{r}_B) = \varphi(\vec{r}_A + d\vec{r}) = 0$, přičemž $\vec{r}_A = (x_1, x_2, x_3)$ a $\vec{r}_B = \vec{r}_A + d\vec{r} = (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$. Rozdíl $\varphi(\vec{r}_A + d\vec{r}) - \varphi(\vec{r}_A) = 0$ lze rozepsat podle Taylorova

rozvoje: $\varphi(\vec{r}_A) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi(\vec{r}_A)}{\partial x_i} dx_i + \dots - \varphi(\vec{r}_A) = 0$. Zanedbáme-li členy vyšších řádů, dostaneme:

$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi(\vec{r}_A)}{\partial x_i} dx_i = 0$, což lze přepsat ve formě skalárního součinu $\text{grad} \varphi(\vec{r}_A) \cdot d\vec{r} = 0$. Skalární součin dvou nenulových vektorů je nulový tehdy, jsou-li uvažované nenulové vektory na sebe kolmé. Vzhledem k tomu, že při uvažovaných vzdálenostech bodů A a B od sebe, leží vektor $d\vec{r}$ v ploše popsané rovnicí $\varphi(\vec{r}) = 0$, má vektor $\text{grad} \varphi(\vec{r}_A)$ směr normály k dané ploše v bodě A . Proto obecně platí, že $\vec{n} = \text{grad} \varphi$.



obr. 10

Dosadíme-li vztahy (3) a (4) postupně do vztahu (2), dostaneme: $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} + \vec{R} = m\ddot{\vec{r}} + \lambda \vec{n} = m\ddot{\vec{r}} + \lambda \text{grad} \varphi$.

LAGRANGEOVY ROVNICE I. DRUHOU JSOU ROVNICE VE TVARU

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} + \lambda \text{grad} \varphi \quad (5)$$

A

$$\varphi(\vec{r}, t) = 0. \quad (6)$$

Koeficient λ vystupující v Lagrangeových rovnicích, které francouzský fyzik Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813) publikoval v roce 1775, se většinou nazývá Lagrangeův multiplikátor.

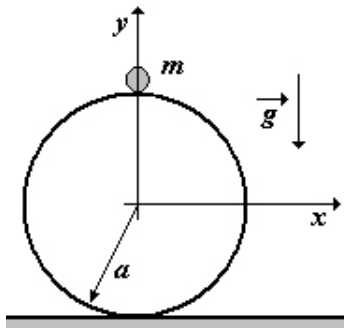
Lagrangeovy rovnice jsou vlastně 4 rovnice (rovnici (5) lze rozepsat ve třech souřadnicích) o čtyřech neznámých: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ a λ .

Lagrangeovy rovnice lze aplikovat při řešení řady úloh.

Příklad: Održení hmotného bodu do balonu

Na povrchu balonu o poloměru a , který se nachází v homogenním gravitačním poli, je v jeho nejvyšším bodě hmotný bod o hmotnosti m . Hmotný bod se začne bez tření pohybovat po povrchu balonu. V jaké výšce nad povrchem podložky, na níž je balon položen, se hmotný bod od balonu odtrhne?

Řešení: Situace je zobrazena na obr. 11. Vazbu, která popisuje danou plochu, by bylo možné definovat jako jednostrannou, ale lépe je vazba oboustranná: lze vyjít z analogie, v níž se hmotný bod pohybuje v trubičce (která je na povrchu balonu). Hmotný bod se odtrhne právě tehdy, když bude velikost vazbové síly nulová, tj. $R = 0$.



obr. 11

Na základě rovnic (5) a (6) a obr. 11 lze psát:

$$m\ddot{x} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$m\ddot{y} = -mg + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

$$m\ddot{x} = 2\lambda x$$

Tyto rovnice lze s využitím rovnice vazby přepsat: $m\ddot{y} = -mg + 2\lambda y$

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

Další postup řešení provedeme pomocí dvou „triků“. Prvním z nich je vyjádřit první derivaci a druhou derivaci rovnice vazby φ podle času: $\dot{\varphi} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$ a $\ddot{\varphi} = 2\dot{x}\dot{x} + 2x\ddot{x} + 2\dot{y}\dot{y} + 2y\ddot{y}$. Úpravou druhé derivace postupně dostáváme: $\ddot{\varphi} = 2(x\ddot{x} + y\ddot{y}) + 2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 2(x\ddot{x} + y\ddot{y}) + 2v^2 = 0$. Tedy $x\ddot{x} + y\ddot{y} = -v^2$.

Lagrangeovy rovnice upravíme na tvar $m\ddot{x} = 2\lambda x^2$ a sečteme: $m(\ddot{x} + \ddot{y}) = -mgy + 2\lambda(x^2 + y^2)$. Do

levé strany dosadíme výraz, který jsme získali úpravou druhé časové derivace vazby, do pravé strany rovnice dosadíme z rovnice vazby. Tak získáme: $-mv^2 = -mgy + 2\lambda a^2$. Z této rovnice by bylo možné vyjádřit λ v závislosti na y a v a dosadit do Lagrangeových rovnic. Integrováním bychom získali $x(t)$ a $y(t)$.

Lze ovšem postupovat i jinak. Potřebujeme mít ovšem další vztah, který bude svazovat polohu a rychlosti - a to je druhý „trik“. Tímto vztahem je zákon zachování mechanické energie ve tvaru: $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = mga$, kde y je vzdálenost podložky od místa odtržení hmotného bodu od balonu.

Do rovnice $-mv^2 = -mgy + 2\lambda a^2$ dosadíme ze zákona zachování mechanické energie a získáme:

$$-(2mga - 2mgy) = -mgy + 2\lambda a^2. \text{ Odtud lze psát: } \lambda = \frac{3y - 2a}{2a^2} mg. \text{ Hmotný bod se od balonu odtrhne, je-li}$$

$$R = 0, \text{ z čehož vyplývá } \lambda = 0. \text{ Tedy } y = \frac{2}{3}a.$$

Hmotný bod se tedy od balonu odtrhne ve výšce $y = \frac{2}{3}a$ nad podložkou, na níž balon leží.

Zákon zachování mechanické energie použitý při řešení předchozí úlohy vyplývá z pohybových rovnic, tj. z Lagrangeových rovnic I. druhu použitých při řešení úlohy.

Rovnice $m\ddot{x} = 2\lambda x$ lze přepsat do tvaru $m\ddot{x} = 2\lambda x$ a sečíst je. Tak získáme rovnici

$$m(\ddot{x} + \ddot{y}) = -mgy + 2\lambda(x\dot{x} + y\dot{y}), \text{ kterou lze přepsat ve tvaru } \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right]' = -(mgy)' + \lambda(x^2 + y^2 - a^2)'.$$

S využitím první časové derivace rovnice vazby lze psát $\left[\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right]' = -(mgy)' + 0$ a po integrování

$$\frac{1}{2} m v^2 = -mgy + konst. \text{ Tedy } \frac{1}{2} m v^2 + mgy = konst, \text{ což je formulace zákona zachování mechanické energie.}$$

Analogicky lze zákon zachování mechanické energie z Lagrangeových rovnic I. druhu odvodit vždy, když tyto rovnice budou obsahovat skleronomní holonomní vazby (viz odstavec 2.2). Pokud by rovnice vazby φ byla závislá na čase, její první derivace podle času nebude nulová. To by znamenalo, že energii je nutné během uvažovaného děje dodávat nebo odebírat. Zákon zachování mechanické energie by již neplatil.

Vazbové síly jsou kolmé k vazbě (viz vztahy (3) a (4)) a hmotný bod se pohybuje po vazbě. To znamená, že vazbové síly jsou kolmé ke směru pohybu hmotného bodu, a tedy práce, kterou vazbové síly vykonají, je nulová.

2.4 Zobecnění Lagrangeových rovnic na N hmotných bodů a v vazeb

V odstavci 2.3 byly odvozeny Lagrangeovy rovnice I. druhu popisující pohyb jednoho hmotného bodu. Nyní tyto rovnice zobecníme na pohyb N hmotných bodů a v vazeb.

LAGRANGOVY ROVNICE I. DRUHU PRO N HMOTNÝCH BODŮ A V VAZEB JSOU ROVNICE VE TVARU

$$m_i \ddot{x}_i = F_i + \sum_{k=1}^v \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} \quad (7)$$

A

$$\varphi_k(x^i, t) = 0 \text{ pro } k = 1, 2, \dots, v, \quad (8)$$

KDE $x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, \dots, x^{3N}$ JSOU KARTÉZSKÉ SOUŘADNICE N HMOTNÝCH BODŮ.

Rovnice (7) a (8) tvoří soustavu $3N + v$ rovnic o stejném počtu neznámých: x^i pro $i = 1, 2, \dots, 3N$ a λ_k pro $k = 1, 2, \dots, v$. Tyto rovnice by bylo možné zobecnit i na neholonomní vazby (viz odstavec 2.2), ale pouze takové, které závisí na rychlosti lineárně.

Psaní indexů nahoru nebo dolů za příslušnou proměnnou vyžaduje hlubší studium diferenciální geometrie, během kterého se ukáže rozdíl mezi varietou, formou, vektorem, ... Na úrovni teoretické mechaniky a v euklidovském prostoru by bylo možné psát všechny indexy dole.

Souřadnice $x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, \dots, x^{3N}$ jsou řazeny tak, že souřadnice x^1, x^2, x^3 určují polohu prvního hmotného bodu, souřadnice x^4, x^5, x^6 určují polohu druhého hmotného bodu, ... Analogicky jsou indexovány složky vektoru síly.

V uvedeném systému indexování pak platí $m_1 = m_2 = m_3 = m_{\text{prvního hmotného bodu}}$
 $m_4 = m_5 = m_6 = m_{\text{druhého hmotného bodu}} \dots$

Analogický popis soustavy hmotných bodů, jejichž pohyb je omezen vazbami, lze udělat i pomocí jedné rovnice. Tím ovšem přecházíme od vektorové mechanice k analytické mechanice (viz odstavec 1.3).

2.5 d'Alembertův princip

Autorem tohoto principu je Jean Le Rond d'Alembert (1717 - 1783), který tento princip publikoval v roce 1742.

SYSTEM N HMOTNÝCH BODŮ SE VYVÍJÍ TAKOVÝM ZPŮSOBEM, ŽE PLATÍ:

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i = 0, \quad (9)$$

KDE δx^i JSOU SLOŽKY TZV. VIRTUÁLNÍHO POSUNUTÍ.

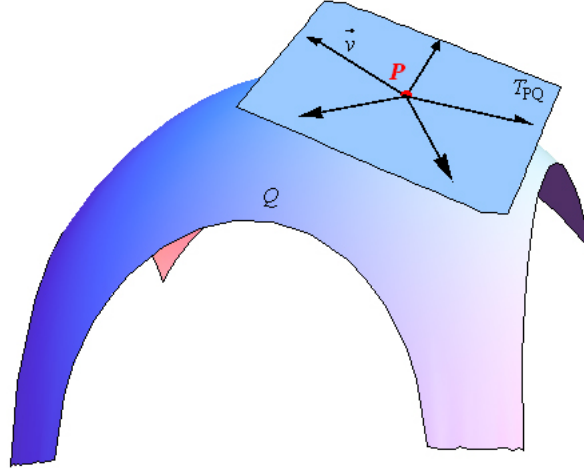
Rovnicí (9) tak vlastně d'Alembert přeformuloval Newtonovu mechaniku pomocí nového přístupu. Základní představa byla taková, že virtuální posunutí jsou nekonečně malá posunutí, která jsou v souladu s vazbami $\varphi_k(x^i, t) = 0$. Složka δx^i virtuálního posunutí tak vlastně odpovídá změně polohy hmotného bodu, tj. odpovídá změně souřadnice x^i .

Pokud tedy rovnice (9) platí pro všechna δx^i , odpovídají složky sil F_i složkám zrychlení \ddot{x}_i a pohyb hmotného bodu lze uskutečnit. Na základě \ddot{x}_i můžeme určit polohu hmotného bodu v čase a můžeme tak konstruovat jeho trajektorii implicitním způsobem.

Rovnice (9) je tedy splněna tehdy, pokud složky sil F_i a složky zrychlení \ddot{x}_i jsou vzájemně dobře nastaveny.

Virtuální posunutí se složkami δx^i je pojem, který zavedl d'Alembert a jeho kolegové. Z hlediska současné interpretace lze na virtuální posunutí nahlížet jako na tečný vektor \vec{v} , který je sestrojen v daném bodě P plochy k této ploše, po níž se hmotný bod pohybuje. Jedná se o tzv. konfigurační prostor Q , který je popsán rovnicí $\varphi = 0$. Všechny uvažované tečné vektory pak leží v tečné rovině T_{PQ} sestrojené v bodě P (viz obr. 12).

Proto platí $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3, \dots, v^{3N}) = (\delta x^1, \delta x^2, \delta x^3, \dots, \delta x^{3N})$.



obr. 12

Každý bod konfiguračního prostoru Q (viz odstavec 3.2) má svůj tečný prostor - tečnou rovinu T_{PQ} .

Konfigurační prostor tedy je plochou vazby popsané rovnicí $\varphi = 0$. V něm leží ty body, v nichž se může pohybujiící se hmotný bod nacházet.

V rovnici (9) tedy testujeme výchylku hmotného bodu z bodu, v němž se právě nachází, do všech tečných směrů popsaných tečnými vektory \vec{v} ležícími v T_{PQ} .

D'ALEMBERTŮV PRINCIP JE EKVIVALENTNÍ LAGRANGEOVÝM ROVNICÍM I. DRUHU (VIZ ROVNICE (7) A (8) V Odstavci 2.4) A Tedy JE EKVIVALENTNÍ I NEWTONOVÝM ROVNICÍM S (HOLONOMNÍMI) VAZBAMI.

Toto tvrzení lze dokázat.

Nejdříve dokážeme implikaci, že z Lagrangeových rovnic I. druhu (tj. ze vztahů (7) a (8) v odstavci 2.4) vyplývá d'Alembertův princip (vztah (9)).

Rovnici $m_i \ddot{x}_i = F_i + \sum_{k=1}^v \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i}$ upravíme na tvar $m_i \ddot{x}_i - F_i = \sum_{k=1}^v \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i}$ a vynásobíme složkou

virtuálního posunutí δx^i a sečteme: $\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i = \sum_{i=1}^{3N} \sum_{k=1}^v \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} \delta x^i$. Nyní zaměníme pořadí sčítání na

pravé straně rovnice $\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i = \sum_{k=1}^v \lambda_k \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} \delta x^i$. Pokud uvědomíme, že $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i}$ je složka gradientu φ

a δx^i je složka tečného vektoru, můžeme psát $\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i = \sum_{k=1}^v \lambda_k \text{grad } \varphi_k \cdot \vec{v}$. Gradient plochy φ má ovšem směr normály k této ploše (viz vztah (4)) a je tedy kolmý k tečně (resp. k tečné rovině) v daném bodě. Je tedy kolmý i k tečnému vektoru \vec{v} a jejich skalární součin je nulový. Proto $\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i = 0$.

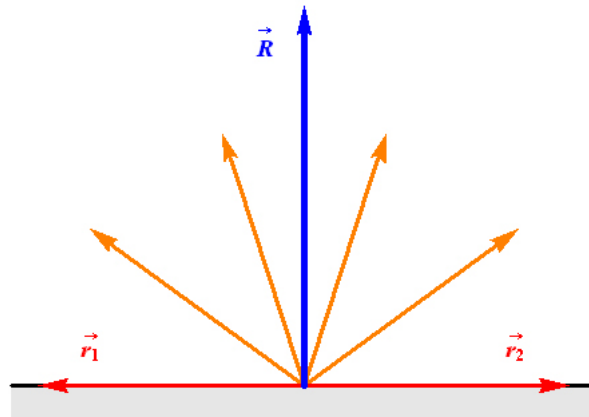
Důkaz obrácené implikace, tj. že ze vztahu (9) vyplývají vztahy (7) a (8) provedeme úvahou. Uvážíme dva případy:

1. neexistuje vazba - to znamená, že složky virtuálního posunutí $\delta x^1, \delta x^2, \delta x^3, \dots, \delta x^{3N}$ jsou navzájem nezávislé a tedy $m_i \ddot{x}_i - F_i = 0$ pro všechna i od 1 do $3N$;
2. existují vazby - to znamená, že složky virtuálního posunutí $\delta x^1, \delta x^2, \delta x^3, \dots, \delta x^{3N}$ obecně nejsou navzájem nezávislé. Metodou Lagrangeových multiplikátorů lze dokázat, že musí existovat systém $3N + v$ rovnic, které splňují podmínky (7) a (8).

Fakt, že složky $\delta x^1, \delta x^2, \delta x^3, \dots, \delta x^{3N}$ nejsou obecně nezávislé si lze představit následující úvahou: když jdeme ze schodů, jdeme dopředu, ale zároveň jdeme dolů. Tj. díky existenci vazby (schody) nemůže naše rychlost mířit libovolným směrem. Složky $\delta x^1, \delta x^2, \delta x^3, \dots, \delta x^{3N}$ jsou složkami tečných vektorů. A vektor rychlosti je k dané ploše vždy tečný.

Metoda Lagrangeových multiplikátorů se používá v matematické analýze při hledání vázaných extrémů funkcí více proměnných.

Rovnice (9) platí jen pro vratná virtuální posunutí δx^i , tj. taková posunutí, že k posunutí δx^i existuje také posunutí $-\delta x^i$. V případě oboustranných vazeb (viz odstavce 2.2) jsou všechna posunutí vratná. V případě jednostranných vazeb by vratná posunutí byla jen dvě - viz obr. 13, na kterém jsou zakreslena vratná posunutí \vec{r}_1 a \vec{r}_2 . (Obrázek je schématický a platí i pro zakřivené vazbové plochy nikoliv jen pro rovinu.)



obr. 13

Pokud bychom v případě jednostranných vazeb uvažovali i nevratná virtuální posunutí, změnil by se tvar d'Alembertova principu (9) na tvar

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i \leq 0. \quad (10)$$

Na základě vztahu (9) lze najít i dva speciální případy d'Alembertova principu:

1. není žádná vazba - to znamená, že složky virtuálního posunutí $\delta x^1, \delta x^2, \delta x^3, \dots, \delta x^{3N}$ jsou libovolné a na sobě navzájem nezávislé. Vztah (9) pak lze psát ve tvaru

$$m_i \ddot{x}_i - F = 0 \quad (11)$$

pro všechna $i = 1, 2, \dots, 3N$. Získáme tak $3N$ na sobě nezávislých Newtonových rovnic.

2. není žádný pohyb - to znamená, že $\ddot{x}_i = 0$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, 3N$ a tedy platí

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x^i = 0. \quad (12)$$

Občas je vhodné takovou situaci (tj. silové působení bez pohybu) studovat: stabilita mostů, statické konstrukce (např. vysílačů, stožárů vysokého napětí, ...) a podobně.

VZTAH (12) DEFINUJE PRINCIP VIRTUÁLNÍ PRÁCE, KTERÁ BY SE VYKONALA, KDYBY SE H MOTNÝ BOD VYCHÝLIL ZE SVÉHO ROVNOVÁŽNÉHO STAVU.

Tento poznatek odvodil Johann Bernoulli (1667 - 1748) v roce 1717, ale základy principu virtuální práce byly známy již od starověku.

Na základě vztahu (12) lze právě rovnovážný stav poznat: vztah (12) totiž v rovnovážném stavu musí platit pro všechna virtuální posunutí.

Je-li těleso v rovnovážném stavu (viz obr. 14), tak ať ho vychýlíme jakýmkoliv směrem, který vazby systému umožňují, tak se vždy vrátí do rovnovážného stavu. V případě nerovnovážného stavu (viz obr. 15) to neplatí.

V případě určitého typu sil se situace zjednoduší. Tyto síly se nazývají konzervativní síly (viz odstavec 3.4.1).

Pro konzervativní síly platí

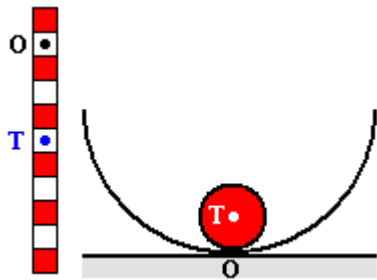
$$\delta V = 0. \quad (13)$$

To ovšem znamená, že potenciální energie může mít extrém - existují tedy tři možnosti:

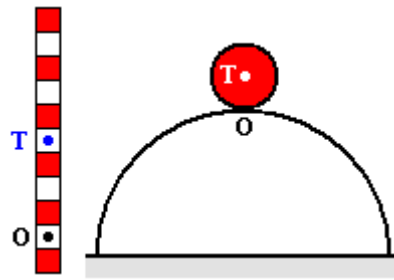
1. potenciální energie nabývá minima - jedná se o stabilní rovnovážnou polohu (viz obr. 14);

2. potenciální energie nabývá maxima - jedná se o labilní rovnovážnou polohu (viz obr. 15);
3. potenciální energie nemá extrém - jedná se o indiferentní rovnovážnou polohu (viz obr. 16).

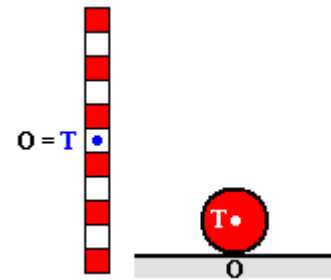
Podmínka (13) udává podmínku rovnováhy, ale není možné usoudit o jaký z právě uvedených tří možných případů se jedná.



obr. 14



obr. 15



obr. 16

Symbol δV se používá z historických důvodů a lze místo něj psát totální diferenciál dV .

Příklad: Rovnováha tyčky mezi stěnou a hranou

Homogenní tyč délky $2l$ je umístěna mezi stěnou a hranou, které jsou ve vzájemné vzdálenosti a . Při jaké poloze bude tyč v rovnovážné poloze?

Řešení: K řešení využijeme d'Alembertův princip v jeho speciální podobě podle vztahu (12). Hledáme rovnovážnou polohu, tj. stav systému (tyče) bez rotace a posunutí - budeme tedy uvažovat pouze jedinou sílu, která na tyč působí: gravitační sílu \vec{F}_g (viz obr. 17). Na základě této úvahy a vztahu (12) lze psát $\sum_{i=1}^3 F_i \delta x^i = 0$, tj. $F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z = 0$ a po dosazení: $0 - mg \delta y + 0 = 0$. Odtud získáme $\delta y = 0$. To znamená, že rovnovážná poloha nastává tehdy, pokud se y -ová souřadnice polohy těžiště nemění.

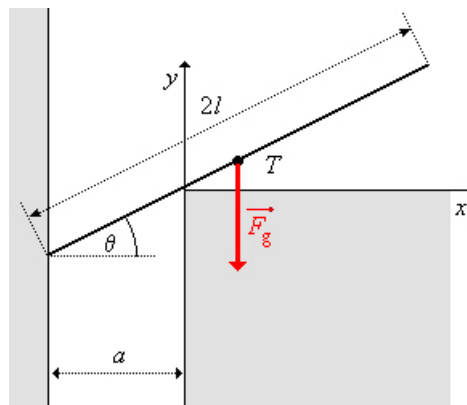
Představíme-li si pohyb tyče v souladu s danými vazbami, tak se její těžiště bude pohybovat po části kružnice. V místě, kde nastává rovnováha, se y -ová souřadnice jeho polohy skutečně nemění.

Polohu tyče je dobré popsat pomocí úhlu ϑ , který svírá tyč s kladnou částí osy x . Pak lze pro y -ovou souřadnici těžiště, která je závislá na úhlu ϑ , psát: $y = l \sin \vartheta - a \operatorname{tg} \vartheta$. Proto $\delta y = \frac{dy}{d\vartheta} \delta \vartheta = \left(l \cos \vartheta - \frac{a}{\cos^2 \vartheta} \right) \delta \vartheta$.

Vzhledem k tomu, že má platit $\delta y = 0$ pro všechna $\delta \vartheta$, musí být $l \cos \vartheta - \frac{a}{\cos^2 \vartheta} = 0$. Odtud získáme, že

$$\cos \vartheta = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}.$$

Tyč je v rovnovážné poloze, svírá-li s vodorovným směrem úhel ϑ , který je dán vztahem $\cos \vartheta = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}$.



obr. 17

2.6 ***Jourdainův a Gaussův princip

Kromě d'Alembertova principu (viz vztah (9) v odstavci 2.5) existují ještě dva další, které se ovšem v praxi příliš nepoužívají:

1. Jourdainův princip vyjádřený vztahem

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i = 0; \quad (14)$$

2. Gaussův princip vyjádřený vztahem

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta \dot{x}^i = 0. \quad (15)$$

3. LAGRANGEŮV FORMALISMUS

3.1 Základní pojmy

Lagrangeův formalismus je zobecněním Newtonova popisu mechaniky. Výhody Lagrangeova formalismu jsou zejména:

1. snadný popis systému bez nutnosti hledat rozklady sil;
2. poskytuje návod na samotné řešení sestavených rovnic (tzv. integrály pohybu - viz odstavec 3.7);
3. lze ho relativně snadno zobecnit v dalších oborech fyziky (teorie elektromagnetického pole a Maxwellovy rovnice, ...).

K popisu Lagrangeova formalismu je nutné:

1. zavést efektivnější popis systému než dosud - zavedeme tzv. konfigurační prostor zobecněných souřadnic (viz odstavec 3.2);
2. odvodit dynamický zákon - tzv. Lagrangeovy rovnice II. druhu (viz odstavce 3.3.1 a 3.3.2).

Tento dynamický zákon bude ekvivalentním popisem systému, jaký poskytovaly např. Newtonovy rovnice. Tento popis je ale obecnější a má výše uvedené výhody.

3.2 Konfigurační prostor

Vytvoření konfiguračního prostoru se řídí několika základními pravidly:

1. místo kartézských souřadnic $(x^1, x^2, x^3, \dots, x^{3N})$ se používají zobecněné souřadnice $(q^1, q^2, q^3, \dots, q^n)$ - viz odstavec 3.2.2 (význam konstanty n je vysvětlen v odstavci 3.2.3);
2. používá se jen tolik zobecněných souřadnic, kolik je nezbytně nutných (viz odstavec 3.2.3);
3. konfigurační prostor sám o sobě nestačí - musíme zavést ještě prostor rychlostí (viz odstavec 3.2.4).

3.2.1 Motivační příklad

Příklad: Pohyb planet

Nalezněte tvar trajektorie, po které se pohybují planety kolem Slunce.

Řešení: Planety se pohybují v rovině pod vlivem centrální gravitační síly \vec{F}_g , která je dána vztahem:

$\vec{F}_g = G \frac{Mm}{r^2} \vec{r}_0 = G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = G \frac{Mm}{r^3} \vec{r}$. Tato síla je silou, která uděluje tělesu o hmotnosti m zrychlení

$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$. Proto můžeme v jednotlivých složkách kartézského systému souřadnic psát:

$$m\ddot{x} = -G \frac{Mmx}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} \qquad \ddot{x} = -G \frac{Mx}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}$$

$$m\ddot{y} = -G \frac{Mmy}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} \qquad \ddot{y} = -G \frac{My}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}, \text{ což je stále velmi}$$

$$m\ddot{z} = 0 \qquad \ddot{z} = 0$$

komplikovaný výraz pro další výpočet.

V polárních souřadnicích lze zadaný problém popsat jednodušeji pomocí rovnic:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -G \frac{Mm}{r^2} \qquad \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -G \frac{M}{r^2}$$

$$m \frac{(r^2 \dot{\varphi})^\cdot}{r} = 0 \qquad , \text{ které lze upravit na tvar } \frac{(r^2 \dot{\varphi})^\cdot}{r} = 0 \qquad . \text{ Ze druhé rovnice okamžitě vyplývá, že}$$

$$m\ddot{z} = 0 \qquad \ddot{z} = 0$$

$r^2 \dot{\varphi} = K = konst.$ a tedy $\dot{\varphi} = \frac{K}{r^2}$. Dosazením do první rovnice získáme rovnici $\ddot{r} = \frac{K^2}{r^3} - G \frac{M}{r^2}$, jejímž řešením

je $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$, kde $p = \frac{k^2}{GM}$.

Rovnice $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$ přitom vyjadřuje rovnici kuželosečky v polárních souřadnicích. V závislosti na parametru ε získáme jednotlivé typy kuželoseček:

1. pro $\varepsilon = 0$ se jedná o kružnici;
2. pro $\varepsilon \in (0; 1)$ se jedná o elipsu;
3. pro $\varepsilon = 1$ a zároveň $\cos \varphi = -1$ se jedná o parabolu;
4. pro $\varepsilon > 1$ se jedná o hyperbolu.

Z uvedeného příkladu je zřejmé, že popis problému v jiných než kartézských souřadnicích je výhodnější a snadněji se řeší. Proto se zavádějí zobecněné souřadnice (viz odstavec 3.2.2).

Podrobněji je pohyb planet řešen v odstavci 3.9.

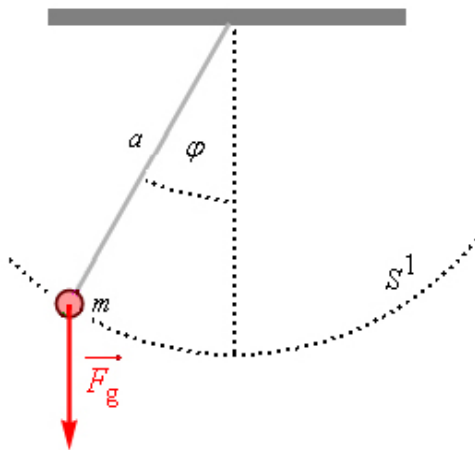
3.2.2 Zobecněné souřadnice

ZOBECNĚNÉ SOUŘADNICE JSOU LIBOVOLNÉ PARAMETRY, KTERÉ JEDNOZNAČNĚ POPISUJÍ VŠECHNY MOŽNÉ KONFIGURACE DANÉHO SYSTÉMU.

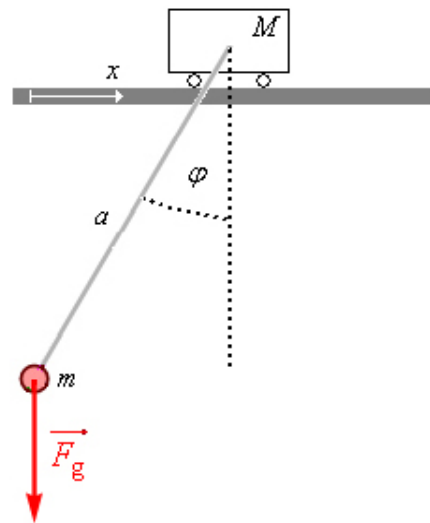
Všechny možné konfigurace, které zobecněné souřadnice popisují, jsou tvary trajektorií, polohy hmotných bodů, ...

Slovo konfigurace je použito záměrně - zobecněné souřadnice totiž nepopisují stav! Abychom získali popis stavu hmotného bodu, je nutné ještě „něco přidat“ (viz odstavec 3.2.4).

Zobecněnými souřadnicemi mohou být kartézské souřadnice, polární souřadnice, úhly, ... Volíme je tak, aby jednoznačně popisovaly konfiguraci daného systému a přitom tento popis byl co možná nejvýhodnější pro další výpočty.



obr. 18



obr. 19

Použití zobecněných souřadnic bude ukázáno na několika příkladech:

1. kyvadlo (viz obr. 18) - zobecněnou souřadnicí je úhel φ , který popisuje výchylku hmotného bodu z rovnovážné polohy, tj. $q^1 = \varphi$. Konfiguračním prostorem je kružnice S^1 .
2. eliptické kyvadlo (viz obr. 19) - je realizováno tělesem o hmotnosti M , které se může bez tření pohybovat po úsečce na vodorovné podložce a k němuž je zavěšeno na vlákně zanedbatelné hmotnosti těleso o hmotnosti m . Těleso o hmotnosti m se pohybuje vždy proti pohybu tělesa o hmotnosti M , což vyplývá ze zákona zachování hybnosti (těžiště soustavy zůstává na místě). Proto se těleso o hmotnosti m pohybuje po elipse. Vhodnými zobecněnými souřadnicemi jsou poloha tělesa o hmotnosti M a výchylka tělesa o hmotnosti m z rovnovážné polohy - tedy $q^1 = x$ a $q^2 = \varphi$. Konfiguračním prostorem je válcová plocha - tj. prostor $\mathbb{R} \times S^1$.

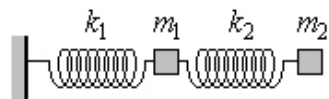
Souřadnice x může nabývat hodnot z určitého intervalu reálných čísel - těleso o hmotnosti M se pohybuje po úsečce. Souřadnice φ omezuje pohyb tělesa o hmotnosti m na kružnici.

3. dvě spojené pružiny (viz obr. 20) - pružiny kmitají jen v jednom směru (na podložce, na které leží). Pro popis systému se nabízí několik souřadnic: vzdálenosti těles upevněných na pružinách od místa upevnění první pružiny k nehybné stěně, délky pružin, ... Nejvhodnější na popis jsou ale výchylky pružin od rovnovážné polohy. Proto $q^1 = x_1$ a $q^2 = x_2$.

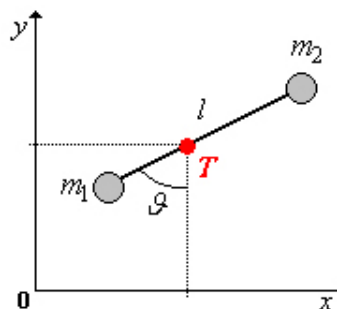
x_1 a x_2 jsou konkrétní čísla, nikoliv označení souřadnic - proto mají index dole.

4. činka (viz obr. 21) - při popisu se omezíme jen na pohyb v rovině. Optimální popis lze udělat pomocí souřadnice polohy těžiště (popisuje translační pohyb těžiště) a úhlu natočení činky (popisuje rotační pohyb). Proto $q^1 = x$, $q^2 = y$ a $q^3 = \vartheta$.

Po zobecnění na pohyb v prostoru a nahrazení tyčky pružinkou získáme velmi dobré přiblížení pro popis dvouatomových molekul. Kromě translačního pohybu a rotačního pohybu mohou atomy tvořící molekuly ještě i vibrovat.



obr. 20



obr. 21

3.2.3 Počet zobecněných souřadnic

Při popisu systému je vhodné používat jen tolik souřadnic, kolik je nezbytně nutné - více souřadnic je zbytečné zavádět, neboť se tím řešení pohybových rovnic zkomplikuje. V tomto smyslu byly zaváděny zobecněné souřadnice u příkladů popsaných v odstavci 3.2.2.

Ve fyzice se takovému zjednodušování situace říká princip Occamovy břitvy (Ockhamovy břitvy) na počest anglického františkána Williama Ockhama (1290 - 1349), který jako první formuloval i zákon setrvačnosti a vzepřel se tak Aristotelově logice. „It is vain to do with more, what can be done with fewer.“ („Je zbytečné používat více tam, kde vystačíme s méně.“)

Tento princip vyzdvihoval i anglický filosof a logik sir Bertrand Arthur William Russell (1872 - 1970) ve svých logických úvahách: „Shledal jsem toto býti nejpłodnější principem logické analýzy.“

Počet zobecněných souřadnic, které je nutné k jednoznačnému popisu systému použít, je roven počtu stupňů volnosti n daného systému. Platí

$$n = 3N - v, \quad (16)$$

kde N je počet hmotných bodů systému a v je počet vazeb, které omezují jejich pohyb.

Vztah (16) lze popsat též takto: počet hmotných bodů krát dimenze prostoru mínus počet vazeb je roven počtu stupňů volnosti. Každá vazba totiž sníží počet stupňů volnosti o jeden - zabrání hmotnému bodu, aby se mohl v daném směru pohybovat.

Tedy zobecněné souřadnice lze zapsat symbolicky ve tvaru

$$\{q^j\} = (q^1, q^2, q^3, \dots, q^n), \quad (17)$$

kde $j = 1, 2, \dots, n$.

V případě neholonomních vazeb by byly popis systému i zobecněné souřadnice komplikovanější, protože by bylo nutné popsat i rychlosti hmotných bodů.

Aby byl popis systému pomocí zobecněných souřadnic dobře definovaný, je nutné definovat regulární vztahy mezi kartézskými souřadnicemi a zobecněnými souřadnicemi, tj. musí existovat funkce

$$x^i = x^i(q^j) \quad (18)$$

pro $i = 1, 2, \dots, 3N$ a $j = 1, 2, \dots, n$.

Příklad: Pohyb hmotného bodu po povrchu koule

Pohybuje-li se hmotný bod po povrchu koule (tj. po sféře S^2) o poloměru a je vhodné jeho pohyb popsat pomocí sférických souřadnic, tj. $q^1 = \vartheta$ a $q^2 = \varphi$. Přitom mezi kartézskými souřadnicemi a sférickými souřadnicemi existují převodní vztahy, které lze psát podle obr. 22:

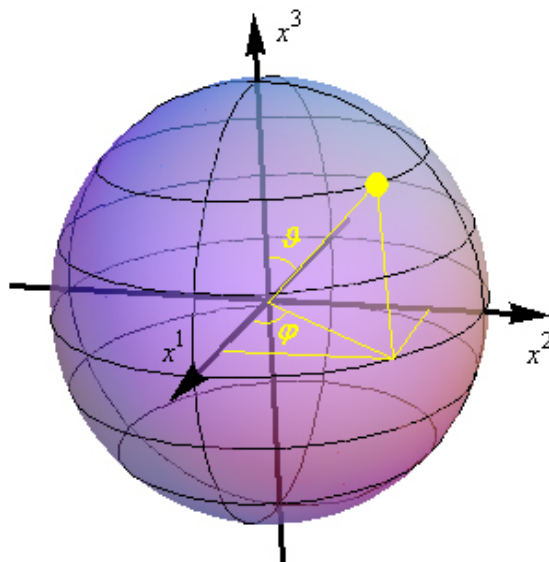
$$x^1 = a \sin \vartheta \cos \varphi;$$

$$x^2 = a \sin \vartheta \sin \varphi;$$

$$x^3 = a \cos \vartheta.$$

Tyto vztahy odpovídají vztahům (18) a splňují podmínky vazby $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$. Pro každý úhel φ a ϑ jsou tedy definovány přípustné souřadnice (x^1, x^2, x^3) bodů, v nichž se může hmotný bod nacházet. Opačně to neplatí - souřadnice (x^1, x^2, x^3) nelze volit libovolně a hledat pro ně zobecněné souřadnice. Např. pro

$x^1 = x^2 = x^3 = 0$ nedostáváme smysluplnou polohu hmotného bodu, protože bod o souřadnicích $[0, 0, 0]$ neleží na sféře, po níž se hmotný bod pohybuje.



obr. 22

Konfigurační prostor je dán zobecněnými souřadnicemi. Jinými slovy je možné říci, že konfigurační prostor je vymezen vazbami daného systému. Vazby systému a zobecněné souřadnice systému jsou navzájem ekvivalentní popisy daného systému. Navíc každá vazba systému snižuje počet zobecněných souřadnic, které je nutné k popisu daného systému zavést, o jednu (viz vztah (16)).

Konfigurační prostor je obecně varieta a zobecněné souřadnice jsou parametry, které tuto varietu popisují.

3.2.4 Zobecněné rychlosti

Konfigurační prostor (konfigurační varieta) Q popsán zobecněnými souřadnicemi (17) není prostorem fyzikálních stavů daného systému.

Konfigurační prostor nepopisuje stavy systému, protože není možné počítat rychlosti, hybnosti, zrychlení, ... hmotných bodů. Proto je nutné něco doplnit.

Aby konfigurační prostor popisoval stavy systému, je nutné doplnit tzv. zobecněné rychlosti

$$\{\dot{q}^j\} = (\dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3, \dots, \dot{q}^n) \quad (19)$$

pro $j = 1, 2, \dots, n$.

Jedná se o dodatečné (rychlostní) parametry, které jsou zcela nezávislé na poloze popsané zobecněnými souřadnicemi (17). Značení \dot{q}^j neznamená časovou derivaci zobecněné souřadnice - jedná se o historické označení zobecněných rychlostí, které se zobecněnými souřadnicemi nemají žádnou souvislost. Zobecněné souřadnice q^j a zobecněné rychlosti \dot{q}^j jsou tedy navzájem nezávislé. Libovolný bod tedy může mít libovolnou rychlost. Je proto důležité odlišovat označení zobecněných rychlostí od časové derivace zobecněné souřadnice.

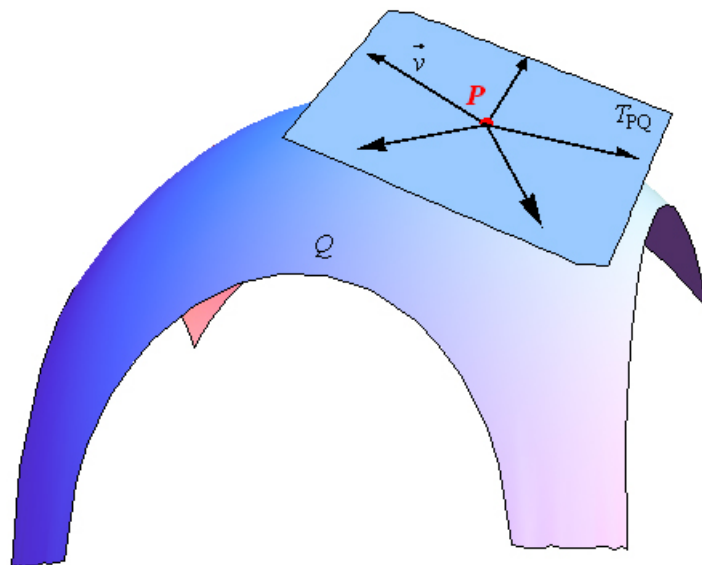
Formálně je nutné odlišit následující zápisy:

1. $\frac{\partial q^i}{\partial q^j} = \delta_j^i$, kde δ_j^i je tzv. Kroneckerovo delta;
2. $\frac{\partial q^i}{\partial \dot{q}^j} = 0$;
3. $\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{q}^j} = \delta_j^i$
4. $\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j} = 0$

Pro libovolný bod P v konfiguračním prostoru jsou dány zobecněné souřadnice (17), které jednoznačně popisují jeho polohu. Prostor rychlostí v daném bodě je tečná rovina (tečný prostor) $T_P Q$ sestavený v tomto bodě ke konfiguračnímu prostoru Q . Pro popis systému jsou tedy nutné dva prostory (viz obr. 23):

1. prostor poloh - je popsán zobecněnými souřadnicemi (17) a popisuje polohu hmotného bodu P v konfiguračním prostoru Q ;

2. prostor rychlostí - popisuje rychlost hmotného bodu v daném bodě P . Vektor rychlosti \vec{v} leží v tečném prostoru T_{PQ} a složky tohoto vektoru v určité zvolené bázi jsou zobecněné rychlosti (19).

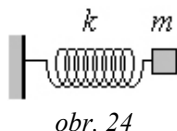


obr. 23

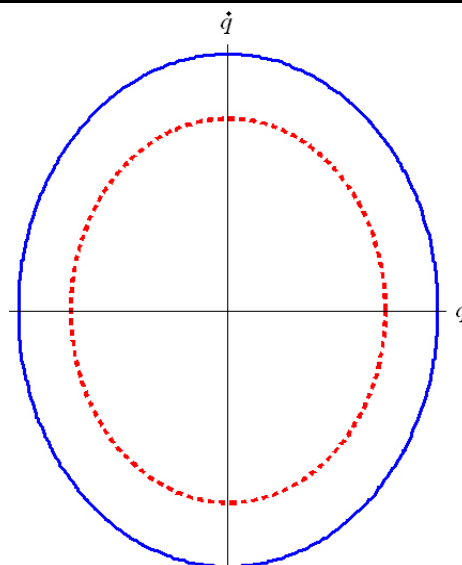
Lze tedy zavést prostor dimenze $2n$, v němž jsou definovány jak zobecněné souřadnice (17), tak zobecněné rychlosti (19). Tento prostor už popisuje všechny možné stavy hmotných bodů, neboť kromě konfigurací popsaných zobecněnými souřadnicemi, obsahuje i prostor rychlostí. Tomuto prostoru se říká **fázový prostor**.

Jiné označení tohoto prostoru je také tečný bandl.

V prostoru T_{PQ} jsou tedy definovány všechny možné rychlosti daného hmotného bodu (resp. soustavy hmotných bodů) ve všech bodech Q .



obr. 24



obr. 25

Příklad: Fázový portrét harmonického oscilátoru

Zakreslete vývoj harmonického oscilátoru v tzv. fázovém prostoru, tj. sestrojte graf v diagramu, na jehož vodorovnou osu se nanáší zobecněná souřadnice a na svislou zobecněná rychlost.

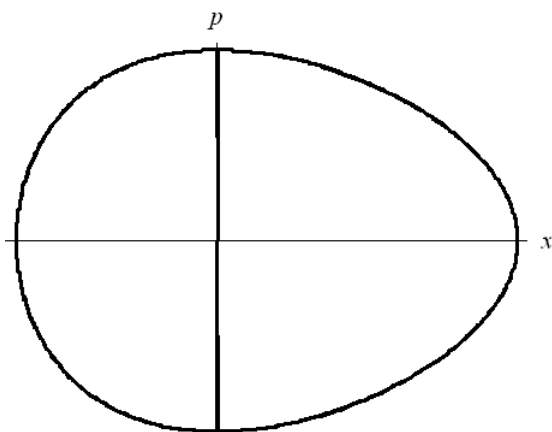
Řešení: Harmonický oscilátor může být realizován např. pružinou, na které je zavěšen hmotný bod o hmotnosti m (viz obr. 24). Zobecněná souřadnice popisuje výchylku oscilátoru v závislosti na čase: $q(t) = A \cos \omega t$.

Rychlost oscilátoru je dána vztahem $\dot{q}(t) = -A\omega \sin \omega t$. Nyní sestrojíme požadovaný graf - v diagramu na obr. 25 jsou znázorněny dva grafy, které se liší amplitudou výchylky harmonického oscilátoru. Libovolný bod, který leží na vybrané křivce má souřadnice $[q(t); \dot{q}(t)]$, tj. poloha hmotného bodu zavěšeného na pružině v libovolném čase je dána skutečně souřadnicí polohy a rychlosti. Svislá osa fázového prostoru je pojmenována \dot{q} a je to zobecněná rychlost.

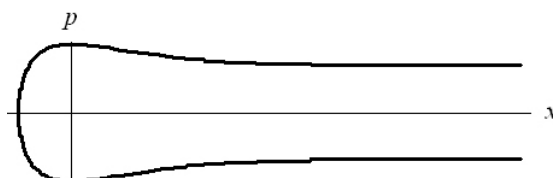
Oscilátor, který je v klidu, je ve fázovém prostoru popsán bodem $[0; 0]$, v němž se nachází v každém časovém okamžiku.

Každým bodem fázového prostoru prochází právě jedna křivka, pomocí níž lze rekonstruovat trajektorii hmotného bodu. Každý bod fázového prostoru totiž určuje polohu a rychlost daného hmotného bodu (resp. systému hmotných bodů) v konkrétním čase. Analýzou všech bodů lze sestavit trajektorii, po níž se hmotný bod pohyboval (resp. po níž se bude pohybovat, zůstane-li jeho rychlost stálá). Souřadnice $[q(t); \dot{q}(t)]$ každého bodu fázového prostoru tedy tvoří výchozí parametry pro řešení příslušných diferenciálních rovnic.

