

KATEDRA EXPERIMENTÁLNÍ FYZIKY  
PŘÍRODOVĚDECKÉ FAKULTY UP OLMOUC

# Klasická mechanika

JOSEF TILICH A LUKÁŠ RICHTEREK



Elektronická podoba textu vznikla v rámci projektu FRVŠ 1921/2007/F6/a

Poslední úpravy: 6. ledna 2008



# Obsah

---

Úvod . . . . .	iii
----------------	-----

## Nerelativistická mechanika soustavy částic a tuhého tělesa

<b>1</b>	<b>Mechanika částic . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1	Základní pojmy z mechaniky částice . . . . .	1
1.2	Dynamika částice . . . . .	6
1.3	Některé úlohy z dynamiky částice . . . . .	12
1.3.1	Přímočarý pohyb částice . . . . .	12
1.3.2	Křivočaré pohyby částice . . . . .	15
1.3.3	Pohyb částice v poli centrální síly, Keplerova úloha . . . . .	17
1.4	Řešené příklady . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Soustavy částic . . . . .</b>	<b>42</b>
2.1	Hmotný střed soustavy částic . . . . .	42
2.2	Pohybové rovnice soustavy částic . . . . .	43
2.3	Hybnost, moment hybnosti a energie soustavy částic . . . . .	44
2.4	Vztažná soustava hmotného středu. . . . .	47
2.5	Pohyb soustav s proměnnou hmotností . . . . .	48
2.6	Řešené příklady . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Soustavy podrobené vazbám . . . . .</b>	<b>52</b>
3.1	Vazby . . . . .	52
3.2	Princip virtuální práce . . . . .	53
3.3	Lagrangeovy rovnice 1. druhu . . . . .	54
3.4	Lagrangeovy rovnice 2.druhu . . . . .	55
3.5	Další základní principy mechaniky . . . . .	57
3.6	Použití Lagrangeových rovnic druhého druhu . . . . .	59
3.6.1	Integrál energie . . . . .	59
3.6.2	Integrál cyklických souřadnic . . . . .	60
3.6.3	Problém dvou těles . . . . .	61
3.6.4	Malé kmity mechanických soustav . . . . .	61
3.6.5	Použití Lagrangeova formalismu v teorii elektromagnetického pole . . . . .	65
3.7	Řešené příklady . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Mechanika tuhého tělesa . . . . .</b>	<b>70</b>
4.1	Základní pojmy z mechaniky tuhého tělesa . . . . .	70
4.2	Některé konkrétní úlohy dynamiky tuhého tělesa . . . . .	74
4.2.1	Rotace tuhého tělesa kolem pevné osy . . . . .	74
4.2.2	Volný symetrický setrvačnick . . . . .	74
4.2.3	Těžký symetrický setrvačnick . . . . .	75
4.2.4	Pohyb částice v rotující soustavě . . . . .	79

<b>5</b>	<b>Obecné principy mechaniky</b>	<b>81</b>
5.1	Hamiltonův princip	81
5.2	Hamiltonovy kanonické rovnice	83
5.3	Jiné integrální principy	87
5.4	Kanonické transformace	90
5.5	Hamiltonova–Jacobiho rovnice	93
5.6	Invarianty kanonických transformací	98

## Mechanika kontinua

<b>6</b>	<b>Pohybové rovnice kontinua</b>	<b>107</b>
6.1	Síly objemové a plošné, tenzor napětí	107
6.2	Tenzor deformace	110
<b>7</b>	<b>Klasická teorie pružnosti</b>	<b>114</b>
7.1	Zobecněný Hookův zákon	114
7.2	Dynamické rovnice izotropního kontinua. Dynamická teorie pružnosti	119
7.2.1	Kmity struny	120
7.2.2	Nekonečně dlouhá struna	121
7.2.3	Struna konečné délky	122
7.2.4	Podélné kmity tyče	123
7.2.5	Kmity membrán	123
<b>8</b>	<b>Mechanika tekutin</b>	<b>127</b>
8.1	Statika tekutin	127
8.1.1	Tlak v homogenním tíhovém poli	128
8.1.2	Pascalův a Archimédův zákon	128
8.2	Kinematika tekutin	129
8.3	Pohybové rovnice ideálních tekutin	131
8.3.1	Integrál podél proudnice	133
8.3.2	Nevířivé proudění	134
8.3.3	Šíření zvuku v tekutinách	135
8.4	Vybrané úlohy z teorie nevířivého proudění	135
8.4.1	Prostorové sféricky symetrické proudění ideální nestlačitelné tekutiny	136
8.4.2	Rovinné nevířivé proudění ideální nestlačitelné tekutiny	136
8.4.3	Obtékání překážky (kruhového válce)	138
8.5	Dynamika vazkých tekutin	140

## Dodatky

<b>A</b>	<b>Matematický doplněk</b>	<b>146</b>
A.1	Kartézské tenzory	146
A.1.1	Definice a základní vlastnosti	146
A.1.2	Početní operace s tenzory	147
A.1.3	Tenzory druhého řádu	149
A.1.4	Izotropní tenzory	151
A.2	Helmholtzova věta	151
<b>B</b>	<b>Anglicko-český slovníček vybraných pojmů</b>	<b>153</b>
	<b>Rejstřík</b>	<b>155</b>

# Úvod

---

Tento text vznikl doplněním a rozšířením studijního textu [1], který po řadu let úspěšně sloužil studentům PřF UP jako základní materiál k předmětu teoretická mechanika. Postupná změna organizace výuky na PřF UP spolu s běžnou dostupností internetu a výpočetní techniky pro většinu studentů nás vedla k přesvědčení, že text si zaslouží přepracování do elektronické verze doprovázené i konkrétními numerickými modely řešených úloh.

Za finanční podpory projektu FRVŠ 1921/2007/F6/a „Inovace předmětu teoretická mechanika“ byla zřízena webová stránka předmětu, kde lze kromě tohoto textu nalézt příklady zdrojové soubory k modelování některých vybraných úloh v programu GNU Octave a Interactive Physics, zkušebních testů a úloh k zápočtovým písemným pracím.

Za pomoc, postřehy i připomínky děkujeme řadě našich bývalých i současných studentů, zejména Martinu Vlčkovi, Jindře Šťastné, Michalu Kolářovi, Arnoštu Žídkovi a Karlu Květoňovi; za vytvoření numerických modelů Radce Beštové a Patriku Jaklovi. Za přehlédnuté chyby a návrhy na zlepšení budeme vděční všem dalším čtenářům. Rádi bychom také poděkovali našim rodinám a blízkým za trpělivost i čas, který jsme namísto s nimi strávili mezi knihami a nad klávesnicí počítače.

Autoři

## Literatura ke kapitole

- [1] Tillich J.: *Teoretická mechanika*. PřF UP Olomouc 1984.

## **Část I**

# **Nerelativistická mechanika soustavy částic a tuhého tělesa**

# Kapitola 1

---

## Mechanika částic

Nejjednodušším mechanickým objektem je takový objekt, který v matematickém schématu můžeme charakterizovat bodem. Takový objekt nazýváme částicí (hmotným bodem). Samotný pojem částice je relativní – mnohdy, např. v astronomických úvahách, pokládáme planety za částice. Mohli bychom tedy říci, že za částici budeme považovat takový mechanický objekt, jehož velikost a vnitřní struktura je zanedbatelná při řešení dané fyzikální úlohy.

Přesně vzato je i taková definice nedostatečná. Nerelativistická mechanika vyžaduje navíc určité omezení pohybu uvažovaného mechanického objektu: částice uvažované v nerelativistické mechanice se musejí pohybovat rychlostmi mnohem menšími než je rychlost světla ve vakuu. Abychom navíc vyloučili kvantové efekty, je třeba přidat předpoklad, že moment hybnosti vlastního rotačního pohybu musí být mnohem větší než veličina  $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$  (kvantová jednotka momentu hybnosti). Takovými částicemi se tedy nyní budeme zabývat.

### 1.1 Základní pojmy z mechaniky částice

Kinematika částice se zabývá popisem pohybu částice a nezajímá se o jeho příčiny. Mluvíme-li o klidu nebo pohybu částice (tělesa), máme vždy na mysli klid nebo pohyb vzhledem k některým jiným tělesům: Např. těleso, které je v klidu vůči povrchu Země, není v klidu vzhledem ke Slunci. Pozorujeme tedy vlastně vždy jen relativní pohyb. V mechanice zavádíme při řešení konkrétních problémů vždy nějakou *vztažnou soustavu*, kterou pokládáme za nepohyblivou; vztažnou soustavou tedy rozumíme těleso, vzhledem k němuž vztahujeme pohyby studovaných částic, resp. těles. Vztažná soustava, kterou pokládáme v určité situaci za nepohyblivou a vzhledem k níž se pohyb určitého objektu jeví jako poměrně jednoduchý, nemusí umožňovat stejně jednoduchý popis objektů jiných. Např. ze Země se pohyby planet jeví jako poměrně složité. Z hlediska pozorovatelů spojených s různými vztažnými soustavami se jeví prostor jako nehomogenní a anizotropní, tj. jevy mohou probíhat různě, jsou-li pozorovány z různých míst a směrů. Snažíme se proto zavést takovou vztažnou soustavu, v níž by popis mechanických pohybů byl co nejjednodušší, v níž by prostor byl homogenní a izotropní. Idealizací takové vztažné soustavy je *inerciální vztažná soustava*, tj. soustava, která je v klidu nebo se pohybuje rovnoměrně přímočaře, jinými slovy soustava, jejíž vlastní pohyb nemůžeme mechanickými pokusy zjistit.

Se vztažnou soustavou spojujeme (resp. definujeme na ní) *soustavu souřadnic*. Vhodnou realizací soustavy souřadnic spojené se vztažnou soustavou, kterou lze v dostatečné míře pokládat za inerciální, je souřadnicová soustava se středem v hmotném středu sluneční soustavy a s osami namířenými ke zvoleným hvězdám. Při studiu pohybu objektů v blízkosti Země vystačíme však se soustavou, jejíž střed volíme ve středu Země, případně v bodě na povrchu Země - pokud lze v dané situaci pokládat takové soustavy za dostatečně inerciální.

Polohu částice určujeme pak kartézskými souřadnicemi  $x, y, z$  bodu  $M$ , který nám v matematickém schématu částice charakterizuje v kartézské soustavě souřadnic. Pohybuje-li se částice, jsou její souřadnice funkcemi času

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t). \quad (1.1.1)$$

Často zavádíme tzv. průběžné číslování os; píšeme  $x = x_1, y = x_2, z = x_3$ , takže rovnici (1.1.1) pak lze stručně zapsat

$$x_i = x_i(t), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.1.2)$$

V tomto textu budeme používat obou těchto značení; při obecné teorii zpravidla průběžného číslování os, při aplikacích označení  $x, y, z$ .

Polohu částice můžeme také charakterizovat vektorem  $\mathbf{r}$  vedeným z počátku souřadnic, tzv. *polohovým vektorem*. Platí zřejmě

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}(t), \\ \mathbf{r} &= x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

kde  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  jsou jednotkové vektory souřadnicových os  $x, y, z$ , nebo

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x_i(t) \mathbf{e}_i,$$

kde při průběžném číslování os označuje  $\mathbf{e}_i$  jednotkový vektor osy  $x_i$ . Vztahy (1.1.1), (1.1.2), resp. (1.1.3) označujeme za *kinematické pohybové rovnice*.

Protože částice  $M$  může být v určitém okamžiku jen v jednom bodě prostoru, musejí být funkce  $x(t), y(t), z(t)$  resp.  $x_i(t)$  jednoznačné. Protože dvěma blízkým časovým okamžikům nemohou odpovídat dva vzdálené body, musejí tyto funkce být spojité; kromě toho požadujeme, aby existovaly jejich derivace do druhého řádu včetně. Tento požadavek je podmíněn existencí rychlosti a zrychlení částice.

Geometrické místo bodů v prostoru, jimiž při pohybu prochází částice  $M$  se nazývá *trajektorie částice*. Její rovnice lze získat vyloučením času z (1.1.1), resp. (1.1.2). Je však třeba přitom dbát na definiční obor funkcí  $x(t), y(t), z(t)$ , resp.  $x_i(t)$ . Jsou-li např. kinematické pohybové rovnice částice pohybující se v rovině  $xy$  dány

$$x = \sin t, \quad y = \sin t,$$

může se částice pohybovat jen tak, že pro její souřadnice platí  $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ , tj. po úsečce; vyloučením času bychom však dostali  $x = y$ , což je rovnice neohraničené přímky.

Při zadání pohybu rovnicí (1.1.3) klouže koncový bod polohového vektoru po trajektorii. Geometrické místo koncových bodů libovolného proměnného vektoru nazýváme *hodografem* tohoto vektoru. Můžeme tedy říci, že trajektorie částice je totožná s hodografem jejího polohového vektoru.

Je-li trajektorii částice rovinná křivka, mluvíme o rovinném pohybu. U rovinného pohybu bývá často výhodné použít pro popis polárních souřadnic  $r, \varphi$ , takže pohyb je zadán rovnicemi

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t)$$

a rovnice trajektorie má pak tvar  $r = r(\varphi)$ .

Někdy je trajektorie částice předem určena; pak bývá vhodné stanovit polohu částice na trajektorii její vzdáleností  $s$  od jistého zvoleného bodu 0. Obvykle nazýváme  $s$  délkou dráhy (dráhou) částice. Pak

$$s = s(t) \tag{1.1.4}$$

je rovnice, která plně popisuje pohyb částice.

Obecně můžeme polohu částice určovat trojicí čísel  $q_1, q_2, q_3$ , obecnými (křivočarými) souřadnicemi. Pohybové rovnice pak mají tvar

$$q_i = q_i(t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Mezi kartézskými a obecnými souřadnicemi musí existovat vzájemně jednoznačné přiřazení.

Libovolná transformace souřadnic  $x_i$  na souřadnice  $q_i$  může být popsána funkcemi

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3), \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.1.5}$$

nebo též

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3).$$

Neobsahují-li tyto funkce čas (jak jsme zde přímo zapsali), jde o tzv. stacionární souřadnicové soustavy, tj. soustavy, které se vzájemně nepohybují. Jsou-li vztahy (1.1.5) takové, že z nich můžeme určit  $q_i$  jako funkce  $x_i$

$$q_i = q_i(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.1.6}$$

mají  $q_i$  požadované vlastnosti a mohou být užity jako obecné souřadnice částice. Abychom našli podmínku, kdy lze z (1.1.5) najít (1.1.6), uvažujme malé posunutí  $\Delta \mathbf{r}$  částice, jehož složky  $\Delta x_i$  určíme diferencováním (1.1.5):

$$\Delta x_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \Delta q_j, \quad i = 1, 2, 3.$$

Dostáváme tak soustavu nehomogenních lineárních rovnic pro  $\Delta q_j$ , která má řešení, jestliže je determinant z koeficientů různý od nuly

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_1} & \frac{\partial x_3}{\partial q_2} & \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \end{vmatrix} \equiv \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} \neq 0. \tag{1.1.7}$$



Je to tzv. Jacobiho determinant (jakobián). Je-li podmínka (1.1.7) splněna, můžeme psát

$$\delta q_j = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \delta x_i, \quad j = 1,2,3 \quad (1.1.8)$$

a integrací bychom dostali  $q_i$  jako funkce  $x_i$ . Integraci ovšem není třeba provádět, neboť podmínka (1.1.7) zaručuje přímou řešitelnost (1.1.5) pro  $q_j$ .

Důležitým parametrem charakterizujícím pohyb částice je *rychlost částice*  $\mathbf{v}$ . Připomeňme její známou definici

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (1.1.9)$$

Můžeme také psát

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt},$$

kde  $ds$  je element oblouku trajektorie, příslušející  $d\mathbf{r}$ , nebo

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt} \boldsymbol{\tau}, \quad (1.1.10)$$

kde  $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{r}/ds$  je jednotkový vektor ve směru tečny k trajektorii.

Složky vektoru rychlosti v kartézské soustavě souřadnic jsou

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z},$$

nebo při průběžném číslování os,

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i, \quad i = 1,2,3, \quad (1.1.11)$$

kde tečkou označujeme derivaci podle času.

Pro velikost rychlosti platí

$$v \equiv |\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \dot{x}_i^2}. \quad (1.1.12)$$

Směr  $\mathbf{v}$  určíme směrovými kosiny

$$\cos(\mathbf{v}, \mathbf{e}_i) = \frac{v_i}{v} = \frac{\dot{x}_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^3 \dot{x}_j^2}}. \quad (1.1.13)$$

Zabývejme se nyní určením složek rychlosti v obecných křivočarých souřadnicích. Jsou-li transformační vztahy dány (1.1.5) a (1.1.6), můžeme určit tzv. *souřadnicové plochy* z podmínky  $q_j = \text{konst.}$  Souřadnicové plochy se protínají v *souřadnicových čarách*, na nichž se vždy dvě z křivočarých souřadnic nemění. Omezíme se dále jen na tzv. *ortogonální soustavy souřadnic*, které mají tu vlastnost, že jejich souřadnicové čáry se v každém bodě protínají pod pravými úhly.

Předpokládejme nyní, že jen proměnná  $q_1$  se mění a že  $q_2$  a  $q_3$  zůstávají konstantní. Při změně  $q_1$  se posunuje částice po souřadnicové čáře proměnné  $q_1$ . Kartézské složky infinitezimálního posunutí částice jsou v tomto případě

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} dq_1, \quad i = 1,2,3$$

a jeho velikost

$$ds_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_1}\right)^2} dq_1 = H_1 dq_1, \quad (1.1.14)$$

kde

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_1}\right)^2}.$$

Směrové kosiny tohoto posunutí jsou

$$\frac{dx_i}{ds_1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial x_i}{\partial q_1}.$$

Tyto směrové kosiny můžeme pokládat za složky jednotkového vektoru  $\mathbf{e}_1$  charakterizujícího posunutí ve směru souřadnicové čáry  $q_1$ . Podobným způsobem můžeme definovat jednotkové vektory  $\mathbf{e}_2$  a  $\mathbf{e}_3$ ; obecně lze psát

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \quad (1.1.15)$$

Veličiny

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_i}\right)^2}. \quad (1.1.16)$$

nazýváme *Laméovými koeficienty* křivočaré souřadnicové soustavy. Pro ortogonální soustavy souřadnic platí

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 ds_i^2 = \sum_{i=1}^3 H_i^2 dq_i^2. \quad (1.1.17)$$

Vektor posunutí  $d\mathbf{s}$  je určen

$$d\mathbf{s} = d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 H_i dq_i \mathbf{e}_i \quad (1.1.18)$$

takže složky  $v_{q_i}$  vektoru rychlosti do křivočarých os (tj. do směrů určených jednotkovými vektory  $\mathbf{e}_i$ ) budou

$$v_{q_i} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{e}_i = H_i \dot{q}_i. \quad (1.1.19)$$

Pro velikost rychlosti pak platí

$$v^2 = \sum_{i=1}^3 H_i^2 \dot{q}_i^2. \quad (1.1.20)$$

Pro výpočet křivočarých složek rychlosti je však často výhodnější použít jiný postup. Přepíšme (1.1.19) ve tvaru

$$v_{q_i} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{e}_i = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{1}{H_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}, \quad (1.1.21)$$

kde jsme dosadili za  $\mathbf{e}_i$  z (1.1.15). Pro další úpravu vypočítejme z (1.1.5):

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i.$$

Odtud derivací podle  $\dot{q}_i$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}. \quad (1.1.22)$$

Dosazením tohoto výrazu do (1.1.21) dostáváme

$$v_{q_i} = \frac{1}{H_i} \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{v^2}{2} \right). \quad (1.1.23)$$

Tento vztah nám umožňuje najít složky rychlosti v křivočarých souřadnicích, známe-li velikost nebo čtverec rychlosti.

Při praktických výpočtech často používáme sférické prostorové polární souřadnice. Lehce se přesvědčíme, že v těchto souřadnicích, zadaných vztahy

$$x_1 = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \vartheta,$$

jsou Laméovy koeficienty

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r \sin \vartheta$$

a složky rychlosti ve sférických souřadnicích budou

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\vartheta = r \dot{\vartheta}, \quad v_\varphi = r \sin \vartheta \dot{\varphi}.$$

V polárních souřadnicích (pro  $\vartheta = \pi/2$ ) je

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r \dot{\varphi}$$

Jednotkové vektory ve směru radiálním a transversálním bývá zvykem označovat v těchto souřadnicích  $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{p}_0$ , takže rozklad rychlosti do těchto směrů má tvar

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{r}_0 + r \dot{\varphi} \mathbf{p}_0.$$

*Plošná (sektoriální) rychlost* je další důležitou charakteristikou pohybu; užívá se jí často zejména při řešení úloh o centrálním pohybu, jimiž se budeme zabývat později.

Plocha  $\Delta\sigma$  opsaná polohovým vektorem částice za dobu  $\Delta t$  je přibližně rovna ploše šrafovaného trojúhelníka na obr. 1.1, tedy

$$\Delta\sigma = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \Delta\mathbf{r}|,$$

což lze pokládat za velikost vektoru plochy

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \Delta\mathbf{r}).$$

Plošnou rychlost  $\mathbf{v}_S$  definujeme vztahem

$$\mathbf{v}_S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\sigma}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt}.$$

Můžeme také psát

$$\mathbf{v}_S = \frac{1}{2} \left( \mathbf{r} \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \right) = \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}). \quad (1.1.24)$$

Součin  $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$  se nazývá moment vektoru rychlosti. Jeho velikost je rovna

$$|\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = rv_\varphi$$

kde  $v_\varphi$  je transversální složka rychlosti, tj. složka do směru kolmého na polohový vektor. V polárních souřadnicích bude tato složka rovna  $r\dot{\varphi}$ , takže

$$v_S = \frac{1}{2} rv_\varphi = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}. \quad (1.1.25)$$

Změnu rychlosti částice charakterizuje vektor *zrychlení částice*. Je definován vztahem

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (1.1.26)$$

a jeho složky jsou

$$a_i = \frac{d^2x_i}{dt^2} = \ddot{x}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.1.27)$$

respektive

$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z}.$$

Velikost zrychlení je

$$a = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \quad (1.1.28)$$

a směrové kosiny

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i) = \frac{a_i}{a} = \frac{\ddot{x}_i}{a}.$$

Určeme nyní tzv. *přirozené složky zrychlení*; nazýváme tak složky zrychlení získané promítnutím vektoru zrychlení do směrů charakteristických vektorů trajektorie – vektoru tečny a normály ke trajektorii. Z (1.1.10) derivací získáváme

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} + v \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}. \quad (1.1.29)$$

Platí (viz. obr. 1.2)

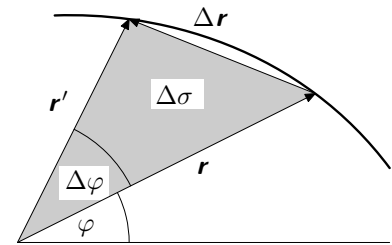
$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\alpha} \frac{d\alpha}{ds} \frac{ds}{dt} = \mathbf{n} \frac{v}{\rho},$$

neboť  $d\boldsymbol{\tau}/d\alpha$  je jednotkový vektor kolmý na  $\boldsymbol{\tau}$ , tj. jednotkový vektor  $\mathbf{n}$  normály a dále  $ds = \rho d\alpha$ , kde  $\rho$  je poloměr křivosti trajektorie a  $ds/dt = v$ . Dosazením do (1.1.29) dostáváme

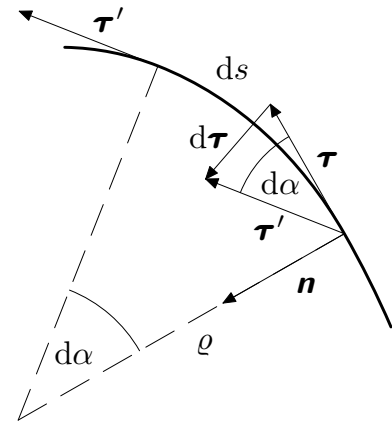
$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n} = a_t \boldsymbol{\tau} + a_n \mathbf{n}, \quad (1.1.30)$$

kde  $a_t = dv/dt$  je *tečné zrychlení*,  $a_n = v^2/\rho$  *normálové zrychlení*.

Z diferenciální geometrie je známo, že charakteristikou dané křivky je zadání v každém jejím bodě tzv. průvodního trojúhnanu, který je určen jednotkovými vektory ve směru tečny, normály a binormály ke křivce. Z našeho výpočtu je patrné, že složka zrychlení do směru binormály je vždy nulová. Vypočítané složky zrychlení ve směru tečny a normály tvoří tzv. přirozené složky zrychlení, které nezávisí na volbě soustavy souřadnic.



Obr. 1.1: K odvození vektoru plošné rychlosti



Obr. 1.2: Tečné a normálové zrychlení

Hledejme nyní obecné křivočaré složky zrychlení. Analogicky s (1.1.21) pišme

$$a_{q_i} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{e}_i = \frac{1}{H_i} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$$

Podle věty o derivaci součinu dvou funkcí můžeme tento výraz upravit na

$$a_{q_i} = \frac{1}{H_i} \left[ \frac{d}{dt} \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) - \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) \right]$$

a pomocí (1.1.22)

$$a_{q_i} = \frac{1}{H_i} \left[ \frac{d}{dt} \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right]$$

nebo

$$a_{q_i} = \frac{1}{H_i} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \left( \frac{v^2}{2} \right)}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \left( \frac{v^2}{2} \right)}{\partial q_i} \right\}. \quad (1.1.31)$$

Odtud můžeme určit složky zrychlení v ortogonálních křivočarých souřadnicích, známe-li čtverec rychlosti. Tak např. pro sférické souřadnice dostáváme

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r \left( \dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \right) \\ a_{\vartheta} &= \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( r^2 \dot{\vartheta} \right) - r \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 \\ a_{\varphi} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{d}{dt} \left( r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} \right). \end{aligned}$$

Při  $\vartheta = \pi/2$  se sférické souřadnice redukuje na polární, takže pro složky zrychlení v polárních souřadnicích dostáváme

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad a_{\varphi} = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}. \quad (1.1.32)$$

Kinematický popis pohybu představuje důležitou aplikaci aparátu a metod diferenciální geometrie, jež jsou přehledně zpracovány např. v [3] nebo [4].

## 1.2 Dynamika částice

Přejdeme nyní ke studiu příčin pohybu. Základ dynamiky tvoří tři zákony formulované v 17. století Isaacem Newtonem. Tyto zákony, získané zobecněním experimentálních faktů stačí k ucelené logické výstavbě klasické mechaniky a často bývají proto nazývány *základními axiomy mechaniky*. Lze je formulovat například takto:

### 1. Zákon setrvačnosti

*Izolovaná částice, tj. částice, na kterou nepůsobí žádné vnější síly, setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu.*

### 2. Zákon síly

*V inerciální vztažné soustavě vyvolává síla  $\mathbf{F}$ , která působí na částici, zrychlení této částice úměrné působící síle*

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (1.2.1)$$

### 3. Zákon akce a reakce

*Každá akce způsobuje vždy stejně velkou reakci opačného směru, neboli síly vzájemného působení dvou částic jsou stejně velké a opačného směru.*

Koeficient úměrnosti  $m$  je pro danou částici konstantní a nezávisí na působící síle. Pro různé částice je ovšem různý. Čím větší je  $m$ , tím menší zrychlení jedna a táž síla částici udílí. Koeficient  $m$  tak charakterizuje schopnost částice pomaleji nebo rychleji měnit svůj pohybový stav neboli setrvačné vlastnosti částice a nazýváme jej setrvačnou (inerciální) hmotností částice.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Připomeňme, že v klasické fyzice se předpokládá rovnost výše uvedené setrvačné hmotnosti a hmotnosti gravitační, která charakterizuje gravitační působení částice na ostatní tělesa. Oprávněnost tohoto předpokladu byla několikrát testována a v současné době lze říci, že platí s přesností  $\approx 10^{-11}$ . Postulovaná rovnost obou hmotností se pak jako „princip ekvivalence“ stala jedním z východisek při formulaci obecné teorie relativity A. Einsteinem v r. 1915.

Pro úplné logické vybudování mechaniky bez dalších předpokladů je třeba přidat ještě *axiom o nezávislosti silového působení (princip superpozice)*:

*Působí-li na částici současně několik sil, je výsledné zrychlení rovno vektorovému součtu zrychlení, udělovaných částici jednotlivými silami.*

Tento axiom (jehož platnost se ovšem zpravidla předpokládá) spolu s prvními třemi Newtonovými zákony tvoří úplnou soustavu *základních axiomů mechaniky*.

Ve formulaci druhého Newtonova zákona je použit pojem „inerciální vztažné soustavy“, zmíněný již v úvodu 1. kapitoly. Existenci takové soustavy zaručuje 1. Newtonův zákon, který vlastně představuje teorém o existenci inerciální vztažné soustavy a bývá v tom smyslu někdy formulován. Nelze proto zákon setrvačnosti pokládat za důsledek druhého Newtonova zákona, v němž položíme  $\mathbf{F} = 0$ .

Základní problémy, s nimiž se v dynamice setkáme, můžeme v podstatě rozdělit do dvou skupin. První skupinu tvoří úlohy, při nichž máme zadán pohybový zákon pro částici (tj. kinematické pohybové rovnice) a máme určit sílu, která pohyb částice způsobuje. Tento problém se nazývá *první základní úlohou dynamiky*. Jako *druhou základní úlohu dynamiky* označujeme úlohu najít kinematické pohybové rovnice částice, známe-li sílu, která na částici působí.

Studujme nejprve první úlohu dynamiky. Mějme zadán pohyb částice s hmotností  $m$  rovnicí

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

Sílu, která tento pohyb způsobuje, určíme ze 2. Newtonova zákona

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}.$$

Takto jsme ovšem nezjistili nic o podstatě síly, o tom, zda závisí na rychlosti částice, její poloze apod. Pro podrobnější analýzu potřebujeme vědět, jakou polohu  $\mathbf{r}_0$  a rychlost  $\mathbf{v}_0$  má částice v nějakém počátečním okamžiku  $t = 0$ , tedy musíme znát tzv. počáteční podmínky. Pak můžeme psát

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) \quad (1.2.2)$$

a odtud

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) \quad (1.2.3)$$

takže konečně

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0). \quad (1.2.4)$$

Z rovnic (1.2.2), (1.2.3) a (1.2.4) nyní můžeme vyloučit konstanty  $\mathbf{r}_0$  a  $\mathbf{v}_0$ , čímž dospějeme k hledané závislosti

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \quad (1.2.5)$$

Při řešení první základní úlohy dynamiky se užívá jen derivování a algebraických operací, takže z matematického hlediska není toto řešení nijak obtížné.

Při popisu pohybu pomocí křivočarých souřadnic lze zrychlení vyjádřit pomocí (1.1.31). V ortogonálních křivočarých souřadnicích můžeme pro složky síly  $\mathbf{F}$  s využitím (1.1.15) psát

$$F_{q_i} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{F} \cdot \frac{1}{H_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{H_i} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$$

Zavedeme-li označení

$$\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = Q_i,$$

můžeme 2. Newtonův pohybový zákon přepsat do tvaru

$$Q_i = ma_{q_i}$$

nebo

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \left( \frac{mv^2}{2} \right)}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \left( \frac{mv^2}{2} \right)}{\partial q_i}. \quad (1.2.6)$$

Výraz  $Q_i$  pak nazýváme  $i$ -tou zobecněnou silou.