Trajektorie hmotného bodu ve fázovém prostoru je vždy uzavřená (viz obr. 26). Za uzavřenou se považuje i trajektorie částice, která přilétne z nekonečna a zase se vrátí zpět (viz obr. 27).



obr. 26



obr. 27

3.2.5 ***Zenonovy paradoxy

Zenon z Eleje (490 - 430 př. n. l.) (viz obr. 28) a jeho učitel Parmenides svými logickými úvahami dospěli k tomu, že pohyb neexistuje.



obr. 28

Zenon se narodil v jižní Itálii v řecké osadě Eleji a byl žákem tamního filosofa Parmenida. Zenonovy práce se nezachovaly - vše, co o něm víme lze najít u Platona a Aristotela, kteří s jeho paradoxy polemizovali. O jeho životě se více podrobností neví, známější jsou jeho názory. Neměl rád pythagorejce, protože neuznával jejich názory. Podle atomové teorie, která byla vyslovena již dříve, ale která je známa zejména od Demokrita z Abdér, existují nejmenší, dále nedělitelné kousky hmoty (atomy) a jejich rozměr tedy odpovídá nejmenšímu existujícímu číslu.

A právě v tom byla podstata tzv. Zenonových paradoxů:

1. Achilles a želva - Achilles, který závodí se želvou, dá želvě náskok. Za dobu, za kterou Achilles doběhne na místo, kde stála na počátku závodu želva, želva poodejde dále. Než stihne Achilles tuto vzdálenost urazit, želva se opět posune dále. A tak Achillovi pokaždé chybí kousek, aby želvu dohonal. Celý pohyb se takto rozdělí nejen v prostoru, ale i v čase na nekonečně mnoho malých kousků, které mají nenulovou délku a jejichž součet tedy bude nekonečný.
2. Vystřelený šíp se nepohybuje - v každém časovém okamžiku je šíp na přesně daném místě v prostoru, nikoli na nějakém úseku. Proto se na tomto místě nachází stále a nemůže se tedy pohybovat. Jinými slovy neexistuje rozdíl mezi letícím šípem a šípem, který je v klidu.

Všechny Zenonovy paradoxy jsou v podstatě stejné - jsou jen jinak přeformulovány. A ve všech z nich vychází podstata zdůvodnění ze stejného předpokladu: neexistuje libovolně malé kladné číslo (libovolně malá vzdálenost). Vzhledem k tomu, že není možné čísla libovolně zmenšovat, musí být součet nekonečně mnoha těch nejmenších možných nekonečný. A přitom to tak není - čísla lze dělit libovolně a získávat tak stále menší a

menší. Pokud by tato malá čísla (vzdálenosti, ...) měla nulovou hodnotu, byl by jejich součet nulový a jako řešení uvedených úloh tedy nepoužitelný.

Zenon a eleaté věděli, jak létají šípky, jak běhají želvy, ..., ale zkušenost nepovažovali za důkaz toho, že se objekty pohybují. Svými paradoxy chtěli ukázat, že v řecké představě o číslech je něco v nepořádku.

To je ostatně obecná vlastnost paradoxů: ukázat, že v určitém oboru je něco v nepořádku nebo není definováno korektně.

Tím, že Řekové ztotožnili čísla s rozměry, ztotožnili je příliš těsně s hmotou. Čísla přitom, jakkoliv přesně hmotu popisují, hmota nejsou.

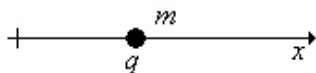
Až matematická analýza v 17. století ukázala, jak popsat mechanický pohyb a jak zacházet s nekonečně malými veličinami a nekonečně velkými veličinami.

Z hlediska mechaniky spočívá problém letícího a ležícího šípu v tom, že k plnému popisu nestačí pouze konfigurační prostor: ten je pro oba šípy stejný. Ale prostor rychlostí už ne! Letící šíp je v prostoru T_{PQ} (viz odstavec 3.2.4) reprezentován nenulovým vektorem, zatímco stojící šíp je v tomtéž prostoru reprezentován nulovým vektorem. K popisu pohybu tedy jsou nutné oba prostory: jak konfigurační prostor, tak prostor rychlostí.

3.3 Odvození dynamického zákona

3.3.1 Pohyb jedné částice po úsečce

Při odvozování pohybového zákona, který využívá zobecněné souřadnice v konfiguračním prostoru (viz odstavec 3.2), začneme nejjednodušším případem: pohybem jedné částice (jednoho hmotného bodu) o hmotnosti m po úsečce (viz obr. 29). Tento systém bude obecně popsán holonomními reonomními vazbami (viz odstavec 2.2).



obr. 29

Trajektorii hmotného bodu tedy popíšeme obecně funkcí

$$x(t) = x(q(t), t). \quad (20)$$

Místo vektorů, které používala při popisu pohybu hmotného bodu Newtonova mechanika, použijeme skalární fyzikální veličiny. Jednou z vhodných skalárních veličin je kinetická energie hmotného bodu, která je definována vztahem

$$T = \frac{1}{2} mv^2. \quad (21)$$

Vztah (21) lze přepsat ve tvaru $T = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$. Uvědomíme-li si, že souřadnice popisující polohu hmotného bodu závisí na čase podle vztahu (20), můžeme kinetickou energii psát ve tvaru

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial x}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 \quad (22)$$

a pro další výpočty je důležité si uvědomit, že kinetická energie je závislá na čase. Nyní ovšem vyšetříme chování této funkce v určitém vybraném čase t_0 . Tento čas je ale vybrán libovolně, takže následující úvaha platí pro libovolný čas t . Přepíšeme vztah (22) přesněji:

$$T(q, \dot{q}, t_0) = \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial x}{\partial q}(q(t_0), t_0) \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t}(q(t_0), t_0) \right)^2, \quad (23)$$

kde $q = q(t_0)$ je okamžitá poloha hmotného bodu a $\dot{q} = \frac{dq}{dt}(t_0)$ je okamžitá rychlost, kterou se hmotný bod v čase t_0 pohybuje. Vztahem (23) jsme přešli od $\dot{q} = \frac{dq}{dt}(t_0)$ k \dot{q} , tj. od časové derivace zobecněné souřadnice k zobecněné rychlosti. Od této chvíle jsou tedy q a \dot{q} nezávislé parametry.

Právě provedenou úvahu se „zastavením času“ si lze představit tak, že z pohybu, který natočíme na film, nás bude zajímat jen jedno políčko vyvolaného filmu. A bude to právě to políčko, které bylo zaznamenáno v čase t_0 .

Nyní určíme výrazy $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$ a $\frac{\partial T}{\partial q}$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{2} m \cdot 2 \left(\frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{\partial x}{\partial q} = m \left(\frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{\partial x}{\partial q} \quad (24)$$

a

$$\frac{\partial T}{\partial q} = \frac{1}{2} m \cdot 2 \left(\frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) = m \left(\frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right). \quad (25)$$

Pro jednoduchost jsme ve výrazech (24) a (25) nepsali argumenty u zadaných funkcí. Vztahy (24) a (25) jsou platné v každém časovém okamžiku, platí podél celé trajektorie, po níž se hmotný bod pohybuje. Proto nyní můžeme opět přejít k rovnicím, které závisí na čase. Symboly q a \dot{q} tedy opět změni svůj význam a vrátí se ke svým původním významům: $q = q(t)$ bude znamenat okamžitou polohu hmotného bodu v libovolném čase a $\dot{q} = \frac{dq}{dt}(t)$ bude znamenat okamžitou rychlost hmotného bodu v libovolném čase.

To tedy znamená, že místo jednoho políčka filmu budeme opět sledovat celý promítaný film.

Vztah (24) tedy můžeme psát ve tvaru

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}(t) = m \left(\frac{\partial x}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{\partial x}{\partial q} = m \frac{dx}{dt} \frac{\partial x}{\partial q} \quad (26)$$

a vztah (25) ve tvaru

$$\frac{\partial T}{\partial q}(t) = m \left(\frac{\partial x}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) = m \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{dx}{dt} \right). \quad (27)$$

Nyní vyčíslíme výraz $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}(t) \right) - \frac{\partial T}{\partial q}(t)$ a s využitím vztahů (26) a (27) získáme výraz

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}(t) \right) - \frac{\partial T}{\partial q}(t) = m \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial q} + m \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \right) - m \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{dx}{dt} \right). \quad \text{Vzhledem k tomu, že platí}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \right) = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{dx}{dt} \right), \text{ dostáváme}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}(t) \right) - \frac{\partial T}{\partial q}(t) = m \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial q} = F \frac{\partial x}{\partial q}. \quad (28)$$

Na základě vztahu (28) je možné definovat tzv. zobecněnou sílu, která udává průmět síly působící na hmotný bod do směru zobecněné souřadnice.

ZOBECNĚNÁ SÍLA Q JE DEFINOVÁNA VZTAHEM

$$Q = F \frac{\partial x}{\partial q}. \quad (29)$$

Zobecněná síla nemusí být silou v pravém slova smyslu. Pokud bude mít q význam vzdálenosti, pak $[Q] = \left[F \frac{\partial x}{\partial q} \right] = \text{N}$ a Q je přímo síla. Zobecněnou souřadnicí q ovšem může být i např. úhel nebo jiná fyzikální veličina. V tom případě je význam Q jiný (moment sil, ...).

Nyní můžeme již formulovat Lagrangeovu rovnici II. druhu.

LAGRANGEOVA ROVNICE II. DRUHOU, KTERÁ POPISUJE POHYB JEDNOHO HMO TNÉHO BODU O HMO TNOSTI m PO ÚSEČCE, SE NAZÝVÁ ROVNICE

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q, \quad (30)$$

T JE KINETICKÁ ENERGIE HMO TNÉHO BODU, q JE ZOBECNĚNÁ SOUŘADNICE A \dot{q} JE ZOBECNĚNÁ RYCHLOST.

3.3.2 Pohyb N hmotných bodů ve více dimenzích

Budeme uvažovat N hmotných bodů, které jsou podrobeny silám a vazbám a jejichž pohyb je popsán zobecněnými souřadnicemi (17). Tyto zobecněné souřadnice jsou svázány s kartézskými souřadnicemi vztahy (18). Odvození Lagrangeových rovnic druhého druhu pro soustavu hmotných N bodů bude velmi podobné jako odvození Lagrangeovy rovnice druhého druhu pro jeden hmotný bod (viz odstavec 3.3.1). Proto bude odvození zde komentováno již méně.

Trajektorie hmotných bodů bude obecně popsána funkcemi

$$x^i(t) = x^i(q^j(t), t) \quad (31)$$

pro $i = 1, 2, \dots, 3N$ a $j = 1, 2, \dots, n$.

Kinetickou energii dané soustavy hmotných bodů lze psát ve tvaru

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{dx^i}{dt} \right)^2, \quad (32)$$

který lze dále rozepsat do tvaru

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \frac{dq^k}{dt} + \frac{\partial x^i}{\partial t} \right)^2. \quad (33)$$

Stejně jako v odstavci 2.4 pro hmotnosti platí, že $m_1 = m_2 = m_3 = m_{\text{prvního hmotného bodu}}$, $m_4 = m_5 = m_6 = m_{\text{druhého hmotného bodu}}$, ...

Nyní přepíšeme vztah (33) pro kinetickou energii soustavy hmotných bodů v konkrétním čase t_0 a provedeme formální záměnu časové derivace funkce $\frac{dq^k}{dt}$ za zobecněnou rychlost \dot{q}^k . Dostaneme tak

$$T(q^j, \dot{q}^j, t_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial q^k}(q^j(t_0), t_0) \dot{q}^k + \frac{\partial x^i}{\partial t}(q^j(t_0), t_0) \right)^2. \quad (34)$$

Analogicky jako v odstavci 3.3.1 nyní určíme výrazy $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j}$ a $\frac{\partial T}{\partial q^j}$. Dostáváme

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial x^i}{\partial t} \right) \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \quad (35)$$

a

$$\frac{\partial T}{\partial q^j} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial x^i}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q^j} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial x^i}{\partial t} \right). \quad (36)$$

Vztahy (35) a (36) byly odvozeny pro konkrétní čas t_0 , nicméně tento čas byl vybrán libovolně. Proto tyto vztahy platí pro libovolný čas t a je možné přejít opět ke vztahům, které jsou závislé na čase. Vztahy (35) a (36) tedy lze vyjádřit ve tvarech

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j}(t) = \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \quad (37)$$

a

$$\frac{\partial T}{\partial q^j}(t) = \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{dx^i}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial q^j} \left(\frac{dx^i}{dt} \right). \quad (38)$$

Vyčíslením výrazu $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j}(t) \right) - \frac{\partial T}{\partial q^j}(t)$ (pro $j = 1, 2, \dots, n$) dostáváme

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j}(t) \right) - \frac{\partial T}{\partial q^j}(t) = \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{d^2 x^i}{dt^2} \frac{\partial x^i}{\partial q^j} + \frac{dx^i}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^j} \right) - \frac{dx^i}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial q^j} \left(\frac{dx^i}{dt} \right) \right)$ a po úpravě (analogické jako v odstavci 3.3.1) získáme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j}(t) \right) - \frac{\partial T}{\partial q^j}(t) = \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{d^2 x^i}{dt^2} \frac{\partial x^i}{\partial q^j}. \quad (39)$$

Na základě vztahu (39) můžeme definovat tzv. zobecněnou sílu.

ZOBECNĚNÁ SÍLA Q_j JE DEFINOVÁNA VZTAHEM

$$Q_j = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \quad (40)$$

PRO $j = 1, 2, \dots, n$.

Zobecněné síly Q_j nemusí být síly v pravém slova smyslu (viz komentář v odstavci 3.3.1).

Nyní je již možné napsat Lagrangeovy rovnice druhého druhu.

LAGRANGEOVY ROVNICE II. DRUHOU, KTERÉ POPISUJÍ POHYB SOUSTAVY N HMOTNÝCH BODŮ, SE NAZÝVAJÍ ROVNICE

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^j} = Q_j \quad (41)$$

PRO $j=1, 2, \dots, n$. PŘITOM T JE KINETICKÁ ENERGIE SOUSTAVY HMOTNÝCH BODŮ, q^j JSOU ZOBECNĚNÉ SOUŘADNICE A \dot{q}^j JSOU ZOBECNĚNÉ RYCHLOSTI.

Tyto rovnice jsou tedy pohybovými rovnicemi, které popisují pohyb dané soustavy hmotných bodů. Rovnice (41) vyjadřují Lagrangeovy rovnice II. druhu v nejobecnějším tvaru, který lze v určitých speciálních případech zjednodušit (viz 3.4).

Rovnice (41) tvoří soustavu n obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu pro neznámé funkce $q^j = q^j(t)$ (pro $j=1, 2, \dots, n$).

Na první pohled by se mohlo zdát, že to jsou rovnice parciální, protože v rovnicích (41) vystupují parciální derivace. Zápis $\frac{\partial T}{\partial q^j}$ resp. $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j}$ představuje ovšem jen návod (pomůcku) na získání derivace kinetické energie. Samotné neznámé funkce $q^j = q^j(t)$ jsou závislé jen na čase, takže v upravených rovnicích (tj. už po provedení naznačených parciálních derivací) vystupují jen totální derivace q^j podle času.

3.4 Lagrangeovy rovnice II. druhu ve speciálních případech

Lagrangeův formalismus (tj. zobecněné souřadnice (viz odstavec 3.2.2), zobecněné rychlosti (viz odstavec 3.2.4) a Lagrangeovy rovnice 2. druhu (viz odstavec 3.3)) byl zaveden proto, abychom nemuseli vyšetřovat rozklady sil a mohli pracovat pouze se skalárními veličinami (kinetická energie). Přesto je ale v Lagrangeových rovnicích druhého druhu (vztah (41)) pravá strana rovna zobecněné síle, která je definovaná pomocí sil (viz vztah (40)). Tím jsou tedy i Lagrangeovy rovnice stále závislé na působících silách.

V řadě úloh (a to i ve fyzikálně velmi důležitých případech - např. pohyb hmotného bodu v poli centrální síly popsany v odstavci 3.6) lze Lagrangeovy rovnice druhého druhu přepsat tak, že jejich pravá strana bude nulová.

Tento přepis provedeme v závislosti na typu sil, které popisují fyzikální situaci, tj. zda se jedná o:

1. síly konzervativní (viz odstavec 3.4.1);
2. síly, k nimž existuje zobecněný potenciál (viz odstavec 3.4.3).

3.4.1 Konzervativní síly

V případě konzervativních sil bude možné Lagrangeovy rovnice 2. druhu (vztah (41)) přeformulovat jednodušeji. Nejdříve je nutné vědět, co jsou to konzervativní síly.

SÍLY JSOU KONZERVATIVNÍ, JESTLIŽE PRÁCE SIL MEZI DVĚMA DANÝMI BODY NEZÁVISÍ NA TRAJEKTORII, PO KTERÉ SE HMOTNÝ BOD POHYBUJE.

Právě uvedenou definici konzervativních sil lze přepsat i jinak:

SÍLY JSOU KONZERVATIVNÍ, JESTLIŽE PRÁCE SIL PO UZAVŘENÉ KŘIVCE, PO KTERÉ SE HMOTNÝ BOD POHYBUJE, JE ROVNA NULE.

Konzervativní síly jsou tedy ty síly, které mají potenciál (resp. pro které je definována potenciální energie).

Pro konzervativní sílu \vec{F} pak platí

$$\vec{F} = -\text{grad}V, \quad (42)$$

kde V je potenciál (přesněji potenciální energie). Zavedením potenciální energie vztahem (42) tak získáme ekvivalentní popis systému pomocí jedné skalární veličiny V místo vektorové veličiny \vec{F} .

Aplikujeme-li na vztah (42) diferenciální operátor rotace, získáme $\text{rot} \vec{F} = -\text{rot} \text{grad}V$. Pravá strana této rovnice je identicky rovna nulovému vektoru, takže platí

$$\text{rot} \vec{F} = \vec{0}. \quad (43)$$

Tento vztah poskytuje návod, jak poznat, že dané pole je konzervativní.

S využitím (42) lze zobecněnou sílu Q_j definovanou vztahem (40) přepsat ve tvaru

$$Q_j = -\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial q^j}. \quad (44)$$

Vzhledem k tomu, že $V = V(x^i(q^j))$, lze vztah (44) přepsat na základě vztahu pro derivaci složené funkce ve tvaru

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q^j}. \quad (45)$$

Vzhledem k tomu, že potenciální energie V nezávisí na zobecněných rychlostech \dot{q}^j , je $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j} = 0$ a tedy i

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j} \right) = 0. \text{ Lze tedy formálně psát}$$

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial V}{\partial q^j}. \quad (46)$$

Tím jsme získali výraz, je formálně velmi podobný levé straně Lagrangeových rovnic druhého druhu (41) a lze jej do těchto rovnic tedy dosadit. Můžeme proto psát $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial V}{\partial q^j}$ a s využitím vztahu pro derivaci součtu dvou funkcí jen upravit na tvar $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} (T - V) \right) - \frac{\partial}{\partial q^j} (T - V) = 0$. Lagrangeovy rovnice druhého druhu lze nyní přepsat v zjednodušeném tvaru.

LAGRANGEOVY ROVNICE II. DRUHOU POPISUJÍCÍ POHYB SOUSTAVY N HMOTNÝCH BODŮ V POLI KONZERVATIVNÍCH SIL JSOU ROVNICE VE TVARU

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0 \quad (47)$$

PRO $j = 1, 2, \dots, n$. PŘITOM

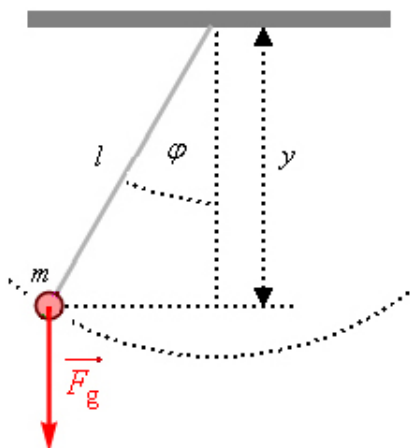
$$L(q^j, \dot{q}^j, t) = T - V \quad (48)$$

JE LAGRANGEOVA FUNKCE (RESP. TZV. LAGRANGIÁN), q^j JSOU ZOBECNĚNÉ SOUŘADNICE A \dot{q}^j JSOU ZOBECNĚNÉ RYCHLOSTI.

Získali jsme opět soustavu n obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu s neznámými funkcemi $q^j = q^j(t)$ (pro $j = 1, 2, \dots, n$), ale tentokrát (na rozdíl od (41)) vyjádřenou pomocí Lagrangeovy funkce L . L je funkce definovaná na varietě T_{PQ} (viz 3.2.4) a jedná o tzv. **invariant**, tj. hodnota této funkce se nezmění při transformaci soustavy souřadnic.

Funkce L tedy „žije“ na varietě T_{PQ} a je definovaná v každém bodě. Symbol $\frac{\partial L}{\partial q^j}$ přitom popisuje změnu funkce L při změně souřadnice q^j .

Použití rovnic (47) ukážeme na jednoduchém příkladu.



obr. 30

Příklad: Matematické kyvadlo

Najděte úhlovou frekvenci kmitání matematického kyvadla, které je tvořeno hmotným bodem o hmotnosti m zavěšeným na vlákně zanedbatelné hmotnosti délky l .

Řešení: Matematické kyvadlo (viz obr. 30) popíšeme jednou zobecněnou souřadnicí a to úhlem φ , který svírá vlákno závěsu se svislým směrem (tj. s rovnovážnou polohou kyvadla). Postupně určíme kinetickou energii T , potenciální energii V a lagrangián L :

$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2$, $V = -mgy = -mgl \cos \varphi$ a tedy $L = T - V = \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2 + mgl \cos \varphi$. V tuto chvíli zvolíme libovolný časový okamžik a v něm určíme derivace lagrangiánu, které vystupují v Lagrangeových rovnicích druhého druhu (vztah (47)). Symbol $\dot{\varphi}$ tedy znamená zobecněnou rychlost (viz odstavec 3.2.4).

To znamená, že „vypneme“ čas a určíme příslušné derivace.

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}$ a $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi$. Nyní přejdeme od konkrétního časového okamžiku, v němž jsme určili derivace lagrangiánu, k libovolnému času t . To znamená, že symbol $\dot{\varphi}$ bude nyní vyjadřovat časovou derivaci úhlu φ , tj.

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi(t)}{dt}.$$

Nyní tedy opět „zapneme“ plynutí času. Od teď dále jsou funkce φ i $\dot{\varphi}$ závislé na čase. Doteď tomu tak nebylo - $\dot{\varphi}$ jsme nederivovali jako složenou funkci!

Proto $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = ml^2\ddot{\varphi}$ a tedy po dosazení do Lagrangeovy rovnice druhého druhu získáme $ml^2\ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0$. Tuto rovnici lze přepsat ve tvaru $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$, což je poměrně složitá diferenciální rovnice, neboť neznámá funkce se vyskytuje i v argumentu goniometrické funkce. Pokud se spokojíme s řešením pro malé výchylky φ lze rovnici s využitím Taylorova rozvoje přepsat ve tvaru $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$.

Tato rovnice popisuje harmonické kmitání s úhlovou frekvencí $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

3.4.2 ***Přesné řešení matematického kyvadla

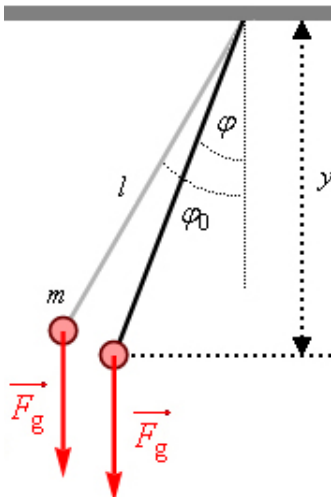
Přesné řešení pohybové rovnice matematického kyvadla vyžaduje hlubší znalosti z matematiky a použití některých speciálních substitucí a integrálů.

Pohybovou rovnici matematického kyvadla lze odvodit různými způsoby: pomocí lagrangiánu (viz odstavec 3.4.1) a nebo pomocí zákona zachování mechanické energie. Nebudeme-li uvažovat vnější síly, přejde zákon zachování mechanické energie na zákon zachování energie (jiné formy než mechanické nebude energie mít) a bude tedy platit

$$T + V = E = \text{konst.} \quad (49)$$

Kinetickou energii T a potenciální energii V lze psát s využitím obr. 31, ve kterém je vyznačena maximální výchylka (počáteční výchylka) matematického kyvadla popsána úhlem φ_0 a okamžitá výchylka popsána úhlem φ . Kinetická energie je $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$, potenciální energie je $V = -mgy = -mgl \cos \varphi$. Celková energie je rovna potenciální energii na začátku pohybu matematického kyvadla, tj. $E = -mgl \cos \varphi_0$.

Znaménko mínus je ve vztahu pro potenciální energii proto, že při zvětšování výchylky kyvadla musí růst jeho potenciální energie. Okamžitá výchylka y , která ve vztahu pro potenciální energii vystupuje, by ovšem s rostoucím úhlem φ bez použití znaménka mínus klesala.



obr. 31

Dosazením do vztahu (49) získáme rovnici

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi = -mgl \cos \varphi_0, \quad (50)$$

z níž lze vyjádřit časovou derivaci $\dot{\varphi}$ ve tvaru

$$\dot{\varphi} = \sqrt{2\frac{g}{l}(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}. \quad (51)$$

Rovnici (51) lze formálně odvodit též z rovnice popisující matematické kyvadlo, která byla odvozena na konci odstavce 3.4.1, tj. z rovnice $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$. Vynásobíme-li jí $\dot{\varphi}$, získáme $\ddot{\varphi}\dot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi \dot{\varphi} = 0$, kterou lze přepsat do tvaru $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\right) - \frac{g}{l} \frac{d}{dt}(\cos \varphi) = 0$. S využitím vlastnosti součtu derivací lze psát $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{g}{l} \cos \varphi\right) = 0$ a tedy $\dot{\varphi}^2 - \frac{2g}{l} \cos \varphi = \text{konst.}$, odkud lze po vhodné volbě konstanty na pravé straně rovnice vyjádřit $\dot{\varphi} = \sqrt{2\frac{g}{l}(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}$. Tato rovnice je shodná s rovnicí (51).

Získali jsme tedy diferenciální rovnici, kterou lze řešit separací proměnných. Můžeme proto psát $\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{2\frac{g}{l}(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}$ a odtud

$$dt = \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}. \quad (52)$$

Řešení rovnice (52) lze nalézt integrováním v mezích od 0 do φ_0 , čímž získáme čtvrtinu hledané periody T matematického kyvadla.

Hmotný bod o hmotnosti m , který je zavěšen na vlákně délky l (viz obr. 31), tak opíše trajektorii, která odpovídá polovině kyvu kyvadla, tj. čtvrtině kmitu.

Tedy

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}. \quad (53)$$

Nyní je nutné vyřešit pravou stranu rovnice (53). Nejdříve přepíšeme výraz

$$\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0} \quad (54)$$

s využitím goniometrického vztahu

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{2}, \quad (55)$$

z něhož vyjádříme $\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ a dosadíme do vztahu (54). Získáme tak

$$\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0} = \sqrt{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (56)$$

a zavedeme substituci

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \psi. \quad (57)$$

Zavedením této substituce se mění integrační meze ve vztahu (53). Je-li $\varphi \in \langle 0; \varphi_0 \rangle$, pak na základě substituce (57) je $\psi \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ (uvažujeme-li pouze fyzikální aplikace dané substituce). Zároveň je nutné si uvědomit, že pro derivaci právě zavedeného substitučního vztahu platí

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \cos \psi \cdot d\psi. \quad (58)$$

Dosazením vztahu (57) do vztahu (56) a následnými úpravami postupně získáme $\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0} = \sqrt{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \sqrt{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \psi} = \sqrt{2} \sin \frac{\varphi_0}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \psi}$, tedy

$$\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0} = \sqrt{2} \sin \frac{\varphi_0}{2} \cos \psi. \quad (59)$$

Všechny úpravy provádíme s ohledem na fyzikální situaci, kterou řešíme. Obecně některé vztahy neplatí - nejsou splněny všechny matematické podmínky. Fyzikální situace je ovšem taková, že uvažované podmínky splněné jsou. Např. úprava $\sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \cos \psi$ provedená ve vztahu (59) není matematicky korektní - správně by mělo být $\sqrt{1 - \sin^2 \psi} = |\cos \psi|$, nicméně hodnoty úhlů ψ mimo interval $\psi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (tj. pro záporné hodnoty funkce kosinus) nemají v dané situaci fyzikální smysl.

Dosazením vztahů (59) a (58) do vztahu (53) dostáváme $\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \cos \psi \, d\psi}{\cos \frac{\varphi}{2} \sqrt{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \cos \psi}}$ a po

postupných úpravách získáme $\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos \frac{\varphi}{2}} d\psi = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} d\psi$. Po dosazení ze vztahu (57) a

vynásobení rovnice čtyřmi tedy máme

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \psi}} d\psi, \quad (60)$$

kde

$$K\left(\sin \frac{\varphi_0}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \psi}} d\psi \quad (61)$$

je **úplný eliptický integrál prvního druhu**. Řešení těchto typů integrálů jsou tabelována resp. jsou doporučené další postupy při jejich řešení.

Řešení integrálu (61) spočívá v rozepsání integrandu pomocí Taylorova rozvoje ve tvaru

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \psi}} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{(2m-1)!!}{2^m} \left(\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \psi\right)^{2m}, \quad (62)$$

kde $(2m-1)!! = 1.3 \dots (2m-1)$. Rozvoj (62) je možné dále rozepsat ve tvaru

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \psi}} = 1 + \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \psi\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \psi\right)^4 + \frac{15}{48} \left(\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \psi\right)^6 + \dots \quad (63)$$

V integrálu (61) tedy dostaneme součet výrazů z rozpisu (63), v nichž vystupují integrály $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} \psi \, d\psi$ pro $m = 1, 2, \dots$. Z tabulek získáme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} \psi \, d\psi = \frac{\pi}{2} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}, \quad (64)$$

kde $(2m)!! = 2.4.6 \dots 2m = 2^m m!$.

Po dosazení řešení (64) do vztahu (63) a následně do vztahu (61) a do vztahu (60) získáme

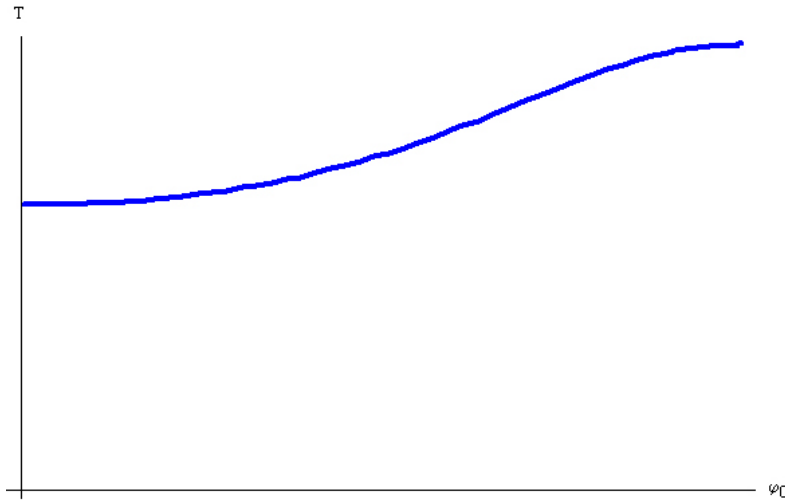
$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \psi\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \psi\right)^4 + \frac{15}{48} \left(\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \psi\right)^6 + \dots\right) d\psi \text{ a tedy} \quad (65)$$

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \frac{9\pi}{128} \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \frac{25\pi}{512} \sin^6 \frac{\varphi_0}{2} + \dots\right).$$

Vytkneme-li ve výrazu (65) $\frac{\pi}{2}$, získáme

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \frac{25}{256} \sin^6 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right). \quad (66)$$

První člen výrazu (66) odpovídá periodě matematického kyvadla pro malé výchylky. Ostatní členy je možné v tomto kontextu chápat jako opravy periody pro konkrétní počáteční výchylku (maximální výchylku) popsanou úhlem φ_0 . Graf závislosti periody na počáteční výchylce popsané úhlem φ_0 je na obr. 32.



obr. 32

3.4.3 Síly, které mají zobecněný potenciál

Nyní budeme předpokládat, že

$$V = V(q^j, \dot{q}^j, t), \quad (67)$$

tj. potenciální energie V závisí i na zobecněné rychlosti a na čase (na rozdíl od pole konzervativních sil, které je popsáno v odstavci 3.4.1). Přitom V je taková funkce, že splňuje vztah (46), ale v tomto případě obecně $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j} \neq 0$. Potom opět platí Lagrangeovy rovnice druhého druhu ve tvaru (47) a

$$L(q^j, \dot{q}^j, t) = T(q^j, \dot{q}^j, t) - V(q^j, \dot{q}^j, t). \quad (68)$$

Tato situace, v níž platí závislost (67), je v přírodě realizována pouze v případě elektromagnetismu. Zobecněný potenciál má Lorentzova síla působící na částici s elektrickým nábojem e , která se pohybuje rychlostí \vec{v} v elektromagnetickém poli, jehož elektrická intenzita je \vec{E} a magnetická indukce je \vec{B} .

PRO LORENTZOVU SÍLU

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (69)$$

EXISTUJE ZOBECNĚNÝ POTENCIÁL VE TVARU

$$V = e(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}), \quad (70)$$

KDE φ JE POTENCIÁL ELEKTRICKÉHO POLE A \vec{A} JE VEKTOROVÝ POTENCIÁL. PRO TYTO POTENCIÁLY PŘITOM PLATÍ

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{a} \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (71)$$

Důkaz tvrzení, že zobecněný potenciál Lorentzovy síly lze definovat vztahem (70), spočívá v rozepsání rychlosti a vektorového potenciálu v kartézských souřadnicích a dosazení do vztahu (46). Výsledný vztah by měl popisovat Lorentzovu sílu danou vztahem (69).

Veličiny φ a A je nutno chápat jako pomocné veličiny, které nejsou jednoznačné, protože je možné je přeskálovat a volit tak, aby počítání s nimi bylo pokud možno co nejjednodušší. Pokud se tyto veličiny dobře zvolí, zjednoduší se i výpočty v tom smyslu, že budeme mít méně rovnic k řešení. Měřitelnými veličinami jsou veličiny \vec{E} a \vec{B} .

Velmi snadnou úpravou vztahů (71) lze získat vyjádření dvou Maxwellových rovnic. Platí totiž $\text{rot } \vec{E} = \text{rot} \left(-\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\text{rot grad } \varphi - \text{rot } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0 - \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{A}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ a také $\text{div } \vec{B} = \text{div rot } \vec{A} = 0$ (identicky). Takže jsme získali dvě z Maxwellových rovnic: $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ a $\text{div } \vec{B} = 0$.

Maxwellovy rovnice elektromagnetického pole jsou tak obecné, že je možné s nimi počítat i ve speciální teorii relativity i v obecné teorii relativity bez výraznějších změn. Newtonův popis mechaniky takto obecný není a pro fyzikální popis v rámci teorie relativity je naprosto nevhodný a nepoužitelný.

3.5 Postup pro sestavení Lagrangeových rovnic

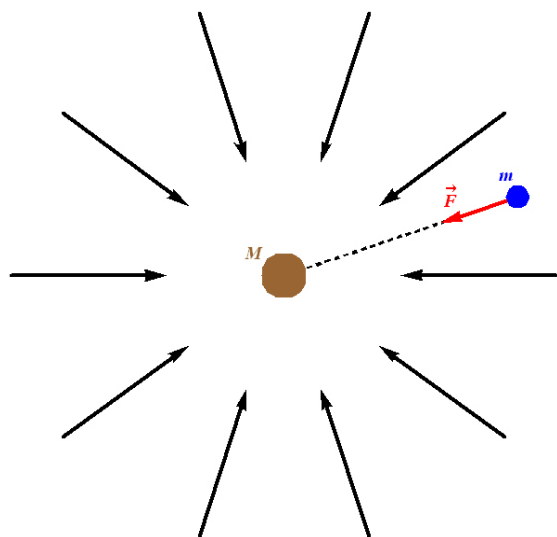
Lagrangeovy rovnice druhého druhu (47) jsou velmi užitečné při řešení řady úloh, které mají své praktické důsledky. Proto je nutné umět tyto rovnice správně sestavit. Doporučený postup je tento:

1. zavést zobecněné souřadnice q^j pro $j = 1, 2, \dots, n$ (viz odstavce 3.2.2 a 3.2.3);
2. nalézt vztahy mezi těmito zobecněnými souřadnicemi a kartézskými souřadnicemi $x^i = x^i(q^j)$ (pro $i = 1, 2, \dots, 3N$ a $j = 1, 2, \dots, n$);
3. určit $\frac{dx^i}{dt}$ pro $i = 1, 2, \dots, 3N$;
4. určit kinetickou energii T ve tvaru $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{dx^i}{dt} \right)^2$;
5. určit potenciální energii V tak, že do funkce $V = V(x^i)$ dosadíme $x^i(q^j)$ a získáme funkci ve tvaru $V = V(q^j, t)$ resp. $V = V(q^j, \dot{q}^j, t)$ pro $i = 1, 2, \dots, 3N$ a $j = 1, 2, \dots, n$;
6. vypočítáme lagrangián daného systému a jeho derivace podle zobecněných souřadnic a podle zobecněných rychlostí;
7. napíšeme Lagrangeovy rovnice druhého druhu.

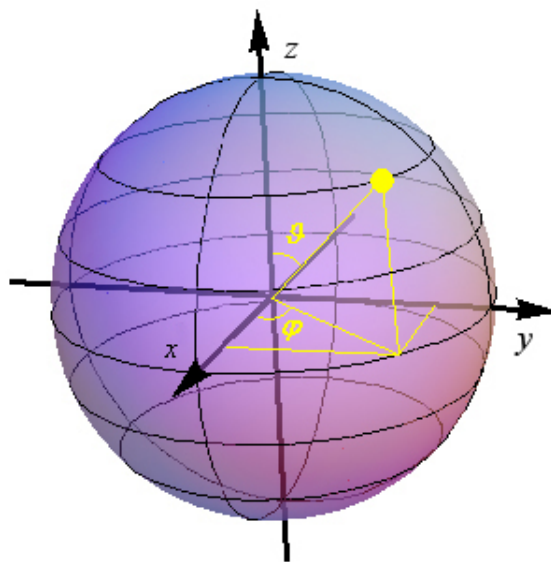
Tento postup ukážeme na příkladu, který má velký význam nejen pro teoretickou mechaniku a který je řešen v odstavci 3.6.

3.6 Pohyb hmotného bodu v centrálním silovém poli

V centrálním silovém poli (viz obr. 33) se nachází hmotný bod o hmotnosti m . Vzhledem k tomu, že se jedná o centrální pole, je síla \vec{F} , která na hmotný bod působí, centrální síla (radiální síla). Tato síla proto nemá tečnou složku, a popisovaná situace je tedy sféricky symetrická. To znamená, že k popisu systému lze užít sférické souřadnice (viz obr. 34).



obr. 33



obr. 34

Zobecněnými souřadnicemi, které budou popisovat náš systém, tedy budou tři sférické souřadnice $q^1 = r$, $q^2 = \vartheta$ a $q^3 = \varphi$, kde je r je poloměr uvažované sféry. Tři plně postačují k popisu, neboť vyšetřujeme pohyb jednoho hmotného bodu v trojrozměrném prostoru a tento pohyb není omezen žádnou vazbou (viz 3.2.3).

Vztahy mezi zobecněnými souřadnicemi a kartézskými souřadnicemi vyplývají z obr. 34:

$$x^1 = x = r \sin \vartheta \cos \varphi;$$

$$x^2 = y = r \sin \vartheta \sin \varphi;$$

$$x^3 = z = r \cos \vartheta.$$

Tyto souřadnice závisí na čase. Nyní určíme jejich první derivace podle času:

$$\frac{dx^1}{dt} = \dot{x} = \dot{r} \sin \vartheta \cos \varphi + r \dot{\vartheta} \cos \vartheta \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \varphi ;$$

$$\frac{dx^2}{dt} = \dot{y} = \dot{r} \sin \vartheta \sin \varphi + r \dot{\vartheta} \cos \vartheta \sin \varphi + r \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \varphi ;$$

$$\frac{dx^3}{dt} = \dot{z} = \dot{r} \cos \vartheta - r \dot{\vartheta} \sin \vartheta .$$

Nyní můžeme určit kinetickou energii hmotného bodu, který se nachází v centrálním silovém poli:
 $T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$. Dosazením z přechodných vztahů a následnou úpravou získáme vztah

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta), \quad (72)$$

který popisuje kinetickou energii hmotného bodu ve sférických souřadnicích vždy, bez ohledu na další charakteristiky konkrétní úlohy.

Kinetická energie hmotného bodu vždy musí obsahovat všechny zavedené zobecněné rychlosti \dot{q}^j (pro $j = 1, 2, \dots, n$), ale nemusí obsahovat nutně všechny zobecněné souřadnice q^j . Tyto souřadnice, které nejsou ve vztahu pro kinetickou energii (resp. ve vztahu pro lagrangián) obsaženy, usnadňují další výpočty (viz odstavec 3.7).

Jednotlivé členy, které vystupují v závorce vztahu (72) přitom mají svůj fyzikální význam - jedná o rychlosti, příslušející dané zobecněné souřadnici:

1. člen $v_r = \dot{r}$ určuje velikost radiální rychlosti, tj. rychlosti jakou se těleso o hmotnosti m přibližuje (resp. vzdaluje) hmotnému centru;
2. člen $v_\vartheta = r \dot{\vartheta}$ odpovídá velikosti rychlosti ve směru souřadnice ϑ ;

Na povrchu Země se jedná o velikost rychlosti, kterou se hmotný bod pohybuje v severojižním směru.

3. člen $v_\varphi = r \dot{\varphi} \sin \vartheta$ odpovídá velikosti rychlosti ve směru souřadnice φ .

Na povrchu Země se tedy jedná o velikost rychlosti, kterou se hmotný bod pohybuje ve směru východ - západ. $r \sin \vartheta$ je poloměr kružnice, po níž se hmotný bod v tomto směru pohybuje (tj. poloměr dané rovnoběžky, po níž se hmotný bod pohybuje) a $\dot{\varphi}$ je velikost úhlové rychlosti, s jakou se mění úhel φ .

To tedy znamená, že vektory \vec{v}_r , \vec{v}_ϑ a \vec{v}_φ definují lokální kartézský systém na sféře.

V právě řešené úloze by bylo možné určit kinetickou energii (resp. celkovou velikost rychlosti hmotného bodu) na základě geometrického rozboru situace. Ale v obecném případě geometrický rozbor nemusí být tak zřejmý a názorný jako v tomto speciálním případě.

Ve vztazích pro velikosti rychlostí ve směru jednotlivých zobecněných souřadnic lze v tomto případě najít tzv. Laméovy koeficienty: 1, r a $r \sin \vartheta$.

Jsou to ty koeficienty, kterými se násobí derivace příslušné zobecněné souřadnice.

Každé centrální pole je konzervativní, neboť síla v něm působí radiálně a je závislá pouze na vzdálenosti (ne na funkci vzdálenosti) od hmotného centra daného centrálního silového pole. Proto má toto pole potenciální energii V , která je závislá pouze na vzdálenosti hmotného bodu od hmotného centra pole. Podle vztahu (42) je

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad F_y \approx -\frac{\partial V}{\partial \vartheta} \quad \text{a} \quad F_z \approx -\frac{\partial V}{\partial \varphi}.$$

Úměra místo operátoru „ \approx “ je ve vztazích pro F_y a F_z proto, že ve výpočtu chybí Laméovy koeficienty.

Vzhledem k tomu, že úlohu vyšetřujeme v centrálním poli, jehož potenciální energie závisí jen na vzdálenosti od hmotného centra, je $\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$. A tedy

$$F(r) = -\frac{dV}{dr}(r). \quad (73)$$

Nyní můžeme psát Lagrangeovu funkci (48) ve tvaru

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) - V(r). \quad (74)$$

Pro jednotlivé derivace, které jsou nutné pro sestavení Lagrangeových rovnic druhého druhu, dostaneme:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \text{a} \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\vartheta}^2 + mr\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta - \frac{dV}{dr}(r);$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = mr^2\dot{\vartheta} \quad \text{a} \quad \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = mr^2\dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \sin^2 \vartheta \quad \text{a} \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$

Tyto derivace byly určeny za „vypnutého času“ a tedy parametry r , ϑ , φ , \dot{r} , $\dot{\vartheta}$ a $\dot{\varphi}$ byly navzájem nezávislé parametry. Nyní čas zapneme a bude platit $\dot{r} = \frac{dr}{dt}(t)$, $\dot{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{dt}(t)$ a $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}(t)$.

Časové derivace derivací lagrangiánu derivovaného již podle zobecněných rychlostí \dot{r} , $\dot{\vartheta}$ a $\dot{\varphi}$ jsou:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = m\ddot{r};$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} \right) = mr^2\ddot{\vartheta} + 2mr\dot{r}\dot{\vartheta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\varphi} \sin^2 \vartheta) \quad - \text{důvod, proč tento výraz zapisujeme jen symbolicky, vyplyne po sepsání}$$

Lagrangeových rovnic druhého druhu.

Nyní již můžeme napsat Lagrangeovy rovnice druhého druhu pro uvažovanou situaci. Dosadíme tedy do (47) a získáme:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\vartheta}^2 - mr\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \frac{dV}{dr}(r) = 0, \quad (75)$$

$$mr^2\ddot{\vartheta} + 2mr\dot{r}\dot{\vartheta} - mr^2\dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = 0 \quad (76)$$

a

$$\frac{d}{dt} (mr^2\dot{\varphi} \sin^2 \vartheta) = 0. \quad (77)$$

Z rovnice (77) vyplývá, proč jsme časovou derivaci lagrangiánu derivovaného podle zobecněné rychlosti $\dot{\varphi}$ pouze naznačili. Rovnice (77) zapsaná v této podobě je snadno řešitelná a jejím řešením je

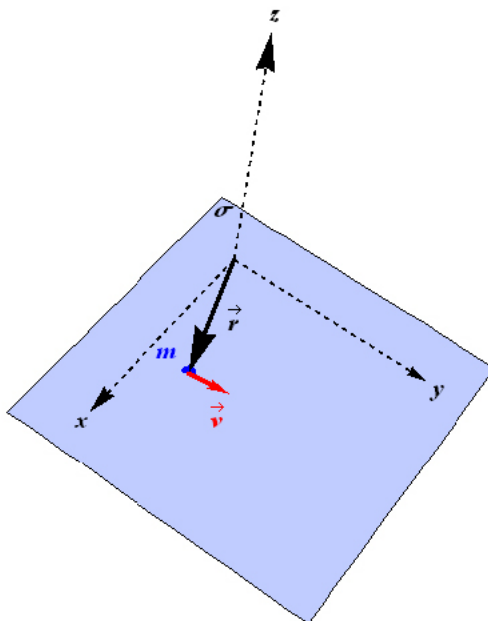
$$mr^2\dot{\varphi} \sin^2 \vartheta = \text{konst.} \quad (78)$$

Rovnice (78) je matematickým vyjádřením zákona zachování momentu hybnosti v centrálním silovém poli.

Na základě pozorování lze tvrdit:

POHYB V KAŽDÉM CENTRÁLNÍM POLI JE NUTNĚ POHYB ROVINNÝ.