Podstatně větší pozornost budeme věnovat druhé základní úloze dynamiky, tj. určení pohybu, známe-li sílu, která jej vyvolává. Tato úloha spočívá vlastně v řešení diferenciální rovnice druhého řádu

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (1.2.7)$$

reprezentující tři rovnice pro kartézské složky vektorů

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.2.8)$$

kde  $X_1, X_2, X_3$  jsou složky síly  $F$  do souřadnicových os  $x_1, x_2, x_3$ .

Použijeme-li přirozených složek zrychlení a promítneme-li sílu do směrů tečny, normály a binormály k trajektorii částice, jež jsou určeny jednotkovými vektory  $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$

$$\mathbf{F} = F_\tau \boldsymbol{\tau} + F_n \mathbf{n} + F_b \mathbf{b},$$

dostáváme pohybové rovnice

$$F_t = m \frac{dv}{dt}, \quad F_n = m \frac{v^2}{\rho}, \quad F_b = 0. \quad (1.2.9)$$

Za obecný integrál rovnice (1.2.7) označujeme funkci  $\mathbf{r}$ , která vyhovuje této rovnici a obsahuje dvě vektorové konstanty

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2). \quad (1.2.10)$$

Zaměníme-li hodnoty konstant, dostaneme vždy nový pohybový zákon, který však bude patřit do téže třídy pohybů. Fyzikální význam této neurčitosti je v tom, že pohyby částice vyvolané toutéž silou se mohou vzájemně lišit v závislosti na počátečních podmínkách, tj. podle počáteční polohy a počáteční rychlosti částice. Pro úplný popis pohybu nějaké konkrétní částice musíme proto kromě pohybové rovnice (1.2.7) znát ještě její polohu  $r_0$  a rychlost  $v_0$  v nějakém počátečním okamžiku  $t_0$ . Dosazením těchto počátečních podmínek do (1.2.10) obdržíme dvě rovnice

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2)$$

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}(t_0, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2),$$

z nichž můžeme určit

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_1(t_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$$

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_2(t_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$$

a dosadit do (1.2.10), čímž dostaneme řešení rovnice (1.2.7), vyhovující daným počátečním podmínkám – tzv. partikulární integrál

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, t_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0). \quad (1.2.11)$$

Mnohdy je obtížné najít obecné řešení rovnice (1.2.7), ale dá se najít závislost typu

$$\boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{C}_1, \quad (1.2.12)$$

která již neobsahuje  $\ddot{\mathbf{r}}$  a je splněna identicky pro každé  $\mathbf{r}$  vyhovující rovnici (1.2.7). Takovou funkci  $\boldsymbol{\phi}$  nazýváme *prvním integrálem* rovnice (1.2.7). Je-li první integrál pohybové rovnice znám, redukuje se integrace (1.2.7) na nalezení řešení rovnice 1. řádu typu

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{r}, \mathbf{C}_1)$$

vyplývající z (1.2.12). Podaří-li se získat dva nezávislé první integrály

$$\boldsymbol{\phi}_1(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{C}_1, \quad \boldsymbol{\phi}_2(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{C}_2, \quad (1.2.13)$$

lze z nich vyloučením  $\dot{\mathbf{r}}$  dostat obecné řešení (1.2.10), případně je můžeme považovat za parametrické vyjádření tohoto řešení, přičemž jako parametr zde vystupuje právě  $\dot{\mathbf{r}}$ .

Pro jednu částici lze obecné řešení pohybových rovnic najít v celé řadě konkrétních případů, při různých typech působících sil (některé z nich budou rozebrány v části 1.3). Za určitých předpokladů lze nalézt řešení i pro pohyb dvou vzájemně na sebe působících částic. Avšak pro systém tří a více částic se již obecné řešení prakticky najít nedá, vyjma některých značně zjednodušených úloh. Většinou je nutné použít některou z přibližných numerických metod. Velkou důležitost mají některé věty obecného charakteru, které platí jak pro jednu částici, tak pro soustavu částic, a které nám v podstatě umožňují určit první integrály pohybových rovnic, tj. vztahy typu (1.2.13). Takto nalezené první integrály označujeme obvykle za zákony zachování.

Zpravidla postupujeme tak, že zavádíme nejprve určité funkce času, souřadnic a rychlostí, jimž přiřazujeme fyzikální obsah. Příkladem takových funkcí jsou hybnost, moment hybnosti, energie. Zavedeme-li tyto funkce do pohybových rovnic, představují pak tyto rovnice vlastně zákony změny těchto funkcí s časem - větu o hybnosti, momentu hybnosti a energii. Zjistíme-li, že za určitých okolností je některá z těchto funkcí konstantní, tj. že pro ni můžeme napsat rovnici typu (1.2.13), mluvíme o zákonu zachování této funkce, speciálně o zákonu zachování hybnosti, momentu hybnosti, energie. Podotkněme již nyní, že zavedení těchto funkcí není náhodné, ale souvisí úzce s jistými symetriemi prostoru a času: s homogeností a izotropností prostoru a homogeností času. Zavedme nyní tyto funkce pro jednu částici.<sup>2</sup>

Hybnost částice  $\mathbf{p}$  je definována jako součin hmotnosti a rychlosti částice

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (1.2.14)$$

Je-li hmotnost částice konstantní, dá se (1.2.7) psát ve tvaru

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (1.2.15)$$

a představuje *zákon změny hybnosti (větu o hybnosti)*.<sup>3</sup>

Jestliže je průmět síly na některou nepohyblivou osu v libovolném okamžiku roven nule, je průmět hybnosti na tuto osu konstantní, tj. platí pro něj zákon zachování. Je-li např.  $X_3 = 0$ , je  $p_3 = \text{konst.}$  Podstatné je, aby byl roven nule průmět síly na nepohyblivou osu. Tuto podmínku je třeba vzít v úvahu, řešíme-li problém např. v polárních souřadnicích. Pokud je průmět  $F_r$  síly  $\mathbf{F}$  do osy  $r$  nulový, pak z rovnice (1.1.32) plyne

$$m\dot{r} - m r \dot{\varphi}^2 = F_r = 0$$

kde  $m\dot{r} = \dot{p}_r$  je průmět hybnosti na osu  $r$  a tedy pro  $p_r$  zákon zachování neplatí.

Jestliže je nulová výslednice sil působících na částici, platí *zákon zachování hybnosti*

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 = \text{konst.},$$

jinými slovy, hybnost je integrálem pohybu.

*Moment hybnosti*  $\mathbf{l}$  (též kinetický moment nebo moment impulsu) je definován vztahem

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \quad (1.2.16)$$

Vektorovým násobením (1.2.15) vektorem  $\mathbf{r}$  zleva plyne

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Pravá strana se nazývá *moment síly*  $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Levá strana se dá přepsat

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{l}}{dt}.$$

Dostáváme tedy zákon změny momentu hybnosti

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{M}. \quad (1.2.17)$$

Je-li výsledný moment  $\mathbf{M}$  roven nule, platí *zákon zachování momentu hybnosti*

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}_0 = \text{konst.}$$

Je-li roven nule průmět momentu síly na některou nepohyblivou osu, zachovává se průmět momentu hybnosti částice na tuto osu. Je-li např.  $M_3 = 0$ , je  $L_3 = \text{konst.}$  K této situaci dochází např. jestliže síla působí stále ve stejném směru. Proložíme-li tímto směrem osu  $x_3$ , je  $X_1 = X_2 = 0$ ,  $X_3 \neq 0$ ,  $M_3 = x_1 X_2 - x_2 X_1 = 0$  a tedy  $L_3 = \text{konst.}$

Velmi důležité jsou tzv. *centrální síly*. Centrální síla je taková síla, jejíž vektorová přímka prochází stále tímž bodem zvaným silové centrum. Zvolíme-li tento bod za počátek soustavy souřadnic, platí

$$\mathbf{F} = F\mathbf{r}_0, \quad \mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$$

<sup>2</sup>Význam zákonů zachování podtrhuje skutečnost, že platí nejenom v klasické mechanice. Setkáváme se s nimi v teorii pole, teorii relativity i kvantové mechanice. Jejich souvislost s nejrůznějšími druhy symetrií pak hraje klíčovou roli při studiu elementárních částic a jejich přeměn.

<sup>3</sup>Zavedeme-li označení  $m = m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$ , kde  $m_0$  je tzv. klidová hmotnost částice (pro  $v = 0$ ), zůstává vztah (1.2.15) v platnosti i ve speciální teorii relativity a je v tomto smyslu obecnější než (1.2.1), platný pouze v Newtonově klasické fyzice.

a tedy

$$\mathbf{l} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{l}_0 = \text{konst.}, \quad (1.2.18)$$

moment hybnosti částice vzhledem k silovému centru se tedy zachovává. Skalárním násobením (1.2.18) vektorem  $\mathbf{r}$  dostáváme

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{r} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{r} = \mathbf{l}_0 \cdot \mathbf{r} = 0,$$

odkud vyplývá, že trajektorie částice pohybující se v centrálním silovém poli je vždy rovinná. Rovina, v níž leží trajektorie, prochází silovým centrem a je kolmá na konstantní moment hybnosti. Proto při řešení pohybu částice v centrálním silovém poli můžeme úlohu řešit jako rovinnou a vzhledem k symetrii pole obvykle s výhodou používáme polárních souřadnic (viz část 1.3.3).

Pro větší názornost je vhodné zavést do (1.2.18) plošnou rychlost  $\mathbf{v}_s$  z (1.1.24). Pak můžeme psát

$$\mathbf{l} = 2m\mathbf{v}_s = \mathbf{l}_0 = \text{konst.} \quad (1.2.19)$$

a tedy také

$$\mathbf{v}_s = \text{konst.},$$

což je známý zákon konstantní plošné rychlosti částice v centrálním silovém poli.

## Energie

a) *Kinetická energie*. Je-li  $m = \text{konst.}$ , pak násobením (1.2.7) skalárně  $d\mathbf{r}$  dostaneme

$$\Delta A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} dt = m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} dt = d\left(\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}\right) = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = dT. \quad (1.2.20)$$

Veličina  $\Delta A$  na levé straně je elementární práce síly  $\mathbf{F}$  na posunutí  $d\mathbf{r}$ . Na pravé straně je úplný diferenciál *kinetické energie*  $\Delta T$  částice. Je tedy

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1.2.21)$$

Dělením  $dt$  dostaneme z (1.2.20)

$$\frac{\Delta A}{dt} = \dot{T} = \frac{dT}{dt}, \quad (1.2.22)$$

kde výraz  $\Delta A/dt$  představuje *okamžitý výkon síly*  $\mathbf{F}$ .

Při konečném přemístění částice po nějaké trajektorii z bodu (1) do bodu (2) dostáváme z (1.2.20)

$$\int_{(1)}^{(2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = T_2 - T_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Výraz  $\Delta A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  není obecně úplným diferenciálem, tzn. že práce síly při přemístění částice z jednoho bodu do druhého závisí na trajektorii, po níž se částice pohybuje.

V praxi jsou důležité některé speciální typy sil, pro které  $\Delta A$  je úplným diferenciálem. Nejdůležitější z nich jsou tzv. *síly potenciálové*. Potom lze psát

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Delta A \equiv dA.$$

b) *Potenciální energie*. Předpokládejme, že v určité oblasti prostoru je v každém bodě definována síla působící na částici v tomto bodě. Říkáme pak, že v této oblasti je definováno *silové pole*. Jestliže v celém silovém poli je  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  úplným diferenciálem, mluvíme o *potenciálovém silovém poli*.

Pro potenciálové pole zavádíme místo skalární funkce  $A$  funkci  $U$  lišící se od  $A$  znaménkem – *potenciální energii částice* (energii závisící na poloze částice v potenciálovém poli). Pak platí

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dU \quad (1.2.23)$$

a při konečném přemístění částice

$$\int_{(1)}^{(2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{(1)}^{(2)} dU = U_1 - U_2 \quad (1.2.24)$$

Z (1.2.23) je vidět, že  $U$  je funkcí souřadnic  $(x_1, x_2, x_3)$ . Funkci  $U(x_1, x_2, x_3)$  najdeme integrováním

$$U(x_1, x_2, x_3) = - \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + C, \quad (1.2.25)$$



kde  $C$  je konstanta definující tzv. nulovou hladinu potenciální energie. Rozepsáním (1.2.23) dostaneme

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 X_i dx_i = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i,$$

takže

$$X_i = - \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad (1.2.26)$$

nebo vektorově

$$\mathbf{F} = -\nabla U. \quad (1.2.27)$$

Rozepsáním rovnic (1.2.26), derivováním první z nich podle  $x_1$ , druhé podle  $x_2$  a porovnáním smíšených parciálních derivací 2. řádu dostáváme podmínku pro složky síly  $\mathbf{F}$ , aby bylo možné zavést potenciální energii:

$$\frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 x_2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 x_1} = 0.$$

Podobným způsobem bychom dostali další dvě rovnice, takže celkem můžeme psát

$$\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} = 0.$$

Tyto výrazy představují složky vektoru  $\text{rot } \mathbf{F}$ . Protože však funkce  $U$  nezávisí na čase, je třeba přidat předpoklad nezávislosti na čase i pro sílu  $\mathbf{F}$ . Můžeme pak říci, že silové pole je potenciálové, jestliže nezávisí na čase a platí pro ně<sup>4</sup>

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \quad (1.2.28)$$

c) *Celková mechanická energie.* Kromě sil potenciálových jsou významné tzv. gyroskopické a disipativní síly. *Gyroskopické síly*  $\mathbf{F}_G$  jsou síly, které závisí lineárně na rychlosti částice a mají směr kolmý na rychlost částice. Jejich výkon je proto roven nule

$$\frac{\Delta A}{dt} = \mathbf{F}_G \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0. \quad (1.2.29)$$

Jak název napovídá, příkladem může být setrvačná odstředivá síla při pohybu po kružnici, konkrétně třeba Lorentzova síla působící na nabitou částici v homogenním magnetickém poli, která zakřivuje trajektorii částice, ale nemění velikost její rychlosti, tedy ani její kinetickou energii. *Disipativní síly*  $F_D$  jsou síly namířené proti směru rychlosti částice vzhledem k prostředí, které ji obklopuje. Disipativní síla se dá zapsat ve tvaru

$$\mathbf{F}_D = -\lambda \mathbf{v},$$

kde  $\lambda$  je kladná skalární funkce, která může záviset na poloze a rychlosti částice (podrobnější fyzikální rozbor uvedeme v následující kapitole; patří sem i třecí síla z příkladu 1.8). Výkon disipativních sil je vždy záporný

$$\frac{\Delta A}{dt} = \mathbf{F}_D \cdot \mathbf{v} = -\lambda v^2 < 0.$$

Konečně se mohou vyskytnout také tzv. *nestacionární potenciálové síly*, tj. takové síly, pro které závisí  $U$  nejen na poloze, ale i na čase.<sup>5</sup> Pro takové síly platí rovnice (1.2.27) a  $U$  se opět určí z (1.2.25), kde se však provádí integrace při konstantním  $t$ . Pro úplný diferenciál v tomto případě platí

$$dU = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial U}{\partial t} dt = d\mathbf{r} \cdot \nabla U + \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

a tedy

$$\Delta A = -\nabla U \cdot d\mathbf{r} = -dU + \frac{\partial U}{\partial t} dt. \quad (1.2.30)$$

Rovnice (1.2.23) není zřejmě pro nestacionární potenciálové síly splněna.

Předpokládejme nyní, že na částici působí nestacionární potenciálová síla, disipativní síla a gyroskopická síla, jejichž výslednice

$$\mathbf{F} = -\nabla U + \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_D.$$

<sup>4</sup>Speciálním případem této podmínky pro elektrostatické pole je 3. Maxwellova rovnice  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ , kde  $\mathbf{E}$  je vektor intenzity elektrostatického pole.

<sup>5</sup>Příkladem může být pole časově proměnného náboje, nabíjeného či vybíjeného kondenzátoru apod.

Vzhledem k (1.2.29) a (1.2.30) je výkon síly  $\mathbf{F}$

$$\frac{\Delta A}{dt} = -\frac{dU}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{F}_D \cdot \mathbf{v}.$$

S přihlédnutím k (1.2.22) pak platí

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{F}_D \cdot \mathbf{v} \quad (1.2.31)$$

Výraz typu  $T + U = E$  nazýváme *celkovou mechanickou energií částice*. Změna celkové mechanické energie částice je podmíněna závislostí potenciálových sil na čase a existencí disipativních sil. Gyroskopické síly nemají (jak již bylo řečeno) na celkovou mechanickou energii částice vliv.

Nepůsobí-li na částici disipativní síly a jsou-li potenciálové síly stacionární, platí *zákon zachování celkové mechanické energie*. Silovým polím, v nichž platí zákon zachování mechanické energie (tj. stacionárním potenciálovým polím) se říká *pole konzervativní* (z lat. conservare = zachovávat). Příkladem mohou být již zmíněná pole gravitační, tíhové a elektrostatické.

V následujícím oddílu si ukážeme některá konkrétní řešení pohybu částice.

## 1.3 Některé úlohy z dynamiky částice

### 1.3.1 Přímočarý pohyb částice

#### Síly závislé na poloze částice

V mechanice hrají mimořádnou úlohu dva druhy sil závislých na poloze částice síly gravitační a síly pružnosti. Dalším příkladem je coulombovská síla, s níž se setkáváme v elektrodynamice při studiu elektricky nabitých částic.

Obecné řešení přímočarého pohybu částice, na niž působí síla, která je funkcí souřadnic, dostaneme následujícím způsobem: Nechť  $F = F(x)$  a počáteční podmínky jsou  $x(t_0) = x_0, v(t_0) = v_0$ . Pohybovou rovnici

$$m \frac{dv}{dt} = F(x)$$

násobíme  $dx/dt = v$ , takže obdržíme

$$mv \frac{dv}{dt} = F(x) \frac{dx}{dt}$$

a po integraci dále<sup>6</sup>

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{x_0}^x F(x) dx.$$

Odtud

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} \int_{x_0}^x F(x) dx} \quad (1.3.1)$$

a další integrace dává

$$t = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} \int_{x_0}^x F(x) dx}}. \quad (1.3.2)$$

#### Síly závislé na rychlosti částice

V přírodě se obvykle setkáváme se dvěma typy těchto sil. První z nich jsou síly elektromagnetického původu, jimiž působí magnetické pole na pohybující se elektricky nabitou částici. Patří mezi síly gyroskopické, neboť působí ve směru kolmém na rychlost částice a jejich působením se proto mění pouze směr rychlosti částice a nikoliv její velikost. Jedná se o síly velmi významné, avšak jejich působení se podrobně studuje v elektrodynamice a až na několik výjimek se jimi zde nebudeme zabývat.

Druhý typ představují síly, jimiž se projevuje odpor prostředí při pohybu částic (těles) ve spojitěm prostředí (tekutině), nebo při vzájemném kontaktu těles. Tyto síly jsou disipativní; v předešlé kapitole jsme je charakterizovali

<sup>6</sup>Výraz  $F(x)dx$  představuje elementární práci vykonanou silou  $F(x)$  na dráze  $dx$ , výraz na levé straně je diferenciálem kinetické energie částice (viz předcházející kapitola). V podstatě tedy aplikujeme zákon zachování energie v diferenciálním tvaru. Mlčky tak využíváme toho, že síly závislé na poloze vytvářejí konzervativní pole ve smyslu definice z předcházející kapitoly.

závislostí  $\mathbf{F} = -\lambda \mathbf{v}$ . Obecný zákon působení těchto sil nebyl dosud nalezen, takže se zpravidla využívá empirického vzorce (i když do značné míry teoreticky podloženého)

$$\mathbf{F} = -kv^{n-1}\mathbf{v}, \quad (1.3.3)$$

v němž  $k$  značí konstantu úměrnosti a exponent  $n$  nabývá nezáporných hodnot. Fyzikální příčiny vzniku těchto sil jsou:

- a) **viskozita** – působení třecích napětí ve vrstvách tekutiny, s nimiž přichází do styku povrch částice (tělesa);
- b) **tlakový odpor** – výslednice tlaků v tekutině, působících na povrch částice (tělesa);
- c) **vlnový odpor** – způsobený ztrátami energie v důsledku vzniku vlnění prostředí při pohybu částice (tělesa) v něm.

Při různých typech pohybů v různých prostředích převládá většinou některá z těchto příčin. Odpor způsobený viskozitou je při malých rychlostech pohybu nebo při velkých viskozitách charakterizován exponentem  $n = 1$  (např. pohyb částic prachu v atmosféře apod.), tj. síla odporu je lineárně závislá na rychlosti. Lineární závislost se projevuje i při silách odporu vznikajících při klouzání tělesa po jiném tělese, jsou-li jejich styčné plochy odděleny tenkou olejovou vrstvou (filmem). Naproti tomu při přímém kontaktu (olejový film chybí nebo je porušen) se hodnota exponentu  $n$  blíží nule, tj. odpor je konstantní, nezávislý na rychlosti (suché tření). Pro rychlý pohyb částic nebo malé viskozity se  $n$  blíží hodnotě  $n = 2$ , přičemž se však projevuje značná závislost na režimu proudění tekutiny kolem tělesa – zda jde o proudění laminární nebo turbulentní (viz část 8.5).

Pro tlakový odpor se zpravidla z teoretické hydromechaniky resp. aeromechaniky uvádí hodnota  $n = 2$ .

Vlnový odpor je podstatný zejména při řešení pohybu lodí; každá vlna způsobovaná lodí odnáší energii, která musí být nahrazena prací motoru. Teoretické studium tohoto problému nevedlo dosud k uspokojivým výsledkům — ze zkušenosti vyplývá pro  $n$  přibližně hodnota  $n \approx 4$ .

Uvedme nejprve obecné řešení přímočarého pohybu částice v případě, že síla je funkcí jen rychlosti  $F = F(v)$  a  $x(t_0) = x_0$ ,  $v(t_0) = v_0$ . Pohybová rovnice

$$m \frac{dv}{dt} = F(v)$$

nám po separaci proměnných dává

$$m \int_{v_0}^v \frac{dv}{F(v)} = \int_{t_0}^t dt,$$

takže

$$t = t_0 + m \int_{v_0}^v \frac{dv}{F(v)}. \quad (1.3.4)$$

Můžeme-li odtud po integraci vypočítat rychlost  $v$

$$v = \frac{dx}{dt} = f(t, t_0, v_0),$$

dává nám další integrace

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, t_0, v_0) dt,$$

což je hledané řešení. Nedá-li se z (1.3.4)  $v$  explicitně vypočítat, přepíšme pohybovou rovnici na tvar

$$m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx} = F(v),$$

odkud separací proměnných dostáváme další nezávislý první integrál pohybové rovnice

$$x = x_0 + m \int_{v_0}^v \frac{v dv}{F(v)}. \quad (1.3.5)$$

Vztahy (1.3.4) a (1.3.5) můžeme pokládat za vyjádření pohybu v parametrickém tvaru, kde parametrem je  $v$ . Vyloučením  $v$  bychom dostali řešení v obvyklém tvaru.

## Síla závisující jen na čase

Studujme nejprve formální řešení tohoto problému, tj. řešení pohybové rovnice

$$m \frac{dv}{dt} = F(t)$$

při počátečních podmínkách  $x(t_0) = x_0$ ,  $v(t_0) = v_0$ . Separace proměnných nám dává

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t) dt$$

a druhá integrace vede k výsledku

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \left[ \int_{t_0}^t F(t) dt \right] dt, \quad (1.3.6)$$

což je hledané řešení. Toto řešení umožňuje současně i řešení obecné prostorové úlohy pohybu částice, na kterou působí síla typu  $\mathbf{F}(t)$ . V tomto případě se vektorová pohybová rovnice (1.2.7) rozpadá na tři skalární rovnice

$$m\ddot{x}_i = X_i(t), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

tj. rovnice téhož typu, pro který jsme našli řešení (1.3.6).

Síly závisující na čase se v praxi vyskytují v různých situacích. Důležité jsou případy, kdy známe jejich analytický průběh, jako je tomu např. při studiu pohybu elektricky nabitě částice v proměnném elektrickém poli, jehož změny mají určený průběh v čase. Častější však jsou síly, u nichž analytické vyjádření časové závislosti neznáme. Takové síly mohou buď působit jednorázově (explose, srážky částic apod. — bývají pak označovány jako impulsní či nárazové) nebo jako periodicky se opakující rozruchy. Dost často můžeme graficky zachytit jejich časový průběh a pokusit se najít analytické vyjádření průběhu porovnáním s průběhem některých známých funkcí, nebo se snažit o grafickou integraci pohybových rovnic. Při hledání analytického vyjádření průběhu takových funkcí se často s úspěchem využívá Fourierovy analýzy, rozkladu studované funkce v řadu goniometrických funkcí. I když jde o otázky prakticky důležité, nebudeme se jimi zde podrobněji zabývat.

## Konzervativní silové pole

Jak již bylo řečeno v části 1.2, v konzervativním silovém poli platí zákon zachování celkové mechanické energie částice

$$T + U = E.$$

Můžeme proto psát

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) = E$$

nebo

$$\dot{x}^2 = \varphi(x) = \frac{2}{m} [E - U(x)] \quad (1.3.7)$$

Ze známe závislosti potenciální energie na poloze částice  $U = U(x)$  lze pomocí rovnice (1.3.7) určit velikost rychlosti v každém bodě a kvalitativně tak popsat charakter pohybu částice. Znaménko v (1.3.7) je vždy dáno předcházejícím pohybem částice.

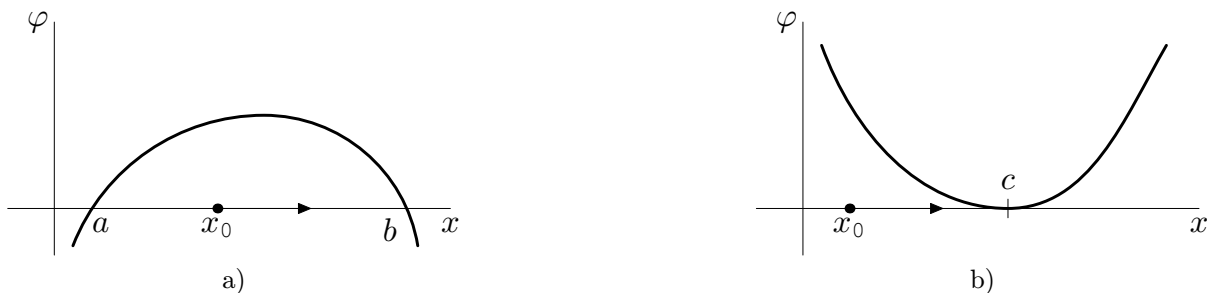
Velikost rychlosti částice musí být reálným číslem. Z této podmínky vyplývá, že pohyb částice bude nutně omezen pouze na oblasti, kde

$$E \geq U(x)$$

Ostatní oblasti jsou z hlediska klasické fyziky zakázané (viz obr. 1.3).<sup>7</sup>

Při pohybu částice v konzervativním silovém poli mohou nastat celkem čtyři kvalitativně odlišné případy pohybu částice, jež lze klasifikovat podle analytického průběhu závislosti  $\dot{x}^2 = \varphi(x)$ :

- částice osciluje mezi dvěma *body obratu*  $x = a$ ,  $x = b$ , pohyb je *periodický (librační)*;
- pro  $t \rightarrow \infty$  se částice blíží k nějakému bodu  $x \rightarrow c$  (*limitační pohyb*);
- pro  $t \rightarrow \infty$  se částice vzdaluje do nekonečna;
- pro  $t \rightarrow t_0$  (konečné) se částice vzdaluje do nekonečna.<sup>8</sup>



Obr. 1.3: Různé průběhy potenciální energie (k výkladu pohybu částice v konzervativním poli)

Rozeberme nyní jednotlivé případy podrobněji. Předpokládejme, že v čase  $t = t_0$  se částice nachází v bodě  $x_0$ , ve kterém platí  $\varphi(x) > 0$ , a její rychlost je orientována v kladném směru osy  $x$ . Podle (1.3.7) potom

$$t = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}} \quad (1.3.8)$$

Na grafu funkce  $y = \varphi(x)$  udává  $y$  velikost kvadrátu rychlosti  $\dot{x}^2$  a derivace  $dy/dx$  charakterizuje zrychlení, neboť

$$\frac{dy}{dx} = 2\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = 2 \frac{dx}{dt} \frac{d\dot{x}}{dx} = 2\ddot{x}.$$

Případ 1 je z hlediska praktických i teoretických aplikací nejdůležitější. Leží-li  $x_0$  mezi dvěma kořeny  $a, b$  rovnice  $\varphi(x) = 0$  (viz obr. 1.3 a)), potom je pohyb částice mezi body obratu  $a, b$  bude periodický s periodou

$$\tau = 2 \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}}.$$

V samotných bodech obratu je sice rychlost částice nulová, ale zrychlení je nenulové a vrací částici zpět směrem ke druhému bodu obratu. Je zřejmé, že mezi body obratu existuje bod, v němž má funkce  $\varphi(x)$  lokální maximum a v němž je potenciální energie částice  $U(x)$  naopak minimální. Minimum potenciální energie v konzervativním silovém poli představuje rovnovážnou polohu, kolem níž může částice konat kmitavý pohyb (viz část 3.6.4).

2. případu odpovídá situace na obr. 1.3 b), kdy se částice blíží k dvojnásobnému kořenu rovnice  $\varphi(x) = 0$  v bodě  $x = c$ . Lze ukázat, že integrál (1.3.8) při  $x \rightarrow c$  diverguje a částice proto bodu  $x = c$  dosáhne v nekonečném čase.

Pokud je pro  $x > x_0$  funkce  $\varphi(x)$  kladná (tj. neexistuje žádné řešení rovnice  $\varphi(x) = 0$  větší než  $x_0$ ), částice pokračuje v pohybu v kladném směru osy  $x$ , přičemž (1.3.8) zůstává v platnosti; pokud integrál (1.3.8) diverguje pro  $x \rightarrow \infty$ , nastává případ 3, jestliže konverguje k hodnotě  $t_0$ , nastává případ 4.

Podotkneme, že úvahy tohoto typu lze využít i v obecnějších případech, např. při studiu křivočarého pohybu s jedním stupněm volnosti a s jistou obměnou i při studiu pohybu v centrálním silovém poli, kde s využitím integrálů pohybu lze zavést tzv. efektivní potenciál a jeho pomocí převést diskusi o charakteru trajektorie na jednorozměrný případ (viz s. 20).

## 1.3.2 Křivočaré pohyby částice

Při studiu křivočarých pohybů částice nemůžeme už provádět obecné úvahy jako v předcházejících odstavcích a všimneme si proto rovnou některých prakticky významných problémů.

### Pohyb částice vržené pod úhlem $\alpha$ k horizontu (šikmý vrh)

a) *V neodporujícím prostředí:* Nechť se částice pohybuje v homogenním tíhovém poli tak, že její počáteční rychlost  $\mathbf{v}_0$  leží v rovině  $xz$  a svírá s osou  $x$  úhel  $\alpha$ . Pohybové rovnice mají tvar

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = -mg,$$

<sup>7</sup>V kvantové mechanice již tento závěr neplatí. Vlnová funkce popisující pravděpodobnost výskytu částice může být nenulová i v oblastech  $E \leq U(x)$ .

<sup>8</sup>Potenciální energie však musí klesat dostatečně prudce, aby integrál  $\int_{x_0}^{\infty} 1/v(x) dx$  konvergoval.

kde osa  $z$  je orientována svisle vzhůru a tíhová síla má směr záporné osy  $z$ ; počáteční podmínky jsou

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0, \quad v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \quad v_{0y} = 0, \quad v_{0z} = v_0 \sin \alpha.$$

Rovnice pro  $y$  má řešení, které se po dosazení počátečních podmínek redukuje na  $y = 0$ , tj. pohyb probíhá v rovině  $xz$ . Zbývající dvě rovnice vedou na partikulární řešení

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad z = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2,$$

což jsou známé vztahy pro šikmý vrh v neodporujícím prostředí. Vyloučením  $t$  dostaneme rovnici trajektorie, jíž je parabola

$$z = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (1.3.9)$$

Souřadnice vrcholu této paraboly nechť jsou  $a, b$ . Transformujme nyní parabolu do souřadnic  $x', z'$  s počátkem ve vrcholu, tj. definovaných vztahy

$$x = x' + a, \quad z = b - z'.$$

Dosazením do rovnice trajektorie dostáváme vztah

$$-z' = \left( -b + a \operatorname{tg} \alpha - \frac{g a^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) + \left( \operatorname{tg} \alpha - \frac{g a}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) x' - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x'^2.$$

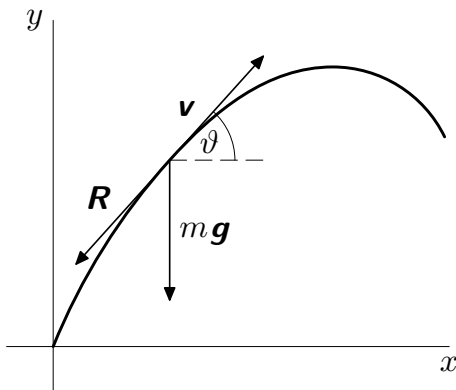
Vrcholový tvar rovnice paraboly však neobsahuje absolutní ani lineární člen a proto musí absolutní člen a koeficient u členu lineárního být roven nule; odtud vychází

$$a = \frac{v_0^2}{2g} \sin(2\alpha),$$

což vzhledem k symetrii paraboly je poloviční délka doletu částice, a dále

$$b = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha,$$

což udává maximální výšku výstupu částice. Uvedli jsme zde úmyslně tuto analytickou metodu určení výšky výstupu a doletu pro porovnání s častěji užívanou jednodušší metodou anulování  $v_z$ , čímž se určí okamžik maximálního výstupu a pomocí něho pak příslušná výška a dolet.



Obr. 1.4: Šikmý vrh v odporujícím prostředí

b) *V odporujícím prostředí:* Při stejných počátečních podmínkách použijeme rozkladu síly podle obr. 1.4 na složku tečnou o velikosti  $F_t = -mg \sin \vartheta - R$  a normálovou o velikosti  $F_n = mg \cos \vartheta$ , kde síla odporu prostředí je označena  $R$ . Pohybové rovnice tedy jsou

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \vartheta - R, \quad (1.3.10)$$

$$m \frac{v^2}{\rho} = mg \cos \vartheta. \quad (1.3.11)$$

Zrychlení nyní rozložíme na tečné a normálové jiným způsobem: Na hodografu vektoru rychlosti v polárních souřadnicích (proměnné  $v$  a  $\vartheta$ ) je radiální rychlost bodu na hodografu rovna tečnému zrychlení částice a transverzální rychlost bodu na hodografu je totožná s normálovým zrychlením částice. Analogicky s rozkladem rychlosti  $\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_0 + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\perp$  můžeme tedy psát

$$\mathbf{a} = \dot{v} \boldsymbol{\tau} + v \dot{\vartheta} \mathbf{n}.$$

V našem případě, protože pro rostoucí oblouk trajektorie  $\vartheta$  klesá, bude mít normálová složka zrychlení opačné znaménko. Vyjádříme-li velikost síly odporu prostředí ve tvaru

$$R = mg \varphi(v),$$

můžeme pomocí tohoto nového rozkladu zrychlení zapsat pohybové rovnice takto:

$$\frac{dv}{dt} = -g [\sin \vartheta + \varphi(v)] \quad (1.3.12)$$

$$v \frac{d\vartheta}{dt} = -g \cos \vartheta. \quad (1.3.13)$$

Dělením obou rovnic dostaneme

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{d\vartheta} = \operatorname{tg} \vartheta + \frac{\varphi(v)}{\cos \vartheta}, \quad (1.3.14)$$

což už je rovnice pro  $v$  jako funkci  $\vartheta$ . Známe-li její řešení  $v = f(\vartheta)$ , plyne z (1.3.13)

$$t = -\frac{1}{g} \int_{\alpha}^{\vartheta} \frac{f(\vartheta)}{\cos \vartheta} d\vartheta. \quad (1.3.15)$$

Protože

$$\dot{x} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} = v \cos \vartheta, \quad \dot{y} = v \sin \vartheta,$$

plyne z (1.3.13)

$$dt = -\frac{f(v)}{g \cos \vartheta} d\vartheta$$

a tedy

$$x = -\frac{1}{g} \int_{\alpha}^{\vartheta} f^2(\vartheta) d\vartheta$$

a podobně

$$y = -\frac{1}{g} \int_{\alpha}^{\vartheta} f^2(\vartheta) \operatorname{tg} \vartheta d\vartheta.$$

Problém je tedy vyřešen (resp. převeden na kvadratury), pokud najdeme funkci  $v = f(\vartheta)$ , tj. řešení rovnice (1.3.14). Toto řešení se však dá najít ve tvaru elementárních funkcí jen pro některé velmi jednoduché typy funkcí  $\varphi(v)$ , např. pro  $\varphi(v) = kv$ , kde  $k = \text{konst.}$  – v obecnějších případech se problém řeší přibližnými metodami.

V některých jednoduchých případech je možné působící sílu výhodně rozložit na složky ve směru souřadnicových os a samostatně integrovat pohybové rovnice pro jednotlivé složky.

### 1.3.3 Pohyb částice v poli centrální síly, Keplerova úloha

Předpokládejme, že v určité oblasti prostoru existuje centrální silové pole, tj. pole síly, jejíž vektorová přímka prochází stále tímtéž bodem. Ze vztahu (1.2.18) a (1.2.19) platí pro pohyb v takovém poli

$$\mathbf{l}_0 = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = 2m \mathbf{v}_s. \quad (1.3.16)$$

Víme tedy, že je pohyb rovinný a vzhledem k symetrii je výhodné jej řešit v polárních souřadnicích. Uvážíme-li, že síla  $\mathbf{F}$  má směr polohového vektoru, můžeme s využitím (1.1.32) zapsat pohybové rovnice

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F \quad (1.3.17)$$

$$m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = 0. \quad (1.3.18)$$

Z (1.3.18) plyne

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} = -2 \frac{\dot{r}}{r},$$

takže

$$\ln \dot{\varphi} = -2 \ln r + \ln C$$

a konečně

$$r^2 \dot{\varphi} = C = \frac{l}{m} \quad (1.3.18a)$$

což souhlasí se vztahem (1.3.16) v polárních souřadnicích.

Při integraci pohybových rovnic zpravidla nehledáme závislosti  $r(t), \varphi(t)$ , nýbrž vylučujeme čas a hledáme rovnici trajektorie v polárních souřadnicích  $r = r(\varphi)$ . Upravíme proto levou stranu rovnice (1.3.17) takto:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = m \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \right) - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] = m\dot{\varphi} \left[ \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} \right) - r\dot{\varphi} \right].$$

Dosadíme-li za  $\dot{\varphi}$  z (1.3.18a), dostaneme dále

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \frac{mC^2}{r^2} \left[ \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dr}{d\varphi} \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r} \right].$$

Použijeme-li nyní vztahu

$$\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}$$

a máme z (1.3.17)

$$-\frac{mC^2}{r^2} \left[ \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] = F.$$

Síla  $F$  je obecně funkcí  $r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}, t$ , avšak pomocí (1.3.18a) lze vyloučit  $\dot{\varphi}$  a nahradit  $\dot{r}$  výrazem

$$\frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{C}{r^2},$$

takže bude

$$F = F \left( r, \varphi, \frac{dr}{d\varphi}, t \right).$$

V dalších úvahách předpokládejme, že  $F$  nezávisí explicitně na čase. Zavedeme-li novou proměnnou  $u = 1/r$ , dostaneme

$$mC^2 u^2 \left( \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right) = -F \left( u, \varphi, \frac{du}{d\varphi} \right), \quad (1.3.19)$$

což je diferenciální rovnice trajektorie (poněkud nelogicky se jí často říká *Binetův vzorec*).

Uvažujme dále speciální případ síly  $F$  závisící jen na vzdálenosti částice od silového centra,  $F = F(u)$ . Označíme

$$-\frac{F(u)}{mC^2 u^2} - u = \phi(u),$$

takže (1.3.19) bude

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = \phi(u).$$

Znásobením  $du/d\varphi$  dostáváme

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \phi(u) \frac{du}{d\varphi}.$$

Integrace nám dává

$$\left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2 - \left( \frac{du}{d\varphi} \right)_0^2 = 2 \int_{u_0}^u \phi(u) du$$

a odtud

$$\frac{du}{d\varphi} = \sqrt{\left( \frac{du}{d\varphi} \right)_0^2 + 2 \int_{u_0}^u \phi(u) du}.$$

Separaci proměnných a novou integrací konečně

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\left( \frac{du}{d\varphi} \right)_0^2 + 2 \int_{u_0}^u \phi(u) du}}, \quad (1.3.20)$$

což je hledaná rovnice trajektorie (orbity) v polárních souřadnicích.

Prakticky jsou významné situace, kdy je síla nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti částice od silového centra (gravitační, coulombovské pole); v těchto případech se dá (1.3.19) integrovat přímo. Nechť má síla tvar  $F = ku^2$  (pro odpudivou sílu  $k > 0$ , pro přitažlivou sílu, mající směr opačný než polohový vektor  $k < 0$ ). Pro gravitační pole např. je  $k = \varkappa mM$ . Ze vztahu (1.3.19)

$$mC^2 u^2 \left( \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right) = -ku^2$$



a tedy

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = -\frac{k}{mC^2}.$$

Zavedeme novou proměnnou

$$y = u + \frac{k}{mC^2},$$

takže

$$\frac{d^2 y}{d\varphi^2} + y = 0,$$

což je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty. Její řešení zapíšeme ve tvaru

$$y = A \cos(\varphi - \varphi_0),$$

kde  $A, \varphi_0$  jsou integrační konstanty. Odtud

$$u = \frac{|k|}{mC^2} \left[ -\text{sign}(k) + \frac{AmC^2}{|k|} \cos(\varphi - \varphi_0) \right]$$

nebo, vrátíme-li se k proměnné  $r$ ,

$$r = \frac{p}{-\text{sign}(k) + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad (1.3.21)$$

kde jsme označili

$$p = \frac{mC^2}{|k|}, \quad \varepsilon = \frac{AmC^2}{|k|} = Ap.$$

Rovnice (1.3.21) je rovnicí kuželosečky v polárních souřadnicích. Připomeňme, že kuželosečka je definována jako geometrické místo bodů majících stejný poměr vzdáleností od daného bodu (*ohniska*) a dané přímky (*řídící přímky*). Označíme-li ohnisko  $O$ , řídící přímku  $d$  (obr.1.5), je vzdálenost bodu  $P$  kuželosečky od řídící přímky rovna  $q - r \cos \varphi$  a tedy pro body kuželosečky platí

$$\frac{r}{q - r \cos \varphi} = \varepsilon. \quad (1.3.22)$$

Konstanta  $\varepsilon$  se nazývá *číslná výstřednost (excentricita)* kuželosečky. Při

$\varepsilon < 1$  se kuželosečka nazývá *elipsa*

$\varepsilon = 1$  se kuželosečka nazývá *parabola*

$\varepsilon > 1$  se kuželosečka nazývá *hyperbola*.

Z (1.3.22) a obr. 1.5 plyne, že pro  $\varphi = \pi/2$  je  $r = p = \varepsilon q$ , kde  $p$  je tzv. *parametr kuželosečky*, takže rovnici kuželosečky pak zapisujeme ve tvaru

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (1.3.23)$$

Tato rovnice popisuje kuželosečku v základní poloze, kdy osa kuželosečky, tj. přímka jdoucí ohniskem a kolmá na řídící přímku splývá se základním paprskem, od něhož odčítáme azimut  $\varphi$ . Pro kuželosečku v obecné poloze platí

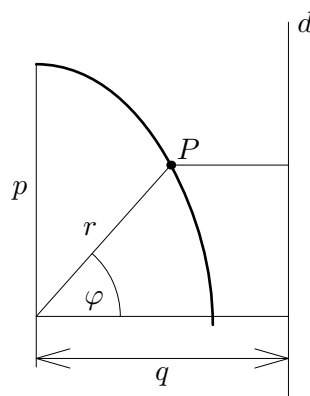
$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)},$$

kde  $\varphi_0$  je úhel, který svírá osa kuželosečky se základním paprskem. U hyperboly je pak druhá větev, vzdálenější od ohniska popsána rovnicí

$$r = \frac{p}{-1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)},$$

Vidíme tedy, že námi získaná rovnice (1.3.21) je skutečně rovnicí kuželosečky. Připomeňme ještě známé výrazy z analytické geometrie, uvádějící v souvislost parametr  $p$  a číselnou excentricitu  $\varepsilon$  elipsy nebo hyperboly ( $\varepsilon \neq 1$ ) a tzv. *hlavní resp. vedlejší poloosou* takové kuželosečky  $a$  resp.  $b$ . Platí

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = \sqrt{ap} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}. \quad (1.3.24)$$



Obr. 1.5: K definici kuželosečky

Číselnou excentricitu  $\varepsilon$  použitou v (1.3.21) a vyjádřenou pomocí integrační konstanty  $A$  je výhodné vyjádřit pomocí energie. Protože studované silové pole je konservativní, platí zákon zachování energie

$$E = T + U = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + \frac{k}{r}.$$

Zavedme nyní pro kuželosečku při  $\varepsilon \neq 1$  tzv. *apsidální vzdálenosti*  $r_1$  a  $r_2$ , které odpovídají maximální resp. minimální hodnotě  $r$  z (1.3.23); platí

$$r_1 = \frac{p}{1-\varepsilon}, \quad r_2 = \frac{p}{1+\varepsilon},$$

přičemž pro hyperbolu přichází v úvahu jen  $r_2$ . V apsidální vzdálenosti se částice začíná vracet, platí tedy  $\dot{r} = 0$ . Dosadíme  $r_2 = r$  a  $\dot{r} = 0$  do výrazu pro  $E$ , přičemž použijeme vztahu  $p = mC^2/|k|$ . Dostaneme

$$E = \frac{k^2}{2mC^2}(\varepsilon^2 - 1)$$

a odtud

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2mC^2 E}{k^2}}. \quad (1.3.25)$$

Tento vztah nám umožňuje klasifikovat trajektorii částic v centrálním poli podle jejich celkové energie. Při

$E > 0$  je trajektorií hyperbola;

$E = 0$  je trajektorií parabola;

$E < 0$  je trajektorií elipsa.

Kromě uvedeného postupu řešení centrálního pohybu při síle závislé jen na  $r$  můžeme tuto úlohu řešit nalezením dvou nezávislých prvních integrálů, z nichž jeden představuje zákon zachování momentu hybnosti, druhý zákon zachování energie:

$$m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{l}_0 = \text{konst.}, \quad \frac{1}{2} m v^2 + U(r) = E = \text{konst.},$$

nebo, v polárních souřadnicích

$$m r^2 \dot{\varphi} = mC = l_0, \quad \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r) = E.$$

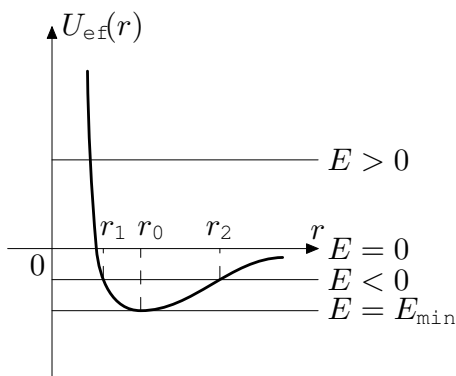
Dosažením z první rovnice za  $\dot{\varphi} = C/r^2$  do druhé dostáváme

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m}(E - U_{\text{ef}}) \quad (1.3.26)$$

kde

$$U_{\text{ef}} = U(r) + \frac{mC^2}{2r^2} = -\frac{\varkappa m M}{r} + \frac{l_0^2}{2mr^2}$$

je tzv. *efektivní potenciál*. Rovnice (1.3.26) je analogická rovnici (1.3.7), kterou jsme studovali při řešení přímočarého pohybu částice v konservativním silovém poli; závěry, které jsme tam získali, můžeme tedy aplikovat i na studovaný centrální pohyb, týkají se však jen pohybu v radiálním směru, tj. závislosti  $r = r(t)$ .



Obr. 1.6: Průběh efektivního potenciálu

Typický průběh efektivního potenciálu je znázorněn na obr. 1.6. Protože konstanta  $L_0$  odpovídá momentu hybnosti částice vzhledem k počátku souřadnic, často se hovoří o tzv. „odstředivé bariéře“. Část kinetické energie spojená s momentem hybnosti za určitých podmínek brání částici dosáhnout bodu  $r = 0$  (podobně jako coulombovská potenciálová bariéra brání splynutí dvou protonů v jádrech atomů). Reálný pohyb je samozřejmě také omezen povrchem centrálního tělesa. Z obr. 1.6 vidíme, závislost  $U_{\text{em}} = U_{\text{em}}(r)$  má lokální minimum v bodě  $r_0$ . V tomto bodě je efektivní potenciál  $U_{\text{em}}(r_0)$  záporný a jeho hodnota určuje zároveň minimální energii, kterou částice s daným momentem hybnosti může v uvažovaném gravitačním poli mít. Pro částici s touto minimální energií  $E_{\text{min}}$  bude podmínka  $E \geq U_{\text{em}}(r)$  splněna pouze pro  $r = r_0$ , tzn., že taková částice se může vyskytnout pouze ve vzdálenosti  $r = r_0$  od centrálního tělesa a pohybuje se proto nutně po kružnici. Přímkou  $E = \text{konst.}$  pro  $E_{\text{min}} \leq E \leq 0$  protne graf funkce  $U_{\text{ef}}(r)$  ve dvou bodech  $r_A, r_B$  (*bodech obratu*) odpovídajících minimální a maximální vzdá-

lenosti částice od centrálního tělesa. Jedná se tedy o eliptický pohyb. Jak pohyb kruhový tak eliptický jsou *pohyby vázané*, kdy je pohyb částic vázán na určitou omezenou oblast v okolí centrálního tělesa. Případ  $E = 0$  odpovídá pohybu parabolickému a případ  $E \geq 0$  hyperbolickému v plné shodě s tím, co bylo řečeno výše, pro něž je typický

pouze jeden bod obratu. Efektivního potenciálu se často využívá ke kvalitativnímu popisu pohybu studovaných těles např. v astrofyzice.

Na základě předcházejících úvah jsme sice ukázali, že trajektorií pohybu v centrálním silovém poli bude kuželosečka, avšak rovnice trajektorie v polárních souřadnicích (1.3.21) nám neumožňuje jistit, jak se poloha studované částice mění s časem. Tento problém, nesmírně důležitý z astronomického hlediska, je obecně poměrně obtížný a řeší se speciálními substitucemi v závislosti na typu kuželosečky, podél níž se objekt pohybuje. Přehledně je tato problematika zpracována např. v [6].

Na příkladu centrálního pohybu si nyní ještě ukážeme postup při řešení první základní úlohy dynamiky (nalezení síly, známe-li pohyb, který tato síla způsobuje). Jde o historickou úlohu Newtonovu (nazývanou často *Keplerovou úlohou* — nalezení Newtonova gravitačního zákona z Keplerových zákonů.

Zákony pro pohyb planet, vyslovené v r. 1618 Keplerem, lze formulovat takto:

- a) *Každá planeta se pohybuje po elipse, v jejímž jednom ohnisku se nachází Slunce.*
- b) *Plošná rychlost každé planety je konstantní.*
- c) *Čtverce oběžných dob planet kolem Slunce jsou ve stejném poměru jako třetí mocniny velikých poloos jejich oběžných drah.*

Máme zde taky přesně stanoveno, že trajektoriemi planet jsou elipsy a proto můžeme pomocí proměnné  $u$  zapsat rovnici elipsy

$$u = \frac{1}{p} (1 + \varepsilon \cos \varphi)$$

a dosadit do (1.3.19), čímž dostaneme

$$\frac{mC^2 u^2}{p} = -F(u)$$

nebo, zavedeme-li  $\mu = C^2/p$  a přejdeme opět k proměnné  $r$

$$F(r) = -\mu \frac{m}{r^2}.$$

Veličina  $\mu$  má stejnou hodnotu pro všechny planety sluneční soustavy. Vyplývá to ze třetího Keplerova zákona

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{konst.}$$

Protože plocha elipsy je  $\pi ab$  a pohyb se děje s konstantní plošnou rychlostí, je celková plocha elipsy rovna součinu plošné rychlosti a oběžné doby  $v_s T$ , takže  $\pi ab = v_s T$ . Odtud

$$\tau = \frac{\pi ab}{v_s} = \frac{2\pi ab}{C},$$

kde jsme dosadili  $C = r^2 \dot{\varphi} = 2v_s$ . Třetí Keplerův zákon pak nabývá tvaru

$$\frac{a^3 C^2}{4\pi^2 a^2 b^2} = \text{konst.}$$

nebo, krácením a dosazením  $p = b^2/a$  z (1.3.24) dostáváme

$$\frac{C^2}{p} = \mu = \text{konst.},$$

kde  $\mu$  bývá označována jako *Gaussova konstanta*. Z Binetova vzorce (1.3.19) by plynulo, že síla  $F$  může být funkcí nejen  $r$ , ale také  $\varphi$  resp.  $dr/d\varphi$ . Pro každou planetu zvlášť bychom tak dostali jistý možný tvar síly, podle konkrétních parametrů zvolené trajektorie. Uvažujeme-li však, že se všechny pohyby dějí v jediném silovém centru Slunce, bude tomuto požadavku vyhovovat jen výraz pro sílu závisující pouze na vzdálenosti  $r$  planety. Proto jsme ji hned v úvodu označili  $F(r)$ .

Pro sílu, kterou planeta přitahuje Slunce, bychom analogickými úvahami dostali

$$F'(r) = -\mu' \frac{M_\odot}{r^2},$$

kde  $M_\odot$  je hmotnost Slunce. Podle principu akce a reakce jsou velikosti obou sil stejné a tedy platí

$$\frac{\mu}{m} = \varkappa = \text{konst.},$$

kde  $\varkappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$  je tzv. *gravitační konstanta*. Pro sílu vzájemného působení tedy konečně dostáváme *Newtonův gravitační zákon*

$$F = F(r) = F'(r) = -\varkappa \frac{mM_\odot}{r^2}. \quad (1.3.27)$$

Zajímavou vlastností Keplerovy úlohy je, že kromě celkové mechanické energie a momentu hybnosti pro ni lze nalézt ještě jeden integrál pohybu. Pro libovolnou centrální sílu můžeme 2. Newtonův pohybový zákon (1.2.1) zapsat ve tvaru

$$\dot{\mathbf{p}} = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Proto také platí

$$\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{l} = \frac{mF(r)}{r} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})] = \frac{mF(r)}{r} [(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \mathbf{r} - r^2 \dot{\mathbf{r}}]. \quad (1.3.28)$$

První člen v závorce lze zjednodušit na tvar

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = r\dot{r},$$

jenž odráží skutečnost, že průmět rychlosti do radiálního směru má velikost  $\dot{r}$ . Protože vektor momentu hybnosti se při pohybu zachovává, můžeme (1.3.28) psát

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p} \times \mathbf{l}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{l} = -mF(r) r^2 \left( \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\dot{r}\mathbf{r}}{r^2} \right)$$

nebo

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p} \times \mathbf{l}) = -mF(r) r^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right).$$

Podle (1.3.27) v případě Keplerovy úlohy máme  $F(r) = k/r^2$ , takže

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p} \times \mathbf{l}) = -\frac{d}{dt} \left( \frac{mk\mathbf{r}}{r} \right).$$

Odtud plyne, že vektor

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{l} + \frac{mk\mathbf{r}}{r}$$

se bude při pohybu v takovém centrálním silovém poli zachovávat, neboť  $d\mathbf{A}/dt = 0$ . Takto definovaný vektor nazýváme *Laplaceovým-Rungeovým-Lenzovým vektorem*.

Z definice vektoru  $\mathbf{A}$  bezprostředně plyne  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{l} = 0$ , tzn. že  $\mathbf{A}$  je kolmý k  $\mathbf{l}$  a musí ležet v rovině trajektorie částice. Nechť  $\varphi$  značí úhel mezi fixovaným směrem  $\mathbf{A}$  a polohovým vektorem  $\mathbf{r}$ . Potom

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = Ar \cos \varphi = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{l}) + mkr.$$

Upravíme-li smíšený součin vektorů

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{l}) = \mathbf{l} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = l^2,$$

dostáváme rovnici

$$Ar \cos \varphi = l^2 + mkr$$

neboli

$$r = \frac{l^2}{m|k| - \text{sign}(k) + \frac{A}{m|k|} \cos \varphi}$$

ekvivalentní s (1.3.21). Vidíme, že Laplaceův-Rungeův-Lenzův vektor nám poskytuje alternativní, efektivní možnost k nalezení trajektorie částic v centrálním gravitačním poli. Srovnáním s (1.3.21) zároveň zjišťujeme, že má směr polohového vektoru v okamžiku, kdy je částice v minimální apsidální vzdálenosti (periheliu, perigeu, periastru) a má konstantní velikost  $A = mk\varepsilon$ .

Při problémech řešených v nebeské mechanice pracujeme s přitažlivými silami centrálními; v atomové fyzice se však vyskytují rovněž síly centrálního typu, a i když se dá očekávat, že studium procesů na atomové úrovni se bude řídit zákony kvantové mechaniky, existuje řada úloh, pro něž dává přijatelné výsledky klasické řešení. Významnou úlohou tohoto typu je rozptyl  $\alpha$ -částic na jádrech těžkých kovů. Klasická formulace tohoto problému představuje studium pohybu částice v poli odpudivé centrální síly.

Studujeme-li pohyb v poli centrální síly  $F = kr^{-2}$ , kde  $k > 0$ , bude postup řešení stejný jako pro příslušnou sílu přitažlivou, obecné řešení však dostaneme ve tvaru

$$\frac{1}{r} = \frac{k}{mC^2} (\varepsilon \cos \varphi - 1), \quad (1.3.29)$$

kde  $\varepsilon$  můžeme vyjádřit pomocí energie  $E$  ve tvaru (1.3.25), neboť pohybu v odpudivém poli odpovídá rovnice vzdálenější větve hyperboly.

Představme si částici, která má v bodě velmi vzdáleném od silového centra rychlost  $v_0$  a která by — v případě, že by nebylo odpudivé síly — proletěla ve vzdálenosti  $b$  od centra. Moment hybnosti pak je  $mv_0b = mC$ , energie  $E = mv_0^2/2$  a po dosazení do (1.3.25)

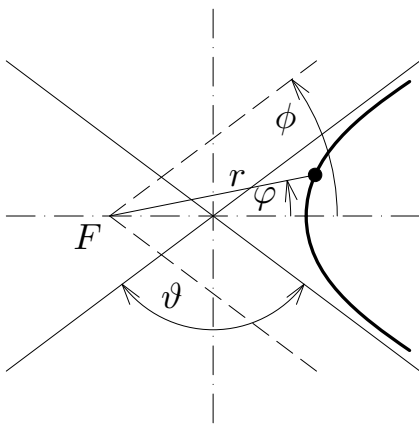
$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2mv_0^2b^2E}{k^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2Eb}{k}\right)^2} \quad (1.3.30)$$

vidíme, že  $\varepsilon > 1$ , takže trajektorií částice je vždy hyperbola. Protože  $r$  musí být kladné, musí platit  $\cos \varphi > 1/\varepsilon$ . Z omezení  $\varphi$  vyplývá, že střed síly je v tomto případě ve vnějším ohnisku hyperboly (obr. 1.7). Pro úhel asymptot  $\phi$  hyperboly dostaneme z (1.3.29) při  $r \rightarrow \infty$

$$\cos \phi = \frac{1}{\varepsilon}. \quad (1.3.31)$$

Tento úhel se nazývá úhel rozptylu. Z obr. 1.7 vyplývá vztah

$$2\phi + \vartheta = \pi. \quad (1.3.32)$$



Obr. 1.7: Rozptyl částic v poli centrální síly

Při studiu rozptylu nás tolik nezajímají konkrétní trajektorie částic, jako určité veličiny charakterizující počáteční a konečný pohybový stav částic; i tyto veličiny bývají většinou určovány jen statisticky. Obvyklé je řešení problému rozptylu částic ve formě tzv. účinného průřezu  $\sigma$  pro rozptyl v daném směru. Jestliže počet částic jdoucích směrem k rozptylujícímu centru, které projdou za jednotku času jednotkou plochy je  $N$  a jestliže z nich  $n$  je rozptýleno do jednotkového prostorového úhlu, definujeme  $\sigma$  vztahem

$$\sigma = \frac{n}{N} \quad (1.3.33)$$

Počet částic, které procházejí prstencem o tloušťce  $db$  ve vzdálenosti  $b$  od osy symetrie je  $N2\pi b db$  (viz obr. 1.8). Tyto částice jsou rozptýleny do prostorového úhlu charakterizovaného oblastí mezi dvěma kužely, jejichž poloviční vrcholové úhly jsou  $\vartheta$  a  $\vartheta + d\vartheta$ ; velikost tohoto prostorového úhlu je  $d\Omega = 2\pi b db = -2\pi \sin \vartheta d\vartheta$ .

Podle definice  $\sigma$  musí platit

$$2\pi N b db = -2\pi N \sigma \sin \vartheta d\vartheta,$$

kde záporné znaménko volíme proto, že s rostoucím  $b$  se zmenšuje  $\vartheta$ . Odtud

$$\sigma(\vartheta) = \frac{b db}{\sin \vartheta d\vartheta}. \quad (1.3.34)$$

Vzhledem k (1.3.32) platí

$$\cotg \frac{\vartheta}{2} = \cotg \left( \frac{\pi}{2} - \phi \right) = \tg \phi = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \phi}}{\cos \phi} = \frac{2Eb}{k},$$

odkud

$$b = \frac{k}{2E} \cotg \frac{\vartheta}{2}.$$

Dosazením do (1.3.34) dostáváme

$$\sigma(\vartheta) = \frac{1}{4} \left( \frac{k}{2E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}, \quad (1.3.35)$$

což je tzv. *Rutherfordův vzorec*, který svého času sehrál významnou úlohu při ověřování správnosti modelu atomu s jádrem.

Celkový průřez rozptylu se definuje vztahem

$$\int_{4\pi} \sigma(\Omega) d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\vartheta) d\vartheta.$$

Dosadíme-li sem z (1.3.35), zjistíme, že integrál diverguje; fyzikálně to odpovídá charakteru předpokládaného pole jako pole působícího do nekonečna: Dosah sil není nijak omezen, takže i částice jdoucí velmi daleko od silového centra jsou — i když nepatrně — rozptylovány.

Konečný celkový průřez rozptylu dostaneme, budou-li síly působit jen v určité oblasti. Prakticky je tomu tak právě např. v atomu, kde Coulombovo pole jádra je ve velkých vzdálenostech „odstíněno“ polem elektronového obalu.