Pokud se povede toto dokázat, pak lze k popisu pohybu hmotného bodu v centrálním poli použít pouze dvě souřadnice, tj. lze přejít od sférických souřadnic k polárním souřadnicím.



obr. 35

Zvolme bez újmy na obecnosti počáteční podmínky pohybu tak, že $\vartheta(t_0) = \frac{\pi}{2}$ a $\dot{\vartheta}(t_0) = 0$. Polohový vektor \vec{r} a vektor počáteční rychlosti \vec{v}_0 pohybu hmotného bodu jsou kolineární a určují tedy rovinu σ . (Pokud by kolineární nebyly, vybrali bychom jednu z rovin, v níž oba leží.) Kartézskou soustavu souřadnic lze volit libovolně - proto (bez újmy na obecnosti) ji zvolíme tak, že osy x a y leží v rovině σ a osa z je k této rovině kolmá (viz obr. 35). Tedy tak, že $\vartheta(t_0) = \frac{\pi}{2}$.

Nyní je zřejmý význam veličiny $\dot{\vartheta}(t)$ - určuje velikost rychlosti nárůstu odchylky pohybujícího se hmotného bodu od roviny σ . Jestliže jsme zvolili $\dot{\vartheta}(t_0) = 0$ pak to znamená, že v čase t_0 zůstává hmotný bod v rovině σ .

Přepsáním rovnice (76) v čase t_0 získáme $mr^2\ddot{\vartheta} + 2m\dot{r}\dot{\vartheta} - mr^2\dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \frac{\pi}{2} = 0$, tedy $mr^2\ddot{\vartheta} = 0$.

Dostáváme tak $\ddot{\vartheta} = 0$, což znamená, že velikost zrychlení hmotného bodu ve směru mimo rovinu σ je nulové. Hmotný bod tedy zůstává v rovině σ , což je tzv. rovina ekliptiky.

Tedy $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ v každém časovém okamžiku.

Řešením rovnice (77), jak bylo již uvedeno, je vztah (78), který představuje zákon zachování momentu hybnosti. Jestliže se ale moment hybnosti zachovává (tj. nemění se ani jeho velikost, ani jeho směr), pak je pohyb hmotného bodu nutně rovinný. A navíc směr momentu hybnosti je kolmý k rovině, v níž se hmotný bod pohybuje.

Proto lze místo sférických souřadnic r, ϑ, φ použít polární souřadnice r, φ , čímž získáme Lagrangeovu funkci (74) ve tvaru

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r), \quad (79)$$

kde \dot{r} představuje velikost radiální rychlosti (tj. velikost rychlosti vzdalování od hmotného centra centrální pole) a $r\dot{\varphi}$ je velikost tečné rychlosti, tj. velikost rychlosti pohybu hmotného bodu po křivce v rovině.

Je důležité si uvědomit, že přechod z třírozměrného popisu systému do dvourozměrného popisu systému, tj. přechod od lagrangiánu ve tvaru (74) k lagrangiánu ve tvaru (79) není obecně triviální a je jistější přepočítat celou úlohu (kinetickou energii, potenciální energii, ...) znovu. V námi vyšetřované úloze to bylo možné, protože jsme používali kartézské souřadnice a z geometrického náhledu byla situace jasná.

3.7 Metody řešení Lagrangeových rovnic

Lagrangeovy rovnice druhého druhu (41) resp. (47) jsou obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu, které je možno řešit různými způsoby:

1. numericky pomocí počítače - výpočet je ale nutné pečlivě kontrolovat, abychom získali skutečně správná řešení rovnic i z fyzikálního hlediska;
2. použitím zjednodušujících aproximací (většinou linearizace problému a tedy i řešení rovnic) - nutno provádět pouze za určitých předpokladů a fyzikálně korektně (např. řešení pohybových rovnic matematického kyvadla - viz odstavec 3.4.1);
3. exaktní řešení pomocí tzv. **prvních integrálů (integrálů pohybu)**.

Lagrangeovy rovnice často samy dávají návod, jak je řešit. Pokud zavedeme integrály pohybu, zjednodušíme si řešení rovnic.

Každý integrál pohybu se totiž pomůže zbavit jedné tečky v derivaci funkce.

INTEGRÁL POHYBU JE VÝRAZ TVARU

$$f(q^j, \dot{q}^j, t) = konst., \quad (80)$$

KTERÝ V KAŽDÉM OKAMŽIKU NABÝVÁ STEJNÉ HODNOTY (KONSTANTNÍ HODNOTY), KDYŽ HO VYČÍSLÍME PODÉL LIBOVOLNÉ TRAJEKTORIE POPSANÉ ROVNICÍ $q^j = q^j(t)$ (PRO $j = 1, 2, \dots, n$), KTERÁ ŘEŠÍ POHYBOVÉ ROVNICE.

Do vztahu (80) tedy dosadíme skutečné funkce $q^j = q^j(t)$ a $\dot{q}^j = \dot{q}^j(t)$ a hodnota tohoto výrazu pak bude tedy pořád stejná, tj. $f(q^j(t), \dot{q}^j(t), t) = konst.$ Jinými slovy $\frac{df}{dt}(t) = 0$ platí pro každou trajektorii, která je dána svými počátečními podmínkami.

Podél jiné trajektorie bude výraz (80) nabývat také konstantní hodnoty, ale bude to jiná konstanta, než u předešlé trajektorie.

Před dalším tvrzením, které usnadní výpočty Lagrangeových rovnic druhého druhu, zavedeme pojem **cyklická souřadnice**.

ZOBECNĚNÁ SOUŘADNICE, NA KTERÉ NEZÁVISÍ LAGRANGEOVA FUNKCE (48), SE NAZÝVÁ CYKLICKÁ SOUŘADNICE.

A nyní již uvedeme zmiňované tvrzení.

POKUD LAGRANGEOVA FUNKCE (48) NEZÁVISÍ NA NĚKTERÉ ZOBECNĚNÉ SOUŘADNICI q^i , PAK VÝRAZ $\frac{\partial L}{\partial q^i}$ JE INTEGRÁLEM POHYBU.

Důkaz tohoto tvrzení je snadný: z $j=1, 2, \dots, i-1, i, i+1, \dots, n$ Lagrangeových rovnic druhého druhu vezmeme i -tou rovnicí $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$. Podle předpokladu tvrzení nezávisí Lagrangeova funkce na souřadnici q^i , tedy $\frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$. Po dosazení do i -té Lagrangeovy rovnice získáme $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = 0$ a tedy $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = konst.$ Proto $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = f$, kde f je integrál pohybu (80).

Příklad: Určete integrály pohybu v langrangiánu $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(z)$.

Řešení: Lagrangián závisí v tomto případě na kartézských souřadnicích x, y a z . Ovšem na x a na y nezávisí explicitně (závisí na časových derivacích těchto souřadnic). Proto jsou souřadnice x a y cyklické souřadnice a tedy máme dva integrály pohybu: $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ a $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}$, pro které platí $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = konst.$ a $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = konst.$ Tedy x -ová a y -ová složka hybnosti se zachovává.

Dalším integrálem pohybu je tzv. **zobecněná energie**.

POKUD LAGRANGEOVA FUNKCE (48) NEZÁVISÍ EXPLICITNĚ NA ČASE t , PAK VÝRAZ

$$h(q, \dot{q}, t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j - L, \quad (81)$$

KTERÝ SE NAZÝVÁ ZOBECNĚNÁ ENERGIE (JACOBIHO INTEGRÁL), JE INTEGRÁLEM POHYBU.

Má-li být výraz (81) integrálem pohybu, pak podle podmínky (80) musí platit $h(q, \dot{q}, t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j - L = konst.$ Tuto rovnost nyní dokážeme. Pokud má být $h(q, \dot{q}, t) = konst.$, musí být

$\frac{dh}{dt} = 0$. Proto nyní určíme úplnou časovou derivaci vztahu (81). Získáme:

$\frac{dh}{dt} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) \dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j \right) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial t} \right)$, kde $\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial t} \right)$. Po úpravě

získáme $\frac{dh}{dt} = \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} \right) \dot{q}^j \right) - \frac{\partial L}{\partial t}$. Uvědomíme-li si, že platí $\sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} \right) = 0$ (jedná se o

Lagrangeovy rovnice druhého druhu (viz (47)) a že $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ (podle předpokladu definice zobecněné energie

(81)), pak $\frac{dh}{dt} = 0$.

Příklad: Určete integrály pohybu v langrangiánu $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z)$.

Řešení: Vzhledem k tomu, že napsaný lagrangián nezávisí explicitně na čase, můžeme definovat zobecněnou energii pomocí vztahu (81): $h = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \dot{y} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \dot{z} - L$. Po dosazení a po postupných úpravách dostaneme:

$$h = m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 + m\dot{z}^2 - \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z) = T + V.$$

V tomto **SPECIÁLNÍM PŘÍPADĚ** jsme tedy získali $h = T + V = konst.$, tj. zákon zachování mechanické energie. Obecně ovšem zobecněná energie nemusí být vyjádřením zákona zachování energie. V tomto případě je to důsledek speciální podoby lagrangiánu.

Přesto je zobecněná energie h v některých případech rovna celkové mechanické energii systému.

ZOBECNĚNÁ ENERGIE DEFINOVANÁ VZTAHEM (81) JE ZÁKONEM ZACHOVÁNÍ MECHANICKÉ ENERGIE TEHDY, KDYŽ SE JEDNÁ O POHYB HMOTNÉHO BODU V POLI KONZERVATIVNÍCH SIL (VIZ ODSTAVEC 3.4.1), KTERÉ JSOU OMEZENY HOLONOMNÍMI A SKLERONOMNÍMI VAZBAMI (VIZ ODSTAVEC 2.2).

Reonomní vazby totiž energii systému dodávají nebo odebírají.

Důkaz tohoto tvrzení provedeme rozpisem kinetické energie T a následným dosazením do vztahu (81).

Pro kinetickou energii soustavy N hmotných bodů platí: $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{dx^i}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^i}{dt}$.

Vzhledem k tomu, že $x^i = x^i(q^j(t))$ (podle podmínky (31)) pro $i=1, 2, \dots, 3N$ a $j=1, 2, \dots, n$ (n je počet

stupňů volnosti), můžeme psát $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \sum_{r=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial q^r} \dot{q}^r \sum_{s=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial q^s} \dot{q}^s$. Po úpravách, při kterých zaměníme také pořadí

sčítanců, dostaneme $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial q^r} \dot{q}^r \frac{\partial x^i}{\partial q^s} \dot{q}^s = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \frac{\partial x^i}{\partial q^r} \frac{\partial x^i}{\partial q^s} \dot{q}^r \dot{q}^s$. Označíme-li

$A_{rs} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \frac{\partial x^i}{\partial q^r} \frac{\partial x^i}{\partial q^s}$, můžeme pro kinetickou energii psát: $T = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n A_{rs} \dot{q}^r \dot{q}^s$. Nyní už lze na

základě vztahu (81) psát zobecněnou energii: $h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j - L = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j - T + V$.

V poslední sumě se derivuje pouze kinetická energie T , protože potenciální energie V nezávisí na žádné zobecněné rychlosti \dot{q}^j .

Dosazením z rozepsané kinetické energie získáme:

$$h = \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \left(A_{rs} \frac{\partial \dot{q}^r}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^s + A_{rs} \dot{q}^r \frac{\partial \dot{q}^s}{\partial \dot{q}^j} \right) \dot{q}^j - T + V = \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \left(A_{rs} \delta_j^r \dot{q}^s + A_{rs} \dot{q}^r \delta_j^s \right) \dot{q}^j - T + V =$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \left(A_{rs} \delta_j^r \dot{q}^j \dot{q}^s + A_{rs} \dot{q}^r \delta_j^s \dot{q}^j \right) - T + V = \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \left(A_{rs} \dot{q}^r \dot{q}^s + A_{rs} \dot{q}^r \dot{q}^s \right) - T + V.$$

S využitím zavedené kinetické energie lze tedy psát: $h = T + T - T + V = T + V = E = konst.$

Tím je důkaz ukončen.

3.8 Pohyb hmotného objektu v poli centrální síly

Jak bylo ukázáno v odstavci 3.6, pohyb hmotného bodu v poli centrální síly je pohyb rovinný. To znamená, že pohyb hmotného bodu (resp. hmotného objektu) o hmotnosti m v tomto poli můžeme popsat pomocí polárních souřadnic r a φ . Lagrangián tedy lze psát ve tvaru (79), tj. $L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r)$.

Lagrangeova funkce ovšem nezávisí na souřadnici φ - tj. φ je cyklická souřadnice (viz odstavec 3.6). Můžeme tedy psát první integrál pohybu ve tvaru

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = l = konst., \quad (82)$$

kde l je moment hybnosti. Vztah (82) tedy vyjadřuje zákon zachování momentu hybnosti.

Lagrangián (79) nezávisí ovšem přímo ani na čase, a proto můžeme psát zobecněnou energii h pro pohyb hmotného objektu v poli centrální síly ve tvaru

$$h = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) = E = konst., \quad (83)$$

neboť se nacházíme v poli konzervativních sil (viz odstavec 3.4.1). Ze vztahu (82) můžeme vyjádřit

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{m r^2}, \quad (84)$$

čimž jsme získali vyjádření časové změny úhlu v závislosti na vzdálenosti od centrálního tělesa a na hmotnosti uvažovaného hmotného objektu.

Získali jsme tedy velikost úhlové rychlosti pohybu daného objektu, tj. velikost rychlosti, s níž se tento objekt pohybuje kolem centrálního tělesa. V této rychlosti není zahrnut radiální pohyb (tj. přibližování nebo oddalování od centrálního tělesa)!

Dosazením vztahu (84) do rovnice (83) získáme rovnici $\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2 \frac{l^2}{m^2 r^4}\right) + V(r) = E$, odkud můžeme

vyjádřit \dot{r}^2 ve tvaru $\dot{r}^2 = \frac{2}{m}\left(E - V(r)\right) - \frac{l^2}{m^2 r^2}$, který lze upravit na tvar

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m}\left(E - \left(V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}\right)\right). \quad (85)$$

S tímto vztahem nyní budeme pracovat dále, neboť naším cílem je popsat pohyb, tj. nalézt závislost souřadnice r (resp. φ) na čase. Proto vztah (85) odmocníme a přepíšeme do tvaru vhodného pro další výpočet

$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \left(V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}\right)\right)}$. Pomocí separace proměnných bychom získali rovnici

$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \left(V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}\right)\right)}}$, kterou by bylo možné řešit integrací a získali bychom

$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \left(V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}\right)\right)}} = g(r)$ a tedy $r = g^{-1}(t)$. Výpočet funkce $g(r)$ je ovšem technicky velmi

zdlouhavý. Proto je lepší nevyšetřovat závislosti $r(t)$ (resp. $\varphi(t)$), ale najít rovnou tvar trajektorie, tj. hledat závislost $r(\varphi)$.

Pro snadnější výpočet zavedeme funkci u proměnné φ předpisem

$$u(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)}. \quad (86)$$

Potom můžeme psát $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u(\varphi)}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u(\varphi(t))}\right) = -\frac{1}{u^2(\varphi(t))} \frac{du}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \dot{\varphi}$. Po dosazení

ze vztahu (84) dostaneme $\dot{r} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \frac{l}{mr^2} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \frac{lu^2}{m} = -\frac{l}{m} \frac{du}{d\varphi}$ a dosadíme do (85). S využitím (86) tedy

získáme $\frac{l^2}{m^2} \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2}{m} \left(E - \left(V(u) + \frac{l^2 u^2}{2m}\right)\right)$ a odtud již snadnou úpravou získáme

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{2m}{l^2} (E - V(u)). \quad (87)$$

Derivací obou stran rovnice (87) podle proměnné φ získáme $2 \frac{du}{d\varphi} \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + 2u \frac{du}{d\varphi} = -\frac{2m}{l^2} \frac{dV(u)}{du} \frac{du}{d\varphi}$. Bez

újmů na obecnosti lze tuto rovnici vydělit výrazem $2 \frac{du}{d\varphi}$, čímž získáme vztah

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = -\frac{m}{l^2} \frac{dV(u)}{du}, \quad (88)$$

což je tzv. **Binetův vzorec** pro trajektorie pohybujících se objektů v poli centrální síly.

S využitím dvou „triků“ (substituce (86) a derivace rovnice (87)) jsme získali důležitý vztah (88), který má význam nejen v (teoretické) mechanice, ale také např. i v atomové fyzice (viz odstavec 3.11).

3.9 Pohyb planet kolem Slunce aneb Keplerova úloha

3.9.1 Obecné odvození

Potenciální energie tělesa (např. planeta) o hmotnosti m , které se pohybuje kolem centrálního tělesa (např. Slunce) o hmotnosti M ve vzdálenosti r , je dána vztahem

$$V = -\frac{GMm}{r} = -\frac{\alpha}{r}, \quad (89)$$

kde G je gravitační konstanta.

Tvar trajektorie tělesa, které se pohybuje v poli centrální síly, získáme pomocí Binetova vztahu (88). S využitím substituce (86) můžeme psát $V = -\alpha u$ a tedy $\frac{dV}{du} = -\alpha$. Dosazením do (88) získáme rovnici pro neznámou $u(t)$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\alpha m}{l^2}, \quad (90)$$

kteřá má řešení ve tvaru $u = u_0 + u_p = C \cos \varphi + \frac{\alpha m}{l^2}$. S využitím substituce (86) tedy dostáváme

$$r = \frac{1}{C \cos \varphi + \frac{\alpha m}{l^2}} = \frac{\frac{l^2}{\alpha m}}{\frac{l^2 C}{\alpha m} \cos \varphi + 1}, \text{ což můžeme zapsat v zjednodušeném tvaru}$$

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad (91)$$

kde

$$p = \frac{l^2}{\alpha m} = \frac{l^2}{GMm^2}. \quad (92)$$

Je důležité si uvědomit, že r , u a φ jsou funkce závislé na čase.

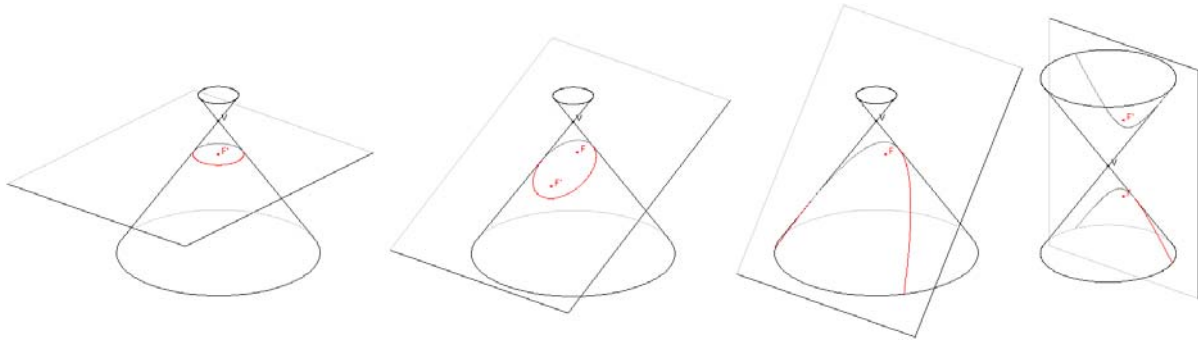
Konstantu ε určíme tak, že dosadíme řešení (91) s využitím substituce (86) do rovnice (87). Předtím vyjádříme $u = \frac{1 + \varepsilon \cos \varphi}{p}$ a $\frac{du}{d\varphi} = -\frac{\varepsilon \sin \varphi}{p}$. Po dosazení do (87) dostaneme

$$\frac{\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}{p^2} + \frac{1 + 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}{p^2} = \frac{2m}{l^2} \left(E + \alpha \frac{1 + \varepsilon \cos \varphi}{p} \right). \quad \text{Dále můžeme psát}$$

$$\varepsilon^2 + 1 + 2\varepsilon \cos \varphi = \frac{2mp^2}{l^2} E + \frac{2m\alpha p}{l^2} (1 + \varepsilon \cos \varphi) \quad \text{a s využitím vztahu (92) upravit na tvar}$$

$$\varepsilon^2 - 1 + 2(1 + \varepsilon \cos \varphi) = \frac{2mp^2}{l^2} E + 2(1 + \varepsilon \cos \varphi), \text{ odkud}$$

$$\varepsilon^2 - 1 = \frac{2mp^2}{l^2} E = \frac{2l^2}{\alpha^2 m} E = \frac{2l^2}{G^2 M^2 m^3} E. \quad (93)$$



obr. 36

Rovnice (91) spolu s podmínkami (92) a (93) vyjadřuje rovnici kuželosečky v polárních souřadnicích. Parametr p přitom určuje velikost kuželosečky, zatímco parametr ε , který se nazývá **numerická excentricita**, určuje celkovou mechanickou energii tělesa, která se díky platnosti zákona zachování mechanické energie zachovává. V závislosti na parametru ε lze přitom získat jednu ze čtyř kuželoseček (viz obr. 36):

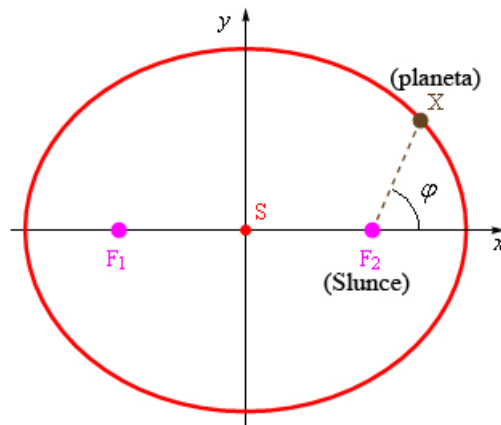
1. pro $\varepsilon = 0$ kružnici - což je křivka, po níž se pohybuje těleso s minimální energií, kterou je možné odvodit ze vztahu (93):

$$E_{\min} = -\frac{G^2 M^2 m^3}{2l^2}; \quad (94)$$

2. pro $\varepsilon \in (0; 1)$ elipsu, přičemž $\varphi = 0$ popisuje perihélium trajektorie daného tělesa a $\varphi = \pi$ odpovídá aféliu dané trajektorie (viz obr. 37). Energie, kterou má pohybující se těleso, je záporná.
3. pro $\varepsilon = 1$ parabolu, protože pro $\varphi = \pi$ se trajektorii otvírá. Energie tělesa je nulová.
4. pro $\varepsilon > 1$ hyperbolu, trajektorie se otvírá dříve než při $\varphi = \pi$ a těleso má kladnou energii.

Typ kuželosečky v závislosti na energii tělesa je detailně rozebrán pomocí efektivního potenciálu v odstavci 3.10.

Z obr. 36 je vidět, že kuželosečky lze získat i tak, jak vyplývá z jejich názvu: lze „seknout“ kužel rovinou, která má pro každou kuželosečku určitou speciální polohu.



obr. 37

Při odvozování obecného tvaru trajektorie jsme se mohli omezit na popis pomocí dvou souřadnic, neboť pohyb v poli centrální síly je vždy pohyb rovinný (viz odstavce 3.6). Navíc popis pomocí Lagrangeových rovnic vede na dva integrály pohybu (viz odstavce 3.7) - v našem konkrétním případě se zachovává moment hybnosti l a celková mechanická energie E .

Na základě obecného odvození a na základě geometrického významu řešení (91) lze nyní formulovat Keplerovy zákony, které popisují pohyb planet ve Sluneční soustavě.

Autorem Keplerových zákonů je německý matematik Johannes Kepler (1571 - 1630). Odvodil je na základě pozorování, která prováděl dánský astronom Tycho Brahe. První a druhý Keplerův zákon byly publikovány v *Astronomia nova* (*Nová astronomie*) vydané v roce 1609 v Praze, třetí Keplerův zákon pak v roce 1619 v Linci v díle *Harmoniae mundi* (*Harmonie světa*).

3.9.2 První Keplerův zákon

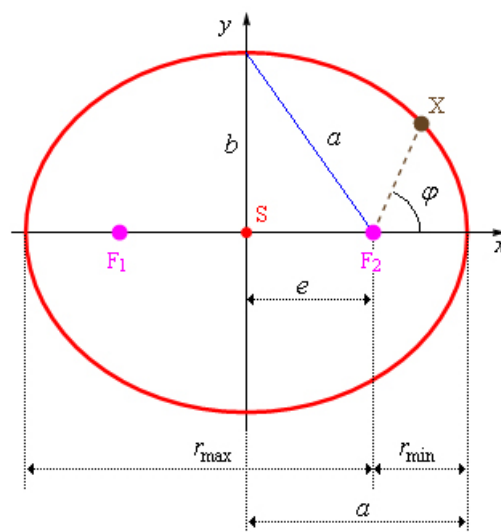
PLANETY OBÍHAJÍ KOLEM SLUNCE PO ELIPSÁCH, V JEJICHŽ SPOLEČNÉM OHNISKU JE SLUNCE.

Na základě obr. 38 a Pythagorovy věty lze pro délku hlavní poloosy a elipsy a délku vedlejší poloosy b elipsy psát

$$b^2 + e^2 = a^2, \quad (95)$$

kde e je excentricita definovaná vztahem

$$e = \varepsilon a. \quad (96)$$



obr. 38

S využitím vztahů (95) a (96) můžeme psát

$$b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}. \quad (97)$$

Na základě obr. 38 lze také určit minimální vzdálenost r_{\min} planety od Slunce ve tvaru, který lze též vyjádřit s využitím vztahu (96)

$$r_{\min} = a - e = a(1 - \varepsilon). \quad (98)$$

S využitím řešení (91) a geometrického rozboru situace (viz odstavec 3.9.1) lze psát

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + \varepsilon}. \quad (99)$$

Srovnáním vztahů (98) a (99) dostaneme

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} \quad (100)$$

a po dosazení ze vztahů (92) a (93) máme $a = \frac{l^2}{GMm^2}$. Po úpravě tedy vychází

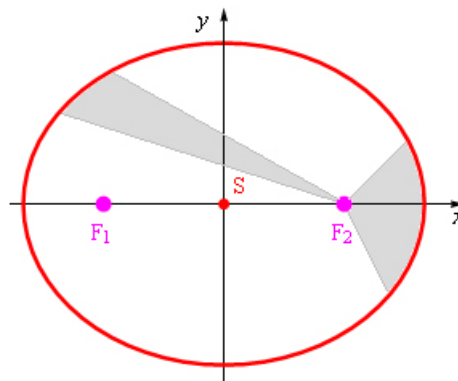
$$a = \frac{GMm}{2|E|}, \quad (101)$$

což je délka hlavní poloosy elipsy, po níž se pohybuje planeta s energií E .

Trajektorie, po kterých se pohybují planety ve Sluneční soustavě, jsou uzavřené, což plyne z tvaru Newtonovského potenciálu (89). Podle tzv. Bertrandova teorému existují pouze dva typy potenciálu, které vedou na uzavřené trajektorie: Newtonovský potenciál ve tvaru (89) a potenciál, který je úměrný r^2 .

3.9.3 Druhý Keplerův zákon

SPOJNICE SLUNCE A PLANETY (TZV. PRŮVODIČ) OPISUJE ZA STEJNÉ ČASOVÉ INTERVALY STEJNÉ PLOCHY (VIZ OBR. 39).



obr. 39

Tento zákon je vlastně geometrickým důsledkem zákona zachování momentu hybnosti, který je definován vztahem (82).

Vztah (82) je jedním z integrálů pohybu (viz odstavec 3.7), neboť souřadnice φ vystupující v lagrangiánu (74) je cyklická souřadnice (viz odstavec 3.7).

Přírůstek plochy elipsy dS , kterou opíše průvodič planety při jejím pohybu, změní-li planeta svoji polohu o úhel $d\varphi$, je $dS = \frac{1}{2}r^2 d\varphi$. Plošná rychlost je tedy pak definována vztahem

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \dot{\varphi}. \quad (102)$$

S využitím vztahu (82) lze tedy psát

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{l}{mr^2} = \frac{l}{2m}, \quad (103)$$

což je výraz, který nabývá konstantní hodnoty. Moment hybnosti l se totiž zachovává a m je hmotnost planety obíhající kolem Slunce. A ta se také nemění.

3.9.4 Třetí Keplerův zákon

PRO VŠECHNY PLANETY SLUNEČNÍ PLANETY PLATÍ $\frac{T^2}{a^3} = konst.$, PŘIČEMŽ T JE PERIODA OBĚHU PLANETY KOLEM SLUNCE A a JE DÉLKA HLAVNÍ POLOOSY JEJÍ TRAJEKTORIE.

Druhý Keplerův zákon lze matematicky psát ve tvaru (103), odkud dostáváme $S = \int_0^T \frac{l}{2m} dt = \frac{l}{2m} T$.

Plocha elipsy je dána vztahem $S = \pi ab$, kde a resp. b je délka hlavní poloosy elipsy resp. vedlejší poloosy elipsy, která je trajektorií pohybu planety kolem Slunce. Podle vztahu (97) lze psát $S = \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}$. Dostáváme

tedy $\pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \frac{l}{2m} T$, odkud $T^2 = \frac{4\pi^2 m^2 a^4}{l^2} (1 - \varepsilon^2) = \frac{4\pi^2 m^2 a^3}{l^2} a (1 - \varepsilon^2)$. S využitím vztahu (100)

dostáváme $T^2 = \frac{4\pi^2 m^2 a^3}{l^2} p$ a na základě vztahu (92) máme $T^2 = \frac{4\pi^2 m^2 a^3}{l^2} \frac{l^2}{GMm^2} = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$. Odtud již plyne

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}. \quad (104)$$

Poměr druhé mocniny oběžné doby planety a třetí mocniny hlavní poloosy její trajektorie je tedy konstantní a je dán pouze hmotností Slunce, kolem něhož planeta obíhá (π a G jsou univerzální konstanty).

3.10 Metoda efektivního potenciálu

V odstavci 3.9 byl odvozen přesný tvar trajektorie tělesa, které se pohybuje v centrálním poli Slunce, a Keplerovy zákony, který tento pohyb popisují. Odvození bylo provedeno na základě potenciální energie zapsané ve speciálním tvaru (89), který vyplývá z Newtonovské mechaniky (z Newtonova gravitačního zákona). Tento vztah pro výpočet potenciální energie je natolik jednoduchý, že umožňuje analyticky vyjádřit trajektorie, po níž se těleso pohybuje. V případě složitějšího vyjádření potenciální energie (např. potenciální energie vyplývající z obecné teorie relativity) není analytické řešení jednoduché. A přitom často stačí kvalitativní předpověď pohybu těles.

To znamená, že stačí určit obecně např. tvar trajektorie, po níž se těleso pohybuje bez nutnosti znát její přesné parametry (např. stačí určit, že jde o elipsu, aniž bychom specifikovali polohu ohnisek, délky poloos, ...).

Pro další úvahy je dobré, zavést tzv. **efektivní potenciál** $V_{\text{ef}}(r)$ na základě vztahu (85) ve tvaru

$$V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}. \quad (105)$$

Ze vztahu (85) jsme tedy za efektivní potenciál označili vnitřní závorku.

Člen $\frac{l^2}{2mr^2}$ je úměrný druhé mocnině velikosti obvodové rychlosti $r^2 \dot{\varphi}^2$ (na základě úvah o obvodové rychlosti byl vztah (85) sestaven), a proto se nazývá odstředivý člen. Pokud se totiž těleso přibližuje k centru, kolem kterého se pohybuje, roste velikost rychlosti pohybu tohoto tělesa a tedy roste i velikost odstředivé síly, která na těleso působí. A právě pomocí členu $\frac{l^2}{2mr^2}$ jsou tyto efekty do potenciální energie započítávány.

Na základě označení (105) lze vztah (85) psát ve tvaru

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} (E - V_{\text{ef}}(r)), \quad (106)$$

z něhož lze určit podmínky, za kterých se může pohyb tělesa vůbec uskutečnit. Levá strana rovnice (106) je zapsána jako druhá mocnina jisté funkce (časová derivace polohy tělesa); levá strana rovnice je tedy nezáporný výraz. To znamená, že nezáporný výraz musí být i na pravé straně rovnice. Musí tedy platit

$$E \geq V_{\text{ef}}(r). \quad (107)$$

Tato podmínka tedy určuje omezení na přípustný interval radiálních vzdáleností r od centrálního tělesa uvažovaného centrálního pole. A tuto podmínku lze přitom najít velmi jednoduše v grafickém vyjádření závislosti potenciální energie na vzdálenosti r (viz obr. 40).

Z podmínky (107) lze určit interval přípustných radiálních vzdáleností r proto, že potenciální energie závisí právě jen na radiální vzdálenosti. Takže určením přípustných hodnot potenciální energie máme vlastně již určeny přípustné radiální vzdálenosti.

Metodu efektivního potenciálu lze použít v případě libovolného průběhu závislosti efektivního potenciálu na vzdálenosti od centra daného centrálního pole. Ukážeme dva případy:

1. Newtonovský efektivní potenciál (viz odstavce 3.10.1);
2. relativistický efektivní potenciál (viz odstavce 3.10.2).

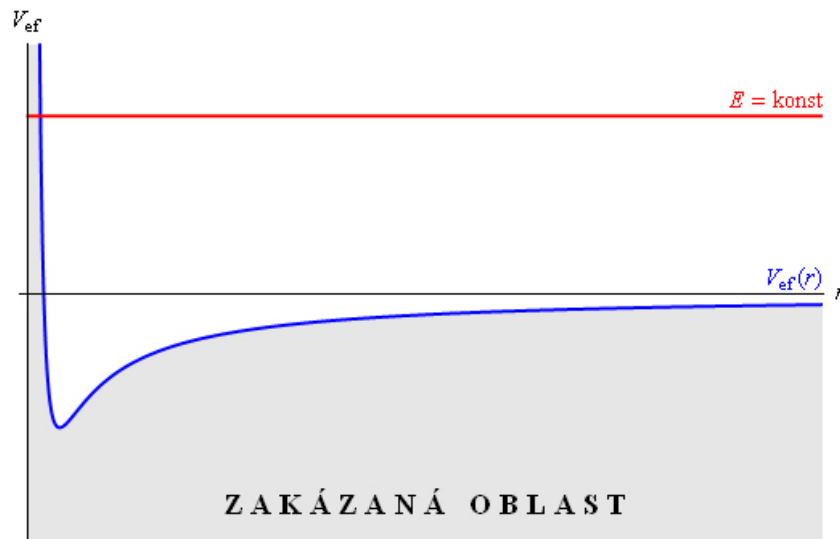
3.10.1 Newtonovský efektivní potenciál

Nejjednodušší je vyšetřování Newtonovského efektivního potenciálu.

Na obr. 40 je zobrazen průběh Newtonovského efektivního potenciálu popsaného vztahem

$$V_{\text{ef}}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{l^2}{2mr^2} \quad (108)$$

a celkové mechanické energie E , kterou má těleso pohybující se kolem centra daného centrálního pole. Na základě podmínky (107) je zřejmé, že přípustné hodnoty potenciální energie pohybujícího se tělesa leží vždy buď na přímce konstantní celkové mechanické energie nebo pod ní. Z obrázku je též zřejmé, že existuje minimum efektivního potenciálu (108).



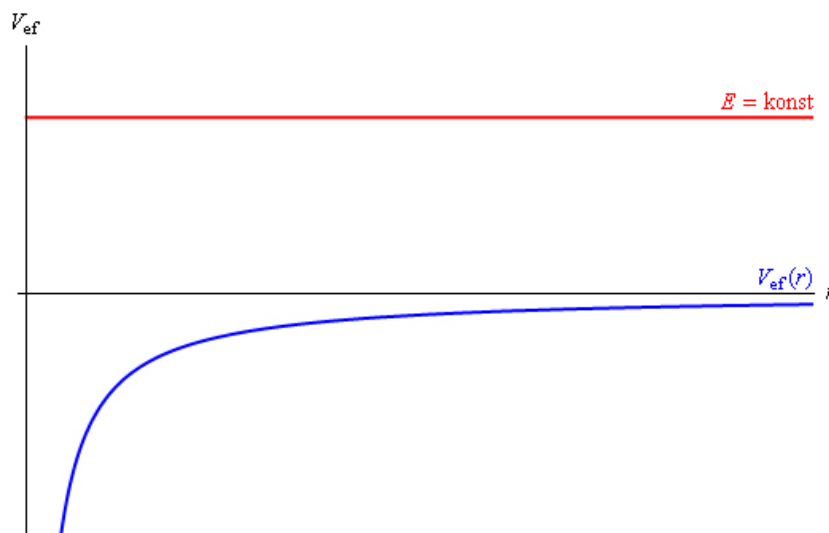
obr. 40

Newtonovský efektivní potenciál zapsaný ve tvaru (108) má pro malá r (malé vzdálenosti od centra uvažovaného centrálního pole) průběh odpovídající funkci $f(r) = \frac{1}{r^2}$ a pro velká r průběh odpovídající funkci $g(r) = -\frac{1}{r}$. Proto existuje minimum efektivního potenciálu.

Pro malá r je ve vztahu (108) dominantním členem člen úměrný $\frac{1}{r^2}$, protože člen úměrný $-\frac{1}{r}$ je zanedbatelný ($\frac{1}{r^2}$ pro malá r roste rychleji než $-\frac{1}{r}$). Pro velká r je tomu naopak: $\frac{1}{r^2}$ klesá velmi rychle a tedy se uplatní (tj. ve vztahu „zbude“) pouze člen $-\frac{1}{r}$.

V grafu na obr. 40 je zobrazena i tzv. zakázaná oblast, v níž se pohybující těleso nemůže nikdy nacházet. To ovšem znamená, že těleso, které se pohybuje kolem centra pole umístěného v bodě $[0; 0]$ grafu, do tohoto centra nikdy nemůže spadnout. Ovšem pouze za předpokladu, že:

1. uvažujeme pouze bodové částice - kdybychom uvažovali např. pohyb kolem Slunce, pak by zakázaný pás byl ve směru osy r posunut o takovou vzdálenost, která odpovídá poloměru Slunce.
2. neuvažujeme radiální pohyby - tj. předpokládáme pouze oběžný pohyb kolem centra pole.



obr. 41

Radiální pohyb je popsán efektivním potenciálem $V_{\text{ef}}(r) = -\frac{GMm}{r}$ (moment hybnosti je nulový) a závislost efektivního potenciálu na vzdálenosti je zobrazena na obr. 41.

Na základě grafu závislosti efektivního potenciálu na vzdálenosti lze klasifikovat pohyby. Nedostaneme sice přesné tvary rovnic popisující trajektorii pohybujícího se objektu, získáme ovšem velmi rychle dobrou kvalitativní předpověď studovaného pohybu. Podle obr. 42 lze tedy popsat pohyb tělesa v centrálním poli v závislosti na hodnotě celkové mechanické energie:

1. $E > 0$ - těleso se pohybuje po hyperbole a bod A_1 odpovídá periheliu jeho trajektorie;
2. $E = 0$ - těleso se pohybuje po parabole a bod A_2 odpovídá periheliu jeho trajektorie;

Tyto dva případy popisují např. trajektorie komet. Ty přiletí do grafu na obr. 42 zprava (z velkých vzdáleností od Slunce), proletí perihéliem a opět se vrací do velkých vzdáleností.

3. $E < 0$ - těleso se pohybuje po elipse, přičemž bod A_3 odpovídá periheliu a bod A_3' aféliu jeho trajektorie;

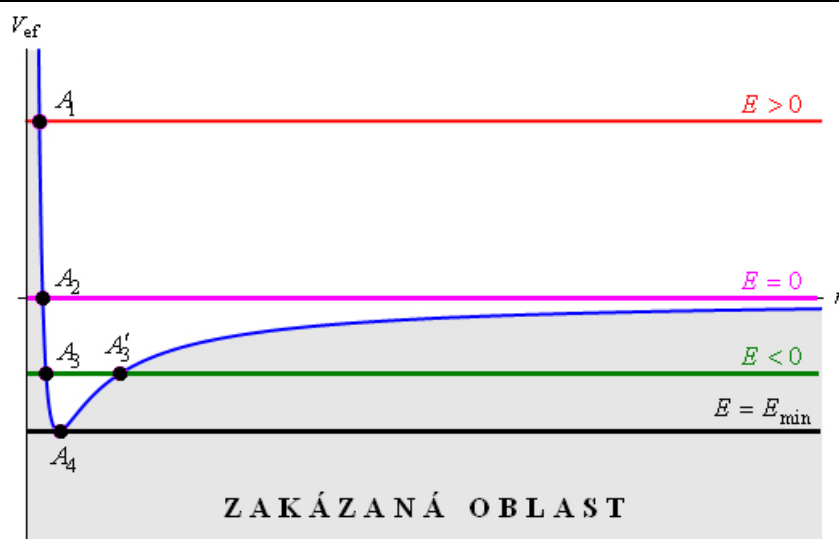
Perihélium A_3 je ke Slunci blíže než afélium A_3' .

4. $E = E_{\text{min}}$ - těleso má nejmenší možnou zápornou celkovou mechanickou energii (viz vztah (94)) a pohybuje se po kružnici o poloměru, který je dán souřadnicí r bodu A_4 .

Těleso má tedy během svého pohybu konstantní vzdálenost od centra daného pole - tj. např. od Slunce.

Body A_1 , A_2 , A_3 , A_3' a A_4 se nazývají **body obratu** a platí pro ně $\dot{r} = 0$.

V bodech obratu se tedy nemění v závislosti na čase radiální vzdálenost pohybujícího se tělesa od centra pole. V těchto bodech tak skutečně nastává „obrat“ pohybu tělesa: vzdalování se začíná měnit na přibližování (v aféliu) nebo přibližování se mění na vzdalování (v periheliu).



obr. 42

3.10.2 Efektivní potenciál obecné teorie relativity

Metoda efektivního potenciálu a způsob získání kvalitativních předpovědí o trajektorii těles pohybujících se v centrálním poli kolem centra tohoto pole byly popsány v odstavci 3.10.1 na příkladu Newtonovského efektivního potenciálu zapsaného ve tvaru (108). Efektivní potenciál, který popisuje pohyb tělesa v rámci obecné teorie relativity je podobný, ale přesto jsou při interpretaci grafického zobrazení jisté rozdíly.

Závislost efektivního potenciálu vypočteného v rámci teorie relativity na vzdálenosti je zobrazena na obr. 43. Nebudeme uvádět vztah, pomocí kterého se efektivní potenciál počítá, ale upozorníme na rozdíly oproti Newtonovskému potenciálu. Základním rozdílem je skutečnost, že v rámci teorie relativity může těleso, které se pohybuje v gravitačním poli jiného tělesa, spadnout do singularity.

V Newtonovském potenciálu bylo Slunce (centrum pole) chráněno před případným pádem obíhajícího tělesa v zakázané oblasti. Za předpokladu, že se těleso nebude pohybovat radiálně (tj. po spojnici těleso - Slunce), nikdy by nemohlo do Slunce spadnout. V obecné teorii relativity to možné je - singularita není chráněna zakázanou oblastí.

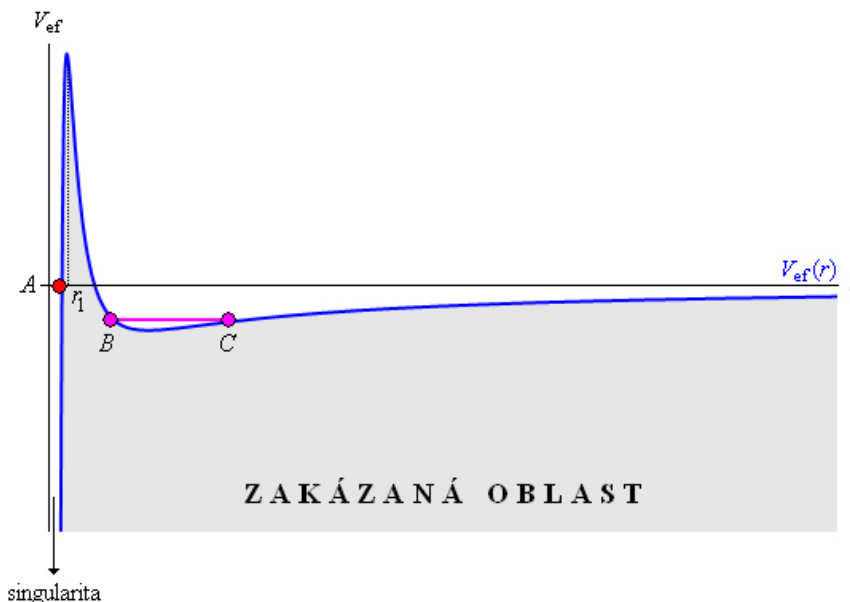
Bod A na obr. 43 odpovídá tzv. Schwarzschildovu poloměru černé díry (tzv. horizont událostí). Dostane-li se těleso k singularitě (např. černá díra) do vzdálenosti menší než je tento poloměr, bude zničeno, protože není možné se z této oblasti dostat zpět. Ve vzdálenosti r_1 od singularity nabývá efektivní potenciál svého lokálního

maxima. Tato hodnota efektivního potenciálu (resp. tato vzdálenost) odpovídá nestabilní orbitě. Těleso, které se v této vzdálenosti nachází, se může pohybovat po kružnici a nebo může spadnout do singularity.

Těleso se tedy nachází v labilní rovnovážné poloze a buď spadne do singularity a nebo se zachrání a „sklouzne do údolí grafu“ vpravo od kritické vzdálenosti r_1 .

Úsečka BC odpovídá kvazielipse, po níž se těleso pohybuje. Tato trajektorie se stále stáčí a není uzavřená, má ale podobné vlastnosti jako elipsa.

Pokud má pohybující se těleso větší energii, než je hodnota efektivního potenciálu ve vzdálenosti r_1 od centra gravitačního pole, padá těleso do singularity, která se v centru pole nachází.



obr. 43

3.11 Rozptyl nabitých částic

Dalším případem pohybu v centrálním poli je pohyb částice o hmotnosti m a s nábojem Q_2 v elektrostatickém poli buzeném částicí s nábojem Q_1 o hmotnosti M . Bez újmy na obecnosti budeme uvažovat dvě kladně nabitě částice, z nichž ta s nábojem Q_1 má výrazně vyšší hmotnost ve srovnání s částicí s nábojem Q_2 , tj.

$$M \gg m. \quad (109)$$

Tato podmínka umožní řešit úlohu tak, že budeme uvažovat částici s nábojem Q_2 , která bude přilétat z velké vzdálenosti k částici s nábojem Q_1 , která je v klidu.

Vzhledem k podmínce (109), lze považovat částici s nábojem Q_1 za nehybnou. Na obě částice sice působí stejně velká elektrostatická síla, ale vlivem své větší hmotnosti má částice s nábojem Q_1 ve srovnání s druhou částicí zanedbatelné zrychlení. Proto jí lze považovat za nehybnou. V praxi to znamená, že např. na jádro zlata bude nalétávat jádro helia. Tento experiment na začátku 20. století prováděl Rutherford.

Potenciální energie vyplývající z Coulombova zákona má tvar

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (110)$$

který je formálně podobný Newtonovské potenciální energii v gravitačním poli (viz vztah (89)) a ve kterém

$$\alpha = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0}. \quad (111)$$

Coulombická potenciální energie je ovšem kladná, neboť interakce mezi dvěma kladně nabitými částicemi je odpuzivá (na rozdíl od přitažlivé gravitační síly působící mezi tělesem obíhajícím kolem centra gravitačního silového pole a tímto centrem).