Při těchto úvahách o rozptylu jsme ovšem situaci idealizovali, neboť jsme volili silové centrum nepohyblivé. Této idealizace lze užít právě např. při zmíněném rozptylu  $\alpha$ -částic na jádrech těžkých kovů, tedy při takových úlohách, kdy řešíme rozptyl poměrně lehkých částic na částicích mnohem těžších. Není-li tato podmínka splněna, je třeba úlohu studovat jako tzv. problém dvou těles (viz část 3.6.3). Problém dvou těles lze redukovat na ekvivalentní problém pro jednu částici, studujeme-li jej v soustavě hmotného středu (viz část 2.4), což pak ovšem vyžaduje transformaci parametrů rozptylu z laboratorní soustavy v prostoru pevné do soustavy hmotného středu a naopak. I když tyto úlohy jsou v moderní fyzice velmi významné, nebudeme se jimi zde zabývat.

## 1.4 Řešené příklady

### Příklad 1.1

Paraboly svazku  $y = bx^2$ ,  $b \in R$  vyplňují celou rovinu  $x - y$ . Zadáním  $x$  a  $b$  je možné určit libovolný bod, neboť těmto hodnotám odpovídá vždy právě jedno  $y$ . V souřadnicích  $q_1 = x$  a  $q_2 = b$  najděte Laméovy koeficienty  $H_{q_1}, H_{q_2}$ , průměty rychlosti do křivočarých os a také výraz  $T = \frac{1}{2}v^2$ .

*Řešení:*

Podle zadání můžeme souřadnice  $x, y$  snadno vyjádřit jako funkce  $q_1, q_2$

$$x = q_1, \quad y = q_1^2 q_2.$$

Pro Laméovy koeficienty pak podle (1.1.16) vychází

$$H_{q_1} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2} = \sqrt{1 + 4q_1^2 q_2},$$

$$H_{q_2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2} = q_1^2$$

a pro složky rychlosti v křivočarých souřadnicích podle (1.1.19)

$$v_{q_1} = \sqrt{1 + 4q_1^2 q_2} \dot{q}_1, \quad v_{q_2} = q_1^2 \dot{q}_2.$$

Vyjádříme-li složky rychlosti v kartézských souřadnicích

$$\dot{x} = \dot{q}_1, \quad \dot{y} = 2q_1 q_2 \dot{q}_1 + q_1^2 \dot{q}_2$$

dostaneme kvadrát rychlosti

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (1 + 4q_1^2 q_2) \dot{q}_1^2 + 4q_1^3 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + q_1^4 \dot{q}_2^2 \neq v_{q_1}^2 + v_{q_2}^2;$$

daná soustava souřadnic  $q_1, q_2$  není na rozdíl od souřadnic kartézských ortogonální (a neplatí tedy např. vztah (1.1.23)). Neortogonálnost použité soustavy souřadnic je také zřejmá z neortogonality souřadnicových čar, jimiž jsou přímký o rovnici  $q_1 = x = \text{konst.}$  a paraboly svazku  $y = q_1^2 q_2$  při konstantním  $q_2$ . Čtenář sám se může přesvědčit, že určíme-li úhel sevřený zmíněnými souřadnicovými čarami, lze  $v^2$  vyjádřit pomocí křivočarých složek  $v_{q_1}, v_{q_2}$  podle kosinové věty.

### Příklad 1.2

Částice o hmotnosti  $m = \frac{1}{3}$  kg koná pohyb popsáný rovnicemi  $x = 0,3 \cos(3t)$ ,  $y = 0,1 \sin(3t)$ . Určete sílu  $\mathbf{F}$ , která tento pohyb vyvolává.

*Řešení:*

Nejprve najdeme průměty  $F_x, F_y$  síly  $\mathbf{F}$  do souřadnicových os  $x, y$ :

$$F_x = m\ddot{x} = -0,9 \cos(3t) = -3x$$

$$F_y = m\ddot{y} = -0,3 \sin(3t) = -3y$$

Pro velikost síly  $F$  pak platí

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{0,81 \cos^2(3t) + 0,09 \sin^2(3t)} = 3\sqrt{x^2 + y^2} = 3r.$$

kde  $r$  je velikost polohového vektoru částice. Vektorově potom platí

$$\mathbf{F} = -3x\mathbf{e}_x - 3y\mathbf{e}_y = -3(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y) = -3\mathbf{r}.$$

Odtud je vidět, že síla  $\mathbf{F}$  má opačný směr než  $\mathbf{r}$ .

### Příklad 1.3

Hmotný bod o hmotnosti  $m$  se pohybuje po kružnici o poloměru  $r$  tak, že za čas  $t$  urazí dráhu  $s = s_0 + 2r \ln t$ . Určete velikost celkové síly, která na hmotný bod působí, jako funkci času.

*Řešení:*

Zde je výhodné použít přirozené složky síly, definované v rovnici (1.2.9). Pro uvažovaný pohyb platí

$$F_\tau = m \frac{dv}{dt} = m\ddot{s} = -\frac{2mr}{t^2}$$

$$F_n = m \frac{v^2}{r} = \frac{m\dot{s}^2}{r} = \frac{4mr}{t^2}$$

$$F_b = 0$$

takže

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2 + F_b^2} = \frac{2\sqrt{5}mr}{t^2}.$$

### Příklad 1.4

Částice o hmotnosti  $m$  se pohybuje po kružnici o poloměru  $r$ . Určete zobecněnou sílu  $Q_\varphi$  odpovídající polární souřadnici  $\varphi$ . Počátek souřadnic nechtě je ve středu kružnice.

*Řešení:*

Pro rychlost částice pohybující se po kružnici platí  $v = r\omega = r\dot{\varphi}$  a po dosazení do (1.2.6) postupně vychází

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2}$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \left( \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2} \right)}{\partial \dot{\varphi}} \right] = \frac{d}{dt} [mr^2\dot{\varphi}] = \frac{dl}{dt} = mr^2\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial \left( \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2} \right)}{\partial \varphi} = 0$$

$$Q_\varphi = \frac{dl}{dt} = mr^2\ddot{\varphi}.$$

kde  $l$  je moment hybnosti částice vzhledem k počátku. Jak je vidět, zobecněná síla nemusí mít vždy rozměr  $\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

### Příklad 1.5

Proveďte klasifikaci pohybů v homogenním tíhovém poli Země v závislosti na počátečních podmínkách. Pro jednoduchost uvažujme pohyb pouze ve svislé rovině.

*Řešení:*

Nechť osa  $x$  je orientována ve vodorovném směru, kladný směr osy  $y$  svisle vzhůru, počátek zvolme na zemském povrchu. Pohybové rovnice pak mají tvar

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = -mg$$

neboli

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g$$

Integrací 1. rovnice postupně dostaneme

$$\dot{x} = C_1 = v_{0x}, \quad x = C_1t + C_2$$

Pro  $t = 0$  vychází  $x_0 = C_2$  a tedy  $x = v_{0x}t + x_0$ . Řešením 2. rovnice pro souřadnici  $y$  analogicky obdržíme

$$\dot{y} = -gt + C_3, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3t + C_4$$

a z podmínky  $t = 0$  zjistíme, že  $C_3 = v_{0y}$ ,  $C_4 = y_0$ , takže

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Integrací jsme tak získali parametrické vyjádření trajektorie. Použijeme-li vektorového zápisu potom

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + (v_{0x}\mathbf{i} + v_{0y}\mathbf{j})t - \frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2,$$

čímž jsme parametrické vyjádření převedli na závislost typu (1.2.11), popisující obecně celou třídu pohybů. Konkrétním počátečním podmínkám pak odpovídají různé trajektorie i různé typy pohybů:

- $v_{0x} = 0$ ,  $v_{0y} > 0$  svislý vrh vzhůru, trajektorii je úsečka
- $v_{0x} = 0$ ,  $v_{0y} < 0$ ,  $y_0 \neq 0$  svislý vrh dolů, trajektorii je úsečka
- $v_{0y} = 0$ ,  $y_0 \neq 0$  vodorovný vrh, trajektorii je část paraboly
- $v_{0x} \neq 0$ ,  $v_{0y} \neq 0$  šikmý vrh, trajektorii je část paraboly

### Příklad 1.6

Ověřte platnost zákona zachování složek hybnosti pro částici s nábojem  $q$ , která vletěla počáteční rychlostí  $\mathbf{v}_0$  do homogenního magnetického pole o indukci  $\mathbf{B}$  orientované ve směru osy  $z$ .

*Řešení:*

Na částici pohybující se v homogenním magnetickém poli působí Lorentzova síla

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = qv_y B \mathbf{e}_x - qv_x B \mathbf{e}_y$$

Pro složky hybnosti pak platí

$$\frac{dp_x}{dt} = qv_y B = q\dot{y}B, \quad \frac{dp_y}{dt} = -qv_x B = -q\dot{x}B, \quad \frac{dp_z}{dt} = 0$$

odkud vyplývá, že  $p_z = \text{konst.}$ , neboli pro  $z$ -ovou složku hybnosti platí zákon zachování. Jak je známo, řešením soustavy zbývajících dvou rovnic vychází harmonická závislost složek  $v_x$ ,  $v_y$  i souřadnic  $x, y$  na čase, odpovídající pohybu po kružnici o poloměru  $r = mv_{0\perp}/(qB)$ , kde  $v_{0\perp} = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}$  je velikost složky počáteční rychlosti kolmé na směr magnetického pole  $\mathbf{B}$ . Výslednou trajektorii je šroubovice odvíjející se podél osy  $z$ .

Studujme nyní tutěž úlohu ve válcových souřadnicích  $(r, \varphi, z)$ . Pro odpovídající složky síly a hybnosti můžeme psát

$$F_z = \frac{dp_z}{dt} = 0, \quad F_\varphi = ma_\varphi = m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(rp_\varphi)$$

$$F_r = ma_r = m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = \frac{dp_r}{dt} - mr\dot{\varphi}^2$$

Protože víme, že poloměr  $r$  se během pohybu nemění, bude také  $\dot{r} = 0$  a tedy také  $v_r = \dot{r} = 0$ . Pro Lorentzovu sílu máme

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ 0 & r\dot{\varphi} & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = qr\dot{\varphi}B\mathbf{e}_r.$$

Docházíme tedy k závěru, že

$$\frac{dp_z}{dt} = 0, \quad \text{a} \quad \frac{d}{dt}(rp_\varphi) = 0,$$

neboli  $p_z$  i  $p_\varphi$  se zachovávají. Protože také  $r$  se nemění, musí být rovněž  $p_r = m\dot{r} = 0$ . Zachovávají se tedy všechny složky hybnosti, avšak síla působící na částici nulová není. Dodejme, že z podmínky

$$F_r = \dot{p}_r - mr\dot{\varphi}^2 = -mr\dot{\varphi}^2 = qr\dot{\varphi}B$$



můžeme určit velikost úhlové frekvence pohybu částice  $\dot{\varphi} = qB/m$ .

### Příklad 1.7

Najděte integrály pohybu volné částice ve válcových souřadnicích.

*Řešení:* Na volnou částici nepůsobí žádná síla, tzn. platí  $F_r = F_\varphi = F_z = 0$  a rovněž pro odpovídající složky zrychlení můžeme psát

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = 0, \quad a_z = \ddot{z} = 0$$

$$a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\varphi}) = 0$$

Z poslední rovnice je zřejmé, že integrálem pohybu je veličina  $r^2\dot{\varphi}$  popř. po vynásobení hmotností  $m$  také  $l_z = mr^2\dot{\varphi} = \text{konst.}$ , odpovídající z-ové složce momentu hybnosti  $l$  vzhledem k počátku souřadnic. Pro energii částice, která je dána pouze její kinetickou energií pak vychází

$$E = E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l_z^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}m\dot{z}^2.$$

Pro změnu energie s časem pak dostáváme

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{r}\ddot{r} - \frac{l_z^2\dot{r}}{mr^3} + m\dot{z}\ddot{z} = m\dot{r}(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + m\dot{z}\ddot{z} = ma_r + ma_z = 0$$

což znamená, že rovněž energie částice zůstává během pohybu konstantní a je tedy integrálem pohybu. Dodejme, že pokud bychom namísto cylindrických použili souřadnice kartézské, získali bychom namísto složky momentu hybnosti jako integrály pohybu jednotlivé složky hybnosti částice a tím i jejich vektorový součet - vektor celkové hybnosti.

### Příklad 1.8

Vypočítejte práci vykonanou třecí silou o velikosti  $F = \mu mg$  ( $\mu$  je koeficientem smykového tření) při přemístění částice o hmotnosti  $m$  z bodu  $C$  do bodu  $D$  ve vodorovné rovině

- pro úsečku délky  $l$  spojující oba body;
- pro půlkružnici o průměru  $l$  spojující oba body.

*Řešení:*

a) Podle (1.2.20) pro práci  $A$  můžeme psát

$$A = \int_C^D \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Protože síla  $\mathbf{F}$  je konstantní a působí proti pohybu (má vždy opačný směr než  $d\mathbf{r}$ ), platí

$$A = - \int_{\text{úsečka } CD} F_t dr = -\mu mg \int_{\text{úsečka } CD} dr = -\mu mgl.$$

b) Analogicky získáváme

$$A = -\mu mg \int_{\text{oblouk } CD} dr = -\mu\pi mg \frac{l}{2} \neq -\mu mgl$$

Vidíme, že vypočtené hodnoty práce nejsou stejné. Jak jsme předpokládali, práce síly tření je záporná, neboť jejím působením se kinetická energie částice zmenšuje.

### Příklad 1.9

Najděte potenciální energii částice o hmotnosti  $m$  v gravitačním poli částice o hmotnosti  $M$ , která je v klidu ( $M \gg m$ ).

*Řešení:*

Je-li vzájemná vzdálenost částic  $r$ , působí na sebe silou  $F = -\varkappa mM/r^2$ . Proto

$$\begin{aligned} \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= - \int_{(1)}^{(2)} \frac{\varkappa mM}{r^2} dr = \varkappa mM \left[ \frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{\varkappa mM}{r_2} - \frac{\varkappa mM}{r_1} = \\ &= - \frac{\varkappa mM}{r_1} - \left( - \frac{\varkappa mM}{r_2} \right) = U_1 - U_2 \end{aligned}$$

Pro potenciální energii  $U$  tedy srovnáním s (1.2.24) dostáváme  $U = -\varkappa mM/r$ .

### Příklad 1.10

Závaží o hmotnosti  $m$  je upevněno na pružině podle obr.1.9. V počátečním okamžiku nebyla pružina deformována a závaží ležícímu na vodorovné podložce byla udělena počáteční rychlost  $v_0$  v kladném směru osy  $x$ . Při prodloužení pružiny o délku  $x$  působí pružina na závaží silou  $F_x = -\alpha x - \beta x^3$  ( $\alpha, \beta$  jsou kladné konstanty). Určete maximální výchylku závaží z rovnovážné polohy. Tření zanedbejte.

**Řešení:**

Pohybová rovnice má tvar

$$m\ddot{x} = -\alpha x - \beta x^3$$

Jedná se o nelineární diferenciální rovnici 2. řádu. V souladu s výše uvedeným postupem dostáváme

$$\begin{aligned} m \frac{dx}{dt} &= -\alpha x - \beta x^3 \\ m \frac{dx}{dx} \frac{dx}{dt} &= -\alpha x - \beta x^3 \\ m \dot{x} dx &= -(\alpha x + \beta x^3) dx \\ m \frac{v^2}{2} - m \frac{v_0^2}{2} &= -\alpha \frac{x^2}{2} - \beta \frac{x^4}{4} \\ v^2 &= v_0^2 - \frac{\alpha}{m} x^2 - \frac{\beta}{2m} x^4 \end{aligned}$$

V okamžiku, kdy částice dosáhne maximální výchylky  $x_m$  platí  $v = 0$ , neboli

$$v_0^2 = \frac{\alpha}{m} x_m^2 - \frac{\beta}{2m} x_m^4$$

a dále

$$x_m^4 + \frac{2\alpha}{\beta} x_m^2 - \frac{2m}{\beta} v_0^2 = 0$$

Řešením kvadratické rovnice vzhledem k  $x_m^2$  pak zjistíme, že

$$x_m^2 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2m\beta v_0^2}}{\beta},$$

po odmocnění pak konečně

$$x_m = \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2m\beta v_0^2}}{\beta}}.$$

Grafické řešení  $x = x(t)$  pro  $\alpha = \beta = 1$  je na obr. 1.10. Různým počátečním rychlostem  $v_{01} = 1 \text{ m}\cdot\text{s}$ ,  $v_{02} = 6 \text{ m}\cdot\text{s}$  a  $v_{03} = 36 \text{ m}\cdot\text{s}$  odpovídají křivky (a), (b), (c). Vidíme, že se zvýšením počáteční rychlosti se zvětší také frekvence kmitů soustavy.

### Příklad 1.11

Studujte radiální pohyb částice o hmotnosti  $m$  v gravitačním poli Země ( $M_z = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ,  $R_z = 6378 \text{ km}$ ,  $\varkappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ ) v neodporujícím prostředí. Gravitační síla působící na částici ve vzdálenosti  $r$  od středu Země je dána Newtonovým gravitačním zákonem  $F_g = -\varkappa mM_z/r^2$ .

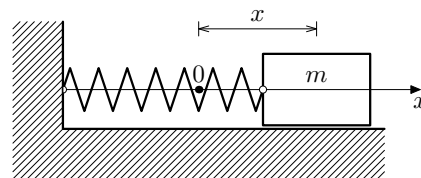
**Řešení:**

Radiálním pohybem rozumíme přímočarý pohyb ve směru od a ke středu Země. Gravitační síla, kterou působí Země na částici o hmotnosti  $m$  ve vzdálenosti  $r$  od středu Země je dána Newtonovým gravitačním zákonem

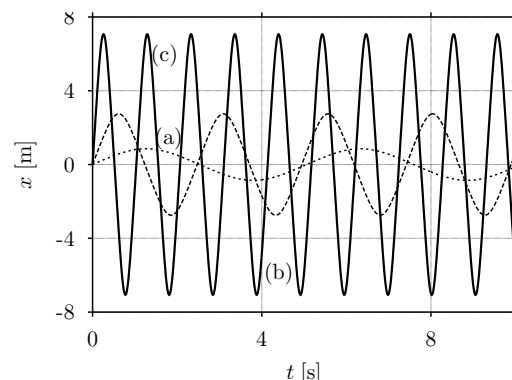
$$F_0 = -\varkappa \frac{mM_z}{r^2}$$

Pohybová rovnice pak má tvar

$$m\ddot{r} = -\varkappa \frac{mM_z}{r^2}$$



Obr. 1.9: K zadání příkladu 1.9



Obr. 1.10: K řešení příkladu 1.9

Obdobnými úpravami jako v předcházejícím příkladě a integrací najdeme závislost rychlosti na radiální souřadnici  $r$

$$v \, dv = - \frac{\varkappa M}{r^2} \, dr$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \frac{\varkappa M_z}{r} - \frac{\varkappa M_z}{R_0}$$

$$v = \pm \sqrt{v_0^2 + \frac{2\varkappa M_z}{r} - \frac{2\varkappa M_z}{R_0}}$$

Z tohoto vztahu lze také např. vypočítat hodnotu parabolické rychlosti pro danou vzdálenost  $R_0$  od středu Země (tj. velikost rychlosti, kterou je v daném místě nutné částici udělit, aby unikla z gravitačního pole Země do nekonečna). Pro  $r \rightarrow \infty$ ,  $1/r \rightarrow 0$ ,  $v(r \rightarrow \infty) = 0$  vychází

$$v_0 = v_p = \sqrt{\frac{2\varkappa M_z}{R_0}}$$

Konkrétně pro  $R_0 = R_z$  dostaneme tzv. 2. kosmickou rychlost

$$v_{2k} = \sqrt{\frac{2\varkappa M_z}{R_z}} = \sqrt{2R_z g} \approx 11\,173 \, \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Závislost polohy na čase budeme hledat integrováním rovnice

$$v = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{v_0^2 + \frac{2\varkappa M_z}{r} - \frac{2\varkappa M_z}{R_0}}$$

$$\pm \frac{dr}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2\varkappa M_z}{R_0} + \frac{2\varkappa M_z}{r}}} = dt$$

Označíme-li  $E_0 = 2\varkappa M_z/R_0 - v_0^2$  (až na znaménko se jedná vlastně o hodnotu celkové počáteční mechanické energie částice vztáženou na hmotnost 1 kg, potom

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2\varkappa M_z}{r} - E_0}} = \pm dt$$

$$\frac{\sqrt{r} \, dr}{\sqrt{2\varkappa M_z - E_0 r}} = \pm dt$$

$$\frac{\sqrt{r} \, dr}{\sqrt{\frac{2\varkappa M_z}{E_0} - r}} = \pm \sqrt{E_0} \, dt$$

Pro jednoduchost zavedme ještě  $a = 2\varkappa M_z/E_0$ . Zatímco integrace pravé strany dává  $\pm t\sqrt{E_0}$ , levou stranu je výhodné nejprve upravit

$$\int \frac{\sqrt{r} \, dr}{\sqrt{a-r}} = \int \frac{r \, dr}{\sqrt{ar-r^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{2r-a+a}{\sqrt{ar-r^2}} \, dr =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{a-2r-a}{\sqrt{ar-r^2}} \, dr + \frac{a}{2} \int \frac{dr}{\sqrt{ar-r^2}} = -\sqrt{ar-r^2} + \int \frac{dr}{\sqrt{1-\left(\frac{2r}{a}-1\right)^2}} =$$

$$= -\sqrt{ar-r^2} - \frac{a}{2} \arccos\left(\frac{2r}{a}-1\right) + \text{konst.}$$

Nahradíme-li ještě v posledním členu,

$$\arccos\left(\frac{2r}{a}-1\right) = \arcsin \sqrt{1-\left(\frac{2r}{a}-1\right)^2} = \arcsin \sqrt{\frac{4r}{a^2}(a-r)}$$

můžeme psát

$$\pm t\sqrt{E_0} = -\sqrt{a(a-r)} - \frac{a}{2} \arcsin \sqrt{\frac{4r}{a^2}(a-r)}$$

Z této rovnice není možné obecně analyticky vyjádřit  $r$  jako funkci  $t$ . Věnujme proto pozornost alespoň jednomu konkrétnímu případu - volnému pádu ze vzdálenosti  $R_0$  od středu Země. Protože je rychlost orientována směrem do středu Země, musí platit  $v < 0$  a v poslední rovnici musíme na levé straně uvažovat záporné znaménko. Protože dále  $v_0 = 0$ ,  $E_0 = 2\kappa M_z/R_0 - v_0^2 = 2\kappa M_z/R_0$ ,  $a = 2\kappa M/E_0 = R_0$ , musí platit

$$-t\sqrt{\frac{2\kappa M_z}{R_0}} = -\sqrt{r(R_0 - r)} - \frac{R_0}{2} \arcsin \left[ 2\sqrt{\frac{r}{R_0^2}} (R_0 - r) \right].$$

Podělíme-li rovnici  $\sqrt{R_0}$  a zavedeme-li označení  $g_0 = \kappa M_z/R_0^2$  pro gravitační zrychlení ve vzdálenosti  $R_0$  od středu Země, vychází

$$t\sqrt{2g_0} = \sqrt{\frac{r}{R_0}} (R_0 - r) + \frac{\sqrt{R_0}}{2} \arcsin \left[ 2\sqrt{\frac{r}{R_0^2}} (R_0 - r) \right].$$

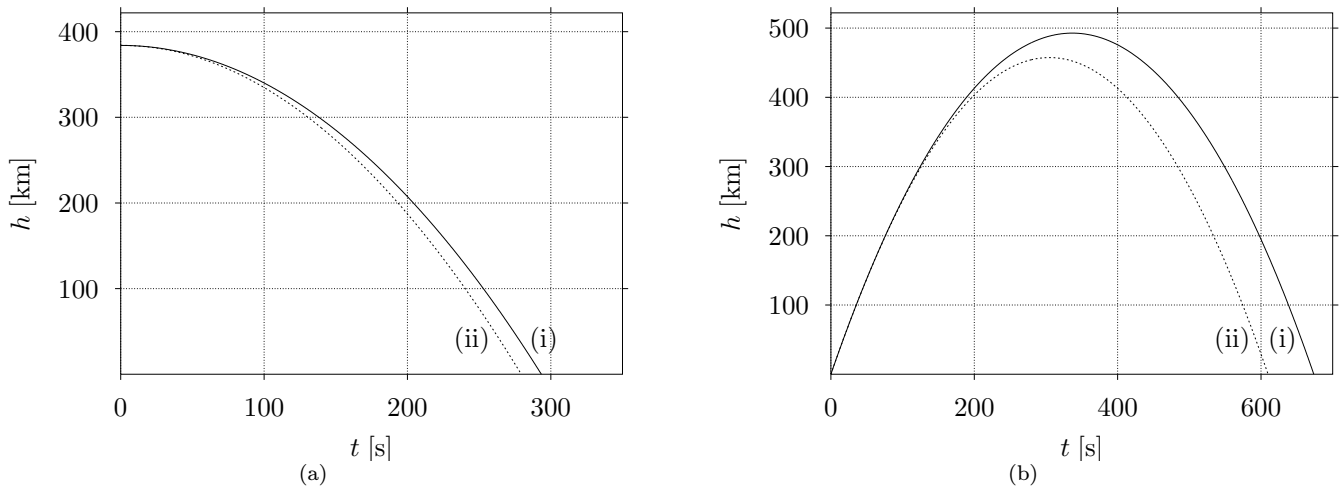
Rozdíl  $R_0 - r = h$  představuje dráhu uraženou od počáteční polohy  $R_0$ . Rovnici můžeme přepsat na tvar

$$t\sqrt{2g_0} = \sqrt{\frac{r}{R_0}} h + \frac{\sqrt{h}}{2\sqrt{\frac{h}{R_0}}} \arcsin \left( 2\sqrt{\frac{r}{R_0}} \frac{h}{R_0} \right).$$

Pro  $r \approx R_0$  bude  $h \ll R_0$ ,  $r/R_0 \approx 1$ ,  $\arcsin \left( 2\sqrt{h/R_0} \right) \approx 2\sqrt{h/R_0}$ . Pokud tedy probíhá pohyb v malé oblasti ve srovnání se vzdáleností od středu Země, můžeme použít známý Galileův vzorec

$$t\sqrt{2g_0} \approx 2\sqrt{h}, \quad h = \frac{1}{2} g_0 t^2.$$

Křivka (i) na obr. 1.11a popisuje závislost výšky  $h$  nad zemským povrchem na čase pro volný pád z výšky  $h_0 = 384$  km nad zemským povrchem (tisícina vzdálenosti Země - Měsíc, přibližně oblast, v níž se nacházejí stacionární umělé družice). Druhá křivka (ii) by odpovídala pádu v homogenním gravitačním poli se zrychlením  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , jež odpovídá gravitačnímu zrychlení na povrchu Země, za stejných počátečních podmínek. Vidíme, že časový rozdíl mezi dopadem částic na povrch Země pro uvažované trajektorie činí řádově desítky sekund. Na obr. 1.11b) je pak numerické řešení svislého vrhu z povrchu Země počáteční rychlostí  $v_0 = 3 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$  pro gravitační pole klesající se vzdáleností od středu Země (i) a pro homogenní gravitační pole se zrychlením  $g$  (ii).



Obr. 1.11: K příkladu 1.11

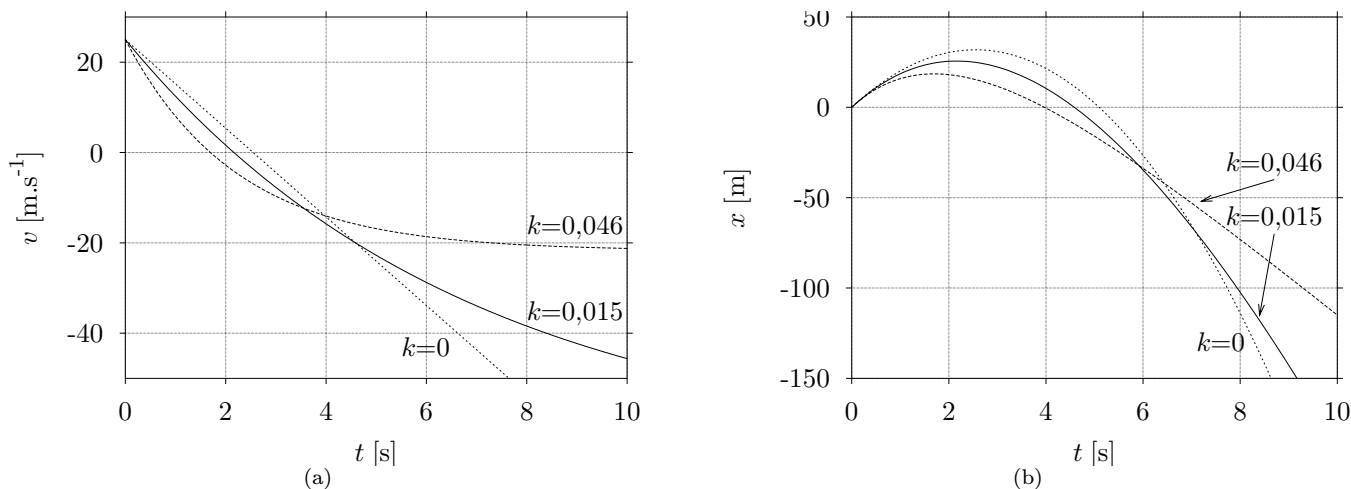
### Příklad 1.12

Studujme svislý vrh v odporujícím prostředí v homogenním tíhovém poli. Předpokládejme, že síla odporu prostředí je úměrná rychlosti  $R = -mgkv$ , kde  $k$  je kladná konstanta a faktor  $mg$  byl zaveden explicitně pro zjednodušení výpočtu.

*Řešení:*

Položíme-li osu  $x$  vertikálně vzhůru, je pohybová rovnice

$$m\ddot{x} = -mg - mgkv,$$



Obr. 1.12: K příkladu 1.12

takže funkce  $F(v)$  má tvar

$$F(v) = -mg(1 + kv).$$

Aplikace vzorce (1.3.4), přičemž klademe  $t_0 = 0$ , nám dává po jednoduchém výpočtu

$$v = -\frac{1}{k} + \left(\frac{1}{k} + v_0\right) e^{-kgt}.$$

Pro  $t \rightarrow \infty$  dostaneme tzv. mezní rychlost

$$v_{\text{lim}} = \lim_{t \rightarrow \infty} v = -\frac{1}{k},$$

což je nejvyšší rychlost, které částice při volném pádu v odporujícím prostředí dosáhne. Předpokládáme-li, že síla odporu prostředí je velmi malá, tj.  $k \rightarrow 0$ , můžeme výraz  $e^{-kgt}$  rozvinout v řadu a omezit se na její první členy, což nám dá pro rychlost

$$v = v_0 - gt,$$

tedy výraz, který souhlasí se známým vztahem pro rychlost částice vržené svisle vzhůru v neodporujícím prostředí. Další integrace dává

$$x = -\frac{t}{k} - \left(\frac{1}{k} + v_0\right) \frac{1}{kg} e^{-kgt} + C.$$

Z podmínky  $x = 0$  pro  $t = 0$  plyne

$$C = \left(\frac{1}{k} + v_0\right) \frac{1}{kg},$$

takže konečně

$$x = -\frac{t}{k} + \frac{1}{kg} \left(\frac{1}{k} + v_0\right) (1 - e^{-kgt}).$$

Při  $k \rightarrow 0$  opět dostáváme vztah pro svislý vrh v neodporujícím prostředí

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2 + \dots$$

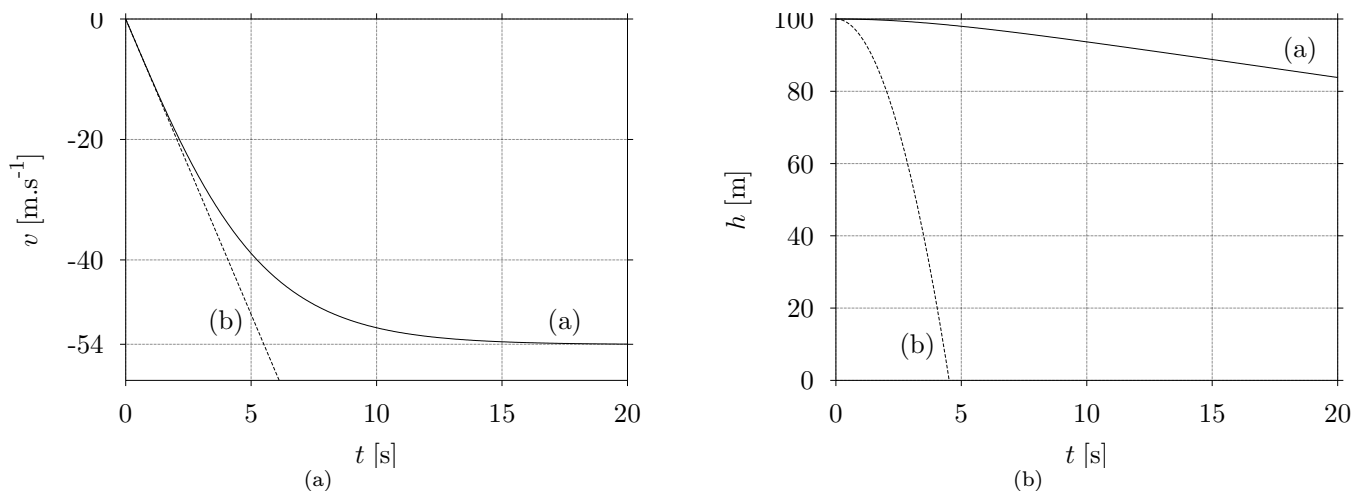
Závislosti rychlosti a výšky svislého vrhu pro počáteční rychlost  $v_0 = 25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  a dvě různé hodnoty  $k = 0,015 \text{ s}^{-1}$ ,  $k = 0,046 \text{ s}^{-1}$  jsou na obr. 1.12(a) a (b). Pro srovnání je vždy nakreslen průběh těchto závislostí pro svislý vrh v neodporujícím prostředí ( $k = 0$ ).

### Příklad 1.13

Sledujme pohyb odvážlivce, který vyskočí z letadla a padá pod vlivem gravitace (tzv. „skydiver“), aniž by použil padák.

*Řešení:*

Uvedený druh sportu skutečně existuje, i když u nás se velké popularitě netěší. Z hlediska našeho výkladu není zajímavá skutečnost, že člověk skákající z letadla má díky setrvačnosti také konstantní složku rychlosti ve vodorovném



Obr. 1.13: K příkladu 1.13

směru. Uvažujme pouze zjednodušený případ volného pádu z velké výšky ve svislém směru ( $v_{(t=0)} = 0$ ). Orientujeme-li souřadnicovou osu  $x$  vzhůru, pak pro celkovou sílu platí

$$F = m \ddot{x} = -mg + cv^2$$

Máme tedy pohybovou rovnici

$$F = m \frac{d\dot{x}}{dt} = m \frac{dv}{dt} = -mg + cv^2,$$

Označíme-li pro jednoduchost

$$v_m = \sqrt{\frac{mg}{c}}$$

postupně vychází

$$\int_0^v \frac{dv}{g - \frac{c}{m}v^2} = - \int_0^t dt$$

$$\int_0^v \frac{dv}{v_m^2 - v^2} = - \frac{c}{m} \int_0^t dt$$

$$\frac{1}{2v_m} \int_0^v \frac{dv}{v_m - v} + \frac{1}{2v_m} \int_0^v \frac{dv}{v_m + v} = - \frac{g}{v_m^2} \int_0^t dt$$

$$\frac{1}{2v_m} \ln \left( \frac{v_m + v}{v_m - v} \right) = - \frac{g}{v_m^2} t.$$

Vyjádříme-li z poslední rovnice  $v$ , dostáváme

$$v = -v_m \frac{1 - \exp(-2gt/v_m)}{1 + \exp(-2gt/v_m)} = -v_m \operatorname{tgh} \left( \frac{gt}{v_m} \right)$$

Není obtížné ukázat, že pro  $t \rightarrow \infty$  je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} \left( \frac{gt}{v_m} \right) = 1 \quad \text{a} \quad v \rightarrow -v_m.$$

Numerické řešení diferenciální rovnice pro kaskadéra o hmotnosti 70 kg a  $c = 0,235$  znázorňuje křivka (i) na obr. 1.13a); hodnota  $v_m \approx 54 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Vidíme, že v okamžiku  $t \approx 20 \text{ s}$  je již rychlost přibližně rovna mezní hodnotě  $v_m$  a kaskadér se dále pohybuje téměř rovnoměrným přímočarým pohybem. Pro srovnání je vykreslena závislost rychlosti volného pádu bez započtení odporu prostředí — křivka (ii).

Další integrací pak nalezneme závislost výšky na čase. Označíme-li počáteční výšku  $h_0$ , můžeme psát (viz např. [13])

$$\int_{h_0}^h dx = -v_m \int_0^t \operatorname{tgh} \left( \frac{gt}{v_m} \right) dt$$

$$h = h_0 - \frac{v_m^2}{g} \ln \left[ \operatorname{ch} \left( \frac{gt}{v_m} \right) \right]$$

Není obtížné se přesvědčit, že pro malé hodnoty  $t$ , kdy funkce „cosh“ a „ln“ nahradíme jejich Taylorovým rozvojem a omezíme se vždy jen na první dva členy, odvozený vztah přechází na známý tvar

$$h = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

popisující volný pád v neodporujícím prostředí. Numerickému řešení pro  $h_0 = 100$  m odpovídá křivka (i) na obr. 1.13b), křivka (ii) odpovídá výše uvedené závislosti pro volný pád v neodporujícím prostředí.

Je vidět, že při úlohách tohoto typu není třeba si pamatovat vzorce (1.3.4) resp. (1.3.5), neboť se zpravidla dá dospět k cíli poměrně jednoduchou přímou integrací pohybové rovnice.

#### Příklad 1.14

Nechť na částici o hmotnosti  $m$  nacházející se v klidu začne působit síla  $F = F_0 \sin(\omega t)$  ve směru osy  $x$ . Zjistěte závislost rychlosti  $v = v(t)$  a polohy  $x = x(t)$  na čase.

*Řešení:*

Počáteční podmínky úlohy jsou  $x_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$ . Integrací pohybové rovnice

$$m\ddot{x} = F_0 \sin(\omega t)$$

obdržíme

$$v = \dot{x} = -\frac{F_0}{\omega m} \cos(\omega t) + C_1.$$

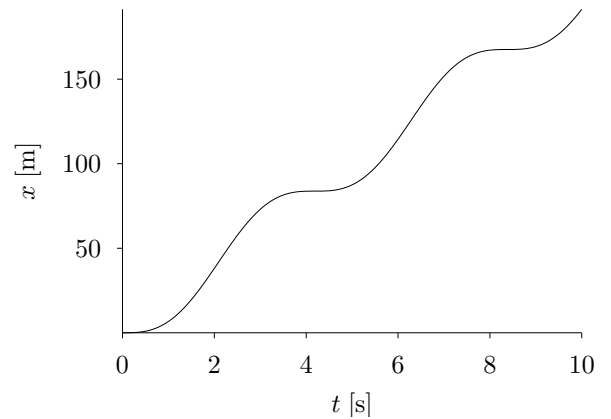
Integrační konstantu  $C_1$  určíme z podmínky  $v_{t=0} = 0$

$$C_1 = \frac{F_0}{\omega m}.$$

Další integrací pak získáváme

$$x = \frac{F_0 t}{\omega m} - \frac{F_0}{\omega^2 m} \sin(\omega t) + C,$$

kde ovšem nyní integrační konstanta  $C = 0$ . Grafické řešení pro  $m = 1$  kg,  $F_0 = 30$  N a  $\omega = 1,5$  s<sup>-1</sup> je na obr. 1.14.



Obr. 1.14: K příkladu 1.13

#### Příklad 1.15

Částice je vržena pod úhlem  $\alpha$  k horizontu počáteční rychlostí  $v_0$ . Uvažujeme-li odporovou sílu  $\mathbf{R} = -mk\mathbf{v}$ , najděte trajektorii částice.

*Řešení:*

Úlohu budeme řešit pro počáteční podmínky  $x(t=0) = y(t=0) = 0$ ,  $v_x(t=0) = v_0 \cos \alpha$ ,  $v_y(t=0) = v_0 \sin \alpha$ . Orientujeme-li osu  $x$  vodorovně a osu  $y$  svisle vzhůru, mají pohybové rovnice tvar

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -mkv_x = -mk\dot{x}, & \ddot{x} &= -k\dot{x}, \\ m\ddot{y} &= -mg - mkv_y = -(mg + mk\dot{y}), & \ddot{y} &= -(g + k\dot{y}). \end{aligned}$$

Integrací první z nich obdržíme

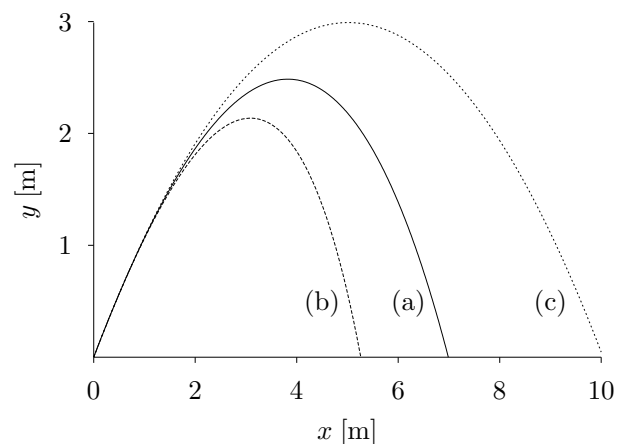
$$\ln \dot{x} = -kt + \ln v_{x0}, \quad \dot{x} = v_{0x} e^{-kt} = v_0 \cos \alpha e^{-kt}$$

a dále

$$x = -\frac{v_0 \cos \alpha}{k} e^{-kt} + C_1,$$

odkud pro dané počáteční podmínky vychází  $C_1 = v_0 \cos \alpha / k$ , tedy

$$x = \frac{v_0 \cos \alpha}{k} (1 - e^{-kt})$$



Obr. 1.15: K příkladu 1.15

Integrací druhé pohybové rovnice a aplikací počátečních podmínek postupně vychází

$$\begin{aligned} \ln(g + ky) &= -kt + \ln C_2, & C_2 &= g + kv_0 \sin \alpha, \\ \dot{y} &= \left(v_0 \sin \alpha + \frac{g}{k}\right) e^{-kt} - \frac{g}{k}, \\ y &= \frac{1}{k^2} (kv_0 \sin \alpha + g) e^{-kt} - \frac{g}{k} t + K, & K &= \frac{1}{k^2} (kv_0 \sin \alpha + g), \\ y &= \frac{1}{k^2} (kv_0 \sin \alpha + g) (1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t. \end{aligned}$$

Vyloučením času z rovnic pro  $x$  a  $y$  pak dostaneme

$$y = \frac{1}{k} \frac{g + kv_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} x + \frac{g}{k^2} \ln \left(1 - \frac{k}{v_0 \cos \alpha} x\right).$$

Pokud bude  $k$  velmi malé ( $k \rightarrow 0$ ), lze logaritmickou funkci rozvinout v Taylorovu řadu, takže potom

$$y \approx \frac{1}{k} \frac{g + kv_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} x - \frac{g}{k^2} \left(\frac{k}{v_0 \cos \alpha} x + \frac{k^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \dots\right).$$

Omezíme-li se pouze na první dva členy, získáme rovnici pro pohyb v neodporujícím prostředí (1.3.9)

$$y \approx x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Čtenář si sám může poměrně snadno ověřit, že výše uvedená funkce  $y = y(x)$  nabývá maxima pro

$$x_m = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g + kv_0 \sin \alpha}$$

a maximální výška, kterou těleso dosáhne právě pro  $x = x_m$  bude

$$h = y_{\max} = \frac{v_0 \sin \alpha}{k} \frac{g}{k^2} \ln \left(1 - \frac{kv_0 \sin \alpha}{g + kv_0 \sin \alpha}\right).$$

Grafické řešení pro  $v_0 = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $\alpha = 50^\circ$  je uvedeno na obr. 1.15: křivka (a) odpovídá hodnotě  $k = 0,4 \text{ s}^{-1}$ , křivka (b) hodnotě  $k = 0,8 \text{ s}^{-1}$ , pro srovnání je také vykreslena trajektorie odpovídající pohybu v neodporujícím prostředí, tj. pro  $k = 0$ , které odpovídá křivka (c). Výsledná trajektorie bývá často nazývána *balistickou křivkou*.

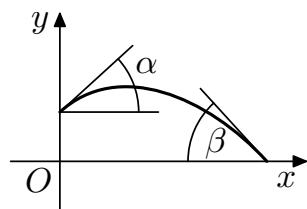
### Příklad 1.16

Při vrhu koulí je počáteční výška koule  $h$  a její počáteční rychlost má velikost  $v_0$ .

a) Jaké největší délky vrhu můžeme dosáhnout? Jaký elevační úhel  $\alpha$  musíme zvolit?

b) Jaký bude v tomto případě úhel  $\beta$  dopadu na zem? (Za úhel dopadu považujte odchylku vektoru rychlosti od vodorovného směru.)

Řešte obecně a potom pro  $h = 2 \text{ m}$ ,  $v_0 = 14 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Odpor vzduchu zanedbáváme.



Řešení:

a) Počátek vztahné soustavy zvolíme v rovině dopadu pod počátečním bodem trajektorie (viz obr. 1.16). Poloha koule závisí na čase podle vztahů

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = h + v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

Vyloučením parametru  $t$  dostaneme

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}, \quad y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha + h. \quad (1.4.1)$$

V bodě dopadu platí  $y = 0$ , tedy

$$-\frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + x \operatorname{tg} \alpha + h = 0. \quad (1.4.2)$$



Na ose  $x$  je každý bod dosažitelný ze dvou elevačních úhlů, jediného elevačního úhlu, nebo je nedosažitelný. Nejvzdálenější je bod dosažitelný z jediného elevačního úhlu. V rovnici (1.4.2) můžeme za neznámou považovat úhel  $\alpha$  a ptáme se, pro které  $x$  má tato rovnice jediné řešení. Po substituci  $u = \operatorname{tg} \alpha$  dostáváme kvadratickou rovnici

$$-\frac{gx^2}{2v_0^2} u^2 + x \operatorname{tg} \alpha + h - \frac{gx^2}{2v_0^2} = 0.$$

Aby měla jediné řešení musí platit  $D = 0$  a dále

$$\begin{aligned} v_0^4 x^2 + 2ghv_0^2 x^2 - g^2 x^4 &= 0, \\ x &= \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh}, \\ u = \operatorname{tg} \alpha &= \frac{x}{2 \frac{gx^2}{2v_0^2}} = \frac{v_0^2}{gx} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}. \end{aligned}$$

Pro dané hodnoty dostáváme  $x = 21,9 \text{ m}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = 0,91279$ ,  $\alpha = 42^\circ 23'$ .

b) Ze zákona zachování energie plyne, že rychlost tělesa v okamžiku dopadu má velikost  $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ . Vodorovná složka rychlosti tělesa má stálou velikost  $v_x = v_0 \cos \alpha$ . Z toho pro úhel dopadu  $\beta$  plyne

$$\cos \beta = \frac{v_x}{v} = \frac{v_0 \cos \alpha}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}} = \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha = \sin \alpha.$$

$\alpha$  a  $\beta$  jsou úhly doplňkové a platí  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Numericky  $\beta = 47^\circ 37'$ .

### Příklad 1.17

Prozkoumejte množinu bodů ve svislé rovině, které můžeme zasáhnout tělesem vrženým z počátku soustavy souřadnic při dané velikosti počáteční rychlosti  $v_0$ . Najděte rovnici tzv. *ochranné paraboly*.

*Řešení:*

Abychom zasáhli nějaký bod  $X[x, y]$ , musíme zvolit vhodný elevační úhel  $\alpha$ . Obecnou rovnici trajektorie získáme z (1.4.1) pro  $h = 0$ , takže

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}, \quad y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha.$$

Zavedeme-li maximální výšku svislého vrhu stejnou počáteční rychlostí  $H = v_0^2/(2g)$ , dojdeme k rovnicím

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{x^2}{4H} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha), \quad (1.4.3)$$

$$x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 4Hx \operatorname{tg} \alpha + 4Hy + x^2 = 0. \quad (1.4.4)$$

Poslední z nich lze při daném  $x$  a  $y$  chápat jako kvadratickou rovnici pro neznámou  $\operatorname{tg} \alpha$ . Pokud pro diskriminant této rovnice  $D$  platí  $D < 0$ , potom rovnice nemá řešení a zvolený bod nelze zasáhnout. Pokud  $D > 0$ , potom má rovnice dvě řešení a daný bod lze zasáhnout při dvou elevačních úhlech. Pokud konečně platí  $D = 0$ , potom zvolený bod lze zasáhnout právě jením elevačním úhlem. Všechny takové body vyhovují rovnici

$$D = 4x^2 (4H^2 - 4Hy - x^2) = 0, \quad \implies \quad x^2 = -4H(y - H),$$

leží proto na parabole s vrcholem  $[0, H]$ , parametrem  $p = -2H$ , ohniskem v počátku souřadnic a řídicí přímkou  $y = 2H$ , která se nazývá *ochrannou parabolou*.

Najděme ještě geometrické místo vrcholů uvažovaných trajektorií. Souřadnice vrcholů splňují vztahy

$$\begin{aligned} x_V^2 &= \left( \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \right)^2 = (2H \sin \alpha \cos \alpha)^2 = 4H^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha, \\ y_V &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = H \sin^2 \alpha, \\ \frac{x_V^2}{4y_V} &= H \cos^2 \alpha, \quad \frac{x_V^2}{4y_V} + y_V = H, \quad x_V^2 + 4y_V^2 = 4Hy_V, \\ H^2 &= x_V^2 + 4y_V^2 - 4Hy_V + H^2, \end{aligned}$$

odkud získáváme rovnici geometrického místa vrcholů

$$\frac{x_V^2}{H^2} + \frac{\left(y_V - \frac{H}{2}\right)^2}{\left(\frac{H}{2}\right)^2} = 1,$$

tedy rovnici elipsy se středem v bodě  $[0, H/2]$ , hlavní poloosou o délce  $H$  rovnoběžné s osou  $x$  a vedlejší poloosou o délce  $H/2$  rovnoběžné s osou  $y$ .

Vrátíme-li se k bodům, jež při dané počáteční rychlosti můžeme zasáhnout při dvou elevačních úhlech, je při volbě většího úhlu bod uvnitř elipsy vrcholů zasažen při sestupu, při menším elevačním úhlu při výstupu. Body na elipse vrcholů jsou pak při menším elevačním úhlu zasaženy vodorovně.

Hmotný bod vržený pod úhlem  $\alpha$  se dotkne ochranné paraboly v bodě o souřadnicích (vztah mezi  $x$  a  $\alpha$  je dán jediným řešením kvadratické rovnice (1.4.4))

$$x = \frac{2H}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad y = H - \frac{H}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (1.4.5)$$

a rychlost hmotného bodu má směr tečny k ochranné parabole a zároveň i k parabole šikmého vrhu.

### Příklad 1.18

Natočíme-li zahradní hadici svisle vzhůru, stříká voda do výše  $H = 9,5$  m nad ústí hadice. Zahradník bude zalévat vodorovný záhon na terase ve výšce  $h = 1,5$  m nad ústím hadice.

- Stanovte maximální vodorovnou vzdálenost místa dopadu vody na záhon od ústí hadice.
- Určete pro tento případ elevační úhel  $\alpha$  vytékající vody.
- Určete pro tento případ velikost  $v$  a směr rychlosti v místě dopadu (úhel, který svírá vektor rychlosti v tomto bodě s vodorovným směrem).

Úlohu řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty. Odpor vzduchu zanedbejte.

*Řešení:*

a) 1. *Řešení pomocí ochranné paraboly*

Počátek soustavy souřadnic zvolíme v ústí hadice. Nejbližší bod dopadu na záhon nalezneme jako průsečík ochranné paraboly s přímkou  $y = h$

$$x^2 = -4H(y - H) \quad \wedge \quad y = h \quad \wedge \quad x = d > 0, \\ d = 2\sqrt{H(H - h)} = 17,4 \text{ m.}$$

2. *Řešení pomocí diferenciálního počtu*

Vydeme z obecné rovnice trajektorie (1.4.3). Po dosazení  $y = h$ ,  $x = d$  získáváme

$$h = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{d^2}{4H} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha). \quad (1.4.6)$$

Hledanému řešení odpovídá případ, kdy pro dané  $h$  bude maximální  $d$ , tato cesta však vede ke komplikovanému výpočtu. Pokud bychom naopak znali  $d$ , pak pro tentýž bod musí být maximální  $h$ . Takto formulovanou úlohu snadno vyřešíme pomocí derivací rovnice (1.4.6)

$$\frac{dh}{d\alpha} = 0 \\ 0 = \frac{d}{\cos^2 \alpha} - \frac{d^2}{4H} 2 \operatorname{tg} \alpha \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{d}{\cos^2 \alpha} \left(1 - \frac{d}{2H} \operatorname{tg} \alpha\right).$$

Odtud  $\operatorname{tg} \alpha = 2H/d$  a po dosazení do (1.4.6) opět vychází  $d^2 = 4H(H - h)$ .

b) Z předcházející úlohy (viz rovnice (1.4.5)), popř. z předcházející části plyne

$$d = \frac{2H}{\operatorname{tg} \alpha} \implies \operatorname{tg} \alpha = \frac{2H}{d} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{h}{H}}} = 1,0897, \quad \alpha = 47,5^\circ.$$

c) Velikost rychlosti dopadu určíme ze zákona zachování energie

$$v = \sqrt{2g(H - h)} = 12,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Pro odchylku směru vektoru rychlosti od vodorovného směru dostáváme

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 \sin \alpha - gt}{v_0 \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = \\ &= \operatorname{tg} \alpha - \frac{d}{2H \cos^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha - 1}{\sin \alpha \cos \alpha} = -\operatorname{cotg} \alpha, \\ \varphi &= -(90^\circ - \alpha) = -42,5^\circ. \end{aligned}$$

### Příklad 1.19

Kometa Hale-Bopp objevená 23. 7. 1995 prolétla 1. 4. 1997 periheliem ve vzdálenosti 0,9141 AU od Slunce. Hlavní poloosa její trajektorie měří 187,8 AU. V jaké vzdálenosti od Slunce se nacházela v době objevení a jakou rychlostí se přitom pohybovala? Za jakou dobu od průletu periheliem se bude kometa nacházet ve vedlejší vrcholu trajektorie?

*Řešení:*

K řešení úlohy potřebujeme nejprve odvodit *Keplerovu rovnici* (podrobněji viz [14]). Zvolme vztahnou soustavu tak, aby počátek ležel ve středu centrálního tělesa, tedy v ohnisku trajektorie, a kladná poloosa  $x$  aby procházela pericentrem (obr. 1.17). Za dobu  $t$  od průchodu pericentrem vyplní průvodič tělesa část elipsy omezenou obloukem  $PX$  a úsečkami  $XF$  a  $FP$ . Tento obrazec můžeme získat oddělením trojúhelníka  $SFX_0$  od kruhové výseče  $SPX_0$  a zmenšením zbytku ve směru osy  $y$  v poměru  $b : a$ . Ze zákona zachování momentu hybnosti plyne

$$L_a = L_p, \quad \implies \quad v_a r_a = v_p r_p.$$

a ze zákona zachování energie také

$$\frac{1}{2} m v_a^2 - \varkappa \frac{mM}{r_a} = \frac{1}{2} m v_p^2 - \varkappa \frac{mM}{r_p},$$

kde  $M$  je hmotnost centrálního tělesa (v našem případě Slunce).

Po dosazení za  $r_a$  ze zákona zachování momentu hybnosti pak postupně dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v_p^2 \frac{r_p^2}{r_a^2} - \varkappa \frac{mM}{r_a} &= \frac{1}{2} m v_p^2 - \varkappa \frac{mM}{r_p}, \\ \varkappa M \frac{r_a - r_p}{r_p r_a} &= \frac{1}{2} v_p^2 \left( \frac{r_a^2 - r_p^2}{r_a^2} \right), \\ v_p &= \sqrt{\frac{2\varkappa M}{r_a + r_p} \frac{r_a}{r_p}}. \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Plošnou rychlost pak lze vyjádřit ve tvaru

$$v_S = \frac{1}{2} v_p r_p = \frac{a - e}{2} \sqrt{\frac{\varkappa M}{a} \frac{a + e}{a - e}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varkappa M}{a} (a^2 - e^2)} = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{\varkappa M}{a}},$$

Vydeme z Keplerovy rovnice

$$E - \varepsilon \sin E - Qt = 0, \quad (1.4.8)$$

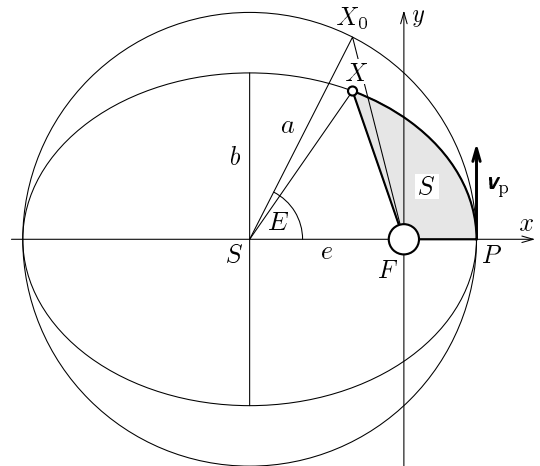
kde  $\varepsilon = e/a$  je numerická výstřednost trajektorie a  $Q = \sqrt{\varkappa M/a^3}$ .

Keplerovou rovnici je excentrická anomálie určena implicitně a pro dané  $t$  ji musíme vypočítat některou z přibližných numerických metod. Pro  $t \in (0, T)$  je výraz  $Qt$  v intervalu  $(0, 2\pi)$  a také  $E$  je v intervalu  $(0, 2\pi)$ . Známe-li  $E$ , vypočítáme souřadnice bodů trajektorie v čase  $t$  podle vztahů

$$x = a \cos E - e, \quad y = b \sin E. \quad (1.4.9)$$

Vypočteme číselnou výstřednost a délku vedlejší poloosy trajektorie

$$e = a - r_p = 186,9 \text{ AU}, \quad \varepsilon = \frac{e}{a} = 0,99513, \quad b = \sqrt{a^2 - e^2} = 18,51 \text{ AU}.$$



Obr. 1.17: K úloze 1.19

Od objevení komety do průletu periheliem uplynulo  $618 \text{ d} = 5,34 \cdot 10^7 \text{ s}$ . Tento čas a hodnoty  $a = 2,809 \cdot 10^{13} \text{ m}$ ,  $M = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$  dosadíme do Keplerovy rovnice (1.4.8) a upravíme ji na tvar

$$E - 0,99513 \sin E - 0,0041322 = 0. \quad (1.4.10)$$

Numerické řešení získané rovnice lze získat několika způsoby. Nejsnazší je použít program, který přímo numerické řešení rovnic umožňuje, např. *Maple*, *Mathematica* nebo *Matlab*. Použijeme-li volně šiřitelný program *GNU Octave* (používá příkazy shodné nebo velmi podobné Matlabu a stáhnout ho lze např. na jeho domovských stránkách <http://www.che.wisc.edu/octave/>), stačí pouze následující řádky

```
octave:1> function y=f(E)
> y=E - 0.99513*sin(E) - 0.0041322;
> endfunction
octave:2> E=fsolve("f",0)
E = 0.25897
```

Dosazením do vztahů (1.4.9) dostaneme souřadnice místa, kde se kometa nacházela v době jejího objevení  $x \approx -8,00 \cdot 10^{11} \text{ m} = -5,35 \text{ AU}$ ,  $y \approx 7,09 \cdot 10^{11} \text{ m} = 4,74 \text{ AU}$ . Z toho určíme vzdálenost komety od Slunce

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1,07 \cdot 10^{12} \text{ m} = 7,15 \text{ AU}.$$

Dosadíme-li vztah (1.4.7) do zákona zachování energie

$$\frac{1}{2} mv^2 - \varkappa \frac{mM}{r} = \frac{1}{2} mv_p^2 - \varkappa \frac{mM}{r_p},$$

dojdeme ke vztahu pro rychlost ve vzdálenosti  $r$

$$v = \sqrt{\varkappa M \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)},$$

pro dané hodnoty  $v = 16 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Odpověď na poslední otázku za jak dlouho po průchodu periheliem se bude kometa nacházet ve vedlejším vrcholu trajektorie nalezneme opět z rovnice (1.4.8), v níž položíme  $E = \pi/2$ , takže

$$t = \frac{E - \varepsilon \sin E}{Q} = \frac{\frac{\pi}{2} - 0,99513}{7,74 \cdot 10^{-11}} \approx 7,44 \cdot 10^9 \text{ s} = 236 \text{ let}.$$

### Příklad 1.20

Kometa se pohybuje kolem Slunce a má v určitém okamžiku rychlost  $565,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  vzhledem ke vztažné soustavě spojené se středem Slunce. Polohový vektor má v tomto okamžiku velikost  $0,005543 \text{ AU}$ . Určete, zda jde o kometu periodickou, či nikoli.