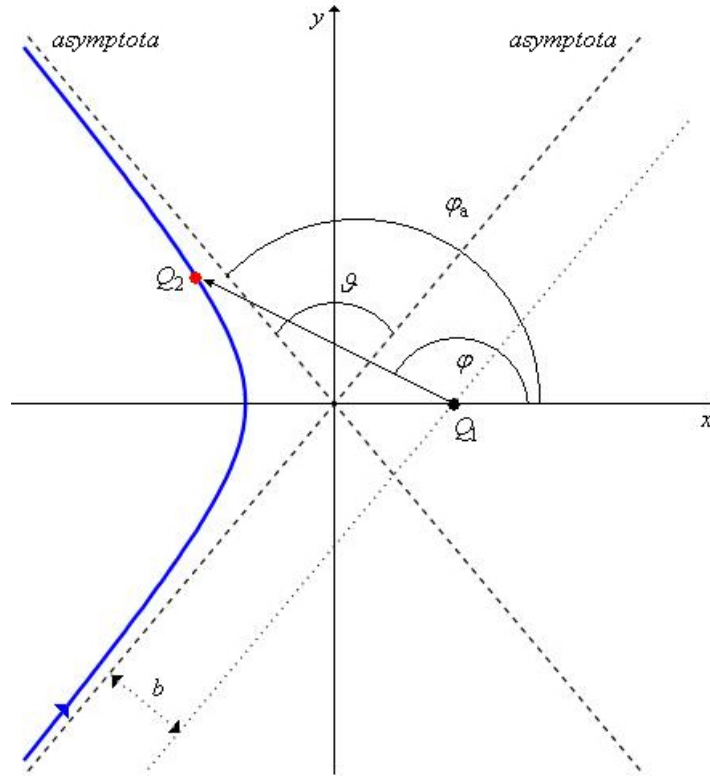
Energie částice s nábojem Q_2 je kladná, ale trajektorie, po níž se bude v silovém poli částice s nábojem Q_1 pohybovat, bude splňovat vztah (91). Částice s nábojem Q_2 se tedy pohybuje po kuželosečce. Vzhledem ke kladné energii částice je touto kuželosečkou hyperbola. Pro popis trajektorie bude důležitý **úhel odklonu** \mathcal{G} částice s nábojem Q_2 v poli částice s nábojem Q_1 (viz obr. 44). To znamená, že nás zajímá směr vstupní asymptoty a výstupní asymptoty hyperboly, po níž se částice pohybuje. Vzhledem k tomu, že částice s nábojem Q_2 přilétá z velké vzdálenosti a po odchýlení své trajektorie zase odlétá do velké vzdálenosti, můžeme asymptoty charakterizovat podmínkou $r \rightarrow \infty$. Ze vztahu (91) pak vyplývá

$$\cos \varphi = -\frac{1}{\varepsilon}, \quad (112)$$

kde φ je úhel určující polohu pohybující se částice s nábojem Q_2 (viz obr. 44). Úhel odklonu \mathcal{G} je dán vztahem

$$\varphi_a = \frac{\pi}{2} + \frac{\mathcal{G}}{2}, \quad (113)$$

kde φ_a je směrový úhel výstupní asymptoty.



obr. 44

S využitím vztahů (113) a (112) můžeme psát

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\mathcal{G}}{2} &= \operatorname{tg} \left(\varphi_a - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\cos \varphi_a}{\sin \varphi_a} = -\frac{\cos \varphi_a}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_a}} = \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}. \text{ Po dosazení ze vztahu (93) dostáváme} \\ \operatorname{tg} \frac{\mathcal{G}}{2} &= \sqrt{\frac{\alpha^2 m}{2l^2 E}}. \end{aligned} \quad (114)$$

Nyní je nutné vyjádřit celkovou energii E částice s nábojem Q_2 a její moment hybnosti l . Tyto zachovávající se fyzikální veličiny stačí určit v místech trajektorie, v nichž jsou snadno určitelné.

Celková energie E částice i moment hybnosti l jsou v centrálním silovém poli integrály pohybu (viz odstavec 3.7), proto platí jejich zákony zachování.

Částice s nábojem Q_2 přilétá z velké vzdálenosti s počáteční rychlostí o velikosti v_∞ . Pro vzdálenost $r \rightarrow \infty$ je potenciální energie V částice (na základě (110)) nulová. Takže celková energie E je rovna kinetické energii částice, tedy

$$E = T = \frac{1}{2} m v_\infty^2 = \text{konst.} \quad (115)$$

Analogicky získáme i moment hybnosti částice ve vzdálenosti $r \rightarrow \infty$:

$$l = m v_\infty b, \quad (116)$$

kde b je tzv. **záměrná vzdálenost (impaktní parametr)** určující vzdálenost vstupní asymptoty od částice s nábojem Q_1 (která je v klidu).

Dosazením ze vztahů (111), (115) a (116) do vztahu (114) postupně získáme

$$\operatorname{tg} \frac{\mathcal{G}}{2} = \frac{|\alpha|}{l} \sqrt{\frac{m}{2 \frac{1}{2} m v_\infty^2}} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{m v_\infty b v_\infty}, \text{ takže}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 m v_\infty^2 b}. \quad (117)$$

Fakt, že uvedený vztah je kvalitativně správný v závislosti na záměrné vzdálenosti b , lze ověřit na dvou význačných hodnotách vzdálenosti b :

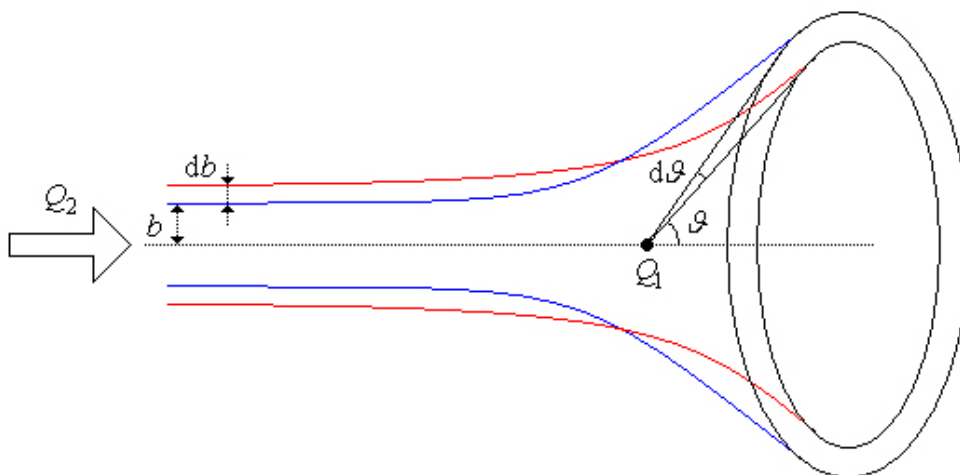
1. pro $b \rightarrow \infty$ (tj. částice nalétává na stojící částici ve velké vzdálenosti) je $\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = 0$ a tedy $\vartheta = 0$ (pohybující se částice není částici v klidu ovlivněna);
2. pro $b \rightarrow 0$ (tj. částice nalétává přímo na stojící částici) je $\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \rightarrow \infty$ a tedy $\vartheta = \pi$ (pohybující se částice se od částice nabitě nábojem stejného znaménka, která je v klidu, odráží zpět do směru, odkud přiletěla).

Ve skutečnosti, pokud se provádějí tyto experimenty, nalétává velké množství částic najednou na větší množství center a zkoumá se vzájemná interakce všech nalétávajících částic s centry. Nalétávající částice mají různé hodnoty záměrné vzdálenosti b a proto je rozumné zkoumat závislost záměrné vzdálenosti na úhlu, do kterého se tyto částice rozptýlí. Jsou-li záměrné vzdálenosti N nalétávajících částic v intervalu $(b; b+db)$, rozptýlí se dN těchto částic do úhlu $(\vartheta; \vartheta+d\vartheta)$ (viz obr. 45). Je-li plošná hustota center n , můžeme definovat účinný průřez $d\sigma$ vztahem

$$d\sigma = \frac{dN}{nN}; \quad (118)$$

přítom $[d\sigma] = \text{m}^2$.

Účinný průřez udává plochu, jakou si navzájem nastavují nalétávající částice a centra, která jsou v klidu. Účinný průřez lze vysvětlit i na příkladu člověka, na kterého je veden útok míčem. Stojící člověk má větší plochu a tedy i větší pravděpodobnost zásahu míčem (tj. má větší účinný průřez). Stočí-li se do „klubíčka“, jeho plocha, kterou nastavuje letícímu míči, se zmenší a tedy se zmenší i jeho účinný průřez.



obr. 45

Letící částice, které se rozptýlí do úhlu $(\vartheta; \vartheta+d\vartheta)$, nalétávají z mezikruží, jehož účinný průřez je

$$d\sigma = 2\pi b db. \quad (119)$$

Účinný průřez má význam plochy - proto je účinný průřez v tomto případě roven ploše mezikruží.

Plocha mezikruží ohraničená kružnicemi s poloměry r a $r+dr$ je $dS = S_1 - S_2$. Po dosazení tedy máme $dS = \pi(r+dr)^2 - \pi r^2 = \pi(r^2 + 2r.dr + (dr)^2 - r^2) \doteq 2\pi r.dr$ pro $dr \rightarrow 0$.

Ze vztahu (117) můžeme vyjádřit $b = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 m v_\infty^2} \cotg \frac{\vartheta}{2}$ a dosadit do vztahu (119). K tomu je ještě nutné vyjádřit diferenciál $db = \frac{1}{2} \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 m v_\infty^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta$. Po dosazení tedy máme

$$d\sigma = 2\pi \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 m v_\infty^2} \cotg \frac{\vartheta}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 m v_\infty^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta, \text{ takže dostáváme}$$

$$d\sigma = \pi \left(\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 m v_\infty^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{\sin^3 \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta.$$

Vztah (120) je **Rutherfordův vztah pro rozptyl** kladných částic na kladných centrech. Zkoumání tohoto rozptylu se stalo významným na počátku 20. století, kdy bylo na základě podobných experimentů objeveno jádro atomu. V roce 1911 se o to zasloužil Ernst Rutherford a jeho kolegové. Tím byla odstartována další část vývoje fyziky. V současné době se tyto rozptylové experimenty provádějí i na urychlovačích částic, neboť s rostoucí energií, kterou pohybující se částice má, roste velikost její rychlosti. Po vzájemných srážkách takto urychlených částic lze studovat hmotu do větších detailů.

Dodáním větší energie stojící částici se tato částice rozletí na více menších částic a tyto menší částice je možné dále studovat.

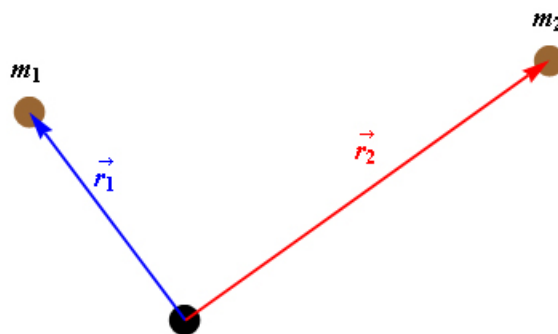
Při pečlivé analýze uvedeného experimentu je nutné vzít do úvahy, že se ve skutečnosti pohybují obě částice - jak ta, která nalétává, tak i centrum, na které druhá částice nalétává. Pokud ovšem platí podmínka (109), lze úlohu studovat výše uvedeným postupem.

Pokud podmínka (109) nebude splněna, je nutné situaci popisovat analogicky jako se popisuje problém dvou těles (viz odstavec 3.12).

3.12 Problém dvou těles

Uvažujme nyní pohyb dvou těles o srovnatelných hmotnostech m_1 a m_2 , jejichž polohy jsou popsány polohovými vektory \vec{r}_1 a \vec{r}_2 (viz obr. 46).

Takovými tělesy může být např. dvojice Země - Měsíc, Pluto - Cháron, dvojhvězda, ...



obr. 46

Systém má celkem 6 stupňů volnosti (na každé těleso připadají 3 stupně volnosti) a budeme uvažovat pouze vzájemné silové působení (nebudeme tedy započítávat např. vliv centra uvažovaného centrálního pole).

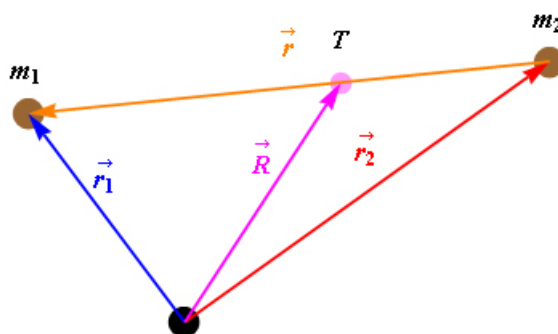
Tři stupně volnosti připadající na každé těleso odpovídají tomu, že každé z těles se může pohybovat ve třech navzájem nezávislých směrech.

Můžeme tedy napsat lagrangián této situace ve tvaru

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^2 + \frac{Gm_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \quad (121)$$

Tento tvar lagrangiánu ale není příliš vhodný pro další výpočty - zobecněné souřadnice \vec{r}_1 a \vec{r}_2 nejsou zvoleny nejlépe. Lepší volba by byla zvolit relativní souřadnice \vec{R} a \vec{r} , kde \vec{R} je poloha těžiště systému uvažovaných těles a \vec{r} je relativní poloha těles vůči sobě (viz obr. 47). Převodní vztahy tedy jsou

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{a} \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2. \quad (122)$$



obr. 47

Na základě vztahů (122) (tj. řešením soustavy rovnic pro neznámé \vec{r}_1 a \vec{r}_2) získáme:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \text{a} \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (123)$$

Dosazením rovnic (123) do lagrangiánu ve tvaru (121) dostaneme lagrangián ve tvaru

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}^2 + \frac{G m_1 m_2}{r}, \quad (124)$$

který nezávisí na zobecněné souřadnici R . To ovšem znamená, že

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}} = (m_1 + m_2) \dot{\vec{R}} = \text{konst.} \quad (125)$$

je integrál pohybu (viz odstavec 3.7). Konkrétně vztah (125) je vyjádřením zákona zachování hybnosti. Jestliže se ovšem zachovává hybnost, nepůsobí na uvažovanou soustavu těles okolní tělesa silou a soustava sama se pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem. Proto se rovnoměrně přímočaře pohybuje i těžiště T soustavy uvažovaných těles. Bez újmy na obecnosti tedy můžeme vyšetřovat pohyb těles o hmotnostech m_1 a m_2 v těžišťové soustavě. To ovšem znamená, že $\vec{R} = \vec{o}$.

V těžišťové soustavě se totiž těžiště nepohybuje.

Skutečnost, že si můžeme zvolit libovolnou vztažnou soustavu, v níž budeme pohyb vyšetřovat, vyplývá z relativnosti pohybu a Galileiho transformace mezi dvěma soustavami souřadnic.

Vyjádření (123) původních vektorů \vec{r}_1 a \vec{r}_2 v závislosti na nově zvolených zobecněných souřadnicích \vec{R} a \vec{r} se tedy zjednoduší:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \text{a} \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (126)$$

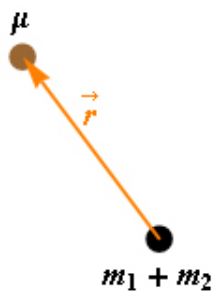
Tím se podařila redukce původní úlohy na úlohu jednodušší, jejíž lagrangián bude mít tvar

$$L = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + \frac{G m_1 m_2}{r}, \quad (127)$$

kde

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (128)$$

je tzv. **redukováná hmotnost**. Tím jsme získali úlohu, která je analogická jako Keplerova úloha (viz odstavec 3.9): jedná se o pohyb tělesa s hmotností μ v centrálním silovém poli tělesa o hmotnosti $m_1 + m_2$ (viz obr. 48). Platí tedy i závěry vyplývající z řešení Keplerovy úlohy (tj. např. Keplerovy zákony - viz odstavce 3.9.2 až 3.9.4), ale je nutné vše přeformulovat pomocí nových proměnných, pomocí nových hmotností μ a $m_1 + m_2$.



obr. 48

Skutečnost, že máme dvě tělesa o hmotnostech μ a $m_1 + m_2$, vyplývá z lagrangiánu zapsaného ve tvaru (127), do jehož druhého členu můžeme též dosadit ze vztahu (128). Dostaneme tak

$$L = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + \frac{G \mu (m_1 + m_2)}{r}. \quad (129)$$

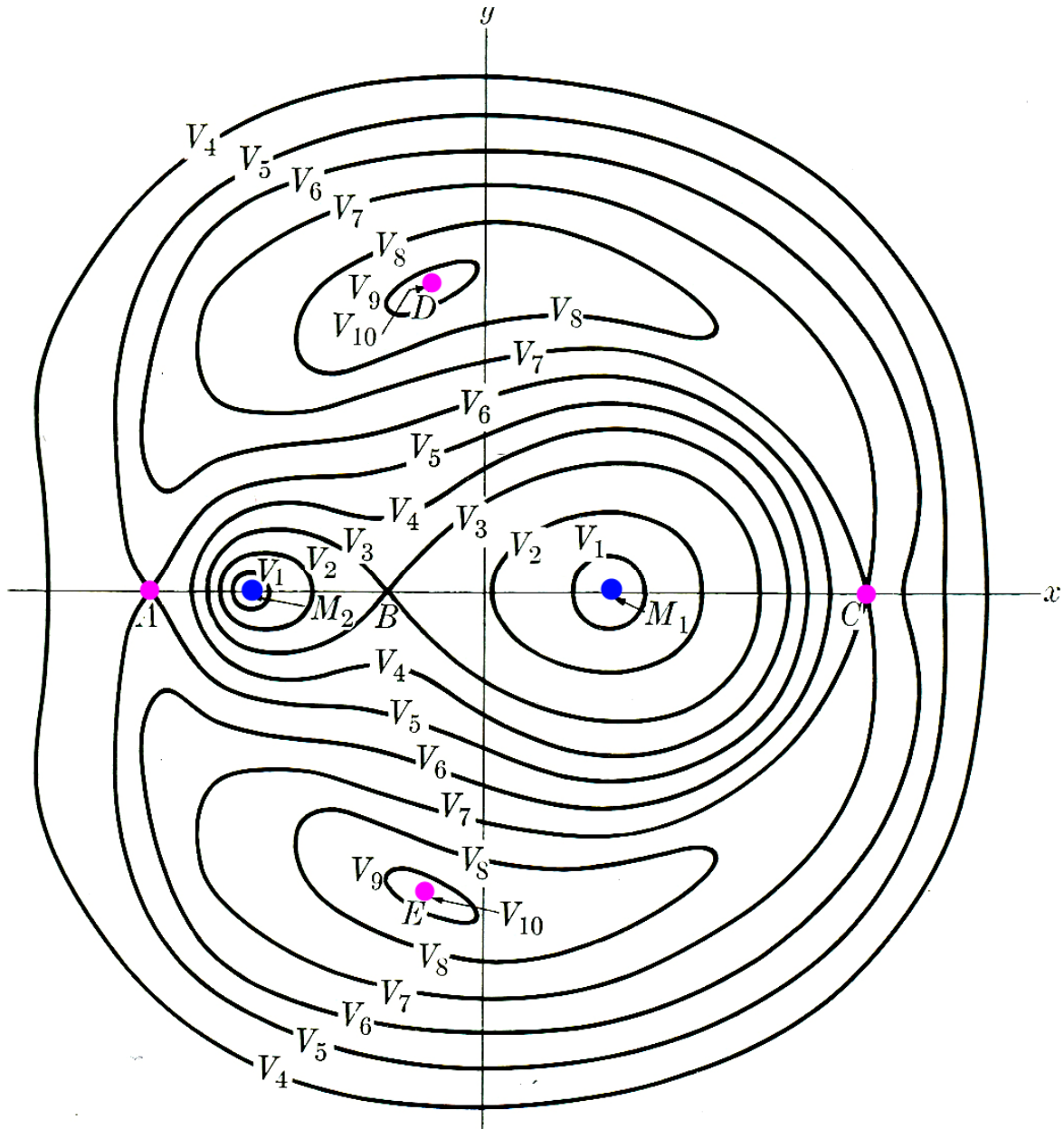
3.13 Problém tří těles

Problém tří těles, která na sebe navzájem silově působí, je analyticky neřešitelný. Přitom z hlediska matematiky a teorie diferenciálních rovnic je řešení příslušných rovnic zaručeno a je jednoznačné. Příčiny nemožnosti nalezení analytického řešení spočívají zejména:

1. ve složitosti řešení - pro daný systém rovnic není k dispozici dostatečný počet integrálů pohybu, které by řešení zjednodušily (viz odstavec 3.7);

2. ve velmi citlivé závislosti na počátečních podmínkách - to vede ke vzniku chaotického chování systému. Toto chování je sice předvídatelné, ale po relativně krátkém čase učiněné předpovědi neodpovídají chování systému - v systému vzniká deterministický chaos.

Citlivá závislost na počátečních podmínkách provází řadu vědních oborů - meteorologii, jadernou fyziku (neexistence termojaderných elektráren vyplývá právě z chaotického chování termojaderné reakce, což je pro stavbu elektrárny nepřijatelné), ...



obr. 49

Na obr. 49 je zobrazena počítačová simulace průběhu potenciální energie pro tři pohybující se objekty. V bodech M_1 a M_2 jsou umístěna dvě ze tří těles, která mají ve srovnání s třetím tělesem větší hmotnost, a třetí se pohybuje v poli, jehož potenciální energie je zobrazena na obrázku.

Může to tedy být případ např. soustavy Země - Měsíc, v níž obíhá družice.

Obrázek je nutno chápat trojrozměrně, neboť pohyb tří těles již není omezen na rovinu. V bodě B je tzv. sedlový bod a v bodech M_1 a M_2 má potenciální energie minimum.

To znamená, že pokud půjdeme z bodu B ve směru kladné části osy y , půjdeme do kopce, v opačném směru půjdeme také do kopce. Půjdeme-li ovšem směrem k bodu M_1 nebo M_2 , půjdeme z kopce.

V bodech A , C , D a E jsou tzv. **librační body**, tj. body, v nichž jsou navzájem vykompenzovány gravitační síly a odstředivé síly. Pro správnou představu popisovaného pohybu je nutné si uvědomit, že soustava zobrazená na obr. 49 rotuje kolem počátku soustavy souřadnic, což znamená, že třetí těleso (těleso s nejmenší hmotností) se pohybuje v neinerciální soustavě. V této soustavě na toto těleso působí setrvačné síly (odstředivá síla, Coriolisova síla) a přesto poloha libračních bodů je stabilní.

Ani v tomto, poměrně speciálním případě, nejsou soustavy rovnic popisující daný pohyb analyticky řešitelné.

4. HAMILTONŮV FORMALISMUS

Hamiltonův formalismus rozvíjí Lagrangeův formalismus jistým směrem. Je to další z přístupů k popisu mechaniky, který je ještě více obecnější než Lagrangeův formalismus.

4.1 Úloha o brachistochroně - motivace variačního principu

Irský matematik, fyzik a astronom sir Rowan Hamilton (1805 - 1865) formuloval svůj formalismus pro popis mechaniky v 19. století. Už v roce 1696 ovšem Johann Bernoulli (1667- 1748) formuluje úlohu, která se stala základem Hamiltonova formalismu. Při řešení Bernoulliho úlohy byly navíc použity některé myšlenky a postupy, které dále rozvinul právě Hamilton.

Zadání úlohy bylo jednoduché: Dva body A a B , které se nacházejí v různých polohách v gravitačním poli, ovšem ne na stejné svislé přímce, se mají spojit takovou křivkou, aby pohyb hmotného bodu z bodu A do B trval minimální čas. Sám Bernoulli zkoušel body spojit úsečkou, částí kružnice a dalšími křivkami, ovšem jako správné řešení se nakonec ukázala křivka, které se nazývá brachistochrona a která (jak vyplývá z nalezeného řešení - viz vztah (154)) je cykloidou.

Řešení této úlohy poměrně brzy po jejím zveřejnění našli německý matematik Leibnitz, bratři Jacob a Johann Bernoulliové, francouzský matematik a fyzik l'Hospital a v Anglii Newton.

Hledáme tedy minimum (extremální hodnotu) času, který závisí na tvaru trajektorie, po níž se pohybuje hmotný bod mezi body A a B . To znamená, že hledáme extrém funkce $f(y(x))$, kde $y(x)$ je funkce popisující trajektorii pohybujícího se hmotného bodu.

Tato a podobné úlohy byly předzvěstí později vybudovaného Hamiltonova variačního principu (viz odstavec 4.3), který je součástí Hamiltonova formalismu.

Řešení úlohy o brachistochroně je uvedeno v odstavci 4.5.

4.2 Definice akce

Hamiltonův variační princip, který je dále popsán v odstavci 4.3, vychází z následujícího tvrzení:

POHYB SOUSTAVY HMOTNÝCH BODŮ V ČASOVÉM INTERVALU $\langle t_1; t_2 \rangle$ SE DĚJE TAK, ŽE PLATÍ

$$\delta S = 0, \quad (130)$$

KDE S JE TZV. FUNKCIONÁL ČASU DEFINOVANÝ VZTAHEM

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q^j(t), \dot{q}^j(t), t) dt \quad (131)$$

PRO $j=1, 2, \dots, n$ (KDE n JE POČET STUPŇŮ VOLNOSTI DANÉ SOUSTAVY). L JE PŘITOM LAGRANGEOVA FUNKCE POPISUJÍCÍ DANOU SOUSTAVU.

Ve vztahu (131) symbol $\dot{q}^j(t)$ znamená časovou derivaci j -té zobecněné souřadnice, tj. $\dot{q}^j(t) = \frac{dq^j(t)}{dt}$.

Dále je nutné si uvědomit, že do vztahu (131) se dosazuje konkrétní průběh jedné trajektorie, čímž se převede langrangeova funkce L , která obecně závisí na časovém průběhu zobecněné souřadnice $q^j(t)$, na časovém průběhu zobecněné rychlosti $\dot{q}^j(t)$ a na čase, na funkci jedné proměnné - času.

Tedy místo $L(q^j(t), \dot{q}^j(t), t)$ po dosazení konkrétní trajektorie, tj. průběhu $q^j(t)$, získáme $L(t)$.

S je tzv. funkcionál, tedy jakési zobrazení přiřazující dané hladké funkci reálné číslo.

Do výpočtu tedy vstupuje průběh závislosti polohy na čase popisující trajektorii (tj. funkce $q^j(t)$) a výsledkem je číslo uložené v proměnné S .

Význam vztahu (130) je nutno chápat takto:

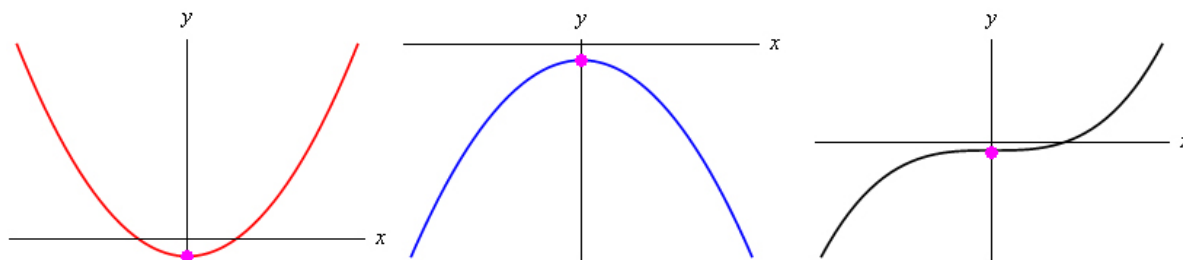
1. Variace akce je nulová.

Variace („změna“) je označena symbolem δ , akce je pak označena symbolem S .

2. Skutečná trajektorie, po níž se soustava pohybuje a jejíž tvar hledáme, je taková, že akce S pro tuto trajektorii nabývá stacionární hodnotu. To znamená, že první derivace S je nulová. Této hodnotě první derivace odpovídá buď extrém (lokální minimum nebo lokální maximum) a nebo inflexní bod (viz obr. 50).

Různým trajektoriím (různým funkcím $q^j(t)$) jsou přiřazeny různé hodnoty S . Z těchto různých (hypotetických) trajektorií vybíráme tu skutečnou trajektorii, která má extrémální hodnotu proměnné S .

Pro variační princip a z něj plynoucí výpočty je důležité, aby se průběh studované veličiny (akce S) na „chvilku zastavil“ - to se v ve všech případech zobrazených na obr. 50 skutečně stane.



obr. 50

Reálné děje v přírodě se tedy vyvíjejí tak, že mají stacionární hodnoty akcí.

Příroda tedy vybírá takové stavy, které jsou: nejmenší, největší nebo podobné ostatním (tomuto stavu odpovídá inflexní bod).

Trajektorie, které nalezneme pomocí variačního principu, jsou přitom ty, které vyplývají z Lagrangeových rovnic (47) nebo z Newtonových rovnic.

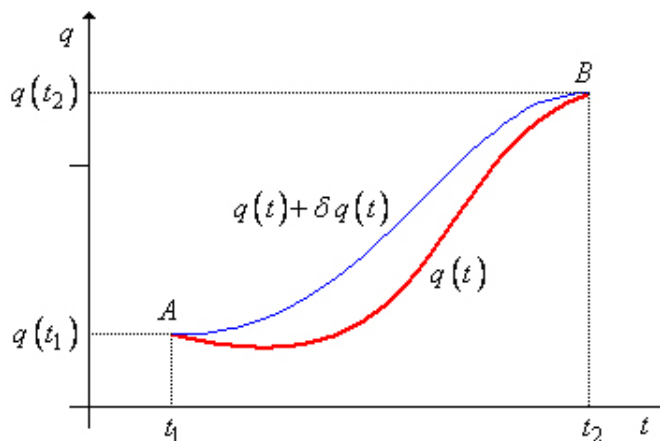
Je zajímavé si všimnout jednotky akce S : $[S] = \text{J}\cdot\text{s}$. Stejnou jednotku přitom má i Planckova konstanta h .

To není náhoda - pro Feynmanovský popis kvantové fyziky je důležitá veličina $\frac{S}{h}$ odpovídající jakési fázi, pro kterou tak platí $\left[\frac{S}{h}\right] = 1$.

Právě definovaný přístup k řešení úloh není omezen jen na mechaniku. Tento princip lze aplikovat i na řešení úloh z elektromagnetického pole, z části kvantové fyziky a další polní teorie (obecná teorie relativity jako teorie gravitace, popis chování bosonů, popis chování fermionů, ...). Základní princip popisu a hledání řešení zůstává stejný, mění se konkrétní veličina, pomocí níž je akce definována.

4.3 Hamiltonův variační princip

Pro další výklad je nezbytné pochopit pojmy variace funkce $\delta q(t)$ a variace funkcionálu δS . Tyto pojmy vysvětlíme na příkladu, v němž budeme uvažovat pohyb jedné částice po přímce. Závislost zobecněné souřadnice q na čase t je zobrazena na obr. 51. Je to jedna z mnoha závislostí, které mohou popisovat daný pohyb. Funkce $q(t)$ je hladká funkce, která vstupuje jako parametr lagrangjálu do vztahu pro akci S (vztah (131)). Hodnota funkce $q(t)$ v časech t_1 a t_2 (tj. poloha bodů A a B) je daná - jsou to počáteční podmínky řešené úlohy.



obr. 51

Nyní sestrojíme funkci $q(t) + \delta q(t)$ tak, že v každém časovém okamžiku v intervalu $(t_1; t_2)$ přičteme k funkční hodnotě funkce $q(t)$ hodnotu $\delta q(t)$. Vzhledem k tomu, že hodnoty funkce $q(t)$ v časech t_1 a t_2 jsou dány, platí

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0. \quad (132)$$

Vytvoříme tedy trajektorii, která se od té původní „o trošku“ liší, a budeme hledat tu správnou (v přírodě realizovanou) trajektorii, která má minimální, maximální nebo „skoro stejnou“ akci.

Výše popsaným způsobem jsme provedli tzv. izochronní variaci.

IZOCHRONNÍ VARIACE JE TAKOVÁ VARIACE, PŘI NÍŽ K FUNKČNÍ HODNOTĚ FUNKCE q V BODĚ t (TJ. K $q(t)$) PŘÍČTEME HODNOTU $\delta q(t)$ A ZÍSKÁME FUNKČNÍ HODNOTU FUNKCE $q(t)+\delta q(t)$ V ČASE t .

To znamená, že křivku $q(t)$ „přišpendlíme“ v bodech A a B (dle obr. 51) a tuto křivku „deformujeme“ jen tak, že jí natahujeme ve směru osy q . Nenatahujeme jí ve směru osy t - takové deformování by už nebyly izochronní variace.

Funkci $q(t)$ přiřadíme akci $S[q(t)]$ a funkci $q(t)+\delta q(t)$ akci $S[q(t)+\delta q(t)]$ a můžeme definovat variaci akce, která přísluší funkci $q(t)$ a variaci funkce $\delta q(t)$:

$$\delta S = S[q(t)+\delta q(t)] - S[q(t)]. \quad (133)$$

Protože hledáme funkci $q(t)$ tak, aby $\delta S = 0$ pro každé $\delta q(t)$, musíme pro funkce blízké funkci $q(t)$ získat podobné hodnoty akce S . To znamená, že $\delta q(t)$ nebude tak velké, jak je ilustrováno na obr. 51. Většinou lze psát

$$\delta q(t) = \varepsilon \eta(t), \quad (134)$$

kde $\varepsilon \rightarrow 0$. Potom ovšem δS je lineární diferenciál (tzv. Frechetův diferenciál).

$\delta q(t)$ je tedy infinitezimálně malé.

Popisuje-li funkce $q(t)$ trajektorii pohybu dané soustavy a mění-li se akce S při přechodu od funkce $q(t)$ k funkci $q(t)+\delta q(t)$, pak $q(t)$ popisuje trajektorii, která je sice možná, ale není to skutečná trajektorie, po níž se daný systém skutečně pohybuje.

Příroda prostě takové trajektorie, u kterých se při jejich malé změně mění S , nemá ráda.

Nutná podmínka pro splnění vztahu (130) je skutečnost, že funkce $q(t)$ musí řešit Eulerovy - Lagrangeovy rovnice. Tyto rovnice jsou obecné diferenciální rovnice druhého řádu a jsou popsány v odstavci 4.4. Speciální volbou funkce přecházejí na Lagrangeovy rovnice druhého druhu (47). Proto nyní dokážeme, že z podmínky (130) plyne existence Lagrangeových rovnic druhého druhu.

Vyjdeme ze vztahu (133), do kterého dosadíme z definičního vztahu akce S (131). Důkaz provedeme rovnou pro j zobecněných souřadnic ($j=1, 2, \dots, n$, kde n je počet stupňů volnosti). Dostaneme tak

$$\delta S = \sum_{j=1}^n \left(S[q^j(t)+\delta q^j(t)] - S[q^j(t)] \right) = \sum_{j=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(L(q^j(t)+\delta q^j(t), \dot{q}^j(t)+\delta \dot{q}^j(t), t) - L(q^j(t), \dot{q}^j(t), t) \right) dt.$$

Důležité je, že symbolem $\dot{q}^j(t)$ (resp. $\delta \dot{q}^j(t)$) rozumíme časovou derivaci zobecněné souřadnice (resp. variace

funkce), tj. $\dot{q}^j(t) = \frac{dq^j(t)}{dt}$ (resp. $\delta \dot{q}^j(t) = \frac{d(\delta q^j(t))}{dt}$).

Nyní provedeme Taylorův rozvoj lagrangiánu, který je závislý na variaci funkce $\delta q(t)$. Z důvodu vyšší přehlednosti již nebudeme vypisovat argumenty lagrangiánu L . Získáme tedy

$$\delta S = \sum_{j=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(L + \frac{\partial L}{\partial q^j} \delta q^j(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \delta \dot{q}^j(t) + O\left((\delta q^j(t))^2 \right) - L \right) dt, \text{ kde } O\left((\delta q^j(t))^2 \right) \text{ je chyba, která vzniká při}$$

zanedbání členů obsahujících vyšší mocninu variace funkce $\delta q(t)$. Vzhledem k tomu, že variace funkce je definovaná vztahem (134), je chyba vzniká použitím Taylorova rozvoje malá. Dostáváme tedy

$$\delta S = \sum_{j=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^j} \delta q^j(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \delta \dot{q}^j(t) \right) dt. \quad (135)$$

Vzhledem k tomu, že jsme provedli pouze izochronní variace, není v právě provedeném Taylorově rozvoji výraz $\frac{\partial L}{\partial t} \delta t$, neboť $\delta t = 0$.

Je dobré si uvědomit, že derivace podle času popisují změny v čase (tj. podél osy t na obr. 51), zatímco variace $\delta q(t)$ popisují změny funkce $q(t)$ (tj. změny podél osy q).

Z izochronní variace funkce $q(t)$ také vyplývá platnost identity

$$\delta \dot{q}^j(t) = \delta \frac{dq^j}{dt} = \frac{d}{dt} \delta q^j. \quad (136)$$

Vztah (136) říká, že časové a prostorové variace jsou při izochronní variaci na sobě nezávislé (změny provedené v čase a změny provedené v prostorové souřadnici jsou tedy libovolné).

Dosadíme-li identitu (136) do vztahu (135) dostaneme výraz

$$\delta S = \sum_{j=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^j} \delta q^j(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{d}{dt} (\delta q^j) \right) dt, \quad (137)$$

ve kterém je člen $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{d}{dt} (\delta q^j)$. Ten můžeme upravit, pokud rozepíšeme časovou derivaci součinu $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \delta q^j$.

Platí $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \delta q^j \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) \delta q^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{d}{dt} (\delta q^j)$, odkud

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{d}{dt} (\delta q^j) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \delta q^j \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) \delta q^j. \quad (138)$$

Nyní dosadíme vyjádření (138) do vztahu (137) a integrál součtu dále rozepíšeme na součet dvou integrálů. Dostaneme tak

$$\delta S = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \delta q^j(t) \right]_{t_1}^{t_2} + \sum_{j=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) \delta q^j(t) dt. \quad (139)$$

První člen výrazu (139) lze psát ve tvaru $\sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \delta q^j(t) \right]_{t_1}^{t_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j(t_2)} \delta q^j(t_2) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j(t_1)} \delta q^j(t_1)$.

Vzhledem k platnosti podmínky (132) je tento člen nulový. Proto můžeme výraz (139) přepsat ve tvaru

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q^j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) \delta q^j(t) dt \quad (140)$$

Výraz (140) má být nulový, protože požadujeme splnění podmínky (130). Ta má ale platit pro všechny variace funkce $\delta q^j(t)$ (pro $j = 1, 2, \dots, n$), což znamená, že musí platit

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q^j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) = 0, \quad (141)$$

což je zápis Lagrangeových rovnic druhého druhu.

Dokázali jsme tedy, že z podmínky (130) vyplývají Lagrangeovy rovnice druhého druhu (viz vztah (141)). Můžeme tedy říci, že platnost rovnic (141) je nutnou podmínkou pro to, aby platil vztah (130). Vzhledem k tomu, že Lagrangeovy rovnice druhého druhu jsou ekvivalentním popisem mechaniky jako Newtonovy rovnice (Newtonovy rovnice jsou speciálním případem Lagrangeových rovnic), lze i Newtonovy rovnice odvodit z Hamiltonova formalismu a z podmínky (130).

Hamiltonův formalismus vzbudil v době jeho zavedení i později řadu i teologických sporů. Zdálo se zvláštní, že někdo zná počáteční bod pohybu i koncový bod pohybu a na základě toho vybírá trajektorii, po níž se hmotný bod pohybuje. Ve skutečnosti se jedná ovšem jen o další efektivní popis reality (mechaniky, elektřiny a magnetismu, částí obecné teorie relativity, ...).

Skutečnost, že je dán počáteční a koncový bod pohybu, vyplývá z podmínky (132) na variaci funkce $\delta q(t)$.

Právě popsany princip lze zobecnit i např. na pohyb tekutiny, na děje v elektromagnetickém poli a do dalších oborů fyziky. Obecně lze tento princip zobecnit i na nekonečný počet stupňů volnosti - tj. na spojité kontinuum. Hamiltonův princip lze tedy zobecnit i pro teorie pole.

Základní idea zobecnění variačního principu na nekonečně mnoho stupňů volnosti spočívá v přechodu od diskrétního rozložení zobecněných souřadnic $q^j(t)$, kde $j \in \mathbb{N}$, ke spojitému rozložení $q^x(t)$, kde $x \in \mathbb{R}$. Zobecněné souřadnice ve spojitěm prostředí zapisujeme většinou ve tvaru $q(t, x)$, který lze chápat jako spojitou limitu $q^j(t)$, a který lze považovat za zápis funkce dvou proměnných t a x . Analogicky můžeme pokračovat se souřadnicemi y a z a získat tak popis fyzikálního pole pomocí veličiny $\Phi(t, x, y, z)$. V závislosti na tvaru zápisu této fyzikální veličiny lze odlišit různé typy polí:

1. $\Phi(t, x, y, z) = \Phi(x^\mu)$ - popisuje skalární pole;

2. $\Phi(t, x, y, z) = A_\nu(x^\mu)$ - popisuje vektorové pole v rámci elektromagnetického pole;
3. $\Phi(t, x, y, z) = g_{\alpha\beta}(x^\mu)$ - popisuje tenzorové pole v rámci obecné teorie relativity.

Pro každý z těchto případů platí podmínka (130).

V roce 1890 našel německý matematik a fyzik Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821 - 1894) akci S , pro kterou z podmínky (130), vycházejí Maxwellovy rovnice popisující elektromagnetické pole.

Existují i speciální akce, na základě kterých dostaneme popis geodetik v rámci obecné teorie relativity.

4.4 Eulerovy - Lagrangeovy rovnice

Eulerovy - Lagrangeovy rovnice jsou rovnice, které umožňují nalézt extrém funkcionálu a které se používají obecně při optimalizaci. Ve fyzice jsou vhodné pro odvození pohybových rovnic pohybujících se hmotných bodů či těles. Jejich odvození je analogické jako odvození Lagrangeových rovnic: tj. vychází se z platnosti nulové variace akce (vztah (130)), jak je ukázáno v odstavci 4.3. Rozdíl spočívá v tom, že se nehledá rovnice, které řeší Lagrangeova funkce $L(q^j(t), \dot{q}^j(t), t)$, ale rovnice, které řeší obecná funkce

$$F(y^j(x), y'^j(x), x) \text{ pro } j = 1, 2, \dots, n, \text{ kde } y'^j(x) = \frac{dy^j(x)}{dx}.$$

Řešením jsou pak rovnice ve tvaru

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial y^j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'^j} \right) = 0. \quad (142)$$

Tyto rovnice mají formálně stejný tvar jako Lagrangeovy rovnice (47).

Rovnice (142) lze upravit do dalšího tvaru, který je pro řešení úloh občas výhodnější. Začneme tím, že tyto rovnice vynásobíme výrazem $y'^j = \frac{dy^j}{dx}$. Dále si uvědomíme, že

$$\frac{d}{dx} \left(y'^j \frac{\partial F}{\partial y'^j} \right) = \frac{dy'^j}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'^j} + y'^j \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'^j} \right). \quad (143)$$

Nyní postupně vynásobíme rovnice (142) výrazem $y'^j = \frac{dy^j}{dx}$ a upravíme s využitím identity (143).

Postupně dostaneme $0 = \sum_{j=1}^n \left(y'^j \frac{\partial F}{\partial y^j} - y'^j \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'^j} \right) = \sum_{j=1}^n \left(y'^j \frac{\partial F}{\partial y^j} - \frac{d}{dx} \left(y'^j \frac{\partial F}{\partial y'^j} \right) + \frac{dy'^j}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'^j} \right)$. Uvědomíme-li si, že platí

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y^j} y'^j + \frac{\partial F}{\partial y'^j} \frac{dy'^j}{dx}, \quad (144)$$

můžeme pokračovat v úpravách $0 = \sum_{j=1}^n \left(\frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left(y'^j \frac{\partial F}{\partial y'^j} \right) \right)$. Poslední úprava, kterou provedeme, vyplývá z vlastnosti derivace součtu. Získáme tak rovnice

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dx} \left(F - y'^j \frac{\partial F}{\partial y'^j} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} \right) = 0, \quad (145)$$

což je další z podob Eulerových - Lagrangeových rovnic.

Rovnice (145) lze dále přepsat do jednoduššího tvaru, pokud budeme vyšetřovat pohyb jednoho hmotného bodu s jedním stupněm volnosti a pokud navíc funkce F nebude explicitně záviset na souřadnici x .

V tom případě totiž $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ a rovnice (145) přejdou do tvaru $\frac{d}{dx} \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$, odkud plyne

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = konst. \quad (146)$$

V této podobě je rovnice občas užitečná pro řešení úloh.

4.5 Úloha o brachistochroně

Úloha o brachistochroně sehrála v historii fyziky důležitou úlohu. Nejen, že stála u zrodu diferenciálního počtu a integrálního počtu, ale stala se také motivační úlohou pro formulaci Hamiltonova formalismu (viz odstavce 4.1 a 4.3).

Zadání této úlohy je následující: Dva body A a B , které se nacházejí v různých polohách v gravitačním poli, ovšem ne na stejné svislé přímce (viz obr. 52), se mají spojit takovou křivkou, aby pohyb hmotného bodu z bodu A do B trval minimální čas.

Při řešení je nutné si uvědomit, že přírůstek času, přispívající k celkovému času t , po který se hmotný bod po hledané křivce pohybuje, je $dt = \frac{dl}{v}$, kde dl je přírůstek dráhy, kterou hmotný bod urazí. Pro celkový čas t

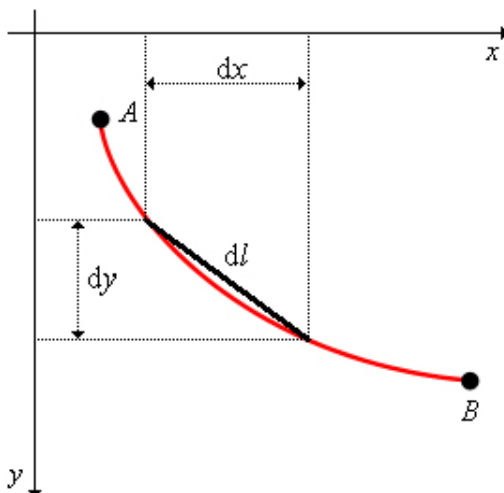
tedy platí $t = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dl}{v}$. Přírůstek dráhy dl je možné vyjádřit na základě obr. 52 ve tvaru

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (\text{na obr. 52 jsou vzdálenosti kvůli názornosti přehnaně velké}).$$

Pro velikost rychlosti v v závislosti na souřadnici y ze zákona zachování mechanické energie vyplývá vztah $v(y) = \sqrt{2gy}$. Pro čas t tedy dostáváme

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} dx. \quad (147)$$

A tento čas má být podle zadání úlohy minimální. To ovšem znamená najít extrém funkce t (definované vztahem (147)) v závislosti na průběhu funkce $y(x)$.



obr. 52

Řešení úlohy lze nalézt pomocí Eulerových - Lagrangeových rovnic, které jsou popsány v odstavci 4.4; pro účely této úlohy bude vhodný konkrétně tvar (146). Pro funkci F přitom platí: $F(y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}$. Podle

rovnice (146) tedy můžeme psát $\sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} - y' \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = K$ a tuto rovnici dále postupně upravovat.

Levou stranu rovnice rozšíříme a získáme rovnici $\sqrt{\frac{(1 + y'^2)^2}{y(1 + y'^2)}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1 + y'^2)}} = K$, v níž částečně

odmocníme levou stranu. V získaném tvaru rovnice $\frac{1 + y'^2}{\sqrt{y(1 + y'^2)}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1 + y'^2)}} = K$ převedeme levou stranu

rovnice na společného jmenovatele $\frac{1}{\sqrt{y(1 + y'^2)}} = K$ a zapišeme v přehlednějším tvaru $y(1 + y'^2) = C_1$, kde

$$C_1 = \frac{1}{K^2} = \text{konst.}$$

Důležité je si uvědomit, že hledáme vyjádření funkce y - tj. křivku, po níž se hmotný bod pohybuje.

Nyní zavedeme substituci ve tvaru

$$y' = \cotg \frac{\varphi}{2} \quad (148)$$

a můžeme pokračovat v dalších úpravách.