*Řešení:*

Řešení úlohy spočívá ve výpočtu celkové mechanické energie komety nebo její části. Pro jednoduchost budeme uvažovat část jádra komety o hmotnosti  $1 \text{ kg}$ . Jednak neznáme celkovou hmotnost komety, ale není to vůbec potřeba. Jak víme, při pohybu v gravitačním poli nehraje hmotnost žádnou roli, jestliže nemusíme počítat s odporem prostředí. Ten je však v meziplanetárním prostoru zcela zanedbatelný. Znamená to, že celá kometa se bude pohybovat po stejné trajektorii (oběžné dráze), jako její libovolná část. Máme určit mechanickou energii  $1 \text{ kg}$  hmoty komety. Jak ale z mechanické energie zjistit, po jaké oběžné trajektorii se kometa pohybuje? Pokud by kometa nebyla periodická, pohybovala by se po parabolické nebo hyperbolické oběžné dráze. Měla by tedy vzdálit do nekonečna, tj. dosáhnout bodu  $r \rightarrow \infty$ . Celková mechanická energie komety bude součtem její potenciální a kinetické energie

$$E = E_p + E_k = -\varkappa \frac{mM}{r} + \frac{1}{2} mv^2.$$

Pro  $r \rightarrow \infty$  bude celková mechanická energie dána pouze energií kinetickou, tj.

$$E = E_p + E_k = -\varkappa \frac{mM}{\infty} + \frac{1}{2} mv_\infty^2 = \frac{1}{2} mv_\infty^2.$$

Pokud bude rychlost v nekonečnu nulová, platí  $E = 0$ , (těleso se v „nekonečnu zastaví“), bude se pohybovat po parabolické dráze, bude-li od nuly různá a tedy  $E > 0$ , bude se pohybovat po hyperbolické dráze. Třetí případ  $E < 0$  pak odpovídá uzavřené oběžné dráze (elipse nebo kružnici), kdy záporná energie odpovídající přitahování v gravitačním

poli (potenciální energie odpovídající působení přitažlivých sil jsou ve fyzice záporné) převažuje nad kinetickou energií. Částice, v našem případě kometa, je vázána v gravitačním poli a nemůže z něj uniknout. Velmi snadno můžeme dokázat, že u kruhového pohybu celková mechanická energie skutečně záporná je. Rychlost  $v_k$  kruhového pohybu odvodíme z rovnosti gravitační a dostředivé síly; jednoduchými úpravami obdržíme známý vztah

$$v_k = \sqrt{\frac{\varkappa M}{r}}.$$

Celková energie pak vychází

$$E = E_p + E_k = -\varkappa \frac{mM}{r} + \frac{1}{2} m v_k^2 = -\varkappa \frac{mM}{r} + \frac{1}{2} m \left( \sqrt{\frac{\varkappa M}{r}} \right)^2 = -\varkappa \frac{mM}{2r} < 0.$$

Vraťme se však k naší kometě. Celková kinetická energie části komety o hmotnosti  $m = 1 \text{ kg}$  v gravitačním poli Slunce o hmotnosti  $M = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$  bude

$$E = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{1 \cdot 2 \cdot 10^{30}}{8,3145 \cdot 10^{-11}} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (565,8 \cdot 10^3)^2 \text{ J} = -1,60979 \cdot 10^{11} \text{ J} + 1,60065 \cdot 10^{11} \text{ J} = -9,14 \cdot 10^8 \text{ J} < 0,$$

kde jsme převedli astronomické jednotky AU na metry ( $1 \text{ AU} = 150 \cdot 10^6 \text{ km} = 150 \cdot 10^9 \text{ m}$ ,  $0,005543 \text{ AU} = 8,3145 \cdot 10^8$  (pro pořádek připomeňme, že  $1 \text{ AU}$  je právě rovna vzdálenosti středů Země a Slunce). Celková mechanická energie komety je záporná, odkud vyplývá, že se pohybuje po eliptické trajektorii. Protože rozdíl mezi potenciální se projevuje až na třetím desetinném místě, dá se předpokládat, že oběžná trajektorie bude protáhlá a bude se blížit parabolické. Z tohoto důvodu také víme, že se nejedná o kružnici, u níž je podle celkové mechanické energie rovna polovině potenciální a až na znaménko i kinetické energii komety.

### Příklad 1.21

Družice má být navedena na eliptickou oběžnou dráhu s apogeeem  $r_a = R_z + 40\,000 \text{ km}$  a perigeem  $r_p = R_z + 500 \text{ km}$ . Nejprve byla navedena na eliptickou oběžnou dráhu s perigeem  $r_{p1} = R_z + 200 \text{ km}$  a apogeeem  $r_a = R_z + 500 \text{ km}$ . K úspěšnému provedení manévru bylo nutné v apogeu zvětšit rychlost družice o hodnotu  $\Delta v$ . Vypočtete velikost  $\Delta v$ .

*Řešení:*

Při řešení této úlohy lze s výhodou použít dva zákony zachování: zákon zachování momentu hybnosti (a z něj vyplývající 2. Keplerův zákon konstantní plošné rychlosti) a zákon zachování energie. Podobně jako velikost momentu síly vzhledem k nějakému bodu je definována součinem velikosti síly a jejího ramena (kolmé vzdálenosti daného bodu od přímky určené působící silou), je velikost momentu hybnosti  $L$  vzhledem k bodu 0 (tělesa konajícího pouze posuvný pohyb) dána součinem velikosti hybnosti  $v$  a jejího ramena  $r_d$  (kolmice spuštěná z bodu 0 na vektorovou přímku hybnosti). Vektor  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  leží v rovině kolmé na vektory  $\mathbf{p}$  a  $\mathbf{r}$  a a jeho směr určíme podle *pravidla pravé ruky*: položíme-li pravou ruku tak, aby zahnuté prsty směřovaly od vektoru hybnosti (nebo rychlosti) k vektoru  $\mathbf{r}$  nejkratším směrem, tj. aby úhel sevřený těmito vektory byl menší než  $180^\circ$ , ukáže vztyčený palec směr vektoru momentu hybnosti. Nepůsobí-li na těleso žádný moment síly (a nebo je součet působících momentů síly roven 0), pak zůstává jeho moment hybnosti konstantní. Právě taková situace nastává při pohybu v radiálním gravitačním poli. Zvláště jednoduché je vyjádření zákona v bodech, kde je  $\mathbf{p}$  (resp.  $\mathbf{v}$ ) kolmé na  $\mathbf{r}$ , tj. v perigeu a apogeu. Platí

$$L_a = L_p, \quad \implies \quad v_a r_a = v_p r_p.$$

Ze zákona zachování energie plyne

$$\frac{1}{2} m v_a^2 - \varkappa \frac{m M_z}{r_a} = \frac{1}{2} m v_p^2 - \varkappa \frac{m M_z}{r_p},$$

kde  $M_z$  je hmotnost Země. Po dosazení za  $r_a$  ze zákona zachování momentu hybnosti pak postupně dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v_p^2 \frac{r_p^2}{r_a^2} - \varkappa \frac{m M_z}{r_a} &= \frac{1}{2} m v_p^2 - \varkappa \frac{m M_z}{r_p}, \\ \varkappa M_z \frac{r_a - r_p}{r_p r_a} &= \frac{1}{2} v_p^2 \left( \frac{r_a^2 - r_p^2}{r_a^2} \right), \\ v_p &= \sqrt{\frac{2 \varkappa M_z}{r_a + r_p} \frac{r_a}{r_p}}. \end{aligned}$$

Analogické vztahy platí i pro původní eliptickou trajektorii, po níž se družice pohybovala, takže

$$v_{p1} = \sqrt{\frac{2 \varkappa M_z}{r_{a1} + r_{p1}} \frac{r_{a1}}{r_{p1}}}, \quad v_{a1} = \frac{r_{p1}}{r_{a1}} v_{p1} = \sqrt{\frac{2 \varkappa M_z}{r_{a1} + r_{p1}} \frac{r_{p1}}{r_{a1}}}.$$

Pro rozdíl rychlostí potom dostáváme

$$\Delta v = v_p - v_{a1} = \sqrt{\frac{2\kappa M_z}{r_a + r_p} \frac{r_a}{r_p}} - \sqrt{\frac{2\kappa M_z}{r_{a1} + r_{p1}} \frac{r_{p1}}{r_{a1}}} = 0,000\,0892 \sqrt{2\kappa M_z} = 2524,4318 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

pro  $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$ ,  $M_z = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ . Vidíme, že rychlost družice v apogeu naváděcí oběžné dráhy musíme zvětšit o  $\Delta v \approx 2,5 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ . Tento bod pak bude naopak perigeem nové oběžné dráhy, na kterou bylo potřeba družici navést.

### Příklad 1.22

Meteor se pohybuje ve vzdálenosti 2,2 AU od Slunce rychlostí  $12,5 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ , jejíž směr svírá se směrem průvodiče úhel  $55^\circ$ . Určete rozměry trajektorie a dobu oběhu.

*Řešení:*

Rovnici (1.4.7) lze přepsat ve tvaru

$$v_p = \sqrt{\frac{\kappa M_z}{a} \frac{a+e}{a-e}},$$

neboť  $r_a + r_p = 2a$ ,  $r_a = a + e$  a  $r_p = a - e$ . Dále platí

$$\frac{v_p^2 a}{b^2} = \frac{\kappa M_z}{a} \frac{a+e}{a-e} a \frac{1}{a^2 - e^2} = \frac{\kappa M}{r_p^2},$$

a tudíž

$$\begin{aligned} b^2 &= a \frac{v_p^2 r_p^2}{\kappa M} \\ b^2 &= a^2 - e^2 = a^2 - (a - r_p)^2 = 2ar_p - r_p^2. \end{aligned}$$

Kelikož pro plošnou rychlost navíc platí

$$v_S = \frac{1}{2} v_p r_p = \frac{a-e}{2} \sqrt{\frac{\kappa M_z}{a} \frac{a+e}{a-e}} = \sqrt{\frac{\kappa M_z}{a} (a^2 - e^2)} = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{\kappa M_z}{a}},$$

dospějeme ke vztahům

$$\begin{aligned} a &= \frac{r_p^2}{2r_p - \frac{v_p^2 r_p^2}{\kappa M}} = \frac{\kappa M}{2 \left( \frac{\kappa M}{r_p} - \frac{v_p^2}{2} \right)}, \\ b^2 &= a \frac{v_p^2 r_p^2}{\kappa M} = \frac{4v_S^2}{2 \left( \frac{\kappa M}{r_p} - \frac{v_p^2}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Označíme-li mechanickou energii vztaženou na jednotku hmotnosti (tj. měrnou mechanickou energii)  $D = v_p^2/2 - \kappa M/r_p$ , můžeme získané výsledky přepsat do tvaru

$$a = \frac{\kappa M}{-2D}, \quad b = v_S \sqrt{\frac{2}{-D}}.$$

Dosazením číselných hodnot dostáváme

$$\begin{aligned} v_S &= \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{1}{2} vr \sin \alpha = 1,685 \cdot 10^{15} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \\ D &= \frac{v_p^2}{2} - \frac{\kappa M}{r_p} = \frac{v^2}{2} - \frac{\kappa M}{r} = -3,25 \cdot 10^8 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}, \\ a &= 2,04 \cdot 10^{11} \text{ m} = 1,364 \text{ AU}, \\ b &= 1,32 \cdot 10^{11} \text{ m} = 0,883 \text{ AU}. \end{aligned}$$

Z třetího Keplerova zákona pak vychází doba oběhu  $T = 5,03 \cdot 10^7 \text{ s} = 582 \text{ d}$ . Konečně excentricita (výstřednost) a numerická excentricita mají hodnoty

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{a^2 - b^2} = 1,56 \cdot 10^{11} \text{ m} = 1,04 \text{ AU}, \\ \varepsilon &= \frac{e}{a} = 0,762. \end{aligned}$$

## Literatura ke kapitole 1

- [1] Anderle P.: *Základy nebeské mechaniky*. Academia, Praha 1971.
- [2] Brdička M., Hladík A.: *Teoretická mechanika*. Academia, Praha 1987.
- [3] Budínský B.: *Analytická a diferenciální geometrie*. Matematika pro vysoké školy technické, sešit VII SNTL, Praha 1983.
- [4] Budínský B., Kepr B.: *Základy diferenciální geometrie s technickými aplikacemi*. SNTL, Praha 1970.
- [5] Chorlton F.: *Textbook of Dynamics*. D. van Nostrand Company Ltd., London 1963.
- [6] Goldstein H.: *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1980.
- [7] Gregory R.D.: *Classical mechanics*. Cambridge University Press 2006.
- [8] Greiner W.: *Classical mechanics. Point particles and relativity*. Springer-Verlag, New York 2004.
- [9] Horský J., Novotný J., Štefaník M.: *Mechanika ve fyzice*. Academia, Praha 2001.
- [10] Kvasnica J., Havránek A., Lukáč P. a kol.: *Mechanika*. Academia, Praha 2004.
- [11] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.: *Механика*. Наука, Москва 1988.
- [12] Polák Z., Šedivý P.: *Vrhy*. Knihovnička FO č.46, MAFY, Hradec Králové 2002. Ke stažení na adrese <http://fo.cuni.cz/texty/vrhy.pdf>.
- [13] Rektorys K. a kol.: *Přehled užité matematiky I, II*. SNTL, Praha 1988.
- [14] Šedivý P., Volf I.: *Pohyb tělesa po eliptické trajektorii vradiálním gravitačním poli*. Knihovnička FO č. 43, MAFY, Hradec Králové 2000. Ke stažení na adrese <http://fo.cuni.cz/texty/druzice.pdf>.
- [15] Trkal V.: *Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa*. ČSAV, Praha 1956.
- [16] Vybíral B., Zdeborová L.: *Pohyb těles s vlivem odporových sil*. Knihovnička FO č. 55, MAFY, Hradec Králové 2002. Ke stažení na adrese <http://fo.cuni.cz/texty/odpory.pdf>.

## Kapitola 2

### Soustavy částic

Věnujme se nyní studiu soustav složených z většího počtu částic, jejichž pohyb v prostoru není omezen žádnými podmínkami. Mohou-li se naopak částice nacházet pouze v určité oblasti (na křivce, ploše, apod.), hovoříme o soustavách podrobených vazbám a budeme se jimi zabývat v následující kapitole.

Mějme soustavu složenou z  $N$  částic, na každou z nichž působí jednak síla, která má svůj původ mimo tuto soustavu, tzv. *vnější (externí) síla*, jednak síla, vznikající v důsledku vzájemných interakcí částic v soustavě, tzv. *vnitřní (interní) síla*. Označme  $m_\varrho$  hmotnost  $\varrho$ -té částice soustavy,  $\mathbf{F}_\varrho^{(e)}$  vnější sílu působící na  $\varrho$ -tou částici a  $\mathbf{F}_\varrho^{(i)}$  vnitřní sílu působící na  $\varrho$ -tou částici. Pohybové rovnice

$$m_\varrho \ddot{\mathbf{r}}_\varrho = \mathbf{F}_\varrho^{(e)} + \mathbf{F}_\varrho^{(i)}, \quad \varrho = 1, 2, \dots, N \quad (2.0.1)$$

nám plně popisují pohyb všech částic soustavy, zprostředkují nám tzv. detailní popis pohybu soustavy částic.

#### 2.1 Hmotný střed soustavy částic

Velmi často se spokojujeme s tzv. globálním popisem pohybu soustavy částic. Sečteme-li všechny rovnice (2.0.1), dostáváme

$$\sum_{\varrho=1}^N m_\varrho \ddot{\mathbf{r}}_\varrho = \sum_{\varrho=1}^N \mathbf{F}_\varrho^{(e)} + \sum_{\varrho=1}^N \mathbf{F}_\varrho^{(i)}.$$

Síly interní jsou však silami vzájemného působení a proto podle principu akce a reakce se jejich výslednice pro celou soustavu rovná nule,

$$\sum_{\varrho=1}^N \mathbf{F}_\varrho^{(i)} = \mathbf{0}.$$

Označíme-li  $\mathbf{R}$  výslednici vnějších sil pro celou soustavu, získáváme

$$\sum_{\varrho=1}^N m_\varrho \ddot{\mathbf{r}}_\varrho = \sum_{\varrho=1}^N \mathbf{F}_\varrho^{(e)} = \mathbf{R}. \quad (2.1.1)$$

Zavedeme-li celkovou hmotnost soustavy částic

$$\mathcal{M} = \sum_{\varrho=1}^N m_\varrho, \quad (2.1.2)$$

můžeme (2.1.1) upravit na tvar

$$\mathbf{R} = \mathcal{M} \left( \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{\varrho=1}^N m_\varrho \ddot{\mathbf{r}}_\varrho \right) = \mathcal{M} \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{\varrho=1}^N m_\varrho \mathbf{r}_\varrho \right) = \mathcal{M} \frac{d^2 \mathbf{r}_T}{dt^2}, \quad (2.1.3)$$

kde

$$\mathbf{r}_T = \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{\varrho=1}^N m_\varrho \mathbf{r}_\varrho = \frac{\sum_{\varrho=1}^N m_\varrho \mathbf{r}_\varrho}{\sum_{\varrho=1}^N m_\varrho} \quad (2.1.4)$$



je polohový vektor *hmotného středu* soustavy částic.<sup>1</sup> Při globálním popisu pohybu soustavy částic se tedy vlastně omezujeme na popis pohybu hypotetické částice s hmotností rovnou celkové hmotnosti soustavy nacházející se v hmotném středu soustavy a pohybující se pod vlivem působení výslednice vnějších sil. Úloha najít hmotný střed, popř. těžiště soustavy hmotných bodů patří proto k základům klasické mechaniky.

V rovnicích (2.1.1), (2.1.3), (2.1.4) jsme mlčky předpokládali, že se jedná o diskrétní soustavu částic. Vypĺňují-li hmotné body *spojitě* nějakou oblast, tj. vytvářejí-li těleso, je nutné nahradit sčítání integrací. Rovnici (2.1.4) potom odpovídá vztah pro polohový vektor hmotného středu soustavy

$$\mathbf{r}_T = \frac{1}{\mathcal{M}} \int \mathbf{r} dm = \frac{\int \mathbf{r} dm}{\int dm}$$

Při konkrétních výpočtech se však používají vztahy pro souřadnice hmotného středu

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{1}{\mathcal{M}} \int x dm = \frac{\int \int \int x \varrho(x,y,z) dx dy dz}{\int \int \int \varrho(x,y,z) dx dy dz}, \\ y_T &= \frac{1}{\mathcal{M}} \int y dm = \frac{\int \int \int y \varrho(x,y,z) dx dy dz}{\int \int \int \varrho(x,y,z) dx dy dz}, \\ z_T &= \frac{1}{\mathcal{M}} \int z dm = \frac{\int \int \int z \varrho(x,y,z) dx dy dz}{\int \int \int \varrho(x,y,z) dx dy dz}, \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

kde  $\varrho(x,y,z)$  je hustota soustavy. U *homogenních* těles je  $\varrho = \mathcal{M}/V$  konstantní ( $\mathcal{M}$  a  $V$  značí celkovou hmotnost a celkový objem tělesa) a vztahy (2.1.6) pak mají tvar

$$x_T = \frac{1}{V} \int_{(V)} x dV, \quad y_T = \frac{1}{V} \int_{(V)} y dV, \quad z_T = \frac{1}{V} \int_{(V)} z dV. \quad (2.1.6)$$

Je pochopitelné, že pokud jeden nebo dokonce dva rozměry tělesa jsou zanedbatelné oproti ostatním, můžeme integrovat pouze přes danou plochu nebo podél dané křivky a hustota  $\varrho$  pak má význam plošné nebo délkové hustoty. V rovnicích potom (2.1.6) namísto objemu vystupuje obsah, popř. délka tělesa.

Nejrůznější vzorce pro výpočet hmotného středu např. v polárních souřadnicích bývají souhrnně uvedeny v učebnicích integrálního počtu a přehledech vysokoškolské matematiky, např. [1, 8].

## 2.2 Pohybové rovnice soustavy částic

Popis pohybu soustavy pomocí rovnice (2.1.3) je ovšem velmi hrubý. Určitého zpřesnění můžeme dosáhnout využijeme-li d'Alembertova principu, který nám umožní najít další rovnici pro globální popis pohybu soustavy. Vzhledem k tomu, že studium podmínek rovnováhy silových soustav bylo v 18. století již velmi systematicky rozpracováno, položil si d'Alembert otázku, zda není možno převést úlohy dynamické na úlohy o rovnováze silových soustav. Zapišeme-li pohybovou rovnici pro jednu částici ve tvaru

$$\mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \boldsymbol{\psi} = 0,$$

vidíme, že ji můžeme pokládat za podmínku rovnováhy dvou sil, jestliže označíme

$$\boldsymbol{\psi} = -m\ddot{\mathbf{r}}$$

a tzv. *d'Alembertovu* neboli *setrvačnou sílu*. Pak můžeme pro jednu částici vyslovit *d'Alembertův princip*: Při pohybu částice je v rovnováze působící síla  $\mathbf{F}$  se silou setrvačnou  $\boldsymbol{\psi} = -m\ddot{\mathbf{r}}$ . Podotkneme, že v souvislosti se zavedením setrvačných sil rozdělujeme pak často síly na *síly pravé*, mající svůj původ ve vzájemné interakci hmotných objektů, a na *síly nepravé*, jimiž jsou např. právě setrvačné síly.

<sup>1</sup>Výraz (2.1.4) pro polohu hmotného středu má stejný tvar jako výraz pro polohu těžiště, které je definováno jako působíště výsledné tíhové síly působící na soustavu hmotných bodů v homogenním tíhovém poli. Nenachází-li se soustava v tíhovém poli, nemá proto pojem těžiště soustavy smysl, zatímco její hmotný střed lze nalézt vždy.

Jestliže aplikujeme d'Alembertův princip na soustavu částic, můžeme využít výsledků známých ze statiky, že totiž nutnou podmínkou rovnováhy soustavy sil je anulování jejich výslednice a anulování výsledného momentu sil. První podmínka nás vede ke vztahu

$$\sum_{\varrho=1}^N \mathbf{F}_{\varrho}^{(e)} + \sum_{\varrho=1}^N \mathbf{F}_{\varrho}^{(i)} + \sum_{\varrho=1}^N \boldsymbol{\psi}_{\varrho} = \sum_{\varrho=1}^N \mathbf{F}_{\varrho}^{(e)} + \sum_{\varrho=1}^N \mathbf{F}_{\varrho}^{(i)} - \sum_{\varrho=1}^N m_{\varrho} \ddot{\mathbf{r}}_{\varrho} = 0,$$

kde  $\boldsymbol{\psi}_{\varrho}$  je setrvačná síla  $\varrho$ -té částice. Výslednice vnitřních sil soustavy je opět rovna nule, takže je poslední vztah ekvivalentní s rovnicí (2.1.1). Podmínka anulování výsledného momentu sil může být zapsána ve tvaru

$$\sum_{\varrho=1}^N (\mathbf{r}_{\varrho} \times \mathbf{F}_{\varrho}^{(e)}) + \sum_{\varrho=1}^N (\mathbf{r}_{\varrho} \times \mathbf{F}_{\varrho}^{(i)}) + \sum_{\varrho=1}^N (\mathbf{r}_{\varrho} \times \boldsymbol{\psi}_{\varrho}) = 0.$$

Vzhledem k principu akce a reakce je opět výsledný moment vnitřních sil roven nule,  $\sum_{\varrho=1}^N (\mathbf{r}_{\varrho} \times \mathbf{F}_{\varrho}^{(i)}) = 0$ ; označíme-li  $\mathbf{M}$  výsledný moment vnějších sil,

$$\mathbf{M} = \sum_{\varrho=1}^N (\mathbf{r}_{\varrho} \times \mathbf{F}_{\varrho}^{(e)}),$$

dostáváme druhou rovnici, která zpřesňuje náš globální popis pohybu soustavy částic :

$$\sum_{\varrho=1}^N (\mathbf{r}_{\varrho} \times m_{\varrho} \ddot{\mathbf{r}}_{\varrho}) = \mathbf{M}. \quad (2.2.1)$$

Skutečnost, že v rovnicích (2.1.1) a (2.2.1) nevystupují vnitřní síly, sama svědčí o tom, že jimi nemůže být úplně popsán pohyb všech částic soustavy, nýbrž jen pohyb soustavy jako celku. V mnoha případech však i takový způsob popisu pohybu soustavy postačuje.

Jestliže jsou jednotlivé částice soustavy vzájemně vázány tak, že jednotlivé částice zachovávají při pohybu své vzájemné vzdálenosti, je problém ekvivalentní problému rovnováhy soustavy sil působících na tuhé těleso. Pro takovou soustavu sil jsou podmínka anulování výslednice a podmínka anulování výsledného momentu sil podmínkami nutnými a postačujícími pro rovnováhu soustavy. Pohyb soustavy částic takto vázaných, (resp. pohyb tuhého tělesa) je tedy plně popsán rovnicemi (2.1.1) a (2.2.1).

### 2.3 Hybnost, moment hybnosti a energie soustavy částic

*Hybnost soustavy částic* definujeme vztahem

$$\mathbf{P} = \sum_{\varrho=1}^N \mathbf{p}_{\varrho} = \sum_{\varrho=1}^N m_{\varrho} \mathbf{v}_{\varrho}.$$

Zapíšeme-li rovnici (2.1.1) pomocí hybnosti soustavy  $\mathbf{P}$ , dostáváme

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{R}, \quad (2.3.1)$$

což je *věta o hybnosti soustavy částic*.

*Moment hybnosti soustavy částic* je definován jako součet momentů hybnosti jednotlivých částic soustavy

$$\mathbf{L} = \sum_{\varrho=1}^N (\mathbf{r}_{\varrho} \times \mathbf{p}_{\varrho}) = \sum_{\varrho=1}^N (\mathbf{r}_{\varrho} \times m_{\varrho} \mathbf{v}_{\varrho}).$$

Protože

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{\varrho=1}^N \mathbf{r}_{\varrho} \times m_{\varrho} \mathbf{v}_{\varrho} \right) = \sum_{\varrho=1}^N (\mathbf{r}_{\varrho} \times m_{\varrho} \ddot{\mathbf{r}}_{\varrho}),$$

můžeme (2.2.1) zapsat ve tvaru

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \quad (2.3.2)$$

což je *věta o momentu hybnosti soustavy* (též *věta o kinetickém momentu*).

*Kinetická energie soustavy částic* představuje součet kinetických energií jednotlivých částic soustavy

$$T = \sum_{\rho=1}^N T_{\rho} = \sum_{\rho=1}^N \frac{1}{2} m_{\rho} v_{\rho}^2 = \sum_{\rho=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m_{\rho} \dot{x}_{\rho,i}^2. \quad (2.3.3)$$

Analogicky s (1.2.20) lze psát :

$$dT = \Delta A^{(e)} + \Delta A^{(i)} = \sum_{\rho=1}^N \mathbf{F}_{\rho}^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_{\rho} + \sum_{\rho=1}^N \mathbf{F}_{\rho}^{(i)} \cdot d\mathbf{r}_{\rho}. \quad (2.3.4)$$

Na rozdíl od celkové hybnosti a celkového momentu hybnosti závisí změna kinetické energie soustavy částic i práci vnitřních sil, protože poslední člen se neanuluje.

Předpokládejme, že vnější síly jsou potenciálové, tj. pro každou částici lze psát analogicky s (1.2.30)

$$\mathbf{F}_{\rho}^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_{\rho} = -dU_{\rho}^{(e)} + \frac{\partial U_{\rho}^{(e)}}{\partial t} dt.$$

Pak můžeme zavést *potenciální energii soustavy ve vnějších polích*  $U^{(e)} = \sum_{\rho=1}^N U_{\rho}^{(e)}$ , takže pak

$$\sum_{\rho=1}^N \mathbf{F}_{\rho}^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_{\rho} = -dU^{(e)} + \frac{\partial U^{(e)}}{\partial t} dt. \quad (2.3.5)$$

Jsou-li vnitřní síly soustavy takového druhu, že vnitřní síla působící na určitou částici soustavy se dá vyjádřit ve tvaru součtu sil, které by na tuto částici působily od každé částice soustavy zvlášť a je-li každá z těchto sil potenciálová, dá se najít i *celková potenciální energie vnitřních sil*  $U^{(i)}$ , která je pak součtem funkcí, z nichž každá závisí jen na souřadnicích dvou částic,

$$U^{(i)} = \sum_{\sigma=1}^N \sum_{\rho>\sigma}^N U_{\rho\sigma}^{(i)}(\mathbf{r}_{\rho}, \mathbf{r}_{\sigma}).$$

Pak platí

$$\sum_{\rho=1}^N \mathbf{F}_{\rho}^{(i)} \cdot d\mathbf{r}_{\rho} = -dU^{(i)}. \quad (2.3.6)$$

*Celková potenciální energie soustavy* je součtem potenciální energie ve vnějších polích a vnitřní potenciální energie

$$U = U^{(e)} + U^{(i)}.$$

*Úplná mechanická energie soustavy částic*  $E$  se definuje jako součet kinetické a potenciální energie soustavy  $E = T + U$ . Z (2.3.4) lze psát

$$dT = -dU^{(e)} + \frac{\partial U^{(e)}}{\partial t} dt - dU^{(i)} = -dU + \frac{\partial U^{(e)}}{\partial t} dt$$

nebo

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U^{(e)}}{\partial t}. \quad (2.3.7)$$

Nezávisí-li potenciální energie ve vnějších silových polích na čase, platí zákon zachování mechanické energie

$$E = \text{konst.}$$

Protože gyroskopické síly nekonají práci, platí tento výsledek i při působení gyroskopických sil vedle potenciálových. Působí-li kromě potenciálových a gyroskopických sil ještě i síly disipativní (mohou být vnější i vnitřní), lze *zákon změny celkové mechanické energie* zobecnit analogicky s (1.2.30) na tvar

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U^{(e)}}{\partial t} + \sum_{\rho=1}^N \mathbf{F}_{D\rho} \cdot \mathbf{v}_{\rho}, \quad (2.3.8)$$

kde  $\mathbf{F}_{D\rho}$  představuje součet vnitřních a vnějších disipativních sil působících na  $\rho$ -tou částici soustavy.

V mechanice soustavy částic, je významný pojem *izolované soustavy*, čímž rozumíme soustavu částic, na kterou nepůsobí vnější síly a která se pohybuje jen pod vlivem sil vzájemného působení mezi částicemi soustavy v prvním Newtonově pohybovém zákoně a s tímto pojmem úzce souvisel model homogenního a izotropního prostoru. Pro izolovanou soustavu částic platí z (2.3.1) a (2.3.2)

$$\mathbf{P} = \text{konst.} \quad (2.3.9)$$

$$\mathbf{L} = \text{konst.}, \quad (2.3.10)$$

tj. *zákon zachování hybnosti a momentu hybnosti*. S využitím definice hmotného středu se dá (2.3.9) přepsat na ekvivalentní vztah pro rychlost hmotného středu  $\mathbf{v}_T = \dot{\mathbf{r}}_T$

$$\mathbf{v}_T = \text{konst.}, \quad (2.3.11)$$

takže vidíme, že inerciální vztažná soustava může být spojena s hmotným středem izolované soustavy částic. Homogenost a izotropnost zůstává pro takovou soustavu zachována a dá se ukázat úzká souvislost těchto symetrií prostoru se zákony zachování (2.3.9) a (2.3.10). Navíc lze přidat požadavek homogenosti času, tj. nezávislosti průběhu jevů v daném bodě prostoru na počátku odčítání času, který souvisí invariantností celkové mechanické energie při záměně  $t$  na  $-t$ . Z (2.3.8) je dále vidět, že pro izolovanou soustavu částic, pro niž jsou vnitřní disipativní síly rovny nule, platí zákon zachování celkové mechanické energie

$$E = T + U = \text{konst.} \quad (2.3.12)$$

Tři vektorové rovnice (2.3.9), (2.3.10), (2.3.11) a skalární rovnice (2.3.12) představují tzv. *deset klasických integrálů pohybu*. Souvislostem zákonů zachování se symetriemi prostoru homogeností času se budeme věnovat také v části 5.6.

Výše uvedené zákony zachování mají velký význam pro řešení celé řady úloh. Dokladem toho jsou např. úlohy o rázech těles. U nepružného rázu využíváme pouze zákon zachování hybnosti, u rázu pružného navíc i zákon zachování energie. Při studiu pohybů těles v poli centrálních sil se opíráme o zákony zachování energie a momentu hybnosti.

Zejména v astrofyzice se při studiu vesmírných systémů skládajících se z obrovského počtu částic (hvězd, galaxií) často využívá tzv. *virialového teoremu*. Odlišuje se od předcházejících vět a zákonů svou *statistickou povahou*, neboť se netýká přímo mechanických veličin, ale jejich časových středních hodnot.

Uvažujme izolovaný systém hmotných bodů, na něž působí pouze vnitřní síly  $\mathbf{F}_\rho^{(i)}$  a zkoumejme úplnou časovou derivaci výrazu

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_\rho \mathbf{r}_\rho \cdot \mathbf{p}_\rho \right) = \sum_\rho \dot{\mathbf{r}}_\rho \cdot \mathbf{p}_\rho + \sum_\rho \mathbf{r}_\rho \cdot \dot{\mathbf{p}}_\rho, \quad (2.3.13)$$

kde sumace probíhá přes všechny částice systému. První člen na pravé straně (2.3.13) lze podle (2.3.3) upravit na tvar

$$\sum_\rho \dot{\mathbf{r}}_\rho \cdot \mathbf{p}_\rho = \sum_\rho m_\rho \dot{\mathbf{r}}_\rho \cdot \dot{\mathbf{r}}_\rho = \sum_\rho m_\rho v_\rho^2 = 2T,$$

zatímco druhý je podle (1.2.15) roven  $\sum_\rho \mathbf{r}_\rho \cdot \mathbf{F}_\rho^{(i)}$ . Střední časovou hodnotu výrazu na levé straně rovnice (2.3.13) za časový interval  $\tau$  získáme standardně integrací

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \left( \sum_\rho \mathbf{r}_\rho \cdot \mathbf{p}_\rho \right) dt = \overline{\frac{d}{dt} \left( \sum_\rho \mathbf{r}_\rho \cdot \mathbf{p}_\rho \right)} = \overline{2T} + \overline{\sum_\rho \mathbf{r}_\rho \cdot \mathbf{F}_\rho^{(i)}},$$

kde vodorovnou čarou nad výrazem značíme časovou střední hodnotu. Platí proto

$$\overline{2T} + \overline{\sum_\rho \mathbf{r}_\rho \cdot \mathbf{F}_\rho^{(i)}} = \frac{1}{\tau} \left[ \sum_\rho \mathbf{r}_\rho \cdot \mathbf{p}_\rho \right]_0^\tau. \quad (2.3.14)$$

Zůstávají-li souřadnice a hybnosti částic konečné, lze dobu  $\tau$  zvolit dostatečně dlouhou tak, že hodnota výrazu na pravé straně (2.3.14) bude libovolně malá. Dostáváme tak zmíněný *virialový teorem*

$$\overline{T} = -\frac{1}{2} \overline{\sum_\rho \mathbf{r}_\rho \cdot \mathbf{F}_\rho^{(i)}}. \quad (2.3.15)$$

*Clausiusovým viriálem*<sup>2</sup> soustavy rozumíme střední časovou hodnotu  $\overline{\sum_\rho \mathbf{r}_\rho \cdot \mathbf{F}_\rho^{(i)}}$ , vztaženou k dostatečně dlouhému časovému intervalu. Podle virialového teoremu (2.3.15) je střední hodnota kinetické energie soustavy částic v daném

<sup>2</sup>Virialový teorem pro klasické soustavy částic dokázal Clausius v r. 1870. Význam teoremu podtrhuje skutečnost, že si zachovává svou platnost i v kvantové mechanice.

časovém intervalu rovna polovině viriálu. Jsou-li vnitřní síly potenciálové, tj. je-li možné zavést potenciální energii  $U(\mathbf{r}_\rho)$ , lze (2.3.15) zapsat ve tvaru

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \overline{\sum_{\rho} \mathbf{r}_{\rho} \cdot \nabla U(\mathbf{r}_{\rho})}.$$

Jestliže je potenciální energie navíc Eulerovsky homogenní funkcí  $n$ -tého řádu,<sup>3</sup> bude splněna rovnice

$$n\bar{U} = 2\bar{T}. \quad (2.3.16)$$

Jak jsme viděli v části 1.3.3, velmi významnou roli hrají ve fyzice tzv. centrální síly, konkrétně gravitační síla a síla Coulombovského elektrostatického pole. V obou případech pro potenciální energii  $U$  částic v poli těchto sil můžeme psát

$$U \sim \frac{1}{r}.$$

$U$  je tedy Eulerovsky homogenní funkcí  $-1$ -ího řádu (jak lze snadno ověřit) a podle rovnice (2.3.16) proto platí (pro  $n = -1$ )

$$\bar{T} = -\frac{1}{2}\bar{U}. \quad (2.3.17)$$

Z rovnice (2.3.17) přímo vyplývá, že soustava částic, které na sebe působí Coulombovskými nebo gravitačními silami, se nemůže nacházet ve stavu statické rovnováhy, tj. ve rovnovážném stavu s kinetickou energií  $T = 0$ . Tento závěr platí jak pro elektrony v atomech, tak pro atomy ve hvězdách nebo hvězdy v galaxiích. Hmota, která nás obklopuje se proto nutně musí skládat z částic, jež jsou v pohybu, a pouze v relativním smyslu můžeme nějakou její část považovat vůči nám za nepohyblivou. Jak již bylo řečeno, viriálový teorém se využívá především v astrofyzice při studiu dynamiky hvězd a galaxií. Uvedme proto alespoň jeden příklad z této oblasti.

## 2.4 Vztažná soustava hmotného středu.

Při řešení praktických úloh bývá někdy vhodné pracovat v souřadnicové soustavě spojené s hmotným středem soustavy. *Vztažnou soustavou hmotného středu* soustavy hmotných bodů nazýváme vztažnou soustavu, v níž je celková hybnost soustavy nulová. Transformaci momentu hybnosti a kinetické energie do této soustavy nám umožňují *Königovy vzorce*.

Označme čárkovaně veličiny v soustavě hmotného středu a nečárkovaně odpovídající veličiny v obecně jiné (např. laboratorní) inerciální vztažné soustavě. Pro polohový vektor  $\rho$ -té částice vedený z hmotného středu  $\mathbf{r}'_{\rho}$  platí

$$\mathbf{r}_{\rho} = \mathbf{r}_T + \mathbf{r}'_{\rho}, \quad \dot{\mathbf{r}}_{\rho} = \mathbf{v}_{\rho} = \dot{\mathbf{r}}_T + \dot{\mathbf{r}}'_{\rho} = \mathbf{v}_T + \mathbf{v}'_{\rho}, \quad \sum_{\rho=1}^N m_{\rho} \mathbf{r}'_{\rho} = 0.$$

Rychlost soustavy hmotného středu vzhledem k uvažované laboratorní soustavě získáme  $\mathbf{v}_T$  z uvedené podmínky

$$\mathbf{P}' = \sum_{\rho=1}^N m_{\rho} \mathbf{v}'_{\rho} = \sum_{\rho=1}^N m_{\rho} (\mathbf{v}_{\rho} - \mathbf{v}_T) = \mathbf{P} - \mathcal{M} \mathbf{v}_T = \mathbf{0},$$

kde celková hmotnost soustavy  $\mathcal{M}$  je definována vztahem (2.1.2). Vychází

$$\mathbf{v}_T = \frac{\mathbf{P}}{\mathcal{M}}. \quad (2.4.1)$$

Podobně lze ověřit, že pro celkový moment hybnosti soustavy dostáváme

$$\mathbf{L} = \sum_{\rho=1}^N [(\mathbf{r}_T + \mathbf{r}'_{\rho}) \times m_{\rho} (\mathbf{v}_T + \mathbf{v}'_{\rho})] = (\mathbf{r}_T \times \mathcal{M} \mathbf{v}_T) + \sum_{\rho=1}^N (\mathbf{r}'_{\rho} \times m_{\rho} \mathbf{v}'_{\rho}), \quad (2.4.2)$$

kde první člen na pravé straně je tzv. *orbitální moment hybnosti*, druhý potom tzv. *spinový moment hybnosti* (moment hybnosti vzhledem k hmotnému středu). Vztah (2.4.2) představuje *první Königův vzorec*.

<sup>3</sup>Připomeňme, že když je funkce  $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$  Eulerovsky homogenní  $n$ -tého řádu, platí

$$\begin{aligned} f(sx_1, sx_2, \dots, sx_k) &= s^n f(x_1, x_2, \dots, x_k), \\ \sum_{i=1}^k x_i \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial x_i} &= n f(x_1, x_2, \dots, x_k); \end{aligned}$$

viz např. [8], s. 370.

Kinetickou energii soustavy částic můžeme analogicky přepsat ve tvaru

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\varrho=1}^N m_{\varrho} (\mathbf{v}_T + \mathbf{v}'_{\varrho}) (\mathbf{v}_T + \mathbf{v}'_{\varrho}) = \frac{1}{2} M v_T^2 + \frac{1}{2} \sum_{\varrho=1}^N m_{\varrho} v'_{\varrho}{}^2, \quad (2.4.3)$$

kde první člen na pravé straně odpovídá kinetické energii částice o hmotnosti  $M$  = pohybující se rychlostí hmotného středu  $\mathbf{v}_T$ , druhý člen představuje kinetickou energii pohybu soustavy v soustavě hmotného středu. Rovnice (2.4.3) bývá nazývána *druhým Königovým vzorcem*.

## 2.5 Pohyb soustav s proměnnou hmotností

V praxi se často setkáváme se soustavami, v nichž není hmotnost částic konstantní, nýbrž se s časem mění. Jedná se o pohyby torpéd, letadel poháněných reaktivními motory a zejména raket používaných ke kosmickým letům. Také v přírodě lze soustavy s proměnnou hmotností nalézt. Např. hmotnost meteoritu se při průchodu atmosférou zmenšuje, neboť část (někdy i celý meteorit) se odpaří nebo shoří; ledové kry se mohou zmenšovat nebo zvětšovat v důsledku tání nebo namrzání. Svou hmotnost mohou měnit také kapky deště nebo ledové kroupy. V této kapitole se budeme zabývat výhradně posuvným pohybem soustav s proměnnou hmotností.

Předpokládejme, že máme soustavu částic, která vznikne tak, že od částice o hmotnosti  $m$  se za dobu  $dt$  oddělí částice o hmotnosti  $dm_p$ , přičemž hmotnost původní částice se tím změní o  $dm$ . Oddělení částice vzniká působením vnitřních sil a platí věta o zachování hybnosti, celková hmotnost soustavy se samozřejmě nezmění, takže platí  $dm + dm_p = 0$ . Nechť v okamžiku  $t$  před oddělením byla celková hybnost  $\mathbf{P}(t) = m\mathbf{v}$ , v okamžiku  $t + dt$  po oddělení částice je hybnost soustavy

$$\mathbf{P}(t + dt) = (m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + \mathbf{u} dm_p = (m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) - \mathbf{u} dm,$$

kde  $\mathbf{v}$  je rychlost před oddělením částice,  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$  po oddělení a  $\mathbf{u}$  rychlost malé oddělené částice. Změna hybnosti při zanedbání malých členů 2. řádu je potom

$$d\mathbf{P} = m d\mathbf{v} - (\mathbf{u} - \mathbf{v}) dm.$$

Dosazením do (2.3.1) dostáváme *Meščerského pohybovou rovnici*

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{R} + \frac{dm}{dt} \mathbf{v}_r, \quad (2.5.1)$$

kde  $\mathbf{v}_r = \mathbf{u} - \mathbf{v}$  je relativní rychlost oddělující se částice vůči částici původní. Meščerského rovnice bývá někdy uváděna v pozměněném tvaru

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{R} + \mathbf{F}_R, \quad (2.5.2)$$

kde

$$\mathbf{F}_R = \frac{dm}{dt} \mathbf{v}_r$$

nazýváme *reaktivní silou*. Protože v uvažovaném případě se hmotnost  $m$  zmenšuje, tj.  $dm/dt < 0$ , má reaktivní síla opačný směr než rychlost  $\mathbf{v}_r$ .

Touto rovnicí se řídí např. pohyb raket,  $\mathbf{v}_r$  v takovém případě představuje výtokovou rychlost plynů z trysky rakety. Uvažujeme-li idealizovaný případ pohybu rakety v bezsilovém poli  $\mathbf{R} = 0$  a s konstantní výtokovou rychlostí plynů  $\mathbf{v}_r = \text{konst.}$ , jež má opačný směr než rychlost rakety  $\mathbf{v}$ , můžeme najít výslednou rychlost, kterou raketa získá při konečné změně své hmotnosti z  $m_0$  na  $m$  (tzv. *Ciolkovského úloha*). Integrací (2.5.1) podle času  $t$  s podmínkou  $\mathbf{R} = 0$  dostaneme

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_r \ln \frac{m_0}{m},$$

což je tzv. *Ciolkovského vzorec*. Výsledná rychlost rakety v uvažovaném případě závisí jen na výtokové rychlosti a celkové změně hmotnosti rakety; nezávisí na tom, jakým způsobem se hmotnost rakety mění. Podíl

$$C = \frac{m_0}{m}$$

se nazývá *Ciolkovského číslo*. Označíme-li  $m_p$  hmotnost vyhořelého paliva, můžeme také psát

$$C = \frac{m_0}{m} = 1 + \frac{m_p}{m}.$$

Je zřejmé, že čím větší bude Ciolkovského číslo rakety, tím větší rychlosti může raketa dosáhnout. Pokud bychom použili jednostupňovou raketu, nesla postupně stále více neužitečné hmoty v podobě vyhořelých zásobníků paliva. Je proto výhodnější používat vícestupňové rakety, kdy se po spotřebování paliva každého stupně zbytek (zásobník a motor) odpojí. Teoreticky by bylo nejvýhodnější používat co největšího počtu stupňů, avšak jejich oddělování od zbytku rakety bývá spojeno s určitými technickými obtížemi. Proto se v praxi používají téměř výhradně rakety třístupňové.

## 2.6 Řešené příklady

### Příklad 2.1

Vypočítejte střední kinetickou a potenciální energii částice o hmotnosti  $m$  zavěšené na pružině s tuhostí  $k$ . Tření ani odpor vzduchu neuvažujte.

*Řešení:*

Částice bude vykonávat netlumené harmonické kmity popsané rovnicí

$$y = y_m \sin(\omega t + \varphi_0),$$

kde  $y$  značí výchylku z rovnovážné polohy  $y = 0$ ,  $y_m$  amplitudu,  $\omega = \sqrt{k/m}$  úhlová frekvence a  $\varphi_0$  počáteční fáze kmitů. Okamžitá hodnota potenciální energie je dána vztahem

$$U = \frac{1}{2} ky^2 = \frac{1}{2} ky_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0),$$

střední hodnotu během periody  $T$  získáme integrací

$$\bar{U} = \frac{1}{T} \int_0^T U dt = \frac{ky_m^2}{2T} \int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi_0) dt = \frac{1}{4} ky_m^2.$$

Okamžitou kinetickou energii částice lze zapsat ve tvaru

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{m\omega^2}{2} y_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0),$$

pro její střední hodnotu pak vychází

$$\bar{T} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\omega^2 y_m^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi_0) dt = \frac{1}{4} m\omega^2 y_m^2 = \frac{1}{4} ky_m^2.$$

Vidíme, že platí

$$\bar{T} = \bar{U}$$

v souladu s rovnicí (2.3.16), neboť funkce  $U = ky^2/2$  je Eulerovsky homogenní 2. řádu.

### Příklad 2.2

Ověřte platnost viriálního teorému (2.3.17) pro soustavu Země-Měsíc v soustavě spojené se středem Země. Pohyb Měsíce okolo Země považujte za kruhový.

*Řešení:*

Označíme-li hmotnosti Země a Měsíce  $M_Z$ ,  $M_M$  a jejich vzálenost  $r$ , potom pro potenciální energii soustavy dostáváme

$$U = -\varkappa \frac{M_Z M_M}{r}.$$

Pomocí známého vztahu pro velikost kruhové rychlosti  $v_k = \sqrt{\varkappa M_M / r}$  vypočteme kinetickou energii

$$T = \frac{1}{2} M_M v_k^2 = \frac{1}{2} \frac{\varkappa M_Z M_M}{r}.$$

Protože při kruhovém pohybu se jak kinetická tak potenciální energie nemění, budou střední časové hodnoty obou energií v libovolném časovém intervalu rovny vypočteným okamžitým hodnotám, pro něž je rovnice (2.3.17) zřejmě splněna.

### Příklad 2.3

Pomocí viriálového teorému (2.3.17) dokažte, že vyzařuje-li soustava gravitačně vázaných částic energii, její teplota se zvyšuje.

*Řešení:*

Tento model pravděpodobně v určitém hrubém přiblížení vystihuje děje, které ve vesmíru skutečně probíhají. Pro celkovou energii systému, které se zachovává, podle (2.3.17) dostáváme

$$E = \bar{E} = \bar{E}_k + \bar{U} = -\bar{E}_k.$$

Je-li soustava částic v tepelné rovnováze při teplotě  $T$ , potom podle ekvipartičního teorému známého z klasické termodynamiky na každý stupeň volnosti pohybu částice připadá střední kinetická energie  $kT/2$ . Soustava  $N$  částic, z nichž každá má 3 stupně volnosti má proto střední kinetickou energii (modelem může být ideální plyn)

$$\overline{E_k} = \frac{3}{2} NkT.$$

Pro celkovou energii  $E$  a termodynamickou teplotu  $T$  vychází

$$E = -\frac{3}{2} NkT, \quad T = \frac{2}{3Nk} E.$$

Každá změna celkové energie  $\Delta E$  má za následek změnu rovnovážné teploty

$$\Delta T = -\frac{2}{3Nk} \Delta E.$$

Je-li  $\Delta E < 0$ , bude  $\Delta T > 0$ . Podle viriálového teorému dále při se zmenšení celkové energie  $E$  zvětší střední kinetická energie  $\overline{E_k}$  a velikost střední potenciální energie  $|\overline{U}|$ , jinými slovy, že částice se k sobě přibližují a rozměry soustavy se zmenšují. Soustava se tedy zahřívá a smršťuje a může samozřejmě dosáhnout teploty, při které již mohou uvnitř probíhat jaderné reakce. Tento příklad tak ilustruje jednu z možných hypotéz o vzniku hvězd z mezihvězdné hmoty.

#### Příklad 2.4

Hmotnost malé jednostupňové rakety s Ciolkovského číslem  $C$  a výtokovou rychlostí plynů  $v_r$  se mění podle vztahu

$$m = m_0 e^{-\lambda t}, \quad \lambda = \text{konst.}, \quad \lambda > 0.$$

Raketa se pohybuje svisle vzhůru v homogenním tíhovém poli Země, odpor prostředí je zanedbatelný. Vypočítejte jaké maximální rychlosti raketa dosáhne a do jaké výšky vystoupí do okamžiku, kdy vyhoří veškeré palivo.

*Řešení:*

Označme dobu, za kterou vyhoří palivo  $t_k$ , hmotnost rakety v tomto okamžiku  $m_k$ . Platí

$$m_k = m_0 e^{-\lambda t_k}, \quad t_k = -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{m_k}{m_0} = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{m_0}{m_k} = -\frac{1}{\lambda} \ln C.$$

Protože dále

$$\frac{dm}{dt} = -\lambda m_0 e^{-\lambda t} = -\lambda m,$$

po dosazení do (2.5.2) získáváme diferenciální rovnici (kladný směr souřadnicové osy volíme proti směru tíhové síly)

$$m \frac{dv}{dt} = -mg + \lambda m v_r.$$

Integrací pak postupně vychází

$$dv = \int_0^t (\lambda v_r - g) dt, \quad v = (\lambda v_r - g) t.$$

Maximální rychlosti  $v_{\max}$  dosáhne raketa v čase  $t = t_k$ , takže

$$v_{\max} = (\lambda v_r - g) t_k = \left( v_r - \frac{g}{\lambda} \right) \ln C.$$

Vidíme, že raketa se pohybuje rovnoměrně zrychleně se zrychlením  $a = \lambda v_r - g$ . Výšku  $h$ , do které za dobu  $t_k$  vystoupí zjistíme buď integrací nebo dosazením do známého vzorce

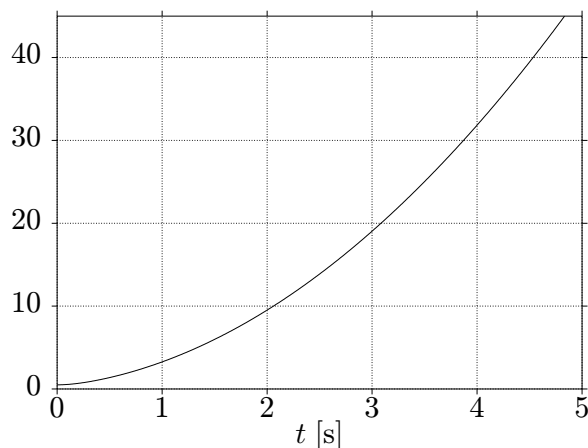
$$h = \frac{1}{2} a t_k^2 = \frac{1}{2\lambda^2} (\lambda v_r - g) \ln^2 C.$$

Od okamžiku  $t_k$  bude raketa konat svislý vrh v homogenním tíhovém poli.

#### Příklad 2.5

Řetěz smotaný do klubka leží na okraji vodorovného stolu tak, že jeden z konců délky  $l$  visí přes okraj. Najděte rychlost, s jakou bude tento konec padat k zemi, jestliže na počátku byl v klidu. Tření zanedbejte, předpokládejte, že řetěz je homogenní. (Tuto úlohu jako první v roce 1857 vyřešil anglický matematik Arthur Cayley).





Obr. 2.1: K příkladu 2.5

*Řešení:*

Označme  $x$  délku části řetězu, jež visí přes okraj stolu. Hmotnost  $m$  této části lze výjádřit pomocí lineární hustoty  $\gamma = m/x$ , která je pro homogenní těleso konstantní. Protože se pohybuje pouze část řetězu visící přes okraj, má pohybová rovnice (2.3.1) tvar

$$\frac{d(mv)}{dt} = \frac{d(\gamma x \dot{x})}{dt} = \gamma g x$$

neboli

$$x\ddot{x} + \dot{x}^2 = gx. \quad (2.6.1)$$

Obdrželi jsme tak nelineární diferenciální rovnici 2. řádu. Rychlost  $\dot{x}$ , s jakou se pohybuje konec řetězu získáme asi nejnázáze substitucí  $u = \dot{x}^2$ , z níž také plyne

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \frac{du}{dx}.$$

Po dosazení do (2.6.1) dospějeme k nehomogenní lineární diferenciální rovnici 1. řádu

$$\frac{du}{dx} + \frac{2}{x} u = 2g,$$

jejímž řešením pro počáteční podmínky  $x(t=0) = l$ ,  $u(t=0) = 0$  je

$$u = \frac{2}{3} \frac{x^3 - l^3}{x^2} g, \quad \text{neboli} \quad \dot{x} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{x^3 - l^3}{x^2} g}.$$

Numerické řešení rovnice (2.6.1) pro  $l = 0,5$  m je na obr. 2.1.

## Literatura ke kapitole 2

- [1] Bartsch H.J.: *Matematické vzorce*. SNTL, Praha 1984.
- [2] Brdička M., Hladík A.: *Teoretická mechanika*. Academia, Praha 1987.
- [3] Goldstein H.: *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1980.
- [4] Gregory R.D.: *Classical mechanics*. Cambridge University Press 2006.
- [5] Greiner W.: *Classical mechanics. System of particles and Hamiltonoan mechanics*. Springer-Verlag, New York 2003.
- [6] Horský J., Novotný J., Štefaník M.: *Mechanika ve fyzice*. Academia, Praha 2001.
- [7] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.: *Механика*. Наука, Москва 1988.
- [8] Rektorys K. a kol.: *Přehled užité matematiky I, II*. SNTL, Praha 1988.
- [9] Šíma V., Podolský J.: „Buquoyova úloha“, *PMFA* **51**(3) (2006), 177–186.
- [10] Trkal V.: *Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa*. ČSAV, Praha 1956.
- [11] Ungermann Z., Volf I.: *Hmotný střed tělesa*. SPN, Praha 1983.
- [12] Vybíral B.: *Základy teoretické mechaniky (1. a 2. díl)*. Gaudeamus, Pedagogická fakulta Hradec Králové 1992.

# Kapitola 3

## Soustavy podrobené vazbám

### 3.1 Vazby

Dosud jsme ve svých úvahách mlčky předpokládali, že pohyb částice není v prostoru nijak omezen, že se tedy částice ve svém pohybu může dostat do libovolného místa v prostoru. Stejně tak jsme v případě soustavy částic nekladli požadavky na vzájemné polohy částic soustavy, ani jsme nezaváděli jakákoliv geometrická omezení jejich pohybu. Představíme-li si však např. pohyb matematického kyvadla, je zřejmé, že částice reprezentující kyvadlo se může dostat jen do takových bodů prostoru, pro něž platí

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - l^2 = 0,$$

kde  $x_1, x_2, x_3$  jsou souřadnice částice v soustavě souřadnic s počátkem v bodě upevnění kyvadla,  $l$  délka závěsu.

Rovnice tohoto typu, které nějakým způsobem vyjadřují omezení pohybu částice nebo soustav částic, nazýváme *rovniciemi vazby*.

Předpokládejme, že máme soustavu  $N$  částic, jejichž polohy budeme určovat polohovými vektory  $\mathbf{r}_\alpha$  o složkách  $x_{\alpha,1}, x_{\alpha,2}, x_{\alpha,3}$ . Rovnice vazby pak obecně budou mít tvar

$$\Phi_\alpha(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, \dots, x_{N,1}, x_{N,2}, x_{N,3}, \dot{x}_{1,1}, \dot{x}_{1,2}, \dot{x}_{1,3}, \dots, \dot{x}_{N,1}, \dot{x}_{N,2}, \dot{x}_{N,3}, t) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s, \quad (3.1.1a)$$

nebo

$$\Phi_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, t) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s. \quad (3.1.1b)$$

Omezení pohybu částic nemusí však vždy být formulováno ve tvaru rovnic. Představíme-li si částici, která se může pohybovat jen uvnitř koule o poloměru  $l$ , je zřejmé, že omezení jejího pohybu je nyní možno popsat nerovností

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < l^2.$$

Vazby vyjádřené nerovnostmi zpravidla nazýváme *vazbami jednostrannými (neudržujícími)*, vazby popsané rovnicemi pak nazýváme *vazbami dvoustrannými (udržujícími)*. V dalších úvahách se budeme vesměs zabývat vazbami dvoustrannými, které se dají vyjádřit rovnicemi typu (3.1.1a) nebo (3.1.1b).

V teoretické mechanice je obvyklé vazby klasifikovat následujícím způsobem: Jestliže rovnice vazby neobsahuje explicitně čas, nazývá se vazba *stacionární* (též *skleronomní*; např. výše uvedená rovnice pro matematické kyvadlo). Závisí-li rovnice vazby explicitně na čase, nazývá se vazba *nestacionární* (*rheonomní*) (např. matematické kyvadlo s proměnnou délkou závěsu).

Neobsahuje-li vazba (rovnice vazby) explicitně rychlosti, tj. dá-li se zapsat ve tvaru

$$\Phi_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s \quad (3.1.2)$$

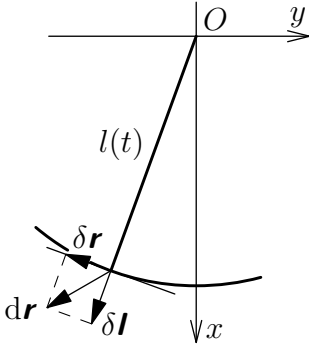
nazývá se vazba *geometrickou (konečnou)*. V opačném případě mluvíme o vazbě *diferenciální* neboli *kinematické*. Z kinematických vazeb jsou důležité také, v nichž se rychlosti vyskytují lineárně, tj. které lze zapsat ve tvaru

$$\sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 a_{\alpha\alpha,i} \dot{x}_{\alpha,i} + b_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s, \quad (3.1.3)$$

kde  $a_{\alpha\alpha,i}$ ,  $b_\alpha$  jsou koeficienty závislé jen na souřadnicích a čase. Rovnice (3.1.3) je v podstatě diferenciální rovnicí pro rychlosti  $\dot{x}_{\alpha,i}$ . Jestliže se dá tato rovnice integrovat (čímž vlastně vyloučíme rychlosti a vazba se stává geometrickou), nazýváme vazbu diferenciální integrovatelnou. Podotkneme, že každá geometrická vazba typu (3.1.2) je diferenciální integrovatelná, jak se můžeme snadno přesvědčit derivováním (3.1.2) podle času.

Soustava podrobená diferenciálním integrovatelným vazbám se nazývá *soustavou holonomní*. Pojem holonomnosti se často přenáší i na vazby a tak místo o diferenciálních integrovatelných vazbách mluvíme většinou o *holonomních vazbách*. Všechny ostatní vazby a soustavy nazýváme neholonomními. V dalších úvahách se budeme zabývat jen vazbami holonomními a zpravidla takovými, které se dají zapsat ve tvaru (3.1.2).

### 3.2 Princip virtuální práce



Obr. 3.1: K pojmu virtuálního posunutí

Studujeme nyní velmi malou změnu polohy částic soustavy, kterou dovolují vazby, nebo, jak říkáme, která je slučitelná s vazbami (kineticky přípustná). Posunutí každé částice si můžeme myslet rozloženo jednak na posunutí způsobené proměnlivostí vazeb, tj. závislostí vazeb na čase, jednak na posunutí při neproměnných vazbách (jako by vazby v okamžiku posunutí „ztuhly“), tzv. *virtuální posunutí*.<sup>1</sup> Takové rozložení skutečného posunutí si můžeme ukázat na příkladě kyvadla s proměnnou délkou závěsu  $l = l(t)$  (3.1) : Virtuální posunutí  $\delta \mathbf{r}$  leží na tečně ke kružnici, po níž by se částice pohybovala, kdyby v okamžiku  $t$  vazba „ztuhla“, tj. délka závěsu se neměnila. Posunutí způsobené vazbou,  $\delta \mathbf{l}$ , má směr závěsu a složením obou těchto posunutí dostáváme posunutí skutečné,  $d\mathbf{r}$ .

Máme-li soustavu  $N$  částic podrobenou jedné holonomní vazbě typu (3.1.2), tj. vazbě popsané rovnicí

$$\Phi(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, \dots, x_{N,1}, x_{N,2}, x_{N,3}, t) = 0 \quad (3.2.1)$$

nebo, zkráceně

$$\Phi(x_{\rho,i}, t) = 0,$$

můžeme snadno najít podmínku, kterou musejí splňovat virtuální posunutí jednotlivých částic  $\delta x_{\rho,i}$ . Protože podle definice virtuálního posunutí musí pro  $\rho$ -tou částici v poloze  $x_{\rho,i} + \delta x_{\rho,i}$  opět platit vazebná podmínka (3.2.1) při  $t = \text{konst.}$ , bude pro všechny částice platit

$$\Phi(x_{\rho,i} + \delta x_{\rho,i}, t) = 0.$$

Rozvineme-li tuto funkci v Taylorovu řadu v okolí bodu  $x_{\rho,i}$ , přičemž se v rozvoji omezíme jen na první členy, dostaneme

$$\Phi(x_{\rho,i} + \delta x_{\rho,i}, t) = \Phi(x_{\rho,i}, t) + \sum_{\rho=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_{\rho,i}} \delta x_{\rho,i} = 0.$$

První člen napravo je roven nule podle (3.2.1) a proto musí pro virtuální posunutí platit

$$\sum_{\rho=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_{\rho,i}} \delta x_{\rho,i} = 0.$$

Analogický výsledek můžeme odvodit pro případ  $s$  vazeb. Platí pak

$$\sum_{\rho=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial x_{\rho,i}} \delta x_{\rho,i} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s. \quad (3.2.2)$$

Podobným způsobem můžeme najít i podmínku, kterou musí splňovat skutečná posunutí  $dx_{\rho,i}$ . Protože u skutečných posunutí je třeba uvažovat i změnu vazby v čase, musí zřejmě platit

$$\Phi_{\alpha}(x_{\rho,i} + dx_{\rho,i}, t + dt) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s,$$

takže podmínku pro skutečná posunutí  $dx_{\rho,i}$  dostáváme ve tvaru

$$\sum_{\rho=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial x_{\rho,i}} dx_{\rho,i} + \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial t} dt = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s. \quad (3.2.3)$$

Každá vazba (tj. omezení pohybu) souvisí s existencí určitých sil, které pohyb soustavy ovlivňují. Síly, jimiž tělesa uskutečňující vazby působí na částice soustavy, nazýváme *reakcemi vazeb*; na  $\rho$ -tou částici působí výsledná reakce vazby  $\mathbf{N}_{\rho}$ .<sup>2</sup>

Velmi důležitými vazbami jsou také vazby, pro které síly reakcí vazby při virtuálním posunutí nekonají práci, tj. pro které platí

$$\sum_{\rho=1}^N \mathbf{N}_{\rho} \delta \mathbf{r}_{\rho} = \sum_{\rho=1}^N \sum_{i=1}^3 N_{\rho,i} \delta x_{\rho,i} = 0, \quad (3.2.4)$$

<sup>1</sup>Slovo virtuální může mít v češtině několik významů, např. „domnělý, zdánlivý, myšlený, libovolně (nekonečně) malý“ apod. (Rejman, L.: *Slovník cizích slov*. SPN, Praha 1966). Zde se však přidružujeme uvedené definice a virtuálním posunutím rozumíme každou velmi malou změnu polohy částice dovolenou existujícími vazbami.