Do posledního tvaru rovnice dosadíme substituční vztah (148) a získáme $y \left(1 + \cotg^2 \frac{\varphi}{2} \right) = C_1$. Nyní rozepíšeme funkci kotangens podle její definice: $y \left(1 + \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} \right) = C_1$. Dále převedeme na společného jmenovatele a s využitím známé goniometrické identity získáme rovnici $y \frac{1}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} = C_1$, kterou můžeme psát ve tvaru $y = C_1 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$.

Použitím goniometrického vzorce získáme rovnici

$$y = C_1 \frac{1 - \cos \varphi}{2}. \quad (149)$$

Nyní si připravíme několik dílčích výpočtů, které nám umožní najít řešení snadněji. Jednak na základě substituce (148) můžeme psát

$$dx = \frac{1}{\cotg \frac{\varphi}{2}} dy \quad (150)$$

a dále diferencováním rovnice (149) dostaneme

$$dy = C_1 \frac{\sin \varphi}{2} d\varphi. \quad (151)$$

Dosazením vyjádření (151) do vztahu (150) postupně získáme $dx = \frac{1}{\cotg \frac{\varphi}{2}} \cdot C_1 \frac{\sin \varphi}{2} d\varphi = C_1 \frac{\sin \frac{\varphi}{2} \cdot 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} d\varphi = C_1 \sin^2 \frac{\varphi}{2} d\varphi$, takže dostáváme vztah

$dx = C_1 \frac{1 - \cos \varphi}{2} d\varphi$, jehož řešení můžeme psát ve tvaru $x = \frac{C_1}{2} \int (1 - \cos \varphi) d\varphi$. Řešení tedy můžeme psát ve tvaru

$$x = C(\varphi - \sin \varphi) + x_0, \quad (152)$$

kde $C = \frac{C_1}{2} = \frac{1}{2K^2} = konst.$

Ze vztahu (151) můžeme vyjádřit $y = C \int \sin \varphi d\varphi$ a dostaneme

$$y = -C \cos \varphi + y_0. \quad (153)$$

Konstanty x_0 a y_0 vystupující ve vztazích (152) a (153) určíme na základě počátečních podmínek úlohy. Má-li bod A , který leží na cykloidě řešící zadanou úlohu, souřadnice $[x_A; y_A]$ (viz obr. 53), můžeme vztahy (152) a (153) psát ve tvaru $x_A = C(0 - \sin 0) + x_0$ a zároveň $y_A = -C \cos 0 + y_0$. Dosadili jsme také $\varphi = 0$, protože cykloida v bodě A začíná. Po úpravě dostáváme $x_0 = x_A$ a $y_0 = C + y_A$. Vztahy (152) a (153) můžeme tedy psát ve tvaru

$$x = C(\varphi - \sin \varphi) + x_A \quad \text{a} \quad y = C(1 - \cos \varphi) + y_A, \quad (154)$$

což jsou parametrické rovnice cykloidy. Trajektorie, po níž se musí pohybovat hmotný bod mezi dvěma zadanými body, aby se pohyboval nejkratší čas, leží tedy na cykloidě.

Pro vykreslení cykloidy mezi uvažovanými dvěma body A a B je nutné znát hodnotu konstanty C a maximální hodnotu φ_m úhlu φ , v závislosti na kterém se cykloida vykresluje. Tyto hodnoty lze získat pomocí koncového bodu cykloidy B , který má souřadnice $[x_B; y_B]$. Bodu B přitom odpovídá hodnota úhlu $\varphi = \varphi_m$, kterou dosadíme do rovnic (154). Vzhledem ke tvaru parametrických rovnic cykloidy (154) je zřejmé, že řešení nebude možné získat analyticky. Budeme muset použít numerické řešení rovnic. Nicméně před numerickým řešením se vyplatí provést několik úprav rovnic (154).

Do rovnic (154) tedy dosadíme souřadnice bodu B a vyloučíme z nich parametr C , čímž dostaneme jednu rovnici ve tvaru $(x_B - x_A)(1 - \cos \varphi_m) = (y_B - y_A)(\varphi_m - \sin \varphi_m)$. Dále rovnici upravíme do tvaru

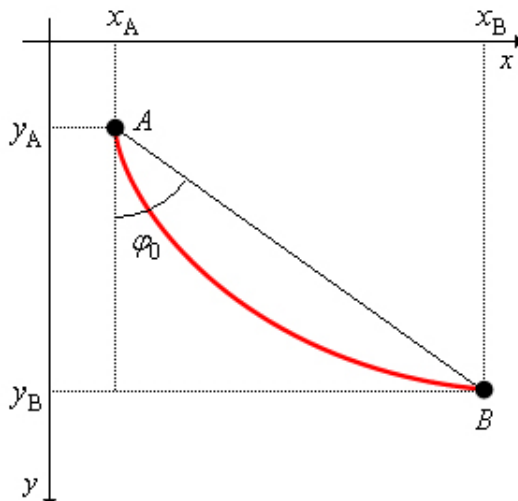
$$x_B - x_A - (y_B - y_A)\varphi_m = (x_B - x_A)\cos \varphi_m - (y_B - y_A)\sin \varphi_m. \quad (155)$$

Podle obr. 53 lze pro úhel φ_0 psát

$$\sin \varphi_0 = \frac{x_B - x_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} \quad \text{a} \quad \cos \varphi_0 = \frac{y_B - y_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} \quad (156)$$

a proto vztah (155) přepíšeme v takovém tvaru, do kterého později snadno dosadíme vztahy (156):

$$x_B - x_A - (y_B - y_A) \varphi_m = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \left(\frac{(x_B - x_A) \cos \varphi_m}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} - \frac{(y_B - y_A) \sin \varphi_m}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} \right).$$



obr. 53

Po dosazení ze vztahů (156) dostaneme rovnici

$$\frac{x_B - x_A - (y_B - y_A) \varphi_m}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} = \sin \varphi_0 \cos \varphi_m - \cos \varphi_0 \sin \varphi_m,$$

kterou můžeme s využitím goniometrických vztahů psát ve tvaru

$$\frac{x_B - x_A - (y_B - y_A) \varphi_m}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} = \sin(\varphi_m - \varphi_0). \quad (157)$$

Získali jsme tedy rovnici, na základě níž je možné numericky určit hodnotu úhlu φ_m . Poté je možné určit hodnotu parametru C pomocí jednoho ze vztahů

$$C = \frac{x_B - x_A}{\varphi - \sin \varphi} = \frac{y_B - y_A}{1 - \cos \varphi}. \quad (158)$$

Tím je cykloida, která hraje ve fyzice velmi důležitou úlohu, jednoznačně popsána.

S cykloidou se fyzikové setkávají často: popisuje rozpínání vesmíru, nizozemský matematik, fyzik a astronom Christian Huygens sestrojil cykloidální kyvadlo, jehož frekvence nezávisí na počáteční výchylce, ...

4.6 Invariance Lagrangeovy funkce a zákony zachování

4.6.1 Obecné pojmy

Geometrická symetrie Lagrangeovy funkce souvisí se zákony zachování ve fyzice. Poprvé si tuto skutečnost uvědomila německá matematická Amalie Emmy Neetherová (1882 - 1935). V roce 1918 formuluje princip, který ve svých důsledcích změnil fyziku 20. století. Tento princip se stal východiskem např. pro kvantovou fyziku právě proto, že dával do souvislosti geometrické symetrie a zákony zachování.

MÁ-LI SYSTÉM A TEDY I JEHO PŘÍSLUŠNÁ LAGRANGEOVA FUNKCE L NĚJAKOU SYMETRII, PAK EXISTUJE JÍ ODPOVÍDAJÍCÍ FYZIKÁLNÍ VELIČINA, KTERÁ SE ZACHOVÁVÁ.

Zachovávající se veličinou je integrál pohybu (viz odstavec 3.7).

Tuto obecnou formulaci lze přepsat v konkrétnějším tvaru.

POKUD

$$dS = L dt \quad (159)$$

NEMĚNÍ SVŮJ TVAR PŘI INFINITEZIMÁLNÍCH TRANSFORMACÍCH ČASU A ZOBECNĚNÝCH SOUŘADNIC POPSANÝCH VZTAHY

$$t' = t + \varepsilon \Theta \quad \text{a} \quad q'^j = q^j + \varepsilon Q^j \quad (160)$$

PRO $j=1, 2, \dots, n$, KDE ε JE MALÝ REÁLNÝ PARAMETR ($\varepsilon \rightarrow 0$) A Θ A Q^j LIBOVOLNÉ HLADKÉ FUNKCE PŮVODNÍCH SOUŘADNIC (TJ. $\Theta(t, q^j)$ A $Q^j(t, q^j)$), PAK SE ZACHOVÁVÁ VELIČINA

$$Z = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} (\dot{q}^j \Theta - Q^j) - L \Theta \quad (161)$$

A Z JE INTEGRÁL POHYBU, TEDY $\frac{dZ}{dt} = 0$.

Funkce Θ a Q^j jsou generátory symetrie a obecně to jsou prvky Lieovy grupy.

Důkaz lze provést na základě geometrického rozboru dané problematiky s využitím variet, Lagrangeova pole, ... Ten ovšem provádět nebudeme.

Existují tři hlavní globální symetrie, které určují vlastnosti prostoru a času:

1. translace prostoru - vyplývá z homogenity prostoru;

Popis systému se nezmění, jestliže se posuneme posuvným pohybem do jiného místa prostoru.

2. rotace prostoru - vyplývá z izotropie prostoru;

Popis systému se nezmění, jestliže se nakloníme, uděláme stojku, ... a budeme popisovat systém z pohledu takto otočené soustavy.

3. translace času.

Popis systému se tedy nezmění, jestliže hodiny, pomocí nichž měříme čas při určitém ději, zapneme o chvíli později.

Na základě těchto symetrií, které aplikujeme na prostor a čas v Newtonovské fyzice, lze získat tři zákony zachování (viz odstavce 4.6.2 až 4.6.4), které lze využít při řešení úloh. Newtonovský prostor má tedy pro řešení úloh velmi pěkné vlastnosti.

4.6.2 Homogenita prostoru

Z homogenity prostoru vyplývá invariance popisu systému vůči translaci v prostoru. To znamená, že Lagrangeova funkce L se nezmění, posuneme-li se v prostoru ve směru i -té zobecněné souřadnice. Transformační vztahy (160) tak přejdou na vztahy

$$t' = t \text{ a } x'^i = x^i + \varepsilon, \quad (162)$$

odkud vyplývá, že $\Theta = 0$, $Q^i = 1$ a $Q^j = 0$ pro $j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$. Po dosazení do definičního vztahu zachovávající se veličiny (161) tedy máme

$$Z = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}, \quad (163)$$

což je vyjádření **zákona zachování hybnosti**. Zákon zachování hybnosti je tedy důsledkem homogenity prostoru (Newtonovského prostoru).

Ve vztahu (161) zůstal tedy jediný člen odpovídající nenulovému Q^i .

Příklad: Volná částice

Pro volnou částici, jejíž lagrangian je $L = \frac{1}{2} m \left((\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 + (\dot{x}^3)^2 \right)$, je $Z = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = -m\dot{x}^i$ pro $i = 1, 2, 3$.

4.6.3 Izotropie prostoru

Izotropie prostoru je svázána s invariancí popisu daného systému vůči rotaci v prostoru.

Uděláme stojku, nakloníme se, otočíme se, ... a budeme pořád dostávat stejný popis systému, jako když jsme systém popisovali před změnami naší polohy.

To tedy znamená, že lagrangian se nemění při posunutí v libovolném úhlovém směru φ . Vztahy (160) tedy přejdou na tvar

$$t' = t \text{ a } \varphi' = \varphi + \varepsilon, \quad (164)$$

což znamená, že $\Theta = 0$, $Q^\varphi = 1$ a ostatní Q^j jsou nulová. Po dosazení do (161) tedy dostaneme

$$Z = -\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}. \quad (165)$$

Vztah (165) je vyjádřením **zákona zachování momentu hybnosti**, který je důsledkem izotropie prostoru.

Příklad: Centrální pole

Lagrangeova funkce hmotného bodu, který se pohybuje v centrálním poli, je $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$. Lagrangian přitom není závislý na úhlu otočení φ - to znamená, že při změně φ se lagrangian nezmění.

Jestliže lagrangian nezávisí na nějaké zobecněné souřadnici (zde φ), pak se tato zobecněná souřadnice nazývá cyklická souřadnice (viz odstavec 3.7). Skutečnost, že φ je cyklická souřadnice, vyplývá tedy z izotropie prostoru.

Jinými slovy: φ je dobře zvolená zobecněná souřadnice.

4.6.4 Homogenita času

Homogenita času souvisí s invariancí popisu systému vůči translaci času.

To znamená, že popis systému bude stejný nezávisle na tom, v jaké fázi pohybu zmáčkneme stopky a začneme měřit časové závislosti.

V Newtonovském prostoru čas není možné rotovat, takže nemůžeme mluvit o izotropii času. Tyto operace lze ale provádět např. v rámci teorie relativity. Pro jisté typy úloh je vhodné zavést dva na sobě nezávislé časy, o jejichž izotropii je pak možné mluvit.

Transformační vztahy (160) přejdou tedy na vztahy

$$t' = t + \varepsilon \quad q'^j = q^j, \quad (166)$$

tedy $\Theta = 1$ a $Q^j = 0$ (pro $j = 1, 2, \dots, n$). Po dosazení do (161) dostaneme

$$Z = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j - L, \quad (167)$$

což je zobecněná energie (viz odstavec 3.7). Z homogenity času (tj. z invariance popisu systému vůči translaci času) tedy vyplývá **zákon zachování zobecněné energie**.

Vzhledem k tomu, že pro holonomní vazby a skleronomní vazby při pohybu tělesa v poli konzervativních sil přechází zobecněná energie na celkovou mechanickou energii (viz tvrzení v odstavci 3.7), přechází za těchto podmínek také zákon zachování zobecněné energie na zákon zachování mechanické energie.

4.6.5 Lokální symetrie

Kromě globálních symetrií (viz odstavec 4.6.1) existují i lokální symetrie, které se uplatňují zejména v teoriích pole. Existují veličiny, na kterých je závislá Lagrangeova funkce L , a přitom při změně této veličiny se Lagrangeova funkce nezmění. Taková veličina se pak (v dané teorii poli) zachovává.

Např. v teorii elektrického pole je touto veličinou náboj - platí tedy zákon zachování elektrického náboje.

4.7 Kalibrační transformace a kalibrační symetrie

Kalibrační transformace a kalibrační symetrie jsou důležité nejen pro řešení úloh, ale také pro budování fyzikálního aparátu jako takového. Dříve, než ukážeme konkrétní použití, vyslovíme a dokážeme tvrzení.

POHYBOVÉ ROVNICE POPISUJÍCÍ DANÝ SYSTÉM SE NEZMĚNÍ, PŘIPOČTEME-LI K LAGRANGEOVĚ FUNKCI L ÚPLNOU ČASOVOU DERIVACI LIBOVOLNÉ FUNKCE $f(q)$ (KDE q JE ZOBECNĚNÁ SOUŘADNICE).

Při důkazu vyjdeme z uvedeného tvrzení. Kromě lagrangianu L budeme předpokládat, že existuje lagrangian L_1 definovaný (podle tvrzení) vztahem

$$L_1 = L + \frac{df(q(t))}{dt}. \quad (168)$$

Pro akci S_1 odpovídající lagrangianu L_1 můžeme podle vztahu (131) psát

$$S_1 = \int_{t_1}^{t_2} L_1 dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(L + \frac{df(q(t))}{dt} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df(q(t))}{dt} dt = S + [f(q(t))]_{t_1}^{t_2}. \text{ Dostáváme tedy}$$

$$S_1 = S + f(q(t_2)) - f(q(t_1)). \quad (169)$$

Pohybové rovnice (resp. popis systému) získáme pomocí vztahu (130). Dosadíme-li tedy do vztahu (130) odvozenou akci popsanou vztahem (169), dostaneme

$$0 = \delta S_1 = \delta S + \frac{\partial f(q)}{\partial q} \delta q(t_2) - \frac{\partial f(q)}{\partial q} \delta q(t_1). \quad (170)$$

Vzhledem k platnosti podmínky (132) ze vztahu (170) plyne

$$0 = \delta S_1 = \delta S. \quad (171)$$

Tím je důkaz ukončen: pro oba uvažované lagrangiány (tj. pro lagrangián L i lagrangián ve tvaru (168)) je variace akce nulová (viz výsledek (171)). Oba lagrangiány dávají tedy stejný popis daného systému.

Právě dokázané tvrzení se využívá u kanonických transformací systému v Hamiltonově formalismu (viz odstavec 4.11).

Příklad: Nabitá částice v elektromagnetickém poli

Lagrangián nabitě částice s nábojem e a s hmotností m , která se pohybuje v elektromagnetickém poli popsaném veličinami \vec{E} a \vec{B} , je: $L = \frac{1}{2}mv^2 - e\varphi + e\vec{v}\cdot\vec{A}$, neboť potenciální energie V je dána vztahem (70).

Lagrangián L_1 , který je dán vztahem (168), dává podle dokázaného tvrzení stejné řešení. Takže můžeme psát:

$L_1 = \frac{1}{2}mv^2 - e\varphi + e\vec{v}\cdot\vec{A} + \frac{df}{dt}$. Funkce f obecně závisí na prostorových souřadnicích a na čase (tj. $f(x^i, t)$), takže s postupně prováděnými úpravami lze lagrangián L_1 psát ve tvaru

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2}mv^2 - e\varphi + e\vec{v}\cdot\vec{A} + \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x^i} \dot{x}^i = \frac{1}{2}mv^2 - e\left(\varphi - \frac{1}{e} \frac{\partial f}{\partial t}\right) + e\vec{v}\cdot\vec{A} + \vec{v}\cdot\text{grad } f = \\ &= \frac{1}{2}mv^2 - e\left(\varphi - \frac{1}{e} \frac{\partial f}{\partial t}\right) + e\vec{v}\cdot\left(\vec{A} + \frac{1}{e}\text{grad } f\right) = \frac{1}{2}mv^2 - e\varphi' + e\vec{v}\cdot\vec{A}'. \end{aligned}$$

Získali jsme tak tvar lagrangiánu, který dává stejné výsledky jako původní lagrangián, jestliže platí $\varphi' = \varphi - \frac{1}{e} \frac{\partial f}{\partial t}$ a $\vec{A}' = \vec{A} + \frac{1}{e}\text{grad } f$.

Změnili jsme tedy dvě polní veličiny a lagrangián je vzhledem k této změně invariantní. Jedná se tedy o zvláštní případ lokální symetrie (viz odstavec 4.6.5). V tomto případě mluvíme o tzv. **kalibrační transformaci**, vůči níž je lagrangián invariantní.

Maxwellovy rovnice zůstávají v platnosti a mají stejný tvar jako pro lagrangián L . Veličiny, které můžeme měřit (tj. veličiny \vec{E} a \vec{B}) jsou také stejné (jak vyplývá z Maxwellových rovnic).

$$\text{Např. pro } \vec{B}, \vec{A} \text{ a } \vec{A}' \text{ platí: } \text{rot } \vec{A}' = \text{rot} \left(\vec{A} + \frac{1}{e}\text{grad } f \right) = \text{rot } \vec{A} + \frac{1}{e}\text{rot grad } f = \text{rot } \vec{A} = \vec{B}.$$

Podobným postupem fyzika vytváří nové teorie. Dbá se nejen na to, aby daná teorie odpovídala experimentálním měřením, ale také na to, aby splňovala kalibrační transformace. Tím se zjednoduší popis daného systému v různých soustavách a teorie bude pro řešení úloh jednodušší.

4.8 Hamiltonovy rovnice

Hamiltonovy rovnice (viz odstavec 4.8.4) jsou dalším zobecněním Lagrangeových rovnic 2. druhu (viz odstavec 3.3). Hamiltonovy rovnice ovšem mají oproti Lagrangeovým rovnicím výhodu. Zatímco Lagrangeovy rovnice jsou soustavou n obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu pro n neznámých (neznámými jsou časové průběhy zobecněných souřadnic $q^j(t)$ pro $j = 1, 2, \dots, n$, kde n je počet stupňů volnosti dané soustavy), jsou Hamiltonovy rovnice soustavou $2n$ obyčejných diferenciálních rovnic pouze prvního řádu pro $2n$ neznámých. Neznámými v Hamiltonových rovnicích jsou zobecněné souřadnice $q^j(t)$ a kanonické hybnosti $p_j(t)$ (viz odstavec 4.8.1) pro $j = 1, 2, \dots, n$.

Hamiltonových rovnic je sice více než Lagrangeových, ale jsou to rovnice prvního řádu, což je větší úspora práce při jejich řešení, než fakt, že neznámých je dvojnásobné množství.

Skutečnost, že indexy zobecněných souřadnic jsou horní indexy a indexy kanonických hybností jsou dolní indexy, vyplývá z toho, že zobecněné souřadnice $q^j(t)$ jsou složky vektorů, zatímco kanonické hybnosti $p_j(t)$ jsou složky forem. Při běžném počítání se tento rozdíl neprojeví, ale pro geometrickou interpretaci je to rozdíl podstatný.

Před vlastním odvozením Hamiltonových rovnic je nutné se seznámit s několika základními pojmy:

1. kanonická hybnost - viz odstavec 4.8.1;
2. fázový prostor - viz odstavec 4.8.2;
3. Hamiltonova funkce (hamiltonián) - viz odstavec 4.8.3.

4.8.1 Kanonická hybnost

KANONICKÁ HYBNOST JE DEFINOVÁNA VZTAHEM

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}$$

PRO $j = 1, 2, \dots, n$.

To tedy znamená, že každé zobecněné souřadnici $q^j(t)$ lze přiřadit kanonickou hybnost $p_j(t)$, kterou získáme derivací lagrangiánu podle příslušné zobecněné rychlosti.

Pozor! Kanonická hybnost je veličinou, která doplňuje popis systému získaný pomocí zobecněných souřadnic, ale sama kanonická hybnost se definuje jako derivace lagrangiánu pomocí zobecněné rychlosti!

Zobecněná souřadnice a kanonická hybnost tak tvoří tzv. kanonicky sdružené veličiny (kanonicky sdružené páry). Pomocí těchto veličin lze plně popsat stav fyzikálního systému.

Příklad: Volná částice

Určete kanonickou hybnost volné částice.

Řešení: Lagrangián volné částice lze psát ve tvaru $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$. Na základě vztahu (172) lze pak kanonickou

hybnost psát ve tvaru $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$.

Pro volnou částici je tedy kanonická hybnost rovna hybnosti, ale není to tak obecně. Kanonická hybnost může mít význam momentu hybnosti, modifikované hybnosti, ...

Prostor, ve kterém jsou definovány zobecněné souřadnice a kanonické hybnosti, se nazývá fázový prostor (viz odstavec 4.8.2).

4.8.2 Fázový prostor

FÁZOVÝ PROSTOR JE PROSTOR POPSANÝ SYSTÉMEM NEZÁVISLÝCH ZOBECNĚNÝCH SOUŘADNIC $q^j(t)$ A KANONICKÝCH HYBNOSTÍ $p_j(t)$ PRO $j = 1, 2, \dots, n$, KDE n JE POČET STUPŇŮ VOLNOSTI DANÉHO FYZIKÁLNÍHO SYSTÉMU. DIMENZE FÁZOVÉHO PROSTORU JE ROVNA $2n$.

Z hlediska geometrie se jedná o tzv. kotečný bandl konfigurační variety T^*Q , pro který jsou zobecněné souřadnice a kanonické hybnosti parametry.

Fázový prostor je prostor fyzikálních stavů daného systému. To znamená, že každý bod fázového prostoru jednoznačně určuje stav uvažovaného systému. Každým bodem fázového prostoru tedy prochází jedna trajektorie popisující časový vývoj daného systému, který se nachází v daném bodě fázového prostoru. Všechny body fázového prostoru tedy určují všechny možné stavy, do kterých se systém může dostat. Je to tedy jakási vizualizace vývoje systému.

Každý bod fázového prostoru je popsán zobecněnou souřadnicí $q^j(t)$ a kanonickou hybností $p_j(t)$. To znamená, že máme informace o poloze i rychlosti (ta je „ukrytá“ v hybnosti) daného systému.

Fázový prostor je tedy pro popis systému dostačující, na rozdíl od konfiguračního prostoru (viz odstavec 3.2.4), který obsahoval informace pouze o souřadnicích (zobecněné souřadnice), ale neobsahoval informace o rychlostech. V konfiguračním prostoru tedy nebylo možné vysvětlit tzv. Zenonovy paradoxy (viz odstavec 3.2.5).

Např. stojící šíp a šíp, který právě prolétá kolem stojícího šípu, jsou v konfiguračním prostoru popsány naprosto stejně. K jejich odlišení je nutné mít informace o rychlosti, kterou v konfiguračním prostoru nemáme. A proto tedy dostáváme pro oba šípy v konfiguračním prostoru stejný popis.

Příklad: Harmonický oscilátor

Určete vývoj harmonického oscilátoru ve fázovém prostoru.

Řešení: K popsání vývoje systému ve fázovém prostoru potřebujeme znát zobecněné souřadnice a kanonickou hybnost. Musíme tedy nejdříve napsat lagrangián uvažovaného systému: $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$. Zobecněná souřadnice je dána takto: $q = x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$. Zobecněnou hybnost určíme na základě lagrangiánu:

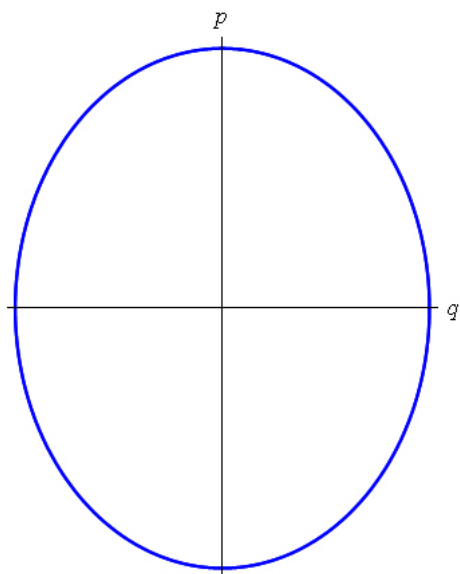
$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$. Po dosazení dostaneme $p = A m \omega \cos(\omega t + \varphi_0)$. Ve fázovém prostoru tedy získáme vývoj daného systému, který bude reprezentován elipsou (viz obr. 54).

Skutečnost, že se jedná o elipsu lze dokázat tak, že z rovnic pro x a pro p vyjádříme goniometrické funkce a jejich druhé mocniny sečteme. Dostaneme tedy: $\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{p}{Am\omega}\right)^2 = 1$. Délky poloos dané elipsy tedy jsou A a $Am\omega$ a jsou dány energií, kterou uvažovaný oscilátor má.

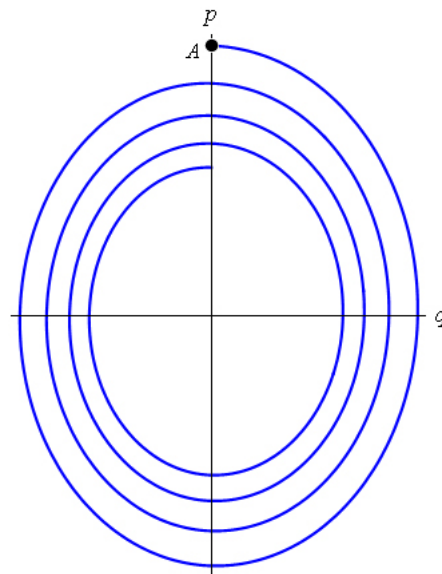
Bod $[0; 0]$ z obr. 54 odpovídá harmonickému oscilátoru, který je v klidu.

Budeme-li sledovat jen vývoj na ose q (tj. budeme-li se dívat na obr. 54 „zespodu“), získáme představu o změně souřadnice oscilátoru. Při sledování změn pouze na ose p získáme informaci o změně velikosti hybnosti resp. rychlosti oscilátoru. Tím, že sledujeme celý fázový prostor, máme informace jak o časovém vývoji souřadnice, tak i o časovém vývoji velikosti hybnosti resp. velikosti rychlosti.

Pro tlumený oscilátor pak dostáváme jeho vývoj v čase podle obr. 55. Oscilátor začíná kmitat v nulovém čase, ve kterém má nulovou výchylku (bod A) a největší velikost kanonické hybnosti, která je v tomto případě hybností. To znamená, že v bodě A má oscilátor největší velikost rychlosti. Vzhledem k útlumu nedosáhne během každé periody stejné amplitudy výchylky - ta bude postupně klesat a oscilátor se za určitý čas zastaví (tj. křivka ve fázovém prostoru skončí v bodě $[0; 0]$).



obr. 54



obr. 55

Právě popsaný postup, který byl vysvětlen na případu harmonického oscilátoru, se velmi často používá k vizualizaci vývoje systému. Bohužel velmi často se jedná o funkce více proměnných, které není možné rozumně zobrazit ani v počítači. Proto se dělají tzv. Poincarého řezy, pomocí nichž sledujeme daný fázový prostor jen v určité rovině. Na základě těchto řezů lze poznat základní charakteristiky vývoje systému, lze rozhodnout o chaotickém chování či o deterministickém chování systému, ...

4.8.3 Hamiltonova funkce

Hamiltonova funkce slouží k popisu daného systému a vystupuje v Hamiltonových rovnicích (viz odstavec 4.8.4).

HAMILTONOVA FUNKCE (TZV. HAMILTONIÁN) DANÉHO FYZIKÁLNÍHO SYSTÉMU JE SKALÁRNÍ FUNKCE DEFINOVANÁ VE FÁZOVÉM PROSTORU PŘEDPÍSEM

$$H(q^j(t), p_j(t), t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - L. \quad (173)$$

Z hlediska vyšší matematiky se jedná o tzv. Legendrovu duální transformaci.

Hamiltonián je závislý na čase pouze pro reonorní vazby (viz odstavec 2.2).

Na první pohled je definiční vztah hamiltoniánu složitý, ale tento způsob zavedení přinese výhody při řešení úloh, neboť se zjednoduší zápis Hamiltonových rovnic. Předpis (173) se stává hamiltoniánem až tehdy, když dosadíme za \dot{q}^i , neboť na zobecněné rychlosti hamiltonián nezávisí. Vyjádření \dot{q}^i existuje vždy, i když ne vždy je jednoduché a analyticky řešitelné, a lze je získat invertováním definičního vztahu kanonické hybnosti (172). To ovšem znamená, že je nutné dosadit i do lagrangiánu, který v hamiltoniánu vystupuje také.

Hamiltonián závisí na zobecněných souřadnicích, kanonických hybnostech a případně na čase, ale ne zobecněných rychlostech!!!

Nyní je možné formulovat Hamiltonovy kanonické rovnice.

4.8.4 Formulace a důkaz Hamiltonových kanonických rovnic

HAMILTONOVY KANONICKÉ ROVNICE JSOU ROVNICE VE TVARU

$$\frac{dq^j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \text{ a } \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^j} \quad (174)$$

PRO $j = 1, 2, \dots, n$, KDE n JE POČET STUPŇŮ VOLNOSTI DANÉHO SYSTÉMU.

Na základě vhodně zavedeného hamiltoniánu ve tvaru (173) jsou Hamiltonovy kanonické rovnice jednoduché a symetrické. Tyto rovnice, které Ir sir Rowan Hamilton odvodil v roce 1834, jsou soustavou $2n$ obyčejných diferenciálních rovnic s neznámými $q^j(t)$ a $p_j(t)$ pro $j = 1, 2, \dots, n$. Uvedený tvar rovnic vyplývá ze symplektické struktury fázového prostoru, která zaručuje jednoznačný popis systému, správná znaménka v rovnicích, ...

Přesto, že se v zápise Hamiltonových rovnic objevují parciální derivace, jsou to rovnice obyčejné, tj. po úpravách budou obsahovat jen totální („normální“) derivace. Symbol $\frac{\partial H}{\partial p_j}$ resp. $\frac{\partial H}{\partial q^j}$ dává jen návod na sestavení pravé strany příslušné Hamiltonovy rovnice.

Nyní rovnice dokážeme; důkaz přitom provedeme dvakrát - jednou podle definice hamiltoniánu a podruhé pomocí Hamiltonova variačního principu, který je detailně vysvětlen v odstavci 4.3.

Začneme důkazem první Hamiltonovy rovnice, který provedeme na základě definice hamiltoniánu (173). Pravou stranu první Hamiltonovy rovnice tedy rozepíšeme podle definice hamiltoniánu (173) s vyznačením proměnných, na nichž závisí zobecněná rychlost a lagrangián:

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_j} \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i (q^k(t), p_k(t), t) - L(q^j(t), \dot{q}^i(q^k(t), p_k(t), t), t) \right).$$

Nyní provedeme naznačenou derivaci a argumenty funkcí kvůli větší přehlednosti již vypisovat nebudeme: $\frac{\partial H}{\partial p_j} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial p_i}{\partial p_j} \dot{q}^i + p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_j} \right)$.

Derivace lagrangiánu podle p_j je rovna součinu derivace lagrangiánu podle \dot{q}^i a derivace \dot{q}^i podle p_j , protože p_j je „schovaná“ právě v \dot{q}^i (\dot{q}^i závisí na p_j). Proto lagrangián derivujeme jako složenou funkci.

S využitím definice kanonické hybnosti (172) můžeme pokračovat v úpravách: $\frac{\partial H}{\partial p_j} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial p_i}{\partial p_j} \dot{q}^i + p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_j} - p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_j} \right) = \sum_{i=1}^n \delta_i^j \dot{q}^i = \dot{q}^j = \frac{dq^j}{dt}$ a tím je platnost první Hamiltonovy kanonické rovnice dokázána.

Analogicky můžeme pokračovat v důkazu druhé Hamiltonovy rovnice: $\frac{\partial H}{\partial q^j} = \frac{\partial}{\partial q^j} \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i (q^k(t), p_k(t), t) - L(q^j(t), \dot{q}^i(q^k(t), p_k(t), t), t) \right)$. Po provedení derivace dostaneme

rovnici, v níž opět už nebudeme vypisovat argumenty funkcí: $\frac{\partial H}{\partial q^j} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j}$. Opět

s využitím vztahu (172) můžeme postupně psát $\frac{\partial H}{\partial q^j} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j} = -\frac{\partial L}{\partial q^j}$. Vztah

$$\frac{\partial H}{\partial q^j} = -\frac{\partial L}{\partial q^j} \quad (175)$$

je sice zajímavý, ale zatím to není ten vztah, jehož platnost jsme měli dokázat. Navíc zatím jsme využívali pouze matematické úpravy výrazů bez fyzikálního náhledu. Ten využijeme nyní: pravou stranu rovnosti (175)

vyjádříme pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu (47). Dostaneme tak $\frac{\partial H}{\partial q^j} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) = -\frac{dp_j}{dt}$ (druhá

úprava byla provedena na základě definice kanonické hybnosti (172)). Tím jsme dokázali i druhou Hamiltonovu kanonickou rovnici.

Ve druhém kroku dokážeme Hamiltonovy kanonické rovnice pomocí Hamiltonova variačního principu. Důkaz nebudeme provádět v Lagrangeově formalismu, ale v Hamiltonově formalismu. Definiční vztah hamiltoniánu (173) upravíme na tvar

$$L = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}^j - H. \quad (176)$$

Vyjdeme z podmínky (130). V ní vystupuje akce S , kterou vyjádříme pomocí definice (131) s přihlédnutím k lagrangiánu ve tvaru (176). Dostaneme tedy $0 = \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}^j - H \right) dt$. Výraz

$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}^j - H \right) dt$ přitom můžeme interpretovat tak, že se zajímáme o změnu integrálu při změně funkcí,

které integrujeme. Proto můžeme dále pokračovat v úpravách. Začneme diferencováním a dostaneme

$$0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^n \left(\delta p_j \dot{q}^j + p_j \delta \dot{q}^j - \frac{\partial H}{\partial q^j} \delta q^j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j \right) - \frac{\partial H}{\partial t} \delta t \right) dt. \quad (177)$$

Člen $\frac{\partial H}{\partial t} \delta t$ ve výrazu (177) je nulový, protože jsme se omezili na izochronní variace (viz odstavec 4.3).

Dále upravíme výraz $\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n p_j \delta \dot{q}^j dt$, který je též částí výrazu (177). S využitím identity (136) a následným

použitím metody per-partes můžeme psát: $\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n p_j \delta \dot{q}^j dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n p_j \frac{d}{dt} (\delta q^j) dt = \left[p_j \delta q^j(t) \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \frac{dp_j}{dt} \delta q^j dt$.

Vzhledem k tomu, že uvažujeme izochronní variace s pevnými konci, platí podmínka (132) a tedy

$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n p_j \delta \dot{q}^j dt = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \frac{dp_j}{dt} \delta q^j dt$. Nyní dosadíme do výrazu (177) a dostaneme

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \left(\delta p_j \dot{q}^j - \frac{dp_j}{dt} \delta q^j - \frac{\partial H}{\partial q^j} \delta q^j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j \right) dt. \quad \text{Po úpravě tedy máme}$$

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \left(\left(\dot{q}^j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j + \left(-\frac{dp_j}{dt} - \frac{\partial H}{\partial q^j} \right) \delta q^j \right) dt. \quad (178)$$

Všechny variace δq^j a δp_j pro $j=1, 2, \dots, n$ ze vztahu (178) jsou dovolené a navzájem nezávislé. To ovšem znamená, že vztah (178) je splněn pouze tehdy, když $\dot{q}^j - \frac{\partial H}{\partial p_j} = 0$ a $-\frac{dp_j}{dt} - \frac{\partial H}{\partial q^j} = 0$ pro $j=1, 2, \dots, n$.

To je ovšem vyjádření Hamiltonových kanonických rovnic (174), jejichž platnost jsme chtěli dokázat.

Na základě podmínky (130) jsme tedy odvodili další pohybové rovnice. V odstavci 4.3 jsme odvodili z podmínky (130) Lagrangeovy rovnice druhého druhu, nyní ze stejné podmínky Hamiltonovy kanonické rovnice. Podmínka (130) má tedy hlubší význam.

4.9 Ilustrace použití Hamiltonových kanonických rovnic

4.9.1 Harmonický oscilátor

Harmonický oscilátor je velmi důležitý pojem nejen pro teoretickou fyziku a mechaniku, ale i pro další obory fyziky. Pomocí harmonického kmitání lze totiž modelovat řadu fyzikálních jevů, protože pohyb harmonického oscilátoru je jednoduchý, je popsán relativně jednoduchými rovnicemi a přitom jej lze použít k velmi přesnému modelování složitějších fyzikálních jevů a dějů (přenos tepla, vysvětlení měrné tepelné kapacity látek, odvození vlnové rovnice, kmity atomů resp. částic popisovaných v rámci kvantové fyziky, ...).

Chceme-li napsat Hamiltonovy kanonické rovnice (viz odstavec 4.8.4) popisující harmonický oscilátor, je nutné nejdříve napsat jeho lagrangián. Ten má tvar $L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$ a z něj vyplývající kanonická hybnost je dána vztahem $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$. Pro výpočet hamiltoniánu je nezbytné vyjádřit všechny zobecněné rychlosti

pomocí kanonických hybností, proto si připravíme vyjádření $\dot{x} = \frac{p}{m}$. Hamiltonián můžeme psát na základě jeho

definice (173) ve tvaru $H = p \dot{x} - L = \frac{p^2}{m} - \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{p^2}{m} - \frac{1}{2} m \frac{p^2}{m^2} + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2$. Výraz $\frac{p^2}{2m}$ má

jednotku $\left[\frac{p^2}{2m} \right] = \frac{\text{kg}^2 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}}{\text{kg}} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$ a tedy platí alternativní vyjádření $T = \frac{p^2}{2m}$. Hamiltonián je

tedy roven $H = T + V = E$ a vyjadřuje celkovou mechanickou energii systému.

Vztah $H = E$ neplatí obecně, ale pouze tehdy, nezávisí-li hamiltonián explicitně na čase. A tato podmínka je splněna ve většině vyšetřovaných případů.

Nyní můžeme napsat Hamiltonovy rovnice pro harmonický oscilátor tak, že dosadíme do vztahů (174). Dostaneme tedy $\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$ a $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx$. Máme tedy dvě lineární rovnice $\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}$ a $\frac{dp}{dt} = -kx$.

Zderivujeme-li první z nich podle času, dostaneme: $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m} \frac{dp}{dt}$ a dosadíme do ní z druhé Hamiltonovy rovnice. Získáme tedy rovnici $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{kx}{m}$ a po úpravě $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kx}{m} = 0$, což je známá rovnice popisující pohyb harmonického oscilátoru. Její řešení lze psát ve tvaru $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, kde A je amplituda výchylky, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ je úhlová frekvence kmitání harmonického oscilátoru a φ_0 je počáteční fáze kmitání.

4.9.2 Třírozměrný pohyb částice v poli potenciální energie

Pohyb částice v prostoru v poli, v němž je definována potenciální energie, jsme již vyšetřovali (viz např. odstavec 3.8). Nyní jí vyřešíme znovu a pokusíme se napsat hamiltonián pohybující se částice v různých souřadných systémech:

1. v kartézských souřadnicích - viz odstavec 4.9.2.1;
2. v cylindrických souřadnicích - viz odstavec 4.9.2.2;
3. ve sférických souřadnicích - viz odstavec 4.9.2.3.

4.9.2.1 Popis pohybu částice v kartézských souřadnicích

Lagrangeova funkce popisující pohyb částice v kartézských souřadnicích má tvar

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z). \quad (179)$$

Jednotlivé kanonické hybnosti, které odpovídají souřadnicím x , y a z , získáme derivací Lagrangeovy funkce podle zobecněné rychlosti příslušející dané souřadnici. Takže postupně dostáváme

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad \text{a} \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}. \quad (180)$$

Z kanonických hybností můžeme vyjádřit příslušné zobecněné rychlosti a získáme

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m} \quad \text{a} \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}. \quad (181)$$

Hamiltonián můžeme v tomto případě psát ve tvaru $H = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - L$. Po dosazení ze vztahů (179), (180) a (181) postupně pro hamiltonián uvažované pohybující se částice dostaneme $H = \frac{p_x^2}{m} + \frac{p_y^2}{m} + \frac{p_z^2}{m} - \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z) = \frac{p_x^2}{m} + \frac{p_y^2}{m} + \frac{p_z^2}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p_x^2}{m^2} + \frac{p_y^2}{m^2} + \frac{p_z^2}{m^2}\right) + V(x, y, z)$. Takže hamiltonián je roven

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z) \quad (182)$$

a je nezávislý na čase. Tedy platí $H = E$.

Další výpočet pomocí Hamiltonových rovnic není možný, protože neznáme konkrétní průběh potenciální energie $V(x, y, z)$.

4.9.2.2 Popis pohybu částice v cylindrických souřadnicích

Lagrangeova funkce popisující pohyb částice v kartézských souřadnicích je dána vztahem (179). Do cylindrických souřadnic jí přepíšeme pomocí následujících transformačních vztahů:

$$x = R \cos \Phi;$$

$$y = R \sin \Phi;$$

$$z = z.$$

Tyto souřadnice závisí na čase. Vzhledem k tomu, že v dalším výpočtu budeme potřebovat jejich časové derivace, určíme je:

$$\dot{x} = \dot{R} \cos \Phi - R \dot{\Phi} \sin \Phi;$$

$$\dot{y} = \dot{R} \sin \Phi + R \dot{\Phi} \cos \Phi;$$

$$\dot{z} = \dot{z}$$

Nyní dosadíme do lagrangiánu (179), zjednodušíme a dostaneme

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\Phi}^2 + \dot{z}^2) - V(R, \Phi, z). \quad (183)$$

Kanonické hybnosti odpovídající souřadnicím R , Φ a z získáme derivací Lagrangeovy funkce podle zobecněné rychlosti příslušející dané souřadnici. Takže postupně dostáváme

$$p_R = \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = m\dot{R}, \quad p_\Phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} = mR^2\dot{\Phi} \quad \text{a} \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}. \quad (184)$$

Z předpisu pro kanonické hybnosti můžeme vyjádřit příslušné zobecněné rychlosti a získáme

$$\dot{R} = \frac{p_R}{m}, \quad \dot{\Phi} = \frac{p_\Phi}{mR^2} \quad \text{a} \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}. \quad (185)$$

Hamiltonovu funkci nyní můžeme psát ve tvaru $H = p_R \dot{R} + p_\Phi \dot{\Phi} + p_z \dot{z} - L$. Po dosazení ze vztahů (183), (184) a (185) pro Hamiltonovu funkci pohybující se částice postupně dostaneme

$$H = \frac{p_R^2}{m} + \frac{p_\Phi^2}{m} + \frac{p_z^2}{m} - \frac{m}{2} (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\Phi}^2 + \dot{z}^2) + V(R, \Phi, z) = \frac{p_R^2}{m} + \frac{p_\Phi^2}{m} + \frac{p_z^2}{m} - \frac{m}{2} \left(\frac{p_R^2}{m^2} + \frac{R^2 p_\Phi^2}{m^2 R^4} + \frac{p_z^2}{m} \right) + V(R, \Phi, z).$$

Takže hamiltonián je roven

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_R^2 + \frac{p_\Phi^2}{R^2} + p_z^2 \right) + V(R, \Phi, z) \quad (186)$$

a je nezávislý na čase. Proto tedy platí $H = E$.

Další výpočet pomocí Hamiltonových rovnic není možný, protože neznáme konkrétní průběh potenciální energie $V(R, \Phi, z)$.

4.9.2.3 Popis pohybu částice ve sférických souřadnicích

Lagrangeova funkce popisující pohyb částice v kartézských souřadnicích je zapsána ve tvaru (179). Do sférických souřadnic ji přepíšeme pomocí následujících transformačních vztahů:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi;$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi;$$

$$z = r \cos \vartheta.$$

Tyto souřadnice závisí na čase. Proto nejdříve určíme jejich první derivace podle času:

$$\dot{x} = \dot{r} \sin \vartheta \cos \varphi + r \dot{\vartheta} \cos \vartheta \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \varphi;$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \vartheta \sin \varphi + r \dot{\vartheta} \cos \vartheta \sin \varphi + r \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \varphi;$$

$$\dot{z} = \dot{r} \cos \vartheta - r \dot{\vartheta} \sin \vartheta$$

Nyní dosadíme do lagrangiánu (179), zjednodušíme a dostaneme

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) - V(r, \vartheta, \varphi). \quad (187)$$

Kanonické hybnosti odpovídající souřadnicím r , ϑ a φ získáme derivací lagrangiánu podle zobecněné rychlosti příslušející dané souřadnici. Takže postupně dostáváme

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = mr^2\dot{\vartheta} \quad \text{a} \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \sin^2 \vartheta. \quad (188)$$

Z předpisu pro kanonické hybnosti můžeme nyní vyjádřit příslušné zobecněné rychlosti ve tvarech

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{mr^2} \quad \text{a} \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2 \vartheta}. \quad (189)$$

Hamiltonovu funkci nyní můžeme psát ve tvaru $H = p_r \dot{r} + p_\vartheta \dot{\vartheta} + p_\varphi \dot{\varphi} - L$. Po dosazení ze vztahů (187), (188) a (189) můžeme pro Hamiltonovu funkci uvažované pohybující se částice postupně psát

$$H = \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\vartheta^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{m} - \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) + V(r, \vartheta, \varphi) =$$

$$= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\vartheta^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{m} - \frac{1}{2} m \left(\frac{p_r^2}{m^2} + \frac{r^2 p_\vartheta^2}{m^2 r^4} + \frac{r^2 \sin^2 \vartheta p_\varphi^2}{m^2 r^4 \sin^4 \vartheta} \right) + V(r, \vartheta, \varphi). \quad \text{Takže hamiltonián je roven}$$

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) + V(r, \vartheta, \varphi) \quad (190)$$

a je nezávislý na čase. Proto tedy platí $H = E$.

Další výpočet pomocí Hamiltonových rovnic není možný, protože neznáme konkrétní průběh potenciální energie $V(r, \vartheta, \varphi)$.

4.9.3 Nabíhá částice v elektromagnetickém poli

Další ilustrací použití Hamiltonových rovnic je jejich aplikace na vyšetřování pohybu částice s nábojem e , která se pohybuje v elektromagnetickém poli charakterizovaném skalárním potenciálem φ a vektorovým potenciálem \vec{A} .

Lagrangeova funkce popisující pohyb nabité částice v elektromagnetickém poli (vzhledem ke vztahu (70), který definuje potenciální energii částice) má tvar

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - e(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}), \quad (191)$$

který je možné přepsat ve složkách vektorů \vec{v} a \vec{A} ve tvaru

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - e(\varphi - \dot{x}A_x - \dot{y}A_y - \dot{z}A_z). \quad (192)$$

Kanonické hybnosti, které odpovídají souřadnicím x , y a z , získáme derivací Lagrangeovy funkce podle zobecněné rychlosti příslušející dané souřadnici. Takže postupně dostáváme

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + eA_x, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + eA_y \quad \text{a} \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + eA_z. \quad (193)$$

Z kanonických hybností můžeme vyjádřit příslušné zobecněné rychlosti a získáme

$$\dot{x} = \frac{p_x - eA_x}{m}, \quad \dot{y} = \frac{p_y - eA_y}{m} \quad \text{a} \quad \dot{z} = \frac{p_z - eA_z}{m}. \quad (194)$$

Hamiltonián můžeme v tomto případě psát ve tvaru $H = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - L$. Po dosazení ze vztahů (192), (193) a (194) postupně pro hamiltonián uvažované částice pohybující se v elektromagnetickém poli máme

$$\begin{aligned} H &= m\dot{x}^2 + e\dot{x}A_x + m\dot{y}^2 + e\dot{y}A_y + m\dot{z}^2 + e\dot{z}A_z - \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + e(\varphi - \dot{x}A_x - \dot{y}A_y - \dot{z}A_z) = \\ &= \frac{(p_x - eA_x)^2}{m} + \frac{(p_y - eA_y)^2}{m} + \frac{(p_z - eA_z)^2}{m} - \frac{1}{2}m \left(\frac{(p_x - eA_x)^2}{m^2} + \frac{(p_y - eA_y)^2}{m^2} + \frac{(p_z - eA_z)^2}{m^2} \right) + e\varphi = \\ &= \frac{1}{2m} \left((p_x - eA_x)^2 + (p_y - eA_y)^2 + (p_z - eA_z)^2 \right) + e\varphi. \end{aligned} \quad (195)$$

a i v tomto případě je nezávislý na čase, takže $H = E$.

4.9.4 Hamiltonián v dalších oborech fyziky

Hamiltonián je velmi důležitý pro kvantovou fyziku, kde se z něho stává operátor, je důležitý pro statistickou fyziku, pro teorii relativity, ...

V kvantové mechanice je pohybovou rovnicí, pomocí níž se vyšetřuje řada úloh, Schrödingerova rovnice ve tvaru

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \quad (196)$$

kde i je imaginární jednotka, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ je tzv. redukovaná Planckova konstanta, \hat{H} je Hamiltonův operátor a ψ je vlnová funkce, jejíž druhá mocnina udává pravděpodobnost výskytu dané částice, pro niž se Schrödingerova rovnice řeší. Hamiltonův operátor má v kvantové fyzice tvar

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\hbar^2\Delta + V, \quad (197)$$

kde symbol Δ označuje Laplaceův operátor.

Další fyzikální teorii, která využívá Hamiltonovu funkci, je kvantová teorie pole. Je to teorie, v níž se kvantuje celé pole rozložením do rovinných vln. Interakce jednotlivých vln se pak znázorňují pomocí tzv. Feynmanových diagramů.

Hamiltonovy rovnice jsou důležité i pro statistickou fyziku, která tvoří přechod mezi mechanikou a termodynamikou. Vzhledem k tomu, že se zabývá systémy, které obsahují řádově 10^{23} částic, není možné popisovat jednotlivé částice. Proto se hledají a počítají ve fázovém prostoru fyzikální veličiny, u nichž lze určit střední hodnoty charakterizující celý uvažovaný systém. Tak získáme informace o teplotě, vnitřní energii, ...

4.10 Poissonovy závorky

4.10.1 Definice a matematické vlastnosti

Francouzský matematik a fyzik Siméon Denis Poisson (1781 - 1840) zavedl v roce 1809 symboliku, která se používá dodnes. Říká se jí Poissonovy závorky.

MĚJME DVĚ FUNKCE $f(q^j, p_j, t)$ A $g(q^j, p_j, t)$ DEFINOVANÉ VE FÁZOVÉM PROSTORU. PAK LZE VE FÁZOVÉM PROSTORU DEFINOVAT NOVOU FUNKCI STEJNÝCH PROMĚNNÝCH JAKO MAJÍ FUNKCE f A g PŘEDPÍSEM

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q^j} \right), \quad (198)$$

KDE q^j JSOU ZOBECNĚNÉ SOUŘADNICE, p_j JSOU KANONICKÉ HYBNOSTI (PRO $j=1, 2, \dots, n$) A n JE POČET STUPŇŮ VOLNOSTI. FUNKCE $\{f, g\}$ SE NAZÝVÁ POISSONOVA ZÁVORKA FUNKCÍ f A g .

Poissonovy závorky je tedy označení pro operaci, která se provádí se dvěma funkcemi a jejímž výsledkem je opět funkce.

V literatuře se Poissonovy závorky občas značí symbolem $[f, g]$, případně se definují s opačným znaménkem.

Počítání s Poissonovými závorkami se řídí těmito pravidly:

1. Poissonovy závorky jsou antisymetrickou operací, tj. platí

$$\{f, g\} = -\{g, f\}; \quad (199)$$

2. Poissonovy závorky jsou lineární, tj. pro $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\} = c_1 \{f_1, g\} + c_2 \{f_2, g\}; \quad (200)$$

Tento vztah tedy ukazuje, že Poissonovy závorky jsou lineární v prvním argumentu. Z antisymetrie závorek vyplývá, že závorky jsou lineární i ve druhém argumentu.

3. Poissonovy závorky splňují tzv. **Jacobiho identitu**

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0; \quad (201)$$

4. Poissonovy závorky lze aplikovat i na součin funkcí

$$\{fg, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\}. \quad (202)$$

Tento vztah vyplývá ze vztahu pro derivaci součinu dvou funkcí (tzv. Leibnitzovo pravidlo). Vzhledem k tomu, že výsledkem Poissonových závorek je funkce, lze např. člen $\{f, h\}g$ psát i ve tvaru $g\{f, h\}$, protože násobení funkcí je komutativní.

Ze vztahů (199), (200) a (201) vyplývá, že Poissonovy závorky definované na fázovém prostoru vztahem (198) tvoří tzv. Lieovu grupu (jsou to bilineární operace na vektorovém prostoru).

V kvantové mechanice se Poissonovy závorky stávají operátory a obecně už komutativní nejsou.

4.10.2 Fundamentální Poissonovy závorky

Dříve, než uvedeme speciální Poissonovy závorky a jejich fyzikální aplikace, připomeneme platnost jedné identity.

PRO FUNKCI $f(q^j, p_j, t)$ DEFINOVANOU VE FÁZOVÉM PROSTORU PLATÍ

$$\{f, f\} = 0. \quad (203)$$

Důkaz vztahu (203) vyplývá ze vztahu (199). Poissonovy závorky jsou antisymetrickou operací aplikovanou na dvě funkce (v tomto případě na dvě identické funkce f). Existuje jediné číslo a (to číslo 0), které se rovná svému opačnému číslu. Podle vztahu (199) se totiž při změně pořadí funkcí, na které aplikujeme Poissonovy závorky, mění jejich znaménko. Proto $\{f, f\} = -\{f, f\} = 0$.

Dosadíme-li nyní za obecné funkce f a g , pro které jsme vztahem (198) definovali Poissonovy závorky, zobecněné souřadnice $q^j(t)$ a kanonické hybnosti $p_j(t)$ můžeme vyslovit tvrzení.

PRO POISSONOVY ZÁVORKY APLIKOVANÉ NA ZOBECNĚNÉ SOUŘADNICE $q^j(t)$ A NA KANONICKÉ HYBNOSTI $p_j(t)$ PLATÍ TYTO VZTAHY

$$\{q^i, q^j\} = 0, \{p_i, p_j\} = 0 \text{ a } \{q^i, p_j\} = \delta_j^i \quad (204)$$

PRO $i, j = 1, 2, \dots, n$, KDE n JE POČET STUPŇŮ VOLNOSTI DANÉHO SYSTÉMU.

Důkaz prvních dvou částí tvrzení je snadný: zobecněné souřadnice $q^j(t)$ a kanonické hybnosti $p_j(t)$ jsou (pro všechny možné kombinace přípustných indexů) navzájem nezávislé. Uvědomíme-li si, že v definici Poissonových závorek (198) vystupují parciální derivace jak podle zobecněné souřadnice, tak podle kanonické hybnosti, je jasné, že výsledkem musí být nula.

Při derivaci funkce podle proměnné, na které daná funkce nezávisí, dostáváme nulu, neboť v dané proměnné (podle níž derivujeme) je funkce konstantní. A derivace konstanty je nula. Proto i derivace zobecněné souřadnice podle kanonické hybnosti (resp. naopak) je nulová.

Důkaz posledního ze vztahů (204) vyplývá z definice Poissonových závorek (198):

$$\{q^i, p_j\} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial q^i}{\partial q^k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q^i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q^k} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial q^i}{\partial q^k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - 0 \right) = \frac{\partial q^i}{\partial q^j} \frac{\partial p_j}{\partial p_j} = \frac{\partial q^i}{\partial q^i} \frac{\partial p_j}{\partial p_j} = \delta_j^i.$$

Z definičního vztahu Poissonových závorek tedy zůstane jen první člen (druhý je identicky roven nule). A v závislosti na tom, zda budeme mít zobecněné souřadnice (resp. kanonické hybnosti) stejné či různé, získáme výsledek jedna nebo nule, což zapíšeme symbolem δ_j^i (Kroneckerovo delta).

Této vlastnosti Poissonových závorek sestavených ze zobecněných souřadnic a kanonických hybností se využívá v kvantové mechanice. Pomocí zobecněných souřadnic a kanonických hybností se definují příslušné operátory a získáme vztah analogický Poissonovým závorkám: $[\hat{q}^i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_j^i$. Z tohoto vztahu pak také vyplývá principiální nemožnost měřit současně libovolně přesně polohu a hybnost částice, což popisují tzv. Heisenbergovy relace neurčitosti.

Na základě Poissonových závorek lze dokázat následující tvrzení. Toto tvrzení i jeho důsledky pomohou při řešení řady úloh.

PRO SKUTEČNÝ POHYB PLATÍ

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (205)$$

KDE $f(q^j(t), p_j(t), t)$ (PRO $j = 1, 2, \dots, n$) JE LIBOVOLNÁ FUNKCE DEFINOVANÁ NA FÁZOVÉM PROSTORU A H JE HAMILTONIÁN UVAŽOVANÉHO SYSTÉMU.

Fráze „pro skutečný pohyb“ znamená, že funkce f splňuje Hamiltonovy kanonické rovnice (174).

Důkaz tvrzení provedeme rozepsáním totální derivace funkce $f(q^j(t), p_j(t), t)$ podle času. Platí

$$\frac{df}{dt} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^k} \frac{dq^k}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

S využitím Hamiltonových kanonických rovnic můžeme dále psát

$$\frac{df}{dt} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q^k} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

a dále upravit s využitím definičního vztahu Poissonových závorek (198).

Takže dostaneme $\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$, což je vztah, jehož platnost jsme chtěli dokázat.

Prvním důsledkem právě uvedeného tvrzení je podmínka, za které se funkce f stává integrálem pohybu (viz odstavec 3.7).

Najít integrál pohybu je důležité, neboť každý integrál pohybu zjednoduší hledání řešení Lagrangeových rovnic druhého druhu (viz odstavec 3.7).

NENÍ-LI FUNKCE $f(q^j(t), p_j(t))$ ZÁVISLÁ NA ČASE, PAK TATO FUNKCE JE INTEGRÁLEM POHYBU PRÁVĚ TEHDY, KDYŽ $\{f, H\} = 0$.

Funkce f nesmí tedy záviset na čase přímo; na čase ovšem mohou záviset zobecněné souřadnice nebo kanonické hybnosti, na kterých je závislá funkce f .

Nezávisí-li funkce f explicitně na čase, pak $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$. To ovšem znamená, že na základě vztahu (205) můžeme psát $\frac{df}{dt} = \{f, H\}$. Dále víme, že funkce f je integrálem pohybu, jestliže platí vztah $\frac{df}{dt} = 0$ (viz odstavec 3.7). V tom případě ale $\{f, H\} = 0$.

Tento důsledek poskytuje návod na hledání integrálů pohybu: stačí ověřit, zda pro nějakou funkci f , která popisuje daný fyzikální systém s hamiltoniánem H , platí $\{f, H\} = 0$. Pokud ano, je funkce f integrálem pohybu.

Druhý důsledek vztahu (205) dává návod na určení, kdy sám hamiltonián daného systému je integrálem pohybu.

ČASOVĚ NEZÁVISLÝ HAMILTONIÁN H DANÉHO FYZIKÁLNÍHO SYSTÉMU JE INTEGRÁLEM POHYBU.

Na základě vztahu (203) můžeme psát $\{H, H\} = 0$ a skutečnost, že hamiltonián je nezávislý na čase, můžeme přepsat podmínkou $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Na základě vztahu (205), do kterého dosadíme $f = H$, pak můžeme psát

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0. \text{ Podmínka } \frac{dH}{dt} = 0 \text{ přitom určuje, že hamiltonián } H \text{ je integrálem pohybu.}$$

Právě uvedený důsledek souvisí s tím, že pokud je lagrangián L daného fyzikálního systému časově nezávislý, zachovává se zobecněná energie h definovaná vztahem (81) (viz odstavec 3.7). Časová nezávislost hamiltoniánu H pak souvisí se zákonem zachování mechanické energie E .

Třetí důsledek vztahu (205) udává podmínky, za kterých je integrálem pohybu přímo Poissonova závorka.

POKUD FUNKCE $f(q^j(t), p_j(t))$ A $g(q^j(t), p_j(t))$ JSOU INTEGRÁLY POHYBU, PAK $\{f, g\}$ JE TAKÉ INTEGRÁLEM POHYBU.

V argumentech funkcí f a g již neuvádíme jako parametr čas, protože mají-li být funkce f a g integrály pohybu, pak na čase záviset nesmí!

Při důkazu opět vyjdeme ze vztahu (205), který aplikujeme na Poissonovu závorku $\{f, g\}$:

$$\frac{d}{dt}(\{f, g\}) = \{\{f, g\}, H\} + \frac{\partial}{\partial t}(\{f, g\}) = \{\{f, g\}, H\}, \text{ neboť jestliže jsou funkce } f \text{ a } g \text{ nezávislé na čase, je na čase nezávislá též jejich Poissonova závorka } \{f, g\}, \text{ tedy } \frac{\partial}{\partial t}(\{f, g\}) = 0. \text{ S využitím Jacobiho identity (201) můžeme dále psát } \frac{d}{dt}(\{f, g\}) = \{\{f, g\}, H\} = -\{\{g, H\}, f\} - \{\{H, f\}, g\}. \text{ Jsou-li } f \text{ a } g \text{ integrály pohybu, pak pro ně platí } \{f, H\} = 0 \text{ a } \{g, H\} = 0, \text{ takže } \frac{d}{dt}(\{f, g\}) = -\{0, f\} - \{0, g\} = 0. \text{ To ovšem znamená, že Poissonova závorka } \{f, g\} \text{ je integrálem pohybu. A to jsme měli dokázat.}$$

Právě uvedeným způsobem by bylo možné přidávat postupně další funkce, které by byly integrály pohybu, a tak vytvořit obecně třeba i nekonečně mnoho integrálů pohybu. Ovšem integrálů pohybu, které pomohou při řešení pohybových rovnic, může být maximálně jen tolik, kolik je stupňů volnosti daného fyzikálního systému. Metoda Poissonových závorek, kterou jsme právě uvedli, tak totiž generuje i takové funkce, které jsou sice integrály pohybu, ale jsou lineárními kombinacemi již existujících integrálů pohybu nebo jsou nulové. A takové integrály pohybu již dále při řešení úloh nepomohou. Ale i přesto je právě uvedená konstrukce integrálů pohybu velmi důležitá.

4.11 Kanonické transformace

Kanonická transformace je nedílnou součástí Hamiltonova formalismu, protože určuje takovou změnu souřadnic fázového prostoru, při níž zůstávají v platnosti Hamiltonovy kanonické rovnice (174).

4.11.1 Definice a základní vztahy kanonických transformací

KANONICKÁ TRANSFORMACE JE KAŽDÁ ZMĚNA SOUŘADNIC FÁZOVÉHO PROSTORU (PARAMETRŮ FÁZOVÉHO PROSTORU), KTERÁ ZACHOVÁVÁ STRUKTURU HAMILTONOVÝCH KANONICKÝCH ROVNIC.

To znamená, že po kanonické transformaci budou mít Hamiltonovy kanonické rovnice (174) stejný tvar jako před ní.

Označíme-li původní zobecněné souřadnice q^j a původní kanonické hybnosti p_j a označíme-li dále nové zobecněné souřadnice Q^j a nové kanonické hybnosti P_j , tak pak požadujeme, aby funkce

$$Q^j = Q^j(q^i, p_i, t) \text{ a } P_j = P_j(q^i, p_i, t) \quad (206)$$

splňovaly Hamiltonovy kanonické rovnice ve tvaru

$$\frac{dQ^j}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial P_j} \text{ a } \frac{dP_j}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial Q^j} \quad (207)$$

pro hamiltonián $H' = H'(Q^j, P_j, t)$.

Splnění těchto požadavků není triviální, neboť kanonických transformací je velmi málo. Jsou ale velmi důležité pro další počítání a pro zobecnění do dalších oborů fyziky.

Při konstrukčním důkazu kanonické transformace vyjdeme ze vztahu (168). Ten definuje Lagrangeovu funkci L_1 , na základě níž lze odvodit stejné pohybové rovnice jako z Lagrangeovy funkce L . Nyní přepíšeme

vztah (168) ve tvaru $L_1 = L + \frac{dF}{dt}$, kde F je libovolná hladká funkce, která závisí na původních zobecněných souřadnicích nebo kanonických hybnostech a na kalibrační transformací nově definovaných proměnných. Jsou tedy celkem čtyři možnosti, na jakých proměnných může funkce F záviset:

1. $F_1 = F_1(q^j, Q^j, t)$;
2. $F_2 = F_2(q^j, P_j, t)$;
3. $F_3 = F_3(p_j, Q^j, t)$;
4. $F_4 = F_4(p_j, P_j, t)$.

Funkce F_1 , F_2 , F_3 a F_4 se nazývají **generující funkce** kanonické transformace. Pomocí Hamiltonova variačního principu (viz odstavec 4.3) a s využitím podmínky (130) (variace akce je nulová) lze získat podmínky, za kterých je transformace popsána jednou ze čtyř výše uvedených funkcí kanonická. Tímto způsobem lze pro každou z výše uvedených funkcí získat tzv. **podmínky kanoničnosti**, tj. nutné a postačující podmínky, které musí být splněny, aby daná transformace byla kanonická (viz tab. 1).

Třetí sloupec tab. 1 získáme tak, že každou rovnici ze druhého sloupce daného řádku derivujeme podle proměnné, podle níž se derivuje druhá z rovnic ve druhém sloupci tabulky. Např. pro první řádek derivujeme rovnici $\frac{\partial F_1}{\partial q^i} = p_i$ podle Q^k a rovnici $\frac{\partial F_1}{\partial Q^k} = -P_k$ podle q^i a získáme: $\frac{\partial}{\partial Q^k} \left(\frac{\partial F_1}{\partial q^i} \right) = \frac{\partial p_i}{\partial Q^k}$ a $\frac{\partial}{\partial q^i} \left(\frac{\partial F_1}{\partial Q^k} \right) = -\frac{\partial P_k}{\partial q^i}$. Při záměnnosti parciálních derivací platí: $\frac{\partial p_i}{\partial Q^k} = -\frac{\partial P_k}{\partial q^i}$. Důležité je, aby derivované proměnné byly vyjádřeny ve správných proměnných, tj. v proměnných, v jakých je vyjádřena v tomto případě funkce F_1 (obecně funkce z daného řádku tabulky).

| Generující funkce | Podmínky kanoničnosti | Podmínky integrability |
|--------------------------|--|--|
| $F_1 = F_1(q^j, Q^j, t)$ | $\frac{\partial F_1}{\partial q^i} = p_i$ $\frac{\partial F_1}{\partial Q^k} = -P_k$ | $\frac{\partial p_i}{\partial Q^k} = -\frac{\partial P_k}{\partial q^i}$ |
| $F_2 = F_2(q^j, P_j, t)$ | $\frac{\partial F_2}{\partial q^i} = p_i$ $\frac{\partial F_2}{\partial P_k} = Q^k$ | $\frac{\partial p_i}{\partial P_k} = \frac{\partial Q^k}{\partial q^i}$ |
| $F_3 = F_3(p_j, Q^j, t)$ | $\frac{\partial F_3}{\partial p_i} = -q^i$ $\frac{\partial F_3}{\partial Q^k} = -P_k$ | $\frac{\partial q^i}{\partial Q^k} = \frac{\partial P_k}{\partial p_i}$ |
| $F_4 = F_4(p_j, P_j, t)$ | $\frac{\partial F_4}{\partial p_i} = -q^i$ $\frac{\partial F_4}{\partial P_k} = Q^k$ | $\frac{\partial q^i}{\partial P_k} = -\frac{\partial Q^k}{\partial p_i}$ |

tab. 1

Derivace ve druhém sloupci tab. 1 se počítají podle proměnných, na kterých závisí daná generující funkce. Přitom platí: derivace podle jedné původní proměnné je rovna druhé původní proměnné (např. $\frac{\partial F_2}{\partial q^i} = p_i$) a derivace podle jedné nové proměnné je rovna druhé nové proměnné (např. $\frac{\partial F_3}{\partial Q^k} = -P_k$). Znaménko mínus je u původní zobecněné souřadnice a u nové kanonické hybnosti.

Dále platí $H'(Q^j, P_j, t) = H(q^j, p_j, t) + \frac{\partial F_a}{\partial t}$ pro $a = 1, 2, 3, 4$ a pro $i, j, k = 1, 2, \dots, n$.

Pro ověření faktu, zda daná transformace je či není kanonická, stačí ověřit vztahy z jednoho řádku tab. 1.

Důkaz vztahů uvedených v tab. 1 lze provést rozpisem lagrangiánu a hamiltoniánu daného fyzikálního systému. Pro funkci F_1 můžeme na základě vztahu (168) psát

$$L_1(q^j, p_j, t) = L(Q^j, P_j, t) + \frac{dF_1(q^j, Q^j, t)}{dt}. \quad (208)$$

Je-li právě uvedeným předpisem lagrangián definovaný v každém čase t a získáme-li variaci příslušných akcí ve fázovém prostoru stejné pohybové rovnice v původních souřadnicích i v nových souřadnicích, je uvažovaná transformace popsána generující funkcí F_1 kanonická.

Dosazením vztahu (176) (vyjádření lagrangiánu pomocí hamiltoniánu) do vztahu (208) získáme:

$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - H(q^j, p_j, t) = \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}^i - H'(Q^j, P_j, t) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F_1}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial F_1}{\partial Q^i} \dot{Q}^i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t}$. Přeuspořádáním členů tohoto výrazu dostaneme

$$\sum_{i=1}^n \left(\left(p_i - \frac{\partial F_1}{\partial q^i} \right) \dot{q}^i - \left(P_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q^i} \right) \dot{Q}^i \right) = H(q^j, p_j, t) - H'(Q^j, P_j, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (209)$$

Vztah (209) je identicky splněn, pokud $p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q^i}$, $\frac{\partial F_1}{\partial Q^i} = -P_i$ a $H'(Q^j, P_j, t) = H(q^j, p_j, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}$, což jsou vztahy, jejichž platnost jsme měli dokázat.

Důkaz pro funkci F_2 je podobný. Analogicky jako pro funkci F_1 , můžeme i pro funkci F_2 napsat vztah

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - H(q^j, p_j, t) = \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}^i - H'(Q^j, P_j, t) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F_2}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i \right) + \frac{\partial F_2}{\partial t}, \quad (210)$$

ve kterém jsou ve srovnání se vztahem (209) jen jiné parciální derivace funkce F_2 , neboť funkce F_2 závisí na proměnných q^j , P_j a t . Nyní bychom potřebovali (stejně jako v předchozí části důkazu) porovnat koeficienty u \dot{Q}^i a \dot{P}_i . Využijeme tedy toho, že přičtením úplné časové derivace funkce k lagrangiánu se popis systému nezmění (viz vztah (168)). Určitě platí identita

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n P_i Q^i \right) = \sum_{i=1}^n \dot{P}_i Q^i + \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}^i, \quad (211)$$

kterou můžeme dosadit do vztahu (210) a dostaneme tak

$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - H(q^j, p_j, t) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n P_i Q^i \right) - \sum_{i=1}^n \dot{P}_i Q^i - H'(Q^j, P_j, t) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F_2}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i \right) + \frac{\partial F_2}{\partial t}$ a po přerovnání

členů získáme vztah $\sum_{i=1}^n \left(\left(p_i - \frac{\partial F_2}{\partial q^i} \right) \dot{q}^i - \left(\frac{\partial F_2}{\partial P_i} - Q^i \right) \dot{P}_i \right) = H(q^j, p_j, t) - H'(Q^j, P_j, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n P_i Q^i \right)$,

který je splněn pro $\frac{\partial F_2}{\partial q^i} = p_i$, $\frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q^i$ a $H'(Q^j, P_j, t) = H(q^j, p_j, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n P_i Q^i \right)$. Poslední rovnost

můžeme s využitím vztahů (168) a (176) psát ve tvaru $H'(Q^j, P_j, t) = H(q^j, p_j, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}$, čímž jsme získali sérii vztahů, jejichž platnost jsme chtěli ukázat.

Lagrangián ani hamiltonián daného fyzikálního systému se nezmění, jestliže k němu přičteme úplnou časovou derivaci funkce. A výraz $\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n P_i Q^i \right)$ je úplnou časovou derivací funkce.

Důkazy pro funkce F_3 a F_4 by byly analogické.

4.11.2 Vlastnosti kanonických transformací

Kanonické transformace mají některé zajímavé vlastnosti, které jsou užitečné i při řešení úloh.

Generující funkce F_1 , F_2 , F_3 a F_4 kanonické transformace (viz odstavec 4.11.1) nejsou nezávislé, ale jsou navzájem svázány Legendreovou duální transformací. Tu odvodil francouzský matematik Adrien-Marie Legendre (1752 - 1833), který se zabýval hlavně statistikou, teorií čísel, algebrou a matematickou analýzou.

Vzájemná provázanost funkcí F_1 , F_2 , F_3 a F_4 , z nichž funkce F_1 je dána (resp. určena výpočtem), je popsána těmito vztahy

$$F_2 = F_1 + \sum_{i=1}^n P_i Q^i, \quad F_3 = F_1 - \sum_{i=1}^n p_i q^i \quad \text{a} \quad F_4 = F_1 - \sum_{i=1}^n P_i Q^i - \sum_{i=1}^n p_i p^i. \quad (212)$$

Místo toho, že všechny další funkce budeme vyjadřovat pomocí funkce F_1 (vztahy (212)), lze vyjádřit zbývající funkce např. pomocí funkce F_2 .

Na kterém řádku tab. 1 začneme s vyjadřováním, je jedno. Všechny její řádky jsou navzájem ekvivalentní.

Vztahy (212) jsou analogické vztahům, které v termodynamice popisují přechody mezi jednotlivými potenciály popisujícími daný fyzikální systém.

Další vlastností, na základě které se práce s kanonickými transformacemi zjednoduší, je skutečnost, že tyto transformace tvoří grupu.

KANONICKÉ TRANSFORMACE TVOŘÍ GRUPU.

Jakmile o nějaké struktuře dokážeme, že tvoří grupu, je okamžitě jasné, že musí splňovat základní vlastnosti, které grupa prostě mít musí. Tak se mnohdy zjednoduší i fyzikální pohled na danou problematiku. Z faktu, že kanonické transformace tvoří grupu, vyplývá:

1. existence jednotkového prvku;

To je transformace, která nedělá nic - původní zobecněné souřadnice a kanonické hybnosti se nezmění.

2. existence inverzního prvku;
3. možnost skládání kanonických transformací.

Identita je generována funkcí $F_2 = \sum_{j=1}^n P_j q^j$. Na základě tab. 1 dostáváme $\frac{\partial F_2}{\partial q^i} = p_i$ a $\frac{\partial F_2}{\partial P_k} = Q^k$ a

výpočtem derivací podle předpisu funkce F_2 máme $\frac{\partial F_2}{\partial q^i} = p_i$ a $\frac{\partial F_2}{\partial P_k} = Q^k$. Transformace popsaná funkcí F_2 je

tedy kanonická, jestliže platí $p_i = P_i$ a zároveň $q^k = Q^k$. Neexistuje funkce F_1 ani funkce F_4 , které by generovaly identitu. Vztahy (212) sice platí obecně, ale nemusí platit u některých výjimečných kanonických transformací - např. u identity.

4.11.3 Ověřování kanoničnosti transformace

Existuje několik postupů, jak ověřit, zda daná transformace je či není kanonická transformace. Různé postupy jsou přitom u různých úloh různě náročné, a proto nelze doporučit jediný nevhodnější postup, který vede rychle a bez větších technických komplikací ke zdárnému cíli. Náročnost každého z postupů závisí na konkrétních transformačních vztazích, jejichž kanoničnost se má ověřit.

Z řady postupů uvedeme dva, které se používají nejčastěji:

1. pomocí tab. 1, v níž jsou přehledně sepsány generující funkce kanonických transformací - postup spočívá v ověření platnosti třetího sloupce (libovolného řádku) tabulky. Funkce, s nimiž pracujeme, musí být ovšem vyjádřeny ve správné kombinaci poměných q^j , p_j , Q^j , P_j . Druhý sloupec téhož řádku tabulky poskytuje návod na nalezení generující funkce F .

Správná kombinace proměnných vyplývá z proměnných, které vystupují v argumentu funkce F na daném řádku tabulky. Více - viz příklad v tomto odstavci.

2. pomocí Poissonových závorek (viz odstavec 4.10) - transformace je totiž kanonická tehdy, pokud současně platí vztahy

$$\{Q^i, P_j\} = \delta_j^i, \quad \{Q^i, Q^j\} = 0 \quad \text{a} \quad \{P_i, P_j\} = 0. \quad (213)$$

Použití metody Poissonových závorek může být technicky náročnější: je-li počet stupňů volnosti systému roven dvěma, znamená to ověřit šest Poissonových závorek (ostatní jsou nulové).

Vztahy (213) jsou analogií ke vztahům (204). Pro identickou kanonickou transformaci platí jak vztahy (204), tak vztahy (213). Pro ostatní kanonické transformace platí vztahy (213).

Příklad: Kanonická transformace

Uvažujme transformaci danou vztahy $Q = \alpha q + \beta p$ a $P = \gamma q + \delta p$, kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ jsou konstanty. Pro které kombinace konstant α , β , γ a δ je transformace kanonická?

Řešení: Postup řešení ukážeme na obou výše uvedených postupech.

Podle prvního postupu vybereme např. čtvrtý řádek tab. 1, na kterém je generující funkce $F_4 = F_4(p, P)$ (zadané transformační vztahy nejsou závislé na čase, a tedy ani generující funkce není závislá na čase). Nyní je tedy nutné vyjádřit zbývající proměnné (tj. q a Q) pomocí stejných proměnných, na kterých závisí funkce F_4 , tj.

pomocí p a P . Ze zadaných transformačních vztahů můžeme psát: $q = \frac{1}{\gamma}(P - \delta p)$ a dosazením do prvního vztahu dostaneme $Q = \frac{\alpha}{\gamma}(P - \delta p) + \beta p = \frac{\alpha}{\gamma}P + \frac{1}{\gamma}(\beta\gamma - \delta\alpha)p$. Podle třetího sloupce čtvrtého řádku tabulky určíme $\frac{\partial q}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{1}{\gamma}(P - \delta p)\right) = \frac{1}{\gamma}$ a $-\frac{\partial Q}{\partial p} = -\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\alpha}{\gamma}P + \frac{1}{\gamma}(\beta\gamma - \delta\alpha)p\right) = -\frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma}$. Nyní zbývá určit, za jakých podmínek bude platit $\frac{\partial q}{\partial P} = -\frac{\partial Q}{\partial p}$. Je zřejmé, že tato rovnost bude splněna pouze tehdy, pokud $\frac{1}{\gamma} = -\frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma}$, tj. pokud $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. A to je podmínka, za které budou zadané transformační vztahy popisovat kanonickou transformaci. Kanonických transformací je tedy málo (je to unikátní typ transformace), protože z velkého počtu možností pro koeficienty α , β , γ a δ kanonické transformaci vyhovují jen ty možnosti, které splňují podmínku $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Při ověřování pomocí Poissonových závorek stačí v tomto případě ověřit platnost vztahu $\{Q, P\} = 1$, protože ostatní ze vztahů (213) jsou splněny. Bude-li platit $\{Q, P\} = 1$, pak je transformace kanonická. Podle definice Poissonových závorek (viz odstavec 4.10.1) můžeme psát $\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q}$. Po dosazení ze zadaných transformačních vztahů dostáváme: $\{Q, P\} = \alpha\delta - \beta\gamma$. Rovnost $\{Q, P\} = 1$ je splněna pouze tehdy, pokud $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, což je stejná podmínka, kterou jsme získali při řešení pomocí tabulky generujících funkcí.

V souvislosti s kanonickými transformacemi platí ještě další dvě důležité věty.

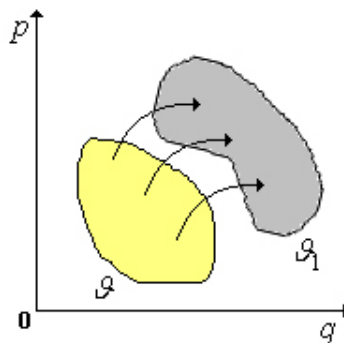
POISSONOVY ZÁVORKY JSOU INVARIANTNÍ VŮČI KANONICKÝM TRANSFORMACÍM, T.J. PRO KAŽDÉ DVĚ FUNKCE $f(q^j, p_j, t)$ A $g(q^j, p_j, t)$ FÁZOVÉHO PROSTORU PLATÍ:

$$\{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P}, \text{ tj. } \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q^j} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial Q^j} \frac{\partial g}{\partial P_j} - \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial g}{\partial Q^j} \right). \quad (214)$$

Důkaz tohoto tvrzení je zřejmý a vyžaduje ověření rozpisu Poissonových závorek podle jejich definice (viz odstavec 4.10.1) s přihlédnutím k transformačním vztahům kanonické transformace.

OBJEM FÁZOVÉHO PROSTORU SE PŘI KANONICKÉ TRANSFORMACI NEZMĚNÍ.

Schématicky je situace zobrazena na obr. 56, na kterém je šipkami naznačena transformace systému. Právě uvedené tvrzení si lze představit tak, že obsah plochy, která je vymezená ve fázovém prostoru, se kanonickou transformací nezmění. Může se změnit tvar plochy, ale nikoliv její obsah.



obr. 56

Důkaz vychází z výpočtu objemu fázového prostoru pomocí integrálního počtu:

$$V = \iint_G dQdP = \iint_g J dq dp, \text{ kde } J = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{vmatrix} \text{ je Jacobiho determinant (tzv. jacobian), který je do výpočtu}$$

integrálu zahrnut proto, že popisuje zobecnění věty o substituci pro vícerozměrné integrály. Pro výpočet

$$\text{determinantu matice druhého řádu platí: } J = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q}. \text{ Na základě definice Poissonových}$$

závorek můžeme psát $J = \{Q, P\}$. Pro kanonickou transformaci přitom podle vztahů (213) platí $\{Q, P\} = 1$. To znamená, že jacobian kanonické transformace je roven jedné, tedy $V = \iint_{\mathcal{g}} dQdP = \iint_{\mathcal{g}} Jdqdp = \iint_{\mathcal{g}} dqdp$.

Pro plnou korektnost důkazu by bylo nutné rozebrat, jak se mění při kanonické transformaci množina \mathcal{g} .

4.12 Hamiltonova - Jacobiho teorie

Hamiltonova - Jacobiho teorie je důležitá aplikace teorie kanonických transformací (viz odstavec 4.11), která umožňuje napsat další, v rámci teoretické mechaniky poslední, tvar pohybových rovnic. Tentokrát budou pohybové rovnice zapsány pomocí jediné parciální diferenciální rovnice, která vyplyne z teorie kanonických transformací.

Skutečnost, že odvozená rovnice bude parciální diferenciální rovnice (tj. budou v ní vystupovat parciální derivace funkce) je daň za jiné výrazné zjednodušení: rovnice bude jedna jediná! Což je další pokrok ve srovnání s Lagrangeovými rovnicemi druhého druhu a s Hamiltonovými kanonickými rovnicemi. Hamiltonových rovnic (viz odstavec 4.8.4) bylo $2n$ a byly to obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu, což bylo oproti Lagrangeovým rovnicím druhého druhu (viz odstavec 3.3) zjednodušení. Těch bylo sice jen n , ale bylo to diferenciální rovnice druhého řádu.

4.12.1 Hamiltonova - Jacobiho rovnice

Hamiltonova - Jacobiho teorie vychází z kanonických transformací, a proto připomeneme důležité vztahy, s nimiž budeme dále pracovat. Vyjdeme např. z generující funkce $F_1 = F_1(q^j, Q^j, t)$ (viz tab. 1) a z platnosti těchto vztahů:

$$\frac{\partial F_1}{\partial q^j} = p_j, \quad (215)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q^j} = -P_j, \quad (216)$$

$$H'(Q^j, P_j, t) = H(q^j, p_j, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}, \quad (217)$$

a z Hamiltonových kanonických rovnic ve tvaru

$$\frac{dQ^j}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial P_j} \quad \text{a} \quad \frac{dP_j}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial Q^j}. \quad (218)$$

Na vývoj systému, který chceme popsat, můžeme nahlížet jako na speciální kanonickou transformaci. A ze všech možných kanonických transformací budeme hledat tu nejjednodušší - takovou, pro níž platí

$$H' = 0. \quad (219)$$

Je to podmínka sice velmi přísná, nicméně lze takový vývoj systému najít.

Na základě podmínky (219) budeme nyní hledat speciální generující funkci S , která generuje příslušnou kanonickou transformaci. Pro tuto funkci, která se nazývá akční funkcionál, platí

$$S(q^j, Q^j, t) = F_1. \quad (220)$$

S využitím podmínky (219) lze psát Hamiltonovy kanonické rovnice (218) ve tvaru

$$\frac{dQ^j}{dt} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{dP_j}{dt} = 0. \quad (221)$$

Z těchto rovnic okamžitě plyne

$$Q^j = \alpha_j = konst. \quad \text{a} \quad P_j = -\beta_j = konst. \quad (222)$$

Důvod, proč jsme druhou konstantu volili se znaménkem mínus, bude zřejmý z dalších výpočtů.

Písmeny α a β jsme označili konstanty, čísla. Proto píšeme jejich indexy dolů.

To ovšem znamená, že hmotný bod, jehož pohyb sledujeme, by stál na místě. Zatím jsme totiž nevzali v úvahu další vztahy. S využitím vztahů (220), (216) a (222) můžeme psát $\frac{\partial S(q^j, \alpha_j, t)}{\partial \alpha_j} = \beta_j$ a odtud najdeme funkci $q^j(t, \alpha_j, \beta_j)$ inverzí. Funkci S budeme hledat na základě rovnice

$$H(q^j, p_j, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (223)$$

kterou jsme získali na základě rovnice (217), podmínky (219) a definice funkce S (220).

Abychom našli skutečně kanonickou transformaci a postup výpočtu byl konzistentní, musíme použít i vztah (215). To znamená, že platí (s využitím definice funkce S (220)):

$$\frac{\partial S}{\partial q^j} = p_j. \quad (224)$$

To znamená, že zobecněné souřadnice q^j a kanonické hybnosti p_j nejsou nezávislé.

Dosazením vztahu (224) do rovnice (223) získáme **Hamiltonovu - Jacobiho rovnici** ve tvaru

$$H\left(q^j, \frac{\partial S}{\partial q^j}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (225)$$

Získali jsme tak skutečně jednu jedinou rovnici, která popisuje vývoj daného fyzikálního systému.

4.12.2 Postup řešení Hamiltonovy - Jacobiho rovnice

Postup řešení Hamiltonovy - Jacobiho rovnice (225) lze popsat v několika základních krocích:

- určíme Hamiltonovu funkci daného fyzikálního systému: $H(q^j, p_j, t)$;
- sestavíme Hamiltonovu - Jacobiho rovnici (225) tak, že místo p_j v nalezeném hamiltoniánu

píšeme $\frac{\partial S}{\partial q^j}$;

Sestavili jsme tak jedinou parciální diferenciální rovnici prvního řádu, v níž vystupují parciální derivace $\frac{\partial S}{\partial t}$ a $\frac{\partial S}{\partial q^j}$. Neznámou v této rovnici je funkce $S(q^j, t)$ resp. $q^j(t)$, která popisuje vývoj daného fyzikálního systému.

- sestavenou rovnici vyřešíme pomocí několika postupů, které lze z fyzikálního hlediska bez problémů provést
 - je-li hamiltonián nezávislý na čase, pak má funkce S tvar $S(q^j, t) = S_0(q^j) - Et$, kde E je zobecněná energie (viz odstavec 3.7);
 - nezávisí-li hamiltonián na souřadnici q^c , má funkce S tvar $S(q^j) = S(q^1, q^2, \dots, q^{c-1}, q^{c+1}, \dots, q^n) + \alpha_c q^c$, kde $\alpha_c = konst.$;

Nejdříve je tedy nutné vyřešit čas, pak až souřadnice. Souřadnice q^c , na níž nezávisí hamiltonián (a tedy ani lagrangián) daného systému je cyklická souřadnice (viz odstavec 3.7).

- pokusit se řešit rovnici, kterou jsme předchozími úpravami získali z rovnice (225), separací proměnných, čímž získáme řešení ve tvaru: $S(q^j) = S_1(q^1) + S_2(q^2) + \dots + S_n(q^n)$;
- získali jsme tedy funkci S ve tvaru $S(q^j, \alpha_j, t)$, která obsahuje $n+1$ integračních konstant α_j , z nichž jedna je ovšem triviálně aditivní;

Konstant α_j je $n+1$, neboť n jich vznikne při integraci během hledání funkcí q^j a jedna vznikne při integraci podle času.

Triviálně aditivní je taková konstanta C , která vystupuje v zápise funkce $f(x)$ ve tvaru: $f(x) = F(x) + C$, tj. není „zabalená“ uvnitř funkce.

- derivací podle n netriviálních parametrů α_i získáme n rovnic typu $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i$, kde β_i je dalších n libovolných konstant (pro $i = 1, 2, \dots, n$);
- inverzí získáme hledané řešení úlohy ve tvaru $q^j(t, \alpha_i, \beta_i)$, v němž je $2n$ integračních konstant, které odpovídají n počátečním podmínkám pro zobecněné souřadnice q^j a n počátečním podmínkám pro kanonické hybnosti p_j .

Počet konstant odpovídajících počtu počátečních podmínek je v pořádku. Každá poloha a každá hybnost má svoji počáteční podmínku.

Příklad: Volný pád

Vyšetřete pohyb volného pádu tělesa o hmotnosti m v gravitačním poli.

Řešit volný pád pomocí Hamiltonovy - Jacobiho rovnice je trošku jako jít s kanónem na vrabce, ale volný pád je nejjednodušší pohyb, na kterém lze řešení Hamiltonovy - Jacobiho rovnice ukázat. A jak je dále vidět, tak i přesto bude řešení poměrně náročné ...

Řešení: Budeme postupovat přesně ve shodě s výše uvedeným návodem na řešení Hamiltonovy - Jacobiho rovnice:

Hamiltonián systému je: $H = \frac{p^2}{2m} + V(x) = \frac{p^2}{2m} - mgx$ (vzdálenost x měříme ve směru pádu tělesa).

Nyní vyjádříme hybnost pomocí funkce S ve tvaru $p = \frac{\partial S}{\partial x}$, dosadíme do hamiltoniánu: $H = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - mgx$ a

sestavíme Hamiltonovu - Jacobiho rovnici: $\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - mgx + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$.

Pokud závisí funkce S na čase a hamiltonián sám na čase přímo nezávisí (obě podmínky jsou zde splněny), můžeme psát $S(x, t) = S_0(x) - Et$.

Určíme parciální časovou derivaci funkce S , která vystupuje v Hamiltonově - Jacobiho rovnici:

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (S_0(x) - Et) = -E, \text{ neboť } S_0(x) \text{ je na čase nezávislá.}$$

Nyní tedy budeme řešit Hamiltonovu - Jacobiho rovnici ve tvaru $\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 - mgx - E = 0$. Vyjádříme

hledanou derivaci funkce S_0 tak, že převedeme ostatní proměnné na druhou stranu rovnice, čímž získáme rovnici $\left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 = 2m(mgx + E)$. Tu nyní odmocníme a dostaneme $\frac{\partial S_0}{\partial x} = \sqrt{2m(mgx + E)}$. Funkci S_0 nyní

$$\text{nalezneme integrací podle proměnné } x: S_0 = \int \sqrt{2m(mgx + E)} dx = \sqrt{2m} \int \sqrt{mgx + E} dx.$$

Zavedeme substituci $k = \sqrt{mgx + E}$ a vyjádříme $\frac{dk}{dx} = \frac{mg}{2\sqrt{mgx + E}} = \frac{mg}{2k}$, odkud dostaneme $dx = \frac{2k}{mg} dk$. Nyní můžeme pokračovat ve vlastní integraci:

$$S_0 = \sqrt{2m} \int k \frac{2k}{mg} dk = \frac{2\sqrt{2m}}{mg} \int k^2 dk = \frac{2\sqrt{2m}}{mg} \frac{k^3}{3} + C = \frac{2\sqrt{2m}}{3mg} \sqrt{(mgx + E)^3} + C. \text{ Konstanta } C \text{ zde přitom}$$

nehraje roli, neboť jí lze zahrnout do konstanty E . Pro funkci S tedy dostáváme

$$S(x, t) = S_0(x) - Et = \frac{2\sqrt{2m}}{3mg} \sqrt{(mgx + E)^3} - Et.$$

Dále pokračujeme ve výpočtu derivací funkce S podle parametru E . Získáme tedy rovnost $-t_0 = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{2\sqrt{2m}}{3mg} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{mgx + E} - t$, přičemž konstanta $-t_0$ má význam konstanty β z návodu na řešení Hamiltonovy - Jacobiho rovnice.

Z posledního vztahu nyní postupně vyjádříme x .

$$\frac{\sqrt{2m}}{mg} \sqrt{mgx + E} = t - t_0$$

$$\sqrt{2m} \sqrt{mgx + E} = mg(t - t_0)$$

$$2m(mgx + E) = m^2 g^2 (t - t_0)^2$$

$$mgx + E = \frac{1}{2} m g^2 (t - t_0)^2$$

Pro funkci x v závislosti na čase t tedy dostáváme $x = \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 - \frac{E}{mg}$. Právě vypočtená závislost je

z fyzikálního hlediska v pořádku, neboť skutečně popisuje volný pád tělesa o hmotnosti m . Konstanta $\frac{E}{mg}$ má význam výšky.

5. TUHÉ TĚLESO

5.1 Kinematika tuhého tělesa

5.1.1 Tuhé těleso a popis jeho pohybu

Úkolem kinematiky tuhého tělesa je najít vhodný popis otáčení tuhého tělesa. Proto začneme tím, že vymezíme pojem tuhého tělesa.

TUHÉ TĚLESO SI LZE PŘEDSTAVIT JAKO KRYSTAL SLOŽENÝ Z NEKONEČNĚ MNOHA HMOTNÝCH BODŮ, MEZI NIMIŽ EXISTUJÍ SKLERONOMNÍ HOLONOMNÍ VAZBY.

Fakt, že silové působení mezi hmotnými body v tuhém tělese je popsáno skleronomními holonomními vazbami (viz odstavec 2.2), znamená, že se tuhé těleso nedeformuje a nevyvíjí v čase.

Možnost deformace a vývoje v čase připouštíme až v kontinuu.

Tuhé těleso má:

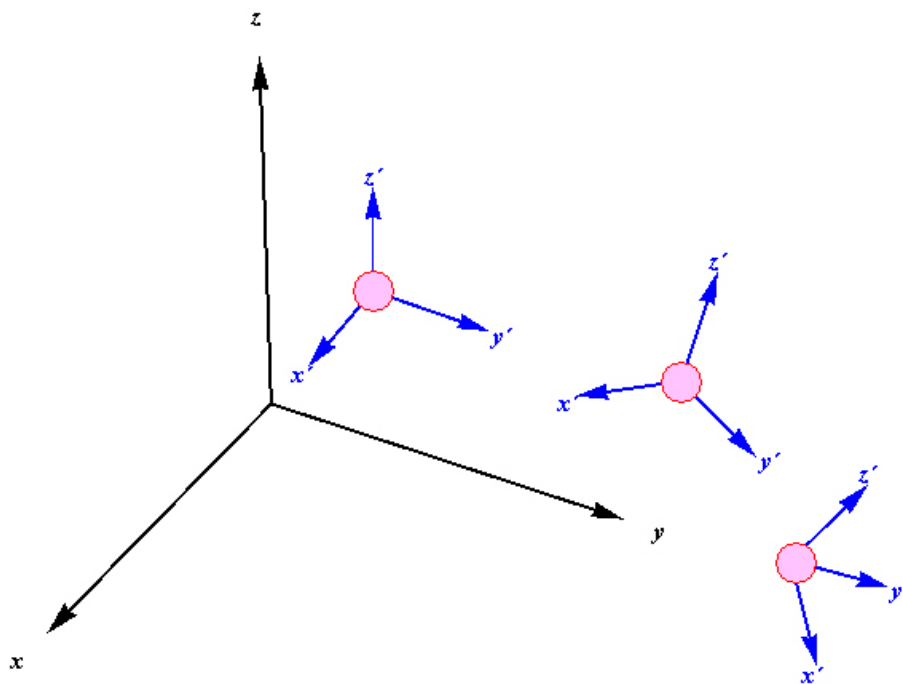
1. tři stupně volnosti popisující translační pohyb - pro jednoduchost se uvažuje translační pohyb hmotného středu tuhého tělesa;

Tuhé těleso se může pohybovat nahoru - dolů, doleva - doprava a dopředu - dozadu, tedy ve třech nezávislých směrech.

2. tři stupně volnosti popisující rotační pohyb - uvažuje se rotace kolem okamžité osy otáčení procházející hmotným středem tuhého tělesa.

Tuhé těleso se může natáčet kolem tří os - představme si např. činku na posilování nebo obecně nějaké nesymetrické tuhé těleso (automobil padající po nehodě ze skály, ...).

Uvažované tři stupně volnosti popisující rotační pohyb, jsou charakterizovány tzv. Eulerovými úhly (viz odstavec 5.1.5).



obr. 57

Pro popis pohybu tuhého tělesa se zavádějí dvě ortonormální báze:

1. pevná báze $\{\vec{e}_i\}$ (pro $i = 1, 2, 3$) - je to báze, jejíž poloha v prostoru je pevně daná vůči zvolenému inerciálnímu systému. V případě popisu pohybů skutečných těles (dopravní prostředky, ...) je možné jejich polohu vzhledem k této bázi určit např. pomocí přístroje GPS.

Poloha pevné báze se tedy s časem nemění.

Pohyb tuhého tělesa popisujeme vůči inerciální soustavě proto, že v této soustavě mají pohybové rovnice jednoduché matematické vyjádření - např. není nutné do nich zahrnovat setrvačné síly.

2. korotující báze $\{\vec{e}'_i\}$ (pro $i = 1, 2, 3$) - tato báze je spojená s tuhým tělesem, její vektory mají společný počátek ve hmotném středu tělesa a tato báze se tedy pohybuje společně s daným tuhým tělesem. Její poloha v prostoru (např. vzhledem ke družicím systému GPS) se tedy mění

v závislosti na pohybu tělesa. Natočení této korotující báze popisujeme vzhledem k pevné bázi (referenční bázi).

Poloha této korotující báze se v čase mění. Tuto bázi si lze modelovat tak, že vezmeme bramboru (jako model tuhého tělesa) a do ní zapíchneme tři na sebe navzájem kolmé stejně dlouhé špejle představující tři navzájem kolmé jednotkové vektory báze. Hodíme-li bramboru, budou se špejle pohybovat spolu s bramborou. Polohu brambory (resp. tří špejlí) lze ale popisovat také vůči místnosti (pevná báze), v níž pokus provádíme a jejíž souřadnice jsme získali pomocí systému GPS.

Popisované báze jsou schématicky zobrazeny na obr. 57.

Poloha tuhého tělesa tedy bude jednoznačně určena, bude-li určeno natočení báze, která rotuje s tělesem (korotující báze), vůči pevné bázi v prostoru.

Pro kompletní popis pohybu tuhého tělesa je nutné najít transformační vztahy mezi oběma výše uvedenými bázemi. Báze $\{\bar{e}_i\}$ a $\{\vec{e}_i\}$ jsou spolu svázány ortogonální maticí přechodu \mathbf{A} vztahem

$$\vec{e}_i = \sum_{k=1}^3 A_{ik} \bar{e}_k = A_{ik} \bar{e}_k \quad (226)$$

pro $i = 1, 2, 3$, kde A_{ik} jsou prvky transformační matice \mathbf{A} splňující relace ortogonality ve tvaru

$$A_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} \quad \text{resp.} \quad A_{ki} A_{kj} = \delta_{ij} \quad (227)$$

pro $i, j, k = 1, 2, 3$.

Matice \mathbf{A} tedy zachová při transformaci bází jejich ortogonalitu.

V dalším textu budeme využívat Einsteinovo sumační pravidlo, čímž se zápis vztahů zjednoduší. Všechny indexy budou nabývat hodnot 1, 2 a 3, neboť popisujeme trojrozměrné tuhé těleso pohybující se v trojrozměrném prostoru.

Indexy studovaných veličin a matematických objektů budeme v kapitole 5 psát kvůli větší přehlednosti dolů, což je přípustné, neboť pracujeme v ortogonálních systémech.

Vztahy (227) lze interpretovat též tak, že popisují skalární součin dvou řádků (resp. skalární součin dvou sloupců) matice \mathbf{A} .

Vztahy (227) jsou definičními vztahy ortogonality. To znamená, že zaručují, že matice \mathbf{A} převede pomocí vztahu (226) ortogonální bázi $\{\bar{e}_i\}$ na ortogonální bázi $\{\vec{e}_i\}$.

Důkaz vztahů (227) lze provést pomocí jednoduché geometrické vlastnosti a s využitím vztahu (226). Pro dva ortogonální vektory \vec{e}_i a \vec{e}_j báze $\{\vec{e}_i\}$ platí $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$. S využitím vztahu (226) lze tedy psát $\delta_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = A_{ik} \bar{e}_k \cdot A_{jl} \bar{e}_l = A_{ik} A_{jl} \bar{e}_k \cdot \bar{e}_l = A_{ik} A_{jl} \delta_{kl} = A_{ik} A_{jk}$, čímž je dokázán první vztah. Při úpravách jsme využili i vlastnosti vektorů \bar{e}_k a \bar{e}_l báze $\{\bar{e}_i\}$, pro které platí $\bar{e}_k \cdot \bar{e}_l = \delta_{kl}$. Druhou část vztahu (227) dokážeme s využitím vlastností transponovaných matic. Platí $\delta_{ij} = (\delta_{ji})^T = (A_{ik} A_{jk})^T = A_{jk}^T A_{ik}^T = A_{kj} A_{ki}$. A tím je dokázána druhá část vztahu (227).

Pro ortogonální matici \mathbf{A} dále platí

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}, \quad (228)$$

kde \mathbf{A}^{-1} je inverzní matice k matici \mathbf{A} . Vztah (228) přitom vyplývá ze vztahu (226) a z ortogonality vektorů bází $\{\bar{e}_i\}$ a $\{\vec{e}_i\}$.

Matice \mathbf{A} má devět složek, které jsou popsány devíti relacemi ortogonality. Nezávislých jich je přitom jen tolik, kolik je nezávislých složek symetrické matice - a těch je šest. Symetričnost matice \mathbf{A} přitom vyplývá z výše uvedených vlastností ortogonality.

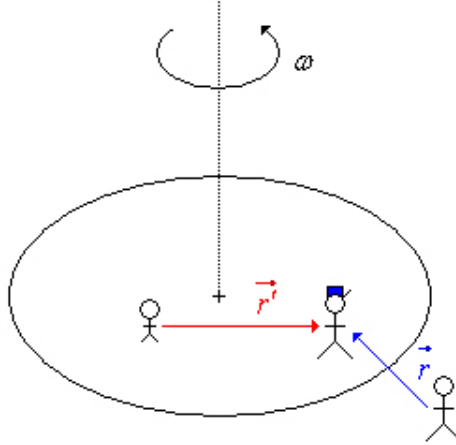
Symetrická matice typu (3, 3) má tři nezávislé prvky na hlavní diagonále a tři nezávislé prvky nad hlavní diagonálou. Prvky pod hlavní diagonálou už musejí být stejné jako prvky nad hlavní diagonálou, aby matice byla symetrická.

Každá ortogonální matice (tedy i matice \mathbf{A}) má jen tři nezávislé prvky, které odpovídají třem stupňům volnosti pro rotační pohyb tuhého tělesa. (Všech devět prvků matice \mathbf{A} je totiž svázáno šesti relacemi ortogonality - proto má matice \mathbf{A} tři nezávislé prvky.) Budeme tedy hledat tři nezávislé parametry popisující rotaci tuhého tělesa. Ukáže se, že těmito nezávislými parametry jsou Eulerovy úhly (viz odstavec 5.1.5).

Je nutné si uvědomit, že natočení tuhého tělesa se mění v čase: během rotace tuhého tělesa se mění natočení vektorů korotující báze $\{\vec{e}_i\}$ spojené s tělesem vzhledem k pevné bázi $\{\bar{e}_i\}$. Ta je ovšem pevně zvolená v prostoru, a proto je na čase nezávislá. To ale znamená, že na čase budou závislé prvky matice \mathbf{A} . Časové změny fyzikálních veličin ale budeme vyšetřovat vůči oběma uvažovaným bázím. Budeme proto

uvažovat dvě různé (ovšem navzájem ekvivalentní) fyzikální veličiny, které budou popisovat pohyb tuhého tělesa z hlediska uvažovaných dvou bází. Proto je důležité vždy vědět, vůči jakému systému popisujeme pohyb daného tuhého tělesa.

To znamená, že např. pohyb technika, který kráčí po rotujícím dětském kolotoči, můžeme popsat z hlediska vnějšího pozorovatele, který je mimo kolotoč, nebo z hlediska dítěte, které na dětském kolotoči sedí. Oba pozorovatelé (jak ten vnější, tak dítě na kolotoči) mohou vyšetřovat např. rychlost, kterou se technik pohybuje - oba přitom zjistí různé časové závislosti a různé velikosti rychlosti kráčejího technika. A přitom fyzikální veličiny popisující pohyb technika, které definuje vnější pozorovatel i dítě na kolotoči, jsou definované korektně (viz obr. 58).



obr. 58

5.1.2 Zavedení úhlové rychlosti

Uvažujme libovolný časově závislý vektor $\vec{w}(t)$, který budeme zkoumat jak v pevné bázi $\{\vec{e}_i\}$, tak v korotující bázi $\{\vec{e}'_i(t)\}$ (viz odstavec 5.1.1).

Korotující báze $\{\vec{e}'_i(t)\}$ je skutečně závislá na čase, neboť rotuje spolu s tuhým tělesem (viz odstavec 5.1.1).

Souřadnice $w_i(t)$ resp. $w'_i(t)$ vektoru $\vec{w}(t)$ můžeme vyjádřit v obou uvažovaných bázích pomocí vztahů

$$\vec{w}(t) = w_i(t) \vec{e}_i \quad (229)$$

resp.

$$\vec{w}(t) = w'_i(t) \vec{e}'_i(t). \quad (230)$$

Ve vztahu (230) se mění v závislosti na čase jak souřadnice uvažovaného vektoru, tak vektory korotující báze. Pro bázevé vektory obou bází přitom platí vztahy

$$\vec{e}'_i(t) = A_{ik}(t) \vec{e}_k \quad \text{a} \quad \vec{e}_k(t) = A_{jk}(t) \vec{e}'_j \quad (231)$$

a dále platí

$$A_{ik} A_{jk} = \delta_{ij}. \quad (232)$$

Vztahy (231) a (232) jsou analogické jako vztahy (226) a (227) jsou jen přepsány ve vhodných indexech pro další odvozování. Pro časovou změnu vektoru $\vec{w}(t)$ vůči pevnému inerciálnímu systému můžeme postupně psát:

$$\frac{d\vec{w}(t)}{dt} = \frac{dw_i(t)}{dt} \vec{e}_i = \frac{dw'_i(t)}{dt} \vec{e}'_i(t) + w'_i(t) \frac{d\vec{e}'_i(t)}{dt}. \quad (233)$$

Vektor $\vec{w}(t)$ popisujeme vzhledem k pevnému inerciálnímu systému, ale vyjádřili jsme ho jak z hlediska pevné báze, tak z hlediska korotující báze.

Byly by další dvě možnosti, jak situaci vyšetřovat: definovat vektor vzhledem k soustavě, která se pohybuje spolu s tuhým tělesem a vyjádřit ho jak v korotující bázi (její vektory by se v čase neměnily), tak v pevné bázi, jejíž vektory by se tentokrát měnily. Vztažná soustava by se totiž vůči pevné bázi pohybovala.

S využitím obou vztahů (231), můžeme vztah (233) přepsat ve tvaru

$$\frac{d\vec{w}(t)}{dt} = \frac{dw'_i(t)}{dt} \vec{e}'_i(t) + w'_i(t) \frac{dA_{ik}(t)}{dt} \vec{e}_k = \frac{dw'_i(t)}{dt} \vec{e}'_i(t) + w'_i(t) \frac{dA_{jk}(t)}{dt} A_{jk}(t) \vec{e}'_j. \text{ Dostáváme tedy vztah}$$

$$\frac{d\vec{w}(t)}{dt} = \frac{dw'_i(t)}{dt} \vec{e}'_i(t) + w'_i(t) \Omega'_{ij} \vec{e}'_j, \quad (234)$$

v němž jsme označili

$$\Omega'_{ij} = \frac{dA_{ik}}{dt} A_{jk}. \quad (235)$$

Vztah (235) lze též zapsat v ekvivalentním tvaru

$$\mathbf{\Omega} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \mathbf{A}^T; \quad (236)$$

zavedli jsme tedy matici $\mathbf{\Omega}$ s prvky Ω'_{ij} definovanými vztahem (235).

Důvod, proč je matice značená bez čárky a její prvky s čárkou, bude vysvětlen později.

Lze vyslovit následující tvrzení:

MATICE $\mathbf{\Omega}$ JE ANTISYMETRICKÁ.

Toto tvrzení snadno dokážeme. Prvky matice $\mathbf{\Omega}$ splňují relace ortogonality (232), neboť na základě nich byla matice $\mathbf{\Omega}$ odvozena. Časovou derivací vztahu (232) dostaneme $\frac{dA_{ik}}{dt} A_{ik} + A_{ik} \frac{dA_{ik}}{dt} = 0$, odkud vyjádříme $\frac{dA_{ik}}{dt} A_{ik} = -A_{ik} \frac{dA_{ik}}{dt}$. Vzhledem k symetričnosti matice \mathbf{A} můžeme psát $\frac{dA_{ik}}{dt} A_{ik} = -\frac{dA_{ik}}{dt} A_{ik}$ a na základě vztahu (235) dostaneme $\Omega'_{ii} = -\Omega'_{ii}$, což znamená, že matice $\mathbf{\Omega}$ je antisymetrická a má tedy jen tři nezávislé prvky. Podle právě odvozeného vztahu je zřejmé, že na hlavní diagonále matice $\mathbf{\Omega}$ jsou nuly, takže zbývá určit její tři nezávislé prvky. Ostatní tři jsou již jednoznačně určeny - jsou to opačná čísla k číslům vyjadřující ony tři nezávislé prvky uvažované matice.

Proto můžeme provést tzv. přirozené mapování (přirozené zobrazení, operaci duality), při kterém antisymetrické matici přiřadíme vektor $\vec{\Omega}$ se složkami:

$$\Omega'_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Omega'_{jk}, \quad (237)$$

kde ε_{ijk} je Lewi-Civitův symbol (Lewi-Civitův tenzor). Provedeme-li naznačený součet podle proměnné k , dostaneme

$$\vec{\Omega} = (\Omega'_1; \Omega'_2; \Omega'_3) = (\Omega'_{23}; -\Omega'_{13}; \Omega'_{12}). \quad (238)$$

Pro i -tou složku vektoru $\vec{\Omega}$ můžeme totiž psát $\Omega'_i = \frac{1}{2} (\varepsilon_{i12} \Omega'_{12} + \varepsilon_{i13} \Omega'_{13} + \varepsilon_{i21} \Omega'_{21} + \varepsilon_{i23} \Omega'_{23} + \varepsilon_{i31} \Omega'_{31} + \varepsilon_{i32} \Omega'_{32})$, přičemž jsme nepsali ty členy, které rovnou obsahují dva stejné indexy (např. $\varepsilon_{122} \Omega'_{22}$). Lewi-Civitiův symbol, který má dva indexy stejné, je totiž nulový.

Vektor $\vec{\Omega}$ definovaný vztahem (237) je **vektor úhlové rychlosti otáčení tuhého tělesa**.

K vektoru $\vec{\Omega}$ je nutné uvést několik poznámek:

1. $\vec{\Omega}$ je duální pseudovektor a to proto, že přirozené mapování provedené vztahem (237) (tj. definice jednotlivých složek vektoru $\vec{\Omega}$) není jednoznačné: při změně levotočivé báze na pravotočivou bázi (nebo naopak) se změní znaménka jeho souřadnic. Tato změna znamének by ale neměla nastávat často - ve fyzice se k popisu pohybujících se hmotných bodů a těles používá levotočivý kartézský systém souřadnic (tj. ten, který má osy x , y a z orientovány podle pravidla pravé ruky). Skutečnost, že $\vec{\Omega}$ je pseudovektor vyplývá z toho, že i Lewi-Civitův symbol ε_{ijk} je pseudovektor.
2. Přiřazení pomocí vztahu (237) lze korektně provést jen ve trojrozměrném prostoru, neboť matice $\mathbf{\Omega}$ má tři nezávislé prvky a vektor $\vec{\Omega}$ má také tři nezávislé složky.

V teorii relativity, v teorii elektromagnetického pole a dalších oborech fyziky je nutné popisované přiřazení provést tak, že matici přiřadíme matici (nikoliv vektor).

3. Vektor $\vec{\Omega}$ má složky definované vůči korotující bázi $\{\vec{e}'_i\}$, proto jsou jeho složky i prvky matice $\mathbf{\Omega}$ označeny symboly Ω'_i resp. Ω'_{ij} .

Tím je vysvětlen zdánlivý rozpor ve značení ve vztazích (235) a (236).

Analogicky lze vytvořit z vektoru matici, tj. napsat ke vztahu (237) duální vztah ve tvaru

$$\Omega'_{ii} = \varepsilon_{iik} \Omega'_k. \quad (239)$$

Ve vztahu (239) ve srovnání se vztahem (237) chybí činitel 0,5. To proto, že na levé straně vztahu (239) je veličina indexovaná dvěma indexy a existuje tedy jediná možnost přiřazení.

Nyní budeme pokračovat v úpravě vztahu (234), ve kterém nejdříve provedeme záměnu indexů:

$$\frac{d\bar{w}(t)}{dt} = \frac{dw'_i(t)}{dt} \bar{e}'_i(t) + w'_i(t) \Omega'_{ij} \bar{e}'_j = \frac{dw'_i(t)}{dt} \bar{e}'_i(t) + w'_i(t) \Omega'_{ji} \bar{e}'_i.$$

Tato úprava se používá proto, aby se zpřehlednil zápis daného vztahu nebo aby se sjednotilo značení indexů u veličin, které spolu souvisejí.

Dosazením ze vztahu (239) získáme $\frac{d\bar{w}(t)}{dt} = \frac{dw'_i(t)}{dt} \bar{e}'_i(t) + w'_i(t) \varepsilon_{lik} \Omega'_k \bar{e}'_i$. Provedením cyklické záměny indexů Levi-Civita symbolu dostaneme $\frac{d\bar{w}(t)}{dt} = \frac{dw'_i(t)}{dt} \bar{e}'_i(t) + \varepsilon_{ikl} \Omega'_k w'_l(t) \bar{e}'_i$. Souřadnici $w'_i(t)$ vektoru \bar{w} můžeme v daném součinu umístit na jakékoliv místo, neboť $w'_i(t)$ je složka vektoru (tedy číslo). Další úpravou je využití definice vektorového součinu:

$$\frac{d\bar{w}(t)}{dt} = \frac{dw'_i(t)}{dt} \bar{e}'_i(t) + (\bar{\Omega} \times \bar{w})'_i \bar{e}'_i. \quad (240)$$

Tento vztah popisuje časovou derivaci libovolného vektoru \bar{w} vzhledem ke zvolenému inerciálnímu systému v prostoru vyjádřenou v korotující bázi $\{\bar{e}'_i\}$. V právě uvedeném vztahu popisuje člen $\frac{dw'_i(t)}{dt} \bar{e}'_i(t)$ změnu vektoru \bar{w} , jehož souřadnice jsou definovány vztahy (229) a (230), vůči korotující bázi $\{\bar{e}'_i\}$ a člen $(\bar{\Omega} \times \bar{w})'_i \bar{e}'_i$ odpovídá přechodu mezi dvěma bázemi při popisu uvažovaného tuhého tělesa rotujícího úhlovou rychlostí $\bar{\Omega}$.

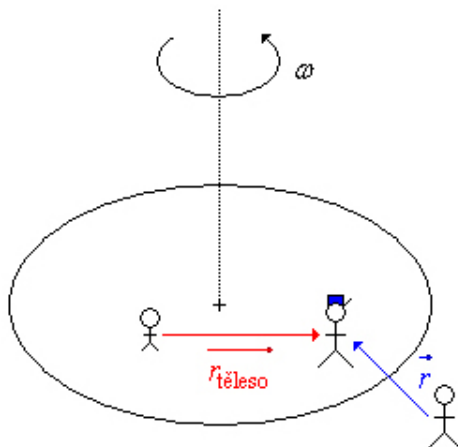
Platí-li daný vztah mezi určitými vektory v jedné bázi, platí v každé bázi. Proto můžeme psát

$$\frac{d\bar{w}(t)}{dt} = \frac{d\overline{w_{\text{těleso}}}(t)}{dt} + \bar{\Omega} \times \bar{w} \quad (241)$$

bez ohledu na konkrétní bázi.

Tento vztah je velmi důležitý, a proto vyžaduje několik komentářů:

1. $\frac{d\bar{w}}{dt}$ a $\frac{d\overline{w_{\text{těleso}}}}{dt}$ jsou dva různé vektory, nikoliv jeden vektor vyjádřený v různých bázích;
2. pokud zvolíme $\bar{w} = \bar{r}$, kde \bar{r} je polohový vektor popisující polohu objektu na rotujícím tuhém tělesu, pak člen $\frac{d\bar{w}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt}$ definuje rychlost pohybu hmotného bodu na tuhém tělese vůči vnějšímu pozorovateli;
3. při stejné volbě pak člen $\frac{d\overline{w_{\text{těleso}}}}{dt} = \frac{d\overline{r_{\text{těleso}}}}{dt}$ definuje rychlost pohybu hmotného bodu na tuhém tělese vůči tomuto tuhému tělesu



obr. 59

Můžeme si představit situaci podobnou ilustračnímu příkladu uvedenému v odstavci 5.1.1 a zobrazenou na obr. 59. Po kolotoči se pohybuje technik a jeho pohyb pozoruje dítě na kolotoči i pozorovatel mimo kolotoč.

Dítě na kolotoči vnímá pouze vlastní pohyb technika vůči kolotoči (popsaný výrazem $\frac{d\vec{w}_{\text{těleso}}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{\text{těleso}}}{dt}$), zatímco pozorovatel zvenčí vidí rotační pohyb technika na kolotoči: k tomu, co pozoruje dítě musí přidat ještě oběžný pohyb kolotoče (člen $\vec{\Omega} \times \vec{w} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$ ve výrazu (241)).

Kolotoč zobrazený na obr. 59 představuje speciální otáčení: otáčení s pevnou osou (rotace s pevnou osou), která je popsána v odstavci 5.1.3.

5.1.3 Rotace s pevnou osou

Rotace s pevnou osou je speciálním případem obecného otáčení, a proto je toto otáčení popsáno i speciálními maticemi \mathbf{A} a $\vec{\Omega}$ definované vztahy (226) a (235).

Speciálnost matic spočívá v tom, že mají jednoduchý tvar - viz definice matice \mathbf{A} pomocí vztahu (242). Matice obsahuje řadu konstantních prvků (nuly a jedničky) právě proto, že popisuje speciálně zvolenou rotaci tuhého tělesa.

Budeme-li uvažovat rotaci kolem osy z , tj. kolem přímky se směrovým vektorem \vec{e}_3 , bude mít matice \mathbf{A} tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (242)$$

neboť otáčení lze popsat funkcí $\varphi(t)$.

S využitím vztahu (236) můžeme matici $\vec{\Omega}$ psát ve tvaru

$$\vec{\Omega} = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -\cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{odkud na základě vztahu (238) vyplývá}$$

$$\vec{\Omega} = (0; 0; \dot{\varphi}). \quad (243)$$

Tento tvar vektoru úhlové rychlosti je z fyzikálního hlediska v pořádku: vektor $\vec{\Omega}$ má velikost i směr, které odpovídají skutečnosti. Velikost vektoru $\vec{\Omega}$ je $\Omega = \dot{\varphi}$ a jeho směr je totožný s osou z (tj. s tou osou, kolem které se tuhé těleso otáčí).

5.1.4 Skládání rotací a vektorů úhlových rychlostí

OTÁČENÍ TĚLESA NENÍ OBECNĚ KOMUTATIVNÍ, ALE SKLÁDÁNÍ ÚHLOVÝCH RYCHLOSTÍ KOMUTATIVNÍ JE: VEKTORY ÚHLOVÝCH RYCHLOSTI SE SKLÁDAJÍ LINEÁRNĚ.

Úhlové rychlosti se tedy skládají jako „normální“ vektory.

Provedeme důkaz uvedeného tvrzení. Uvažujme první ortogonální matici \mathbf{A} , která je maticí přechodu od báze $\{\vec{e}_k\}$ k bázi $\{\vec{e}'_i\}$ a popisuje první otočení tuhého tělesa. To znamená, že platí transformační vztah (226). Dále uvažujme druhou ortogonální matici \mathbf{B} popisující druhé otočení tuhého tělesa, kterou lze považovat za matici přechodu od báze $\{\vec{e}'_i\}$ k bázi $\{\vec{e}''_j\}$ definovanou vztahem

$$\vec{e}''_j = B_{ji} \vec{e}'_i. \quad (244)$$

Složení obou otočení získáme

$$\vec{e}''_j = B_{ji} \vec{e}'_i = B_{ji} A_{ik} \vec{e}_k = C_{jk} \vec{e}_k, \quad (245)$$

kde matice \mathbf{C} je definována vztahem

$$\mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}. \quad (246)$$

Vzhledem k tomu, že násobení matic není obecně komutativní, není obecně komutativní ani skládání otočení tuhého tělesa.

Nyní dokážeme, že vektory úhlové rychlosti se skládají lineárně. Vyjdeme z definice (236) matice $\vec{\Omega}$ a pro matici $\vec{\Omega}^{C''}$ popisující úhlovou rychlost otáčení tuhého tělesa charakterizovanou maticí \mathbf{C} můžeme psát $\vec{\Omega}^{C''} = \frac{d\mathbf{C}}{dt} \mathbf{C}^T$. S využitím vztahu (246) dále postupnými úpravami dostáváme

$$\vec{\Omega}^{C''} = \frac{d(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})}{dt} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})^T = \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right) \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^T = \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^T + \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^T. \quad \text{Ze vztahu (228) vyplývá, že}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{E}, \quad \text{kde } \mathbf{E} \text{ je jednotková matice. Proto můžeme dále psát}$$

$$\vec{\Omega}^{C''} = \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{B}^T + \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^T = \vec{\Omega}^{B''} + \mathbf{B} \cdot \vec{\Omega}^{A'} \cdot \mathbf{B}^T. \quad \text{V poslední úpravě jsme využili opět definiční vztah matice}$$

$\Omega^{B'}$ resp. $\Omega^{A'}$. Uvědomíme-li si, že matice $\mathbf{B}\Omega^{A'}\mathbf{B}^T$ popisuje transformaci matice \mathbf{A} z báze $\{\vec{e}_i\}$ do báze $\{\vec{e}_i'\}$, můžeme napsat finální vztah ve tvaru

$$\Omega^{C'} = \Omega^{B'} + \Omega^{A'}. \quad (247)$$

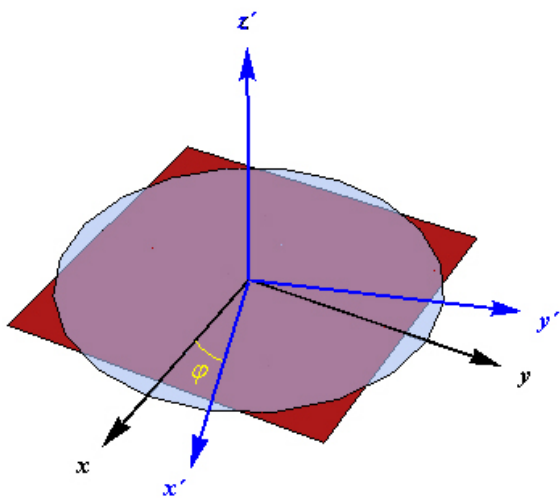
Čárky v indexech u matic konkretizují, v jaké bázi je příslušná matice definována.

Obecně tedy pro vektory úhlové rychlosti popisující otáčení tuhého tělesa kolem různých os platí

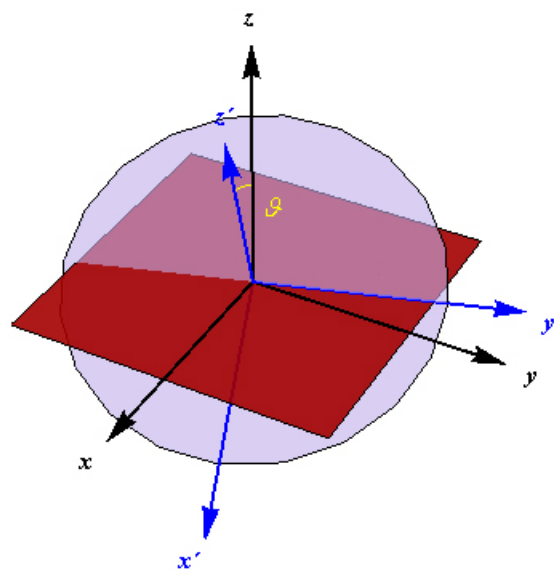
$$\Omega^C = \Omega^B + \Omega^A. \quad (248)$$

5.1.5 Popis rotace tuhého tělesa - Eulerovy kinematické rovnice

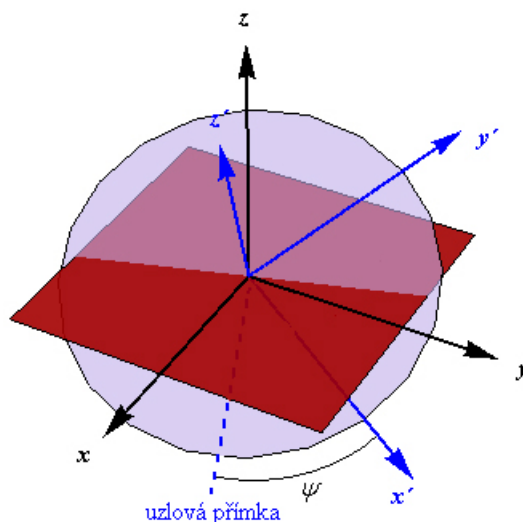
Pro korektní popis rotace tuhého tělesa (resp. natočení tuhého tělesa) kolem dané osy je nutné zavést tři nezávislé parametry. Počet těchto parametrů vyplývá ze symetrie matice ortogonality (viz odstavec 5.1.1). Těmito třemi parametry jsou tzv. Eulerovy úhly, jejichž funkce pak vystupují v matici ortogonality \mathbf{A} a v matici Ω definující úhlovou rychlost otáčení tuhého tělesa. Budeme postupovat tak, abychom dokázali, že libovolné natočení tuhého tělesa lze složit ze tří otočení kolem vhodných os. A každé z těchto tří otočení je popsáno jedním z Eulerových úhlů.



obr. 60



obr. 61



obr. 62

Uzlová přímka zobrazená na obr. 62 vyznačuje původní polohu osy x' z obr. 61.

Švýcarský matematik a fyzik Leonhard Paul Euler (1707 - 1783) se snažil popsat setrvačnický, a proto volil úhly popisující rotaci setrvačnicku (a obecně tuhého tělesa) takto:

1. precesní úhel φ - charakterizuje otočení kolem osy z (resp. x_3) kartézského systému souřadnic a je z intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$;
2. nutační úhel ϑ - charakterizuje otočení kolem osy y' (resp. x_2'), což je nová poloha osy x (resp. x_1) po předchozích otočeních; je z intervalu $\langle 0; \pi \rangle$;

3. rotační úhel ψ - charakterizuje otočení kolem nové polohy osy z (resp. x_3) a je z intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$.

Úhel ψ charakterizuje vlastní rotaci tuhého tělesa kolem jeho osy, která splývá s osou z . Úhel \mathcal{G} charakterizuje odchylku vlastní osy tuhého tělesa (kolem níž tuhé těleso rotuje) od svislého směru a úhel φ určuje natočení tzv. uzlové přímky. Úhly \mathcal{G} a φ tak jednoznačně určují polohu osy tuhého tělesa, kolem níž těleso rotuje.

Úhly \mathcal{G} a φ mají analogický význam jako sférické souřadnice resp. zeměpisné souřadnice: úhel \mathcal{G} odpovídá zeměpisné šířce (odklon od severního pólu) a úhel φ zeměpisné délce.

Postup, kterým ukážeme, že libovolné natočení tuhého tělesa v prostoru lze složit z natočení charakterizovaných právě zavedenými Eulerovými úhly, aplikujeme ve třech krocích na rotaci kartézského systému souřadnic $0xyz$:

1. rotace kolem osy z (resp. x_3) o úhel φ (viz obr. 60) - tato rotace je popsána maticí \mathbf{D} , která má stejný tvar jako matice daná předpisem (242)

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (249)$$

již přísluší vektor úhlové rychlosti ve tvaru

$$\overline{\Omega}^{\mathbf{D}} = (0; 0; \dot{\varphi}). \quad (250)$$

2. rotace kolem nové polohy osy y (resp. x_2) o úhel \mathcal{G} (viz obr. 61) - tato rotace je popsána maticí \mathbf{C} ve tvaru

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \mathcal{G} & \sin \mathcal{G} \\ 0 & -\sin \mathcal{G} & \cos \mathcal{G} \end{pmatrix}; \quad (251)$$

této matici odpovídá vektor úhlové rychlosti ve tvaru

$$\overline{\Omega}^{\mathbf{C}} = (\dot{\mathcal{G}}; 0; 0). \quad (252)$$

3. rotace kolem nové polohy osy z (resp. x_3) o úhel ψ (viz obr. 62) - tato rotace je popsána maticí \mathbf{B} ve tvaru

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (253)$$

které odpovídá vektor úhlové rychlosti ve tvaru

$$\overline{\Omega}^{\mathbf{B}} = (0; 0; \dot{\psi}). \quad (254)$$

Na základě vztahu (246) můžeme výsledné otočení, které vznikne složením právě popsaných otočeních v uvedeném pořadí charakterizovaných maticemi (249), (251) a (253), popsat maticí \mathbf{A} ve tvaru

$$\mathbf{A} = \mathbf{B.C.D}. \quad (255)$$

V právě uvedeném vztahu závisí na pořadí násobení, protože násobení matic není obecně komutativní. A ani skládání otočení, které je maticemi popsáno, není obecně komutativní (viz důkaz v odstavci 5.1.4).

Této matici pak odpovídá vektor úhlové rychlosti $\overline{\Omega}$, který můžeme psát s využitím vztahu (248) ve tvaru

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega}^{\mathbf{B}} + \mathbf{B}.\overline{\Omega}^{\mathbf{C}} + \mathbf{B.C}.\overline{\Omega}^{\mathbf{D}}, \quad (256)$$

v němž jsou vektory úhlových rychlostí $\overline{\Omega}^{\mathbf{C}}$ a $\overline{\Omega}^{\mathbf{D}}$ násobeny příslušnými maticemi proto, abychom tyto vektory vyjádřili ve správné bázi, v níž jsou definovány a mají smysl. Vektor $\overline{\Omega}^{\mathbf{C}}$ je totiž definován v soustavě souřadnic (v bázi), která vznikne po prvním otočení. Proto jej musíme přepočítat tak, jak by vypadal po třetím otočení, aby jej bylo možné přičíst k vektoru $\overline{\Omega}^{\mathbf{B}}$, který je definován v bázi, která vznikne po třetím otočení daného kartézského systému. Analogicky je nutné vektor $\overline{\Omega}^{\mathbf{D}}$, který je definován v původní kartézské soustavě, transformovat do soustavy souřadnic, kterou získáme po dalších dvou otočeních. Po dosazení matic (251) a (253) a vektorů (250), (252) a (254), které je nutné kvůli operacím s maticemi dosazovat v transponované

$$\text{podobě, do vztahu (256) dostaneme } \overline{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \dot{\mathcal{G}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \mathcal{G} & \sin \mathcal{G} \\ 0 & -\sin \mathcal{G} & \cos \mathcal{G} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \right).$$

Provedením naznačených operací s maticemi získáme vztah

$$\begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathcal{G}} \\ \dot{\phi} \sin \mathcal{G} \\ \dot{\phi} \cos \mathcal{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathcal{G}} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \mathcal{G} \sin \psi \\ -\dot{\mathcal{G}} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \mathcal{G} \cos \psi \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \mathcal{G} \end{pmatrix}. \text{ Tedy můžeme psát}$$

$$\begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathcal{G}} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \mathcal{G} \sin \psi \\ -\dot{\mathcal{G}} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \mathcal{G} \cos \psi \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \mathcal{G} \end{pmatrix}, \quad (257)$$

což je maticové vyjádření **Eulerových kinematických rovnic** v korotující bázi, která rotuje spolu s tělesem. Vektor $\bar{\Omega}$ má směr okamžité osy otáčení, kolem níž se tuhé těleso otáčí.

5.2 Dynamika tuhého tělesa

5.2.1 Motivace

Dynamika pohybu hmotných bodů je popsána Newtonovými zákony, zejména druhým Newtonovým zákonem ve tvaru $\bar{F} = m \frac{d\bar{v}}{dt}$. Na levé straně vztahu je výslednice sil, které na hmotný bod působí, na pravé straně vystupují veličiny popisující změny pohybového stavu hmotného bodu vyvolané působícími silami.

Hmotnost m zde popisuje míru odporu hmotného bodu k jeho urychlování (nechť hmotného bodu k pohybu). Pro popis tuhého tělesa bychom chtěli zavést analogickou veličinu, která bude popisovat nechuť tuhého tělesa k jeho urychlování - v tomto případě ale nechuť rotovat.

V případě popisu pohybů tuhého tělesa budeme uvažovat pouze pohyb rotační, neboť translační pohyb lze popsat analogicky jako pohyb hmotného bodu. Translační pohyb tuhého tělesa proto budeme popisovat jako pohyb jednoho hmotného bodu, kterým bude těžiště tuhého tělesa.

Tuhé těleso si tedy pro popis translačního pohybu „zmenšíme“ do jednoho bodu (do těžiště tuhého tělesa), v němž je soustředěna veškerá hmota tuhého tělesa.

Veličinou analogickou k veličině $\frac{d\bar{v}}{dt}$, která vystupuje ve druhém Newtonově zákonu, bude veličina $\frac{d\bar{\Omega}}{dt}$,

veličinou analogickou k výslednici sil \bar{F} bude celkový moment sil \bar{M} , který popisuje míru otáčivých účinků daných sil na tuhé těleso. Problémem zůstává, jakou veličinu zvolit jako analogii hmotnosti hmotného bodu. Bylo by možné použít moment setrvačnosti, který má pro rotační pohyb tuhého tělesa podobný význam jako hmotnost (přesněji setrvačná hmotnost) hmotného bodu při translačním pohybu. Nevýhodou je, že moment setrvačnosti tuhého tělesa je obecně pro každou osu, kolem které se může tuhé těleso otáčet, jiný a jeho hodnota závisí na rozložení látky v tuhém tělese vzhledem k dané ose otáčení. Proto je vhodnější zavést jiný popis, který bude jednodušší a nebude nutné hodnoty přepočítávat v každém časovém okamžiku pro každou osu, kolem níž se bude tuhé těleso otáčet. Touto veličinou je tenzor setrvačnosti, který je definován v odstavci 5.2.2.

5.2.2 Tenzor setrvačnosti

Tenzor setrvačnosti zavedeme nejdříve bez ohledu na souřadnice; ty určíme až nakonec odvozování.

TENZOR SETRVAČNOSTI POPISUJE SETRVAČNÉ VLASTNOSTI TUHÉHO TĚLESA VŮČI ROTAČNÍMU POHYBU.

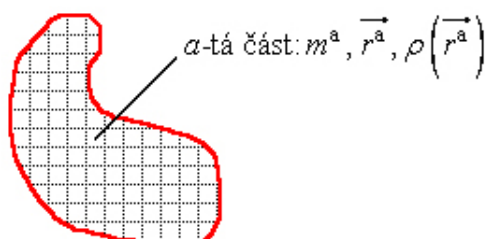
Tenzor setrvačnosti tedy udává nechuť tuhého tělesa k rotačnímu pohybu analogicky, jako udává hmotnost (setrvačná hmotnost) hmotného bodu nechuť k jeho translačnímu pohybu.

Vyjdeme z celkového momentu hybnosti \bar{L} tuhého tělesa, který je definován vztahem

$$\bar{L} = \sum_{a=1}^N \bar{r}^a \times \bar{p}^a, \quad (258)$$

ve kterém se sčítá přes všechny body tuhého tělesa, tj. od jedné do N . Každý bod tuhého tělesa je charakterizován hmotností m^a , polohovým vektorem \bar{r}^a a hustota objemového elementu je $\rho(\bar{r}^a)$ - viz obr.

63.



obr. 63

Vztah (258) můžeme dále upravit s využitím definice hybnosti a s využitím vlastností vektorového součinu. Dostáváme tak $\vec{L} = \sum_{a=1}^N \vec{r}^a \times m^a \vec{v}^a = \sum_{a=1}^N m^a \vec{r}^a \times \vec{v}^a = \sum_{a=1}^N m^a \vec{r}^a \times \frac{d\vec{r}^a}{dt}$. S využitím vztahu (241) pak můžeme v úpravách pokračovat: $\vec{L} = \sum_{a=1}^N m^a \vec{r}^a \times \left(\frac{d\vec{r}^a}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{r}^a \right)$. Platí $\frac{d\vec{r}^a}{dt} = \vec{o}$, neboť popisujeme pohyb tuhého tělesa jako jednoho celku a jeho jednotlivé elementy se proto vzhledem k sobě nepohybují. Můžeme tedy psát

$$\vec{L} = \sum_{a=1}^N m^a \vec{r}^a \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}^a). \quad (259)$$

Pravdivost rovnosti $\frac{d\vec{r}^a}{dt} = \vec{o}$ je zřejmá v analogii s pohybujícím se dětským kolotočem: koník, autíčko, ... na dětském kolotoči jsou vzhledem ke kolotoči v klidu.

Nyní vezmeme libovolný pomocný vektor $\vec{\xi}$, který zatím nemá žádný fyzikální smysl, a do jeho směru promítneme vektor momentu hybnosti \vec{L} . Následující úvahy provedeme obecně a teprve až potom dáme vektoru $\vec{\xi}$ fyzikální význam. Promítnutí vektoru $\vec{\xi}$ do směru vektoru \vec{L} provedeme pomocí skalárního součinu těchto dvou vektorů. S využitím vztahu (259) dostaneme

$$\vec{L} \cdot \vec{\xi} = \sum_{a=1}^N m^a \vec{r}^a \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}^a) \cdot \vec{\xi}. \quad (260)$$

Uvědomíme-li si, že absolutní hodnota smíšeného součinu vektorů \vec{a} , \vec{b} a \vec{c} ve tvaru $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ určuje objem rovnoběžnostěny, jehož tři strany vycházející z jednoho jeho vrcholu jsou reprezentovány vektory \vec{a} , \vec{b} a \vec{c} , je zřejmé, že uvedený zápis smíšeného součinu můžeme psát v dalších tvarech. Uvedené pořadí násobení vektorů totiž není jediné - při určování objemu rovnoběžnostěny nezávisí na tom, v jakém pořadí vynásobíme délky jeho stran vycházejících z jednoho jeho vrcholu.

Vztah (260) lze tedy přepsat ve tvaru $\vec{L} \cdot \vec{\xi} = \sum_{a=1}^N m^a (\vec{\xi} \times \vec{r}^a) \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}^a)$ a definovat bilineární zobrazení $I(\vec{\xi}, \vec{\Omega})$ předpisem

$$I(\vec{\xi}, \vec{\Omega}) = \sum_{a=1}^N m^a (\vec{\xi} \times \vec{r}^a) \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}^a), \quad (261)$$

na které lze nahlížet jako na funkci dvou proměnných $\vec{\xi}$ a $\vec{\Omega}$.

Hmotnosti m^a a polohové vektory \vec{r}^a jsou dány vyšetřovaným tuhým tělesem, vektory $\vec{\xi}$ a $\vec{\Omega}$ vstupují do popisu tuhého tělesa „zvenci“.

Vztah (261) definuje bilineární zobrazení proto, že vztah (261) je lineární v obou argumentech (součet i součin jsou lineární operace). Dvěma vektorům je tímto zobrazením přiřazeno reálné číslo, což je schéma této struktury. Matematicky je ovšem tímto předpisem definován tenzor.

Vztahem (261) jsme tedy definovali tenzor druhého řádu - v našem případě to je **tenzor setrvačnosti**.

Fakt, že se jedná o tenzor *druhého* řádu vyplývá z toho, že k jeho určení jsou nutné *dva* vektory.

Ve speciálním případě lze vztah (261) psát ve tvaru $I(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) = \sum_{a=1}^N m^a (\vec{\Omega} \times \vec{r}^a) \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}^a) = \sum_{a=1}^N m^a \vec{v}^a \cdot \vec{v}^a = \sum_{a=1}^N m^a (v^a)^2 = 2T$. Kinetickou energii T rotujícího tuhého tělesa lze tedy psát ve tvaru

$$T = \frac{1}{2} I(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}). \quad (262)$$

Dále bychom rádi vyjádřili prvky I_{ij} matice \mathbf{I} . K tomu je ale nutné zavést bázi, v níž vyjádříme všechny vektory v uvažovaném vztahu (v tomto případě vztah (262)). Pro obecný tenzor $T(\vec{v}, \vec{w})$ platí: $T(\vec{v}, \vec{w}) = T(v_i \vec{e}_i, w_j \vec{e}_j) = v_i w_j T(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$, odkud vyplývá, že

$$T_{ij} = T(\bar{e}_i, \bar{e}_j). \quad (263)$$

S využitím vztahu (263) můžeme psát $T'_{ij} = T(\bar{e}'_i, \bar{e}'_j) = T(A_{ik}\bar{e}_k, A_{jl}\bar{e}_l) = A_{ik}A_{jl}T(\bar{e}_k, \bar{e}_l)$, takže dostáváme

$$T'_{ij} = A_{ik}A_{jl}T_{kl}. \quad (264)$$

Správně bychom měli rozlišovat psaní horních indexů a dolních indexů, ale zde to není nutné, neboť lokálně pracujeme v kartézských souřadnicích (v kartézské bázi).

Nyní můžeme vyjádřit tenzor \vec{I} definovaný vztahem (261) ve složkách báze $\{\bar{e}_i\}$. Můžeme proto psát $I(\vec{\xi}, \vec{\Omega}) = I(\xi_i\bar{e}_i, \Omega_j\bar{e}_j) = \xi_i\Omega_j I(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$ a tedy

$$I(\vec{\xi}, \vec{\Omega}) = I_{ij}\xi_i\Omega_j. \quad (265)$$

Matice $I(\vec{\xi}, \vec{\Omega})$ je symetrická matice typu (3, 3), jejíž symetričnost vyplývá přímo z její definice (261): skalární součin (pomocí kterého je definována) je totiž komutativní. To znamená, že matice má šest nezávislých prvků.

Dříve než budeme pokračovat v dalších úpravách vztahu (261), si uvědomíme, že každý vektor \bar{r}^a (tj. pro všechny přípustné hodnoty a) lze rozepsat pomocí vektorů báze, v níž popisujeme celý pohyb, ve tvaru

$$\bar{r}^a = x_k^a \bar{e}_k, \quad (266)$$

kde x_k^a je k -tá souřadnice a -tého vektoru.

S využitím vztahů (263) a (266) můžeme nyní vztah (261) psát ve tvaru:

$$I_{ij} = I(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \sum_{a=1}^N m^a (\bar{e}_i \times \bar{r}^a) \cdot (\bar{e}_j \times \bar{r}^a) = \sum_{a=1}^N m^a (\bar{e}_i \times x_k^a \bar{e}_k) \cdot (\bar{e}_j \times x_l^a \bar{e}_l) = \sum_{a=1}^N m^a x_k^a x_l^a (\bar{e}_i \times \bar{e}_k) \cdot (\bar{e}_j \times \bar{e}_l).$$

Uvědomíme-li si, že výraz $(\bar{e}_i \times \bar{e}_k)_r$ představuje r -tou složku naznačeného vektorového součinu, můžeme pokračovat v úpravách:

$$I_{ij} = \sum_{a=1}^N m^a x_k^a x_l^a \varepsilon_{ikr} \varepsilon_{jlr} = \sum_{a=1}^N m^a x_k^a x_l^a \varepsilon_{rik} \varepsilon_{rjl} = \sum_{a=1}^N m^a x_k^a x_l^a (\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{kj}) = \sum_{a=1}^N m^a (\delta_{ij}\delta_{kl} x_k^a x_l^a - \delta_{il}\delta_{kj} x_k^a x_l^a).$$

Dostáváme tedy

$$I_{ij} = \sum_{a=1}^N m^a (\delta_{ij} x_l^a x_l^a - x_i^a x_j^a). \quad (267)$$

Pokud si nyní představíme, že tuhé těleso, které popisujeme, je složeno z krychliček (resp. hranolků) s různou hustotou $\rho(\vec{r})$, můžeme provést spojitou limitu vztahu (267) a získáme

$$I_{ij} = \int_V (\delta_{ij} x_l x_l - x_i x_j) \rho(\vec{r}) dV, \quad (268)$$

což jsou složky tenzoru setrvačnosti popisující spojitě prostředí. x_1 , x_2 a x_3 jsou souřadnice polohového vektoru vyjádřené v bázi, v níž počítáme.

Platí několik základních vztahů pro počítání ve složkách tenzoru setrvačnosti \vec{I} . První z nich je triviální a vyplývá přímo ze vztahu (267) resp. (268):

$$I_{ij} = I_{ji}. \quad (269)$$

Záměnou indexů se v sumě resp. v integrandu nic nezmění.

S využitím vztahů (260) a (261) můžeme psát $\vec{L} \cdot \vec{\xi} = I(\vec{\xi}, \vec{\Omega})$. S využitím vztahu (265) můžeme ve složkách psát $L_i \xi_i = I_{ij} \xi_i \Omega_j$ a tedy

$$L_i = I_{ij} \Omega_j. \quad (270)$$

Dále můžeme vztah (262) s využitím vztahu (265) rozepsat ve složkách báze a získáme

$$T = \frac{1}{2} I_{ij} \Omega_i \Omega_j. \quad (271)$$

Kinetickou energii T lze vyjádřit v zobecněných souřadnicích, kterými jsou v případě popisu rotace tuhého tělesa Eulerovy úhly (viz odstavec 5.1.5). Za Ω_1 , Ω_2 a Ω_3 tedy můžeme dosadit z Eulerových kinematických rovnic (257). Získáme tak vyjádření kinetické energie v zobecněných souřadnicích, můžeme vypočítat Lagrangeovu funkci definovanou vztahem (48) a řešit Lagrangeovy rovnice druhého druhu (47).

Matrice \mathbf{I} je symetrická matice, což znamená, že je možné jí pomocí vlastních čísel a vlastních vektorů diagonalizovat. Vlastní vektory lze v případě matice tenzoru setrvačnosti volit na osách kartézského systému souřadnic. Volbou ortogonální báze pak získáme hlavní čísla matice \mathbf{I} přímo na její hlavní diagonále. Proto platí

$$I_{ij}v_j = \lambda v_i, \quad (272)$$

kde \vec{v} je vlastní vektor matice \mathbf{I} a λ vlastní číslo matice \mathbf{I} .

Ve vztahu (272) je na levé straně vektor, který má obecně jiný směr a jinou velikost než vektor na pravé straně tohoto vztahu. A právě vztah (272) určuje podmínku pro nalezení takového vektoru \vec{v} , jehož směr se nezmění po aplikaci matice \mathbf{I} . Velikost může být jiná - to se případně „dovorná“ koeficientem λ .

Ortogonální báze tvořená vektory \vec{e}_1 , \vec{e}_2 a \vec{e}_3 , které jsou zároveň i vlastními vektory matice \mathbf{I} , určují hlavní osy tuhého tělesa resp. hlavní osy tenzoru setrvačnosti, který lze psát ve tvaru

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}, \quad (273)$$

kde I_1 , I_2 a I_3 jsou vlastní čísla matice \mathbf{I} .

Vlastní čísla matice \mathbf{I} byla ve vztahu (272) označena symbolem λ , ve vztahu (273) byla označena jako I_1 , I_2 a I_3 . Vztah (272) je „matematická definice“ vlastních čísel a vlastních vektorů matice, zatímco vztah (273) definuje fyzikální veličinu: tenzor setrvačnosti.

Každé těleso má tedy tři takové osy, pro které má tenzor setrvačnosti tvar daný výrazem (273), tj. má jen tři nezávislé složky na hlavní diagonále. Tyto tři uvažované osy tuhého tělesa procházejí jeho těžištěm a nazývají se **hlavní osy tuhého tělesa**. Proto se zkonkretizuje zápis vztahů (270) a (271), které přejdou na vztahy:

$$L_1 = I_1\Omega_1, \quad L_2 = I_2\Omega_2 \quad \text{a} \quad L_3 = I_3\Omega_3 \quad (274)$$

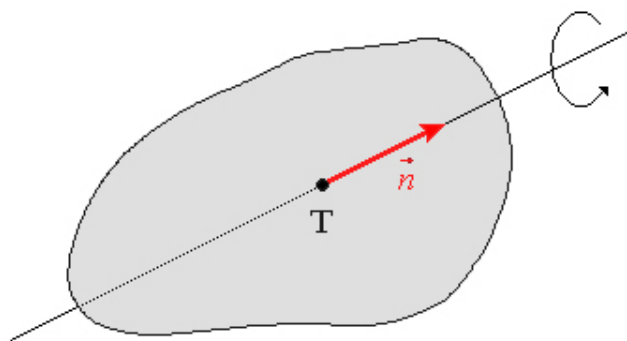
a

$$T = \frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2). \quad (275)$$

5.2.3 Moment setrvačnosti

Už z úvodní motivace ke studiu dynamiky tuhého tělesa (viz odstavec 5.2.1) je zřejmé, že tenzor setrvačnosti \mathbf{I} souvisí s momentem setrvačnosti. Budeme se tedy snažit nalézt vztah mezi složkami tenzoru setrvačnosti I_{ij} a momentem setrvačnosti $I_{\vec{n}}$.

MOMENT SETRVAČNOSTI $I_{\vec{n}}$ TUHÉHO TĚLESA BUDEME UVAŽOVAT VŮČI DANÉ OSE, KOLEM NÍŽ SE TUHÉ TĚLESO OTÁČÍ A KTERÁ JE URČENÁ JEDNOTKOVÝM VEKTOREM \vec{n} .



obr. 64

Situace je zobrazená na obr. 64. Na obr. 65 je pak zobrazen detailnější rozbor situace, který budeme potřebovat pro další odvození. Symbolem r_{\perp} je označena kolmá vzdálenost elementu tuhého tělesa o objemu dV (resp. o hmotnosti $dm = \rho dV$) od osy otáčení.

Kinetickou energii T tuhého tělesa chceme vyjádřit ve tvaru

$$T = \frac{1}{2} I_{\vec{n}} \Omega^2 \quad (276)$$

a přitom víme, že platí vztah (271). Na základě vztahu (243), který byl odvozen při vyšetřování rotace tuhého tělesa kolem pevné osy (viz odstavec 5.1.3), víme, že vektor úhlové rychlosti $\vec{\Omega}$ má směr osy otáčení tuhého tělesa. V našem případě tedy platí

$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{n}. \quad (277)$$

S využitím vztahu (277) lze vztah (271) psát ve tvaru $T = \frac{1}{2} I_{ij} \Omega_i \Omega_j = \frac{1}{2} I_{ij} \Omega n_i \Omega n_j$ a tedy

$$T = \frac{1}{2} I_{ij} n_i n_j \Omega^2. \quad (278)$$

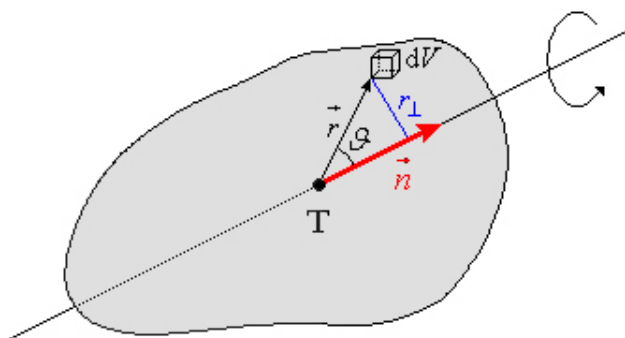
Porovnáním vztahů (276) a (278) dostáváme vyjádření pro moment setrvačnosti $I_{\vec{n}}$ ve tvaru

$$I_{\vec{n}} = I_{ij} n_i n_j. \quad (279)$$

Složky tenzoru setrvačnosti jsou definovány integrálem (268), který je vypočítán na základě charakteristik tuhého tělesa (hmotnost, rozložení látky v tuhém tělese, hustota tuhého tělesa, ...). Tenzor setrvačnosti je tedy určen pouze na základě charakteristik tuhého tělesa a nezávisí na volbě osy, kolem které se tuhé těleso otáčí. Na volbě této osy závisí až moment setrvačnosti $I_{\vec{n}}$ definovaný vztahem (279). To je ovšem velmi příjemné pro praktické počítání.

Spočítáme totiž jeden integrál a momenty setrvačnosti daného tělesa vzhledem k libovolné ose, kolem které se toto tuhé těleso otáčí, dopočítáme již sčítáním podle vztahu (279).

A nebo lze v případě tuhých těles velmi nepravidelných tvarů, u kterých by byl výpočet tenzoru setrvačnosti podle vztahu (268) komplikovaný, postupovat obráceně. Experimentálně určit momenty setrvačnosti tělesa rotujícího podle hlavních os a na základě toho určit tenzor setrvačnosti. Ten pak můžeme použít k výpočtu momentu setrvačnosti v případě, že tuhé těleso rotuje kolem libovolné osy.



obr. 65

Dosažením definičního vztahu tenzoru setrvačnosti (268) do definičního vztahu momentu setrvačnosti (279) dostaneme

$$I_{\vec{n}} = \int_V (\delta_{ij} n_i n_j x_i x_i - x_i x_j n_i n_j) \rho dV = \int_V (n_i n_i x_i x_i - x_i n_i x_j n_j) \rho dV = \int_V (n^2 r^2 - (\vec{r} \cdot \vec{n})^2) \rho dV.$$

Uvědomíme-li si, že osa rotace je charakterizovaná jednotkovým vektorem \vec{n} , můžeme pokračovat v rozpisu vztahu dále (i s využitím obr. 65) $I_{\vec{n}} = \int_V (r^2 - r^2 \cdot 1 \cdot \cos^2 \vartheta) \rho dV = \int_V (r \sin \vartheta)^2 \rho dV = \int_V r_{\perp}^2 \rho dV$. Pro moment setrvačnosti tedy dostáváme

$$I_{\vec{n}} = \int_V r_{\perp}^2 dm, \quad (280)$$

což je běžný vztah definující **moment setrvačnosti tuhého tělesa**.

Abychom získali další souvislosti pro praktické výpočty a praktické použití momentu setrvačnosti, upravíme definiční vztah (279) momentu setrvačnosti tak, že jej vydělíme momentem setrvačnosti $I_{\vec{n}}$. Získáme

tak výraz $1 = I_{ij} \frac{n_i}{\sqrt{I_{\vec{n}}}} \frac{n_j}{\sqrt{I_{\vec{n}}}}$. Pokud nadefinujeme pomocný vektor $\vec{\xi} = (\xi_1; \xi_2; \xi_3)$ vztahem

$$\vec{\xi} = \frac{\vec{n}}{\sqrt{I_{\vec{n}}}} \quad (281)$$

můžeme psát

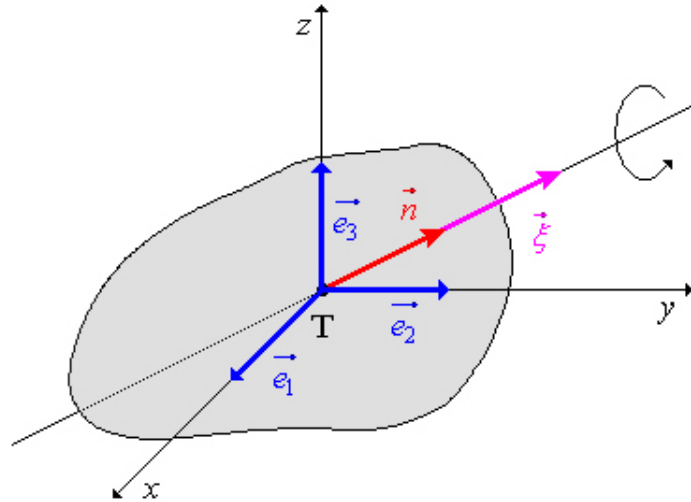
$$I_{ij} \xi_i \xi_j = 1. \quad (282)$$

Vektor $\vec{\xi}$ definovaný vztahem (281) má směr osy rotace tuhého tělesa (ta je daná směrem vektoru \vec{n}), ale jeho velikost je obecně od vektoru \vec{n} různá (viz obr. 66). V bázi hlavních os tedy můžeme vztah (282) upravit na tvar $I_1 \xi_1^2 + I_2 \xi_2^2 + I_3 \xi_3^2 = 1$. Další matematickou úpravou získáme tvar

$$\left(\frac{\xi_1}{\sqrt{I_1}}\right)^2 + \left(\frac{\xi_2}{\sqrt{I_2}}\right)^2 + \left(\frac{\xi_3}{\sqrt{I_3}}\right)^2 = 1,$$

což je rovnice elipsoidu zapsaná v prostoru $(\xi_1; \xi_2; \xi_3)$. Tento elipsoid se nazývá **elipsoid setrvačnosti** a jeho hlavní poloosy mají délky $\frac{1}{\sqrt{I_1}}$, $\frac{1}{\sqrt{I_2}}$ a $\frac{1}{\sqrt{I_3}}$.

Hlavní osy jsou většinou kolmé na roviny symetrie uvažovaného tuhého tělesa.



obr. 66

V každém tuhém tělese tedy existují hlavní osy. To znamená, že každému tuhému tělesu lze abstraktně opsat elipsoid setrvačnosti, který v nějakém bodě protíná osu, kolem které tuhé těleso rotuje a která je určena vektorem \vec{n} . Průsečík elipsoidu setrvačnosti a osy rotace tuhého tělesa má souřadnice $[\xi_1; \xi_2; \xi_3]$, tj. polohový vektor tohoto průsečíku je vektor $\vec{\xi} = (\xi_1; \xi_2; \xi_3)$. Velikost tohoto vektoru je $|\vec{\xi}| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$. S využitím definice vektoru $\vec{\xi}$ ve tvaru (281) můžeme psát $|\vec{\xi}| = \frac{|\vec{n}|}{\sqrt{I_{\vec{n}}}}$. Vektor \vec{n} byl ovšem zvolen jako jednotkový, takže

můžeme psát $|\vec{\xi}| = \frac{1}{\sqrt{I_{\vec{n}}}}$ a po úpravě dostáváme

$$I_{\vec{n}} = \frac{1}{|\vec{\xi}|^2}. \quad (284)$$

Moment setrvačnosti $I_{\vec{n}}$ tuhého tělesa, který charakterizuje otáčení tohoto tělesa kolem osy dané vektorem \vec{n} , tedy určujeme pomocí průsečíku této osy s abstraktním elipsoidem setrvačnosti. To znamená, že moment setrvačnosti $I_{\vec{n}}$ se spojitě mění v závislosti na spojitě změně polohy osy rotace tuhého tělesa.

Při změně polohy osy rotace se změní směr vektoru \vec{n} a tedy se změní průsečík této osy s elipsoidem setrvačnosti. Změna souřadnic $[\xi_1; \xi_2; \xi_3]$ tohoto průsečíku vede (podle vztahu (284)) ke změně momentu setrvačnosti tělesa.

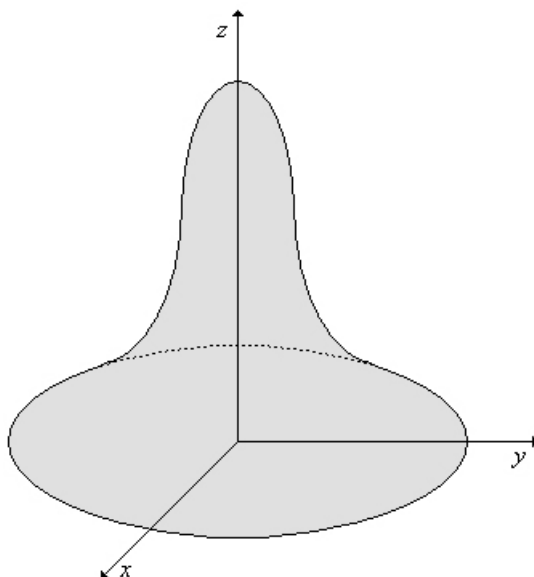
Je-li osou rotace tuhého tělesa např. první hlavní osa (tj. je-li $\vec{n} = \vec{e}_1$), lze vztah (284) s využitím předchozích informací psát ve tvaru $I_{\vec{n}} = \frac{1}{\xi_1^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{I_1}}\right)^2} = I_1$. Tedy relativně obtížně definovaný tenzor

setrvačnosti nyní přináší velké výhody při jednoduchém a rychlém určování momentu setrvačnosti $I_{\vec{n}}$.

Další zjednodušení tenzoru setrvačnosti \mathbf{I} (a tedy i následný výpočet momentu setrvačnosti) přináší symetrie tuhého tělesa:

1. tuhé těleso je rotační těleso - pak platí $I_1 = I_2 \neq I_3$ a elipsoid setrvačnosti má tvar podobný tvaru na obr. 67;

- tuhé těleso je koule - $I_1 = I_2 = I_3$ a elipsoidem setrvačnosti je sféra; navíc v tomto případě je moment setrvačnosti $I_{\vec{n}}$ konstantní pro všechny osy, které procházejí těžištěm tuhého tělesa (tj. uvažované koule);
- tuhé těleso je krychle - ta je symetrická a její hlavní osy jsou kolmé na její stěny. Proto je moment setrvačnosti $I_{\vec{n}}$ stejný pro všechny osy krychle procházející jejím těžištěm. Elipsoidem setrvačnosti krychle je sféra.



obr. 67

5.2.4 Eulerovy dynamické rovnice

Eulerovy dynamické rovnice jsou jakousi analogií Newtonových rovnic (rovnice druhého Newtonova zákona) pro tuhé těleso. Jejich odvození vychází ze druhé věty impulsové, kterou lze získat velmi jednoduše z první věty impulsové tvaru $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ tak, že tuto rovnici vektorově vynásobíme polohovým vektorem \vec{r} . Tak dostaneme $\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$, což lze psát ve tvaru

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (285)$$

Vztah (285) je matematickým vyjádřením **druhé věty impulsové**. V tomto vztahu je \vec{M} moment vnějších sil a \vec{L} je moment hybnosti. Vzhledem k tomu, že \vec{M} charakterizuje míru otáčivých účinků vnějších sil na dané tuhé těleso, budeme situaci vyšetřovat z hlediska vnějšího pozorovatele.

Na základě vztahu (241) můžeme tedy pro moment hybnosti psát

$$\left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\text{prostor}} = \left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\text{těleso}} + \vec{\Omega} \times \vec{L}, \quad (286)$$

kde moment hybnosti vystupující na pravé straně vztahu je definovaný z hlediska tuhého tělesa.

Změnu momentu hybnosti $\left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\text{těleso}}$ tedy naměří dítě, které sedí na rotujícím kolotoči. Změnu momentu hybnosti $\left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\text{prostor}}$ naměří rodič dítěte, který stojí vedle rotujícího kolotoče.

Ze vztahů (285) a (286) vyplývá

$$\vec{M} = \left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\text{těleso}} + \vec{\Omega} \times \vec{L}. \quad (287)$$

Přitom moment hybnosti je definován pomocí tenzoru setrvačnosti a vektoru úhlové rychlosti vztahem (270). Vzhledem k tuhému tělesu jsou ovšem složky tenzoru setrvačnosti \mathbf{I} konstantní, neboť jsou určeny buď v korotující bázi (ta je vzhledem k danému tuhému tělesu v klidu, protože rotuje spolu s ním) a nebo vzhledem k hlavním osám tuhého tělesa. Pro moment hybnosti definovaný vůči hlavním osám můžeme napsat jednodušší podobu vztahu (270) (analogii vztahu (274)):

$$L_x = I_1 \Omega_x, \quad L_y = I_2 \Omega_y \quad \text{a} \quad L_z = I_3 \Omega_z. \quad (288)$$

Rozepsáním vektorového součinu ve vztahu (287) a částečným dosazením ze vztahu (288) dostaneme

$$I_1 \dot{\Omega}_x + (\Omega_y L_z - \Omega_z L_y) = M_x \quad (289)$$

$$I_2 \dot{\Omega}_y + (\Omega_z L_x - \Omega_x L_z) = M_y$$

$$I_3 \dot{\Omega}_z + (\Omega_x L_y - \Omega_y L_x) = M_z.$$

Po dalším dosazení ze vztahu (288) získáme **Eulerovy dynamické rovnice**, které popisují rotaci tuhého tělesa z hlediska dynamiky, ve tvaru

$$I_1 \dot{\Omega}_x - (I_2 - I_3) \Omega_y \Omega_z = M_x \quad (290)$$

$$I_2 \dot{\Omega}_y - (I_3 - I_1) \Omega_x \Omega_z = M_y$$

$$I_3 \dot{\Omega}_z - (I_1 - I_2) \Omega_x \Omega_y = M_z.$$

Tyto rovnice publikoval švýcarský matematik a fyzik Leonhard Paul Euler (1707 - 1783) v roce 1758.

Vektor úhlové rychlosti $\vec{\Omega} = (\Omega_x; \Omega_y; \Omega_z)$, který vystupuje v Eulerových dynamických rovnicích (290), je popsán pomocí Eulerových úhlů otočení tuhého tělesa (viz odstavec 5.1.5) a s těmito úhly je svázán Eulerovými kinematickými rovnicemi (257).

Eulerovy dynamické rovnice jsou silně nelineární soustavou obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu, což je důvod, proč se setrvačníky (jejichž pohyb je těmito rovnicemi popsán) chovají nepředvídatelně. Tyto relativně složité rovnice poskytují relativně složité řešení, které popisuje složitý pohyb tuhých těles. Rovnice jsou sice prvního řádu, ale ve většině úloh jsou vektor úhlové rychlosti a složky tenzoru setrvačnosti vyjádřeny v bázi hlavních os (resp. v korotující bázi tuhého tělesa), zatímco moment sil je vyjádřen z hlediska vnějšího pozorovatele. Proto je velmi komplikovaný přepočítání veličin měřených vnějšími pozorovateli do korotující báze - průměty momentů sil do jednotlivých os se mění v čase, neboť z hlediska vnějšího pozorovatele se v čase neustále mění korotující báze resp. báze hlavních os.

Jak vektory korotující báze, tak báze hlavních os jsou pevně spojeny s tělesem a tedy se při pohybu tuhého tělesa (translace i rotace) z hlediska vnějšího pozorovatele mění. Proto je přepočítání mezi pohledem „zvenčí“ a pohledem „zevnitř“ poměrně komplikovaný.

Při řešení konkrétní úlohy je tedy nutné vyjádřit celkový moment vnějších sil v korotující bázi tuhého tělesa, tj. pomocí Eulerových úhlů. Poté je nutné dosadit z Eulerových kinematických rovnic do Eulerových dynamických rovnic, čímž se levá strana rovnic (290) stane velmi komplikovaná, neboť bude obsahovat výrazy závislé na Eulerových úhlech φ , ϑ a ψ a jejich časových derivacích $\dot{\varphi}$, $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$, $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\vartheta}$ a $\ddot{\psi}$. Získáme tedy velmi silně nelineární soustavu diferenciálních rovnic druhého řádu pro neznámé φ , ϑ a ψ .

Pohyb popsáný takovou soustavou rovnic je silně chaotický a výpočetně stejně problematický a náročný jako pohyb tří těles (viz odstavec 3.13), pohyb dvojkyvadla, ... Přesto se ale aplikace této teorie v praxi používají - na principu setrvačnicků pracují gyroskopy, kterým stále dávají piloti dopravních letadel přednost před elektronickou navigací (např. systém GPS), používají se i v dalších druhích navigační techniky, ... Při konstrukci takových přístrojů se pak používají různé metody, jak Eulerovy dynamické rovnice zjednodušit: speciální závěsy setrvačnicků, tvar těles, uložení těles, ... To vše vede k tomu, že naroste symetrie daného problému a tedy se zjednoduší popis pohybu daného tělesa: stejné momenty setrvačnosti podél (některých) hlavních os (viz odstavec 5.2.3), speciální tvar elipsoidu setrvačnosti (nejlépe sféra), ...

Typickou aplikací, která je popsána v odstavci 5.2.5, je tzv. bezsilový setrvačnick (bezmomentový setrvačnick).

5.2.5 Bezmomentový setrvačnick

Bezilový setrvačnick je špatný název pro bezmomentový rotačně symetrický setrvačnick, který může sloužit např. jako model gyroskopu uloženého v tzv. Cardanově závěsu. Dalším velmi dobrým modelem tohoto typu setrvačnicku je Země.

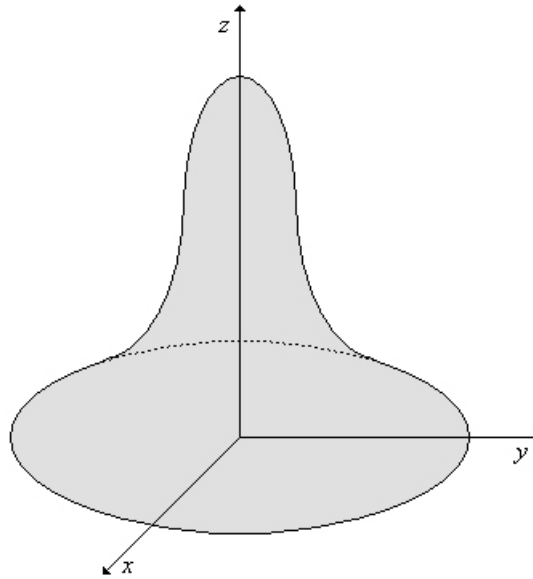
Tento setrvačnick je charakterizován nulovým momentem sil (tj. $\vec{M} = \vec{0}$) a rotační symetrií, ze které pro momenty setrvačnosti vzhledem k hlavním osám vyplývá $I_1 = I_2 \neq I_3$. Takový setrvačnick si lze představit podobně jako těleso na obr. 68.

Eulerovy dynamické rovnice (290) se tedy zjednoduší na tvar

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\Omega}_x &= (I_1 - I_3) \Omega_y \Omega_z \\ I_1 \dot{\Omega}_y &= (I_3 - I_1) \Omega_x \Omega_z \\ I_3 \dot{\Omega}_z &= 0 \end{aligned} \quad (291)$$

Z poslední z Eulerových rovnic (291) dostáváme $\Omega_z = \text{konst.}$ a tuto konstantu označíme ω_0^z , takže máme

$$\Omega_z = \omega_0^z = \text{konst.} \quad (292)$$



obr. 68

Z první z rovnic (291) můžeme vyjádřit $\dot{\Omega}_x = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_0^z \Omega_y$ a ze druhé $\dot{\Omega}_y = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_0^z \Omega_x$. Označíme-li

$$\omega_0 = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_0^z, \quad (293)$$

můžeme psát

$$\dot{\Omega}_x = \omega_0 \Omega_y \text{ a } \dot{\Omega}_y = -\omega_0 \Omega_x. \quad (294)$$

Derivujeme-li nyní první z rovnic (294) podle času, dostaneme $\ddot{\Omega}_x = \omega_0 \dot{\Omega}_y$ a po dosazení ze druhé dostaneme rovnici $\ddot{\Omega}_x = -\omega_0^2 \Omega_x$ neboli

$$\ddot{\Omega}_x + \omega_0^2 \Omega_x = 0, \quad (295)$$

což je rovnice popisující pohyb harmonického oscilátoru. Proto můžeme její řešení psát ve tvaru

$$\Omega_x(t) = A \sin(\omega_0 t + \delta), \quad (296)$$

kde A je amplituda kmitání harmonického pohybu a δ je počáteční fáze kmitání harmonického oscilátoru. Z hlediska řešení soustavy rovnic (291) to jsou integrační konstanty. Po úpravě první z rovnic (294) a následném dosazení řešení (296) získáme $\Omega_y = \frac{1}{\omega_0} \dot{\Omega}_x = \frac{1}{\omega_0} \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \delta)$. Dostáváme tedy

$$\Omega_y(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta). \quad (297)$$

S využitím částečných řešení (292), (296) a (297) dostáváme pro vektor úhlové rychlosti $\vec{\Omega}$ v závislosti na čase

$$\vec{\Omega}(t) = (A \sin(\omega_0 t + \delta); A \cos(\omega_0 t + \delta); \omega_0^z). \quad (298)$$

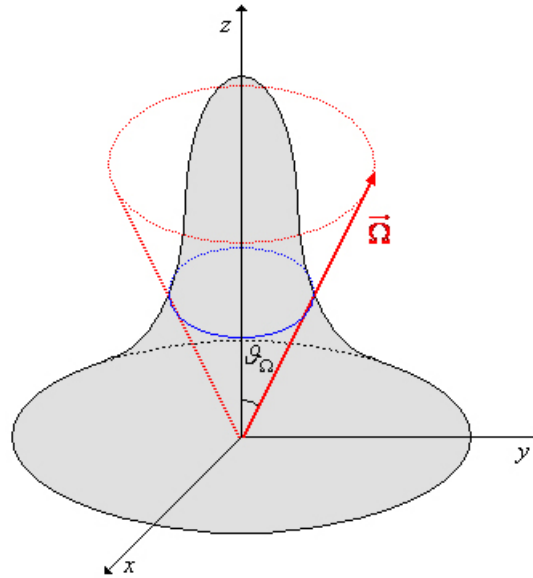
Vektor $\vec{\Omega}$ je tedy vyjádřen v bázi hlavních os a pro jeho velikost platí $|\vec{\Omega}(t)| = \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2}$. Po dosazení ze vztahu (298) tedy dostaneme

$$|\vec{\Omega}(t)| = \sqrt{A^2 + (\omega_0^z)^2} = \text{konst.} \quad (299)$$

Uvědomíme-li si platnost vztahu (292) je zřejmé, že vektor úhlové rychlosti $\vec{\Omega}$ zapsaný ve tvaru (298) opisuje plášť rotačního kužele (viz obr. 69) s úhlovou frekvencí ω_0 . To znamená, že nutační úhel ϑ_Ω , který svírá vektor úhlové rychlosti $\vec{\Omega}$ s osou z , je konstantní a platí

$$\text{tg } \vartheta_\Omega = \frac{\sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2}}{\Omega_z} = \frac{A}{\omega_0^z}. \quad (300)$$

Na obr. 69 je také znázorněna kružnice, ve které protíná rotující vektor $\vec{\Omega}$ dané tuhé těleso.



obr. 69

Skutečnost, že vektor $\bar{\Omega}$ opisuje plášť kužele, vyplývá z toho, že velikost tohoto vektoru je v čase konstantní, z-ová složka je konstantní a dále z toho, že x-ová a y-ová složka vektoru $\bar{\Omega}$ opisují kružnice; vztahy (296) a (297) jsou totiž parametrické rovnice kružnice vyjádřené v polárních souřadnicích.

Ještě je nutné dopočítat Eulerovy úhly φ , ϑ a ψ pomocí Eulerových kinematických rovnic (257). Dosazením do těchto rovnic získáme pro náš vyšetřovaný případ soustavu rovnic

$$\dot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi = A \sin(\omega_0 t + \delta) \quad (301)$$

$$-\dot{\vartheta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi = A \cos(\omega_0 t + \delta)$$

$$\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta = \omega_0^z.$$

Vzhledem k tomu, že koncový bod vektoru $\bar{\Omega}$ opisuje kružnici, je nutační úhel ϑ konstantní, tedy $\vartheta = \vartheta_0$. Proto můžeme Eulerovy kinematické rovnice (301) psát v jednodušším tvaru:

$$\dot{\varphi} \sin \vartheta_0 \sin \psi = A \sin(\omega_0 t + \delta) \quad (302)$$

$$\dot{\varphi} \sin \vartheta_0 \cos \psi = A \cos(\omega_0 t + \delta)$$

$$\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta_0 = \omega_0^z.$$

Je-li totiž $\vartheta = \vartheta_0 = \text{konst.}$, pak je časová změna tohoto úhlu nulová, tj. $\dot{\vartheta} = 0$.

Řešení soustavy rovnic (302) nalezneme postupnými kroky. Nejdříve umocníme první dvě rovnice soustavy na druhou a sečteme je. Dostaneme rovnici $(\dot{\varphi} \sin \vartheta_0)^2 (\sin^2 \psi + \cos^2 \psi) = A^2 (\sin^2(\omega_0 t + \delta) + \cos^2(\omega_0 t + \delta))$, po jejíž úpravě získáme tvar $(\dot{\varphi} \sin \vartheta_0)^2 = A^2$. Odmocněním přejde rovnice na tvar

$$\dot{\varphi} = \frac{A}{\sin \vartheta_0}, \quad (303)$$

odkud vyplývá

$$\varphi = \frac{A}{\sin \vartheta_0} t + \varphi_0. \quad (304)$$

Ve vztahu (303) je na jeho pravé straně konstanta, proto je integrace podle proměnné t jednoduchá.

Vydělením prvních dvou rovnic soustavy (302) získáme rovnici $\frac{\dot{\varphi} \sin \vartheta_0 \sin \psi}{\dot{\varphi} \sin \vartheta_0 \cos \psi} = \frac{A \sin(\omega_0 t + \delta)}{A \cos(\omega_0 t + \delta)}$, která po úpravě přejde na tvar $\frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \frac{\sin(\omega_0 t + \delta)}{\cos(\omega_0 t + \delta)}$. Dostáváme tedy rovnici

$$\text{tg } \psi = \text{tg}(\omega_0 t + \delta). \quad (305)$$

Derivací rovnice (305) podle času získáme rovnici $\frac{1}{\cos^2 \psi} \dot{\psi} = \frac{1}{\cos^2(\omega_0 t + \delta)} \omega_0$, odkud můžeme vyjádřit

$$\dot{\psi} = \frac{\cos^2 \psi}{\cos^2(\omega_0 t + \delta)} \omega_0. \quad (306)$$

Ze druhé rovnice soustavy (302) můžeme vyjádřit

$$\cos \psi = \frac{A \cos(\omega_0 t + \delta)}{\dot{\varphi} \sin \vartheta_0}. \quad (307)$$

Nyní můžeme do vztahu (306) dosadit ze vztahu (307), čímž získáme rovnici $\dot{\psi} = \frac{A^2 \cos^2(\omega_0 t + \delta)}{\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta_0} \frac{1}{\cos^2(\omega_0 t + \delta)} \omega_0$. Do jejího upraveného tvaru $\dot{\psi} = \frac{A^2}{\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta_0} \omega_0$ dosadíme ze vztahu (303) a získáme

$$\dot{\psi} = \omega_0. \quad (308)$$

Odtud již snadno určíme

$$\psi = \omega_0 t + \delta. \quad (309)$$

Dosazením vztahů (303) a (308) do třetí rovnice soustavy (302) dostaneme $\omega_0 + \frac{A}{\sin \vartheta_0} \cos \vartheta_0 = \omega_0^z$.

Postupnými úpravami získáme rovnici ve tvaru $\frac{A}{\operatorname{tg} \vartheta_0} = \omega_0^z - \omega_0$, a tedy můžeme psát $\operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{A}{\omega_0^z - \omega_0}$.

S využitím vztahu (293) dostáváme rovnici ve tvaru $\operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{A}{\omega_0^z - \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_0^z} = \frac{I_1 A}{I_1 \omega_0^z - I_1 \omega_0^z + I_3 \omega_0^z}$, takže máme

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{I_1 A}{I_3 \omega_0^z}. \quad (310)$$

Získali jsme tedy řešení Eulerových kinematických rovnic ve tvaru

$$\vartheta = \vartheta_0, \text{ přičemž } \operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{I_1 A}{I_3 \omega_0^z}, \varphi = \frac{A}{\sin \vartheta_0} t + \varphi_0 \text{ a } \psi = \omega_0 t + \delta. \quad (311)$$

Při hledání řešení soustavy rovnic (302) byly prováděny operace, které z hlediska matematiky vyžadují komentáře a diskusi jejich platnosti (při dělení není možné dělit nulou, ...). Z fyzikálního hlediska ovšem hodnoty goniometrických funkcí nemohou být nulové, tj. jejich argumenty nemohou z fyzikálních důvodů mít hodnoty 0 nebo $\frac{\pi}{2}$. Proto jsou všechny provedené úpravy v tomto případě korektní.

U bezmomentového setrvačnicku tedy nastává tzv. **regulární precese** (pravidelná precese), při níž se poloha osy otáčení (tj. směr vektoru $\vec{\Omega}$) mění v čase pravidelně (koncový bod vektoru opisuje kružnici). V případě rotace Země je tato precese důsledkem pohybů během počátečního vývoje Sluneční soustavy, dopadem meteoroidů na Zem, ... Ve skutečnosti ovšem právě popisovaná precese není takto pravidelná, neboť na Zemi působí svou gravitační silou Měsíc, působí na ní i Slunce, sama Země není dokonale symetrické těleso ani to není ideálně tuhé těleso, ... Proto vznikají nepřesnosti v tomto precesním pohybu, které mají periodu 427 dní, a zemská osa tedy neprotíná Zemi v jednom bodě (severní pól), ale opisuje kolem severního pólu kružnici o poloměru asi 4 m.

Tato kružnice je analogická kružnici, která je na obr. 69 znázorněna modrou křivkou.

Právě určený směr úhlové rychlosti $\vec{\Omega}$ (tj. směr osy rotace) byl určen vzhledem k tělesu (vzhledem k Zemi, vzhledem ke korotující bázi). Určit směr vektoru $\vec{\Omega}$ vzhledem k pevné bázi (vzhledem ke stálícím, vzhledem k systému GPS, ...) není jednoduché. Pro určení pohybu vektoru $\vec{\Omega}$ vzhledem k pevné bázi je nutné určit jeden vybraný směr. Tímto vybraným směrem může být např. směr vektoru momentu hybnosti \vec{L} . Moment hybnosti je totiž veličina, která se v izolované soustavě zachovává.

Bezmomentový setrvačnick takovou izolovanou soustavou je. Ostatně ze vztahu (285) pro bezmomentový setrvačnick plyne $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{o}$ a tedy $\vec{L} = \text{konst.}$

S využitím vztahů (288), (292), (296) a (297) můžeme pro složky momentu hybnosti \vec{L} psát:

$$L_x = I_1 \Omega_x = I_1 A \sin(\omega_0 t + \delta), \quad L_y = I_2 \Omega_y = I_1 A \cos(\omega_0 t + \delta) \text{ a } L_z = I_3 \Omega_z = I_3 \omega_0^z \quad (312)$$

a pro jeho velikost dostáváme $|\vec{L}(t)| = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}$. Po dosazení ze vztahů (312) pak máme

$$|\vec{L}(t)| = \sqrt{I_1^2 A^2 + I_3^2 (\omega_0^z)^2} = \text{konst.} \quad (313)$$

Vektor momentu hybnosti \vec{L} tedy opisuje také plášť kužele, ale obecně jiný, než opisuje vektor úhlové rychlosti $\vec{\Omega}$. Oba ale opisují kužely se stejnou úhlovou frekvencí ω_0 . Vektor momentu hybnosti \vec{L} přitom svírá s osou z stálý úhel ϑ_L , pro který platí

$$\text{tg } \vartheta_L = \frac{\sqrt{L_x^2 + L_y^2}}{L_z} = \frac{I_1 A}{I_3 \omega_0^z} = \frac{I_1}{I_3} \text{tg } \vartheta_\Omega. \quad (314)$$

Úhel ϑ_L má přitom stejnou hodnotu jako úhel ϑ_Ω z řešení (311).

Na základě nalezeného řešení (298) pro vektor úhlové rychlosti $\vec{\Omega}$ a řešení (312) pro vektor momentu hybnosti \vec{L} lze psát

$$\vec{L} = I_1 \vec{\Omega} + (I_3 - I_1) \Omega_z \vec{e}_z, \quad (315)$$

což znamená, že v každém okamžiku vektory $\vec{\Omega}$ a \vec{L} a osa z leží v jedné rovině.

Na vztah (315) lze nahlížet jako na parametrické vyjádření roviny, která je dána vektory $\vec{\Omega}$ a \vec{e}_z .

Z hlediska pevné báze (tj. vzhledem ke stálícím, systému GPS, ...) má stálý směr v prostoru vektor momentu hybnosti \vec{L} a setrvačnik (Země) rotuje kolem něj.

Kolem vektoru \vec{L} tedy rotuje osa z a kolem ní vektor úhlové rychlosti $\vec{\Omega}$.

Situaci lze znázornit pomocí dvou kuželů, které se kolem sebe valí. Přímka, která je okamžitou dotýčnicí obou kuželů, určuje směr vektoru úhlové rychlosti $\vec{\Omega}$. Oba kužely přitom popisují precesi vektoru úhlové rychlosti $\vec{\Omega}$ - jeden kužel znázorňuje její precesi kolem vektoru momentu hybnosti \vec{L} , druhý kužel pak precesi kolem osy z daného kartézského systému.

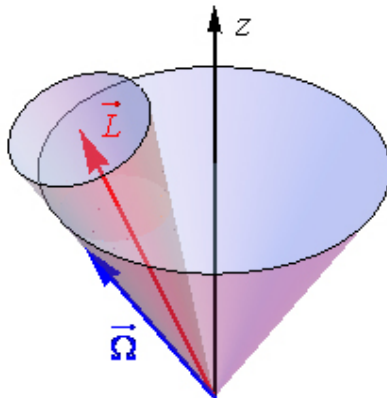
V závislosti na vzájemné hodnotě momentů setrvačnosti I_1 a I_3 uvažovaného tělesa mohou nastat dva případy:

1. $I_1 < I_3$ - ze vztahu (314) a z toho, že funkce tangens je rostoucí, vyplývá, že $\vartheta_L < \vartheta_\Omega$ a kužel spojený s momentem hybnosti \vec{L} se valí uvnitř kužele spojeného s osou z daného kartézského systému (viz obr. 70).
2. $I_1 > I_3$ - ze vztahu (314) a z toho, že funkce tangens je rostoucí, vyplývá, že $\vartheta_L > \vartheta_\Omega$ a kužel spojený s momentem hybnosti \vec{L} se valí vně kužele spojeného s osou z daného kartézského systému (viz obr. 71).

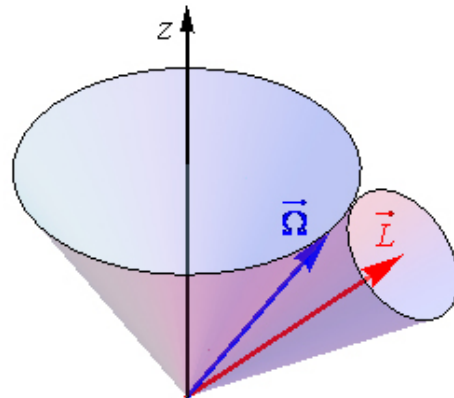
Vektory na obr. 70 a obr. 71 by měly být správně otočeny tak, aby vektor momentu hybnosti \vec{L} měl svislý směr. Bylo by tím lépe naznačeno, že je to právě tento vektor, jehož směr se v prostoru zachovává!

Pro nesymetrický setrvačnik je řešení jeho pohybu komplikovanější. Navíc se nezachovává ani směr ani velikost úhlové rychlosti $\vec{\Omega}$.

U symetrického se zachovává velikost vektoru úhlové rychlosti $\vec{\Omega}$.



obr. 70



obr. 71