<sup>2</sup>V některých učebnicích bývají proto síly rozděleny do dvou skupin: na tzv. síly vtištěné (hybné, vyvolávající pohyb soustavy) a vazbové (reakce vazeb).

kde  $N_{\rho,i}$  je označena  $i$ -tá složka reakce vazby působící na  $\rho$ -tou částici soustavy. Takové vazby nazýváme *ideálními vazbami*.

Za jeden ze základních principů mechaniky můžeme považovat , který vyslovíme takto:

*Nutnou a postačující podmínkou rovnováhy mechanické soustavy podrobené ideálním holonomním vazbám je, aby součet elementárních prací sil působících na soustavu při libovolném virtuálním posunutí byl roven nule*

$$\sum_{\rho=1}^N \mathbf{F}_{\rho} \cdot \delta \mathbf{r}_{\rho} = 0. \quad (3.2.5)$$

Podotkněme, že i když zde máme tento princip formulován pro holonomní vazby, dá se formulovat i pro některé typy neholonomních vazeb a v určité obměně i pro vazby neudržující.

Platnost principu virtuální práce dokazuje zkušenost. Vyjdeme-li z úvah pro soustavu částic, na které nepůsobí vazby, je podmínka rovnováhy  $\rho$ -té částice soustavy dána anulováním výsledné síly působící na tuto částici, odkud vyplývá platnost (3.2.5) automaticky. Je-li soustava podrobena holonomním stacionárním vazbám, tj. nezávislým na čase, lze pokládat  $\rho$ -tou částici soustavy za částici podrobenou vazbám, jestliže místo vazeb uvažujeme, že na částici kromě síly  $\mathbf{F}_{\rho}$  působí ještě výsledná reakce vazby  $\mathbf{N}_{\rho}$ . Protože je podle předpokladu vazba ideální, platí (3.2.4) a tedy opět musí být splněn vztah (3.2.5). Podmínka ideálnosti vazeb však platí i pro vazby nestacionární (v tomto případě  $\mathbf{N}_{\rho}$  závisí na čase) a proto je i pro takové vazby splněn vztah (3.2.5).

Význam principu virtuální práce pro hledání rovnovážného stavu soustavy částic lze názorně ukázat na případu jedné částice. Působí-li na ni potenciálová síla, pro kterou platí  $\mathbf{F} = -\nabla U$  (podobně jako v předcházejícím textu značí  $U$  potenciální energii částice), má princip virtuální práce tvar

$$\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} = -\nabla U \cdot \delta \mathbf{r}.$$

Rozepsáním na jednotlivé složky zjistíme, že virtuální práce představuje celkovou změnu (variaci) potenciální energie  $\delta U$  při virtuálním posunutí v okolí uvažovaného bodu,

$$\delta U = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i = 0.$$

Hledání rovnovážné polohy částice se tak převádí na čistě matematický problém vyšetřování stacionárních bodů funkce pomocí variací, neboť právě v těchto bodech je podle definice 1. variace funkce nulová. V potenciálovém poli tedy rovnovážné polohy splývají se stacionárními body potenciální energie, ve fyzice pak bývají označovány jako rovnovážné body. Druh rovnovážné polohy pak lze obecně určit druhou variací. Při  $\delta^2 U > 0$  se jedná o rovnováhu stabilní, při  $\delta^2 U < 0$  o rovnováhu labilní a při  $\delta^2 U = 0$  o rovnováhu indiferentní.

Princip virtuální práce bývá často označován za základní princip statiky. Můžeme jej však považovat i za základní princip dynamiky, jestliže jej s použitím *d'Alembertova principu* budeme aplikovat na soustavu v pohybu. Podle d'Alembertova principu jsou působící síly při pohybu stále v rovnováze se silami setrvačnými, takže můžeme formulovat princip virtuální práce ve tvaru

$$\sum_{\rho=1}^N (\mathbf{F}_{\rho} + \boldsymbol{\psi}_{\rho}) \cdot \delta \mathbf{r}_{\rho} = 0, \quad (3.2.6)$$

kde  $\boldsymbol{\psi}_{\rho}$  je d'Alembertova setrvačná síla pro  $\rho$ -tou částici soustavy. Je tedy

$$\sum_{\rho=1}^N (\mathbf{F}_{\rho} - m_{\rho} \mathbf{a}_{\rho}) \cdot \delta \mathbf{r}_{\rho} = \sum_{\rho=1}^N \sum_{i=1}^3 (X_{\rho,i} - m_{\rho} \ddot{x}_{\rho,i}) \delta x_{\rho,i} = 0. \quad (3.2.7)$$

Rovnice (3.2.7) představuje základní princip dynamiky pro soustavu podrobenou vazbám; často se také nazývá *d'Alembertův-Lagrangeův princip*.

Ze základního principu dynamiky (3.2.7) nyní ovšem musíme získat pohybové rovnice, které by nám umožňovaly přímé řešení problémů mechaniky. Jestliže se při řešení nějakého problému zajímáme kromě získání pohybového zákona i o výpočet reakcí vazby, používáme tzv. Lagrangeovy rovnice 1. druhu; nepotřebujeme-li znát reakce vazby, pracujeme s Lagrangeovými rovnicemi 2. druhu.

### 3.3 Lagrangeovy rovnice 1. druhu

Abychom našli Lagrangeovy rovnice 1. druhu, vyjdeme z podmínek (3.2.2) pro virtuální posunutí. Násobíme-li každou z těchto podmínek libovolným koeficientem  $\lambda_{\alpha}$  (*Lagrangeův neurčitý multiplikátor*), sčítáme přes všechna  $\alpha$  a

přičteme k (3.2.7), dostaneme

$$\sum_{\varrho=1}^N \sum_{i=1}^3 \left( X_{\varrho,i} - m_{\varrho} \ddot{x}_{\varrho,i} + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_{\alpha} \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial x_{\varrho,i}} \right) \delta x_{\varrho,i} = 0. \quad (3.3.1)$$

Kdyby byla virtuální posunutí  $\delta x_{\varrho,i}$  vzájemně nezávislá, plynulo by odtud (jakož i ostatně přímo z (3.2.7)), že výrazy v kulatých závorkách musejí být rovny nule. Mezi souřadnicemi  $x_{\varrho,i}$  však existuje  $s$  závislostí daných rovnicemi vazby. Provedeme proto následující úvahu: Předpokládejme, že prvních  $3N - s$  virtuálních posunutí je nezávislých a jen posledních  $s$  posunutí je závislých. Protože (3.3.1) obsahuje celkem  $s$  libovolných koeficientů  $\lambda_{\alpha}$ , můžeme tyto koeficienty zvolit tak, aby výrazy v kulatých závorkách u těchto  $s$  závislých virtuálních posunutí byly rovny nule. Závorky u zbývajících  $3N - s$  posunutí pak musejí být rovny nule, neboť podle předpokladu jsou tato posunutí vzájemně nezávislá. Celkem tedy bude rovnice (3.3.1) splněna, jestliže bude

$$m_{\varrho} \ddot{x}_{\varrho,i} = X_{\varrho,i} + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_{\alpha} \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial x_{\varrho,i}}, \quad \varrho = 1, 2, \dots, N, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.3.2)$$

což jsou hledané *Lagrangeovy rovnice 1. druhu*. Někdy se tyto rovnice zapisují ve vektorovém tvaru

$$m_{\varrho} \ddot{\mathbf{r}}_{\varrho} = \mathbf{F}_{\varrho} + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_{\alpha} \nabla_{\varrho} \Phi_{\alpha}, \quad \varrho = 1, 2, \dots, N,$$

kde  $\nabla_{\varrho} \Phi_{\alpha}$  značí, že ve výrazu pro gradient se derivuje podle souřadnic  $\varrho$ -té částice.

Srovnáme nyní tyto rovnice s Newtonovými pohybovými rovnicemi pro soustavu částic, kterou si můžeme představit jako soustavu bez vazeb, v níž však kromě sil  $\mathbf{F}_{\varrho}$  působí ještě síly reakce vazby  $\mathbf{N}_{\varrho}$ . Tyto rovnice mají tvar

$$m_{\varrho} \ddot{x}_{\varrho,i} = X_{\varrho,i} + N_{\varrho,i}, \quad \varrho = 1, 2, \dots, N, \quad i = 1, 2, 3$$

takže srovnáním s (3.3.2) vidíme, že reakce vazby pro  $\varrho$ -tou částici je rovna

$$N_{\varrho,i} = \sum_{\alpha=1}^s \lambda_{\alpha} \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial x_{\varrho,i}} \quad (3.3.3)$$

nebo vektorově

$$\mathbf{N}_{\varrho} = \sum_{\alpha=1}^s \lambda_{\alpha} \nabla_{\varrho} \Phi_{\alpha}.$$

Řešením rovnic (3.3.2) můžeme tedy při známých vazbách určit nejen pohyb soustavy, ale též reakce vazeb.

### 3.4 Lagrangeovy rovnice 2.druhu

Při odvození rovnic (3.3.2) jsme vycházeli z principu d'Alembertova-Lagrangeova (3.2.7) a pracovali jsme s  $3N$  kartézskými souřadnicemi  $x_{\varrho,i}$ , které byly podrobeny  $s$  podmínkám – holonomním vazbám, tj. mezi nimiž existovalo  $s$  závislostí. To však znamená, že při použití jiných vhodně zvolených parametrů by nám mohlo stačit jen  $3N - s$  parametrů, které by jednoznačně určovaly polohu všech částic soustavy. Nazýváme *nezávislými zobecněnými souřadnicemi* (též)  $q_1, q_2, \dots, q_f$ . Jejich počet  $f = 3N - s$  pak představuje *počet stupňů volnosti* soustavy.

Vzhledem k definici zobecněných souřadnic musejí být polohové vektory  $\mathbf{r}_{\varrho}$  částic jednoznačnými funkcemi těchto souřadnic; podmínky jsou zde analogické, jako jsme studovali v souvislosti s rovnicemi (1.1.5) a (1.1.6) při zavedení křivočarých souřadnic pro jednu částici. Předpokládejme tedy, že platí

$$\mathbf{r}_{\varrho} = \mathbf{r}_{\varrho}(q_1, q_2, \dots, q_f, t), \quad \varrho = 1, 2, \dots, N \quad (3.4.1)$$

neboli

$$x_{\varrho,i} = x_{\varrho,i}(q_1, q_2, \dots, q_f, t), \quad \varrho = 1, 2, \dots, N, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.4.2)$$

Naší snahou nyní bude zapsat pohybové rovnice soustavy částic v těchto nezávislých zobecněných souřadnicích  $q_1, q_2, \dots, q_f$ . Vztah pro virtuální posunutí  $\delta \mathbf{r}_{\varrho}$  najdeme z (3.4.1) resp. (3.4.2). Můžeme psát

$$\delta \mathbf{r}_{\varrho} = \sum_{j=1}^f \frac{\partial \mathbf{r}_{\varrho}}{\partial q_j} \delta q_j, \quad \varrho = 1, 2, \dots, N \quad (3.4.3)$$

nebo

$$\delta x_{\varrho,i} = \sum_{j=1}^f \frac{\partial x_{\varrho,i}}{\partial q_j} \delta q_j, \quad \varrho = 1, 2, \dots, N, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.4.4)$$

Dosažením do (3.2.7) dostáváme

$$\sum_{j=1}^f \sum_{\varrho=1}^N \sum_{i=1}^3 (X_{\varrho,i} - m_{\varrho} \ddot{x}_{\varrho,i}) \frac{\partial x_{\varrho,i}}{\partial q_j} \delta q_j = 0.$$

Zavedeme nyní opět tzv. zobecněné síly

$$Q_j = \sum_{\varrho=1}^N \sum_{i=1}^3 X_{\varrho,i} \frac{\partial x_{\varrho,i}}{\partial q_j} \quad (3.4.5)$$

a předcházející rovnice přejde na tvar

$$\sum_{j=1}^f Q_j \delta q_j = \sum_{j=1}^f \sum_{\varrho=1}^N \sum_{i=1}^3 m_{\varrho} \ddot{x}_{\varrho,i} \frac{\partial x_{\varrho,i}}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (3.4.6)$$

Pravou stranu nyní upravíme takto :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^f \sum_{\varrho=1}^N \sum_{i=1}^3 m_{\varrho} \ddot{x}_{\varrho,i} \frac{\partial x_{\varrho,i}}{\partial q_j} \delta q_j &= \sum_{j=1}^f \sum_{\varrho=1}^N \sum_{i=1}^3 m_{\varrho} \frac{d}{dt} \left( \dot{x}_{\varrho,i} \frac{\partial x_{\varrho,i}}{\partial q_j} \right) \delta q_j - \\ &- \sum_{j=1}^f \sum_{\varrho=1}^N \sum_{i=1}^3 m_{\varrho} \dot{x}_{\varrho,i} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_{\varrho,i}}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \end{aligned}$$

Pro další úpravu potřebujeme pomocný vztah, který získáme derivováním (3.4.2) podle času; dostaneme

$$\dot{x}_{\varrho,i} = \sum_{j=1}^f \frac{\partial x_{\varrho,i}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_{\varrho,i}}{\partial t}$$

a derivací tohoto vztahu podle  $\dot{q}_j$  dostaneme

$$\frac{\partial \dot{x}_{\varrho,i}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_{\varrho,i}}{\partial q_j}.$$

Dosadíme-li tento výraz do upravené pravé strany (3.4.6) a využijeme-li navíc v druhém členu zaměnitelnosti úplné derivate podle času a partiální derivate podle  $q_j$  (o čemž se lze přesvědčit přímým dosazením), dostáváme z (3.4.6) vztah

$$\sum_{j=1}^f Q_j \delta q_j = \sum_{j=1}^f \left[ \sum_{\varrho=1}^N \sum_{i=1}^3 m_{\varrho} \frac{d}{dt} \left( \dot{x}_{\varrho,i} \frac{\partial x_{\varrho,i}}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j - \sum_{j=1}^f \left( \sum_{\varrho=1}^N \sum_{i=1}^3 m_{\varrho} \dot{x}_{\varrho,i} \frac{\partial \dot{x}_{\varrho,i}}{\partial q_j} \right) \delta q_j.$$

Každý ze součinů

$$\dot{x}_{\varrho,i} \frac{\partial \dot{x}_{\varrho,i}}{\partial \dot{q}_j} \quad \text{resp.} \quad \dot{x}_{\varrho,i} \frac{\partial \dot{x}_{\varrho,i}}{\partial q_j}$$

lze psát ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \dot{x}_{\varrho,i}^2 \right) \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{1}{2} \dot{x}_{\varrho,i}^2 \right),$$

takže

$$\sum_{j=1}^f Q_j \delta q_j = \sum_{j=1}^f \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \sum_{\varrho=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m_{\varrho} \dot{x}_{\varrho,i}^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_{\varrho=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m_{\varrho} \dot{x}_{\varrho,i}^2 \right) \right\} \delta q_j.$$

Výrazy v kulatých závorkách však představují podle (2.3.3) kinetickou energii soustavy  $T$ , takže lze psát

$$\sum_{j=1}^f \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0. \quad (3.4.7)$$

Vzhledem k nezávislosti  $q_j$  jsou i  $\delta q_j$  nezávislé a musí tedy platit

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, f. \quad (3.4.8)$$

Tyto rovnice odpovídají (3.2.4) a představují základní pohybové rovnice soustavy podrobené vazbám, zapsané v nezávislých zobecněných souřadnicích. Nazývají se zpravidla *Lagrangeovými rovnicemi 2. druhu*.<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Joseph Louis Lagrange publikoval tyto rovnice v r. 1788 ve svém díle „Mécanique analytique“ (Analytická mechanika).

Volba nezávislých zobecněných souřadnic byla zcela libovolná. Mohli bychom zvolit jinou soustavu nezávislých zobecněných souřadnic a našli bychom rovnice stejného tvaru. Lagrangeovy rovnice druhého druhu mají tedy tu významnou vlastnost, že jsou invariantní při přechodu od jedné soustavy zobecněných souřadnic k soustavě jiné. Tím se nám také objasňuje, proč jsme při zápisu pohybových rovnic jedné částice v obecných křivočarých souřadnicích dostali rovnice (1.2.6), které mají tvar stejný jako (3.2.4) a (3.4.8).

Jsou-li síly, které působí na soustavu, silami konservativními, lze pro zobecněné síly  $Q_j$  psát

$$Q_j = \sum_{\varrho=1}^N \sum_{i=1}^3 X_{\varrho,i} \frac{\partial x_{\varrho,i}}{\partial q_j} = - \sum_{\varrho=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial x_{\varrho,i}} \frac{\partial x_{\varrho,i}}{\partial q_j} = - \frac{\partial U}{\partial q_j},$$

takže i zobecněné síly můžeme dostat z potenciální energie  $U(q) = U[x_i(q_j)]$ . Pak (3.4.8) bude

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial U}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, f$$

a pokud  $U$  nezávisí na zobecněných rychlostech (jak nazýváme výrazy  $\dot{q}_j = dq_j/dt$ ), tj. pokud  $\partial U/\partial \dot{q}_j = 0$ , lze psát

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial(T - U)}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, f.$$

Zavedeme-li opět  $L$  (*kinetický potenciál, lagranžján*) vztahem

$$L = T - U = L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) \quad (3.4.9)$$

nebo zkráceně

$$L = L(q, \dot{q}, t)$$

Lagrangeovy rovnice 2. druhu pak nabývají tvaru analogického (3.2.7)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, f. \quad (3.4.10)$$

Protože Lagrangeovy rovnice 2. druhu mají velký význam v mnoha praktických úlohách, nebudeme zde nyní uvádět konkrétní příklad jejich použití a věnujeme této problematice celou část 3.6.

Kromě zápisu pohybových rovnic v zobecněných souřadnicích používá se často zobecněných souřadnic i při řešení úloh statických; uvedme proto, že vzhledem k (3.4.4) a (3.4.5) je možné formulovat *princip virtuální práce v zobecněných souřadnicích* ve tvaru

$$\sum_{j=1}^f Q_j \delta q_j = 0. \quad (3.4.11)$$

### 3.5 Další základní principy mechaniky

Kromě principu virtuální práce (resp. principu d'Alembertova - Lagrangeova pro soustavu v pohybu) je možné formulovat ještě jiné alternativní principy, na jejichž základě lze budovat mechaniku soustav podrobených vazbám. Nejdůležitější z nich nyní uvedeme.

Derivujme rovnici vazby (3.1.2) podle času. Dostáváme

$$\sum_{\varrho=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_{\varrho,i}} \dot{x}_{\varrho,i} + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial t} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s,$$

což je podmínka, kterou musejí splňovat rychlosti částic. Pripustíme nyní existenci jiných, změněných rychlostí částic soustavy v tomtéž okamžiku, avšak takových, které jsou opět slučitelné s vazbami. Pro tyto nové rychlosti  $\dot{x}_{\varrho,i} + \Delta \dot{x}_{\varrho,i}$  musí podobně platit

$$\sum_{\varrho=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_{\varrho,i}} (\dot{x}_{\varrho,i} + \Delta \dot{x}_{\varrho,i}) + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial t} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s.$$

Odečtením obou posledních rovnic dostaneme

$$\sum_{\varrho=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_{\varrho,i}} \Delta \dot{x}_{\varrho,i} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s,$$

což je podmínka shodná s podmínkou pro virtuální posunutí, avšak platí nyní pro konečné změny rychlostí. Nahradíme-li nyní v (3.2.7) virtuální posunutí  $\delta x_{\rho,i}$  změnami rychlostí  $\Delta \dot{x}_{\rho,i}$ , dostáváme

$$\sum_{\rho=1}^N \sum_{i=1}^3 (X_{\rho,i} - m_{\rho} \ddot{x}_{\rho,i}) \Delta \dot{x}_{\rho,i} = 0. \quad (3.5.1)$$

Tato rovnice představuje novou formu základního principu mechaniky známou pod názvem *Jourdainův princip*.<sup>4</sup> Derivujeme-li rovnici vazby (3.1.2) dvakrát podle času, dostaneme

$$\sum_{\rho=1}^N \sum_{i=1}^3 \left[ \ddot{x}_{\rho,i} \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial x_{\rho,i}} - \dot{x}_{\rho,i} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial x_{\rho,i}} \right) \right] + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial t} \right) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s.$$

Uvážíme-li nyní jako v předešlém případě změněná zrychlení  $\ddot{x}_{\rho,i} + \Delta \ddot{x}_{\rho,i}$  vyhovující vazbám, tj. splňující rovnice

$$\sum_{\rho=1}^N \sum_{i=1}^3 \left[ (\ddot{x}_{\rho,i} + \Delta \ddot{x}_{\rho,i}) \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial x_{\rho,i}} - \dot{x}_{\rho,i} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial x_{\rho,i}} \right) \right] + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial t} \right) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s,$$

dostaneme opět odečtením posledních rovnic

$$\sum_{\rho=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial x_{\rho,i}} \Delta \ddot{x}_{\rho,i} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s$$

a můžeme formulovat *Gaussův princip* (též *Gibbsův*)<sup>5</sup>

$$\sum_{\rho=1}^N \sum_{i=1}^3 (X_{\rho,i} - m_{\rho} \ddot{x}_{\rho,i}) \Delta \ddot{x}_{\rho,i} = 0. \quad (3.5.2)$$

Gauss sám však princip formuloval poněkud jinak: Předpokládejme, že polohy jednotlivých částic soustavy  $x_{\rho,i}$  a jejich rychlosti  $\dot{x}_{\rho,i}$  v čase  $t$  jsou dány a uvažujeme funkci

$$B = \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^N \sum_{i=1}^3 m_{\rho} \left( \ddot{x}_{\rho,i} - \frac{X_{\rho,i}}{m_{\rho}} \right)^2 \quad (3.5.3)$$

jako funkci  $\ddot{x}_{\rho,i}$ , což jsou hodnoty zrychlení, které mohou částice soustavy nabýt při daném  $x_{\rho,i}$  a  $\dot{x}_{\rho,i}$ . Splnění Gaussova principu je pak ekvivalentní tvrzení, pro skutečné zrychlení je funkce  $B$  minimální. Důkaz provedeme takto : Je-li  $\ddot{x}_{\rho,i}$  skutečné zrychlení a  $\ddot{x}_{\rho,i} + \Delta \ddot{x}_{\rho,i}$  jiné možné zrychlení, bude

$$\begin{aligned} \Delta B &= \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^N \sum_{i=1}^3 m_{\rho} \left[ \left( \ddot{x}_{\rho,i} + \Delta \ddot{x}_{\rho,i} - \frac{X_{\rho,i}}{m_{\rho}} \right)^2 - \left( \ddot{x}_{\rho,i} - \frac{X_{\rho,i}}{m_{\rho}} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^N \sum_{i=1}^3 m_{\rho} (\Delta \ddot{x}_{\rho,i})^2 + \sum_{\rho=1}^N \sum_{i=1}^3 (m_{\rho} \ddot{x}_{\rho,i} - X_{\rho,i}) \Delta \ddot{x}_{\rho,i}. \end{aligned}$$

Poslední člen je nulový, je-li splněn Gaussův princip (3.5.2), takže  $\Delta B > 0$ , pokud není  $\Delta \ddot{x}_{\rho,i}$  nulové, tj. pro každé jiné zrychlení než skutečné bude mít funkce  $B$  větší hodnotu.

Ukažme ještě fyzikální význam funkce  $B$ . Soustava nechť má v čase  $t$  zadánu polohu  $x_{\rho,i}$ , rychlosti  $\dot{x}_{\rho,i}$  a zrychlení  $\ddot{x}_{\rho,i}$ . Je-li (symbolicky zapsáno)  $a$  poloha částice ( $\rho$ -té) částice v čase  $t$ ,  $c$  její poloha v čase  $t + dt$  při skutečném pohybu a  $b$  poloha, kterou by částice zaujímala v čase  $t + dt$ , kdyby nebylo vazeb, tj. kdyby působily jen dané síly  $X_{\rho,i}$ , můžeme psát pro  $x$ -tou složku **ac** přibližně

$$(\mathbf{ac})_x \sim \dot{x}_{\rho,i} dt + \frac{1}{2} \ddot{x}_{\rho,i} dt^2$$

a podobně

$$(\mathbf{ab})_x \sim \dot{x}_{\rho,i} dt + \frac{1}{2} \frac{X_{\rho,i}}{m_{\rho}} dt^2.$$

<sup>4</sup>Princip formuloval v r. 1908 Ph. E. B. Jourdain.

<sup>5</sup>Carl Friedrich Gauss formuloval tento variační princip v r. 1829 ve svém díle „Nová metoda řešení přitažlivosti těles“ a zavedl pojem „nejmenšího přinucení“ (ne náhodou pojmenování připomíná metodu nejmenších čtverců, jejímž autorem byl rovněž tento velký matematik). Teprve v r. 1897 ukázal Josiah Williard Gibbs, že jej lze psát ve tvaru (3.5.2) podobném d'Alembertovu principu.



Obdobné symbolické rovnice by platily pro  $y$ -ové a  $z$ -ové složky. Výraz  $\mathbf{bc}$  charakterizuje odchylku skutečného pohybu od pohybu, jak by probíhal, kdyby nebylo vazeb; lze jej tedy pokládat za míru „přinucení“, jímž působí vazby na  $\varrho$ -tou částici. Pro celou soustavu můžeme vytvořit výraz

$$\sum_{\varrho=1}^N \sum_{i=1}^3 m_{\varrho}(\mathbf{bc})^2 = \frac{1}{4} \sum_{\varrho=1}^N \sum_{i=1}^3 m_{\varrho} \left( \ddot{x}_{\varrho,i} - \frac{X_{\varrho,i}}{m_{\varrho}} \right)^2 dt^4 = \frac{1}{2} B dt^4,$$

jenž je tedy úměrný  $B$ , (která je při pohybu minimální). Pohyb soustavy probíhá tedy tak, aby se co nejméně lišil od pohybu, který by soustava vykonávala, kdyby nebylo vazeb. A to je ekvivalentní formulace Gaussova principu, nazývaného též „principem nejmenšího přinucení“.

Výhodou Gaussova principu je, že jej lze použít i pro vazby jsou popsány nerovnicemi a má charakter obecného variačního principu. Není-li částice podrobená vazbám nebo započteme-li ve výrazu (3.5.3) pro  $B$  i síly vazeb, bude při skutečném pohybu  $B = 0$ . Pokud však zahrneme pouze síly, které nejsou spojeny s vazbami, nemůže být  $B$  obecně rovno 0; při skutečném pohybu však bude nejmenší.

### 3.6 Použití Lagrangeových rovnic druhého druhu

V této kapitole ukážeme nejprve některé obecné metody, které v jistých případech vedou k nalezení intergrálů Lagrangeových rovnic 2. druhu a použijeme pak Lagrangeových rovnic 2. druhu ke studiu některých konkrétních problémů.

#### 3.6.1 Integrál energie

Předpokládejme, že Lagrangeova funkce  $L$  nezávisí explicitně na čase  $L \neq L(t)$ . Úplná derivace podle času je

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^f \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right), \quad (3.6.1)$$

neboť  $\partial L / \partial t = 0$ . Z (3.4.10) najdeme

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (3.6.2)$$

a máme

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^f \left[ \dot{q}_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \ddot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right] = \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) \quad (3.6.3)$$

čili

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right) = 0. \quad (3.6.4)$$

Odtud plyne první integrál Lagrangeových rovnic, tzv. *integrál energie*

$$\sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = E. \quad (3.6.5)$$

Konstanta má při stacionárních vazbách význam celkové mechanické energie soustavy. Abychom to dokázali, musíme použít Eulerovy věty o homogenních funkcích, kterou stručně připomeneme:

Funkce dvou proměnných  $f(x,y)$  se nazývá homogenní funkcí stupně  $s$ , platí-li

$$f(ax, ay) = a^s f(x,y), \quad (3.6.6)$$

kde  $a = \text{konst.}$  Derivací tohoto vztahu podle  $a$  dostaneme

$$x \frac{\partial f}{\partial(ax)} + \frac{\partial f}{\partial(ay)} y = sa^{s-1} f(x,y). \quad (3.6.7)$$

Položíme-li  $a = 1$ , plyne odtud

$$\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y = sf(x,y) \quad (3.6.8)$$

nebo zobecněno na funkci více proměnných  $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$

$$\sum_{j=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} x_k = sf(x_1, x_2, \dots, x_k), \quad (3.6.9)$$

což je tzv. Eulerova věta o homogenních funkcích.

Vraťme se nyní k rovnici (3.6.5). Protože  $U \neq U(\dot{q})$ , můžeme psát  $\partial L / \partial \dot{q}_j = \partial T / \partial \dot{q}_j$ , takže levá strana (3.6.5) je

$$\sum_{j=1}^f \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L. \quad (3.6.10)$$

Ukážeme nyní, že při stacionárních vazbách je kinetická energie homogenní funkce druhého stupně v proměnných  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f$ . Jsou-li vazby stacionární, redukuje se (3.4.2) na závislost

$$x_{\varrho, i} = x_{\varrho, i}(q_1, q_2, \dots, q_f) \quad (3.6.11)$$

takže

$$\dot{x}_{\varrho, i} = \sum_{j=1}^f \frac{\partial x_{\varrho, i}}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (3.6.12)$$

a pak

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\varrho=1}^N \sum_{i=1}^3 m_{\varrho} \dot{x}_{\varrho, i}^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (3.6.13)$$

kde

$$a_{jk} = \sum_{\varrho=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_{\varrho, i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\varrho, i}}{\partial q_k} m_{\varrho} \quad (3.6.14)$$

nezávisejí na zobecněných rychlostech  $q_j$ . Z (3.6.13) je skutečně vidět, že kinetická energie je homogenní funkcí stupně 2 v zobecněných rychlostech a proto platí

$$\sum_{j=1}^f \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = 2T - (T - U) = T + U = E. \quad (3.6.15)$$

V případě stacionárních vazeb má konstanta  $E$  význam celkové mechanické energie soustavy.

### 3.6.2 Integrál cyklických souřadnic

Předpokládejme nyní, že  $L$  nezávisí explicitně na některých zobecněných souřadnicích, např. na  $q_{\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, l$ , takže  $\partial L / \partial q_{\alpha} = 0$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, l$ . Takové souřadnice nazýváme *cyklickými souřadnicemi*. Z (3.4.10) vyplývá

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, l \quad (3.6.16)$$

takže

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \equiv p_{\alpha} = c_{\alpha} = \text{konst.}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, l. \quad (3.6.17)$$

Výraz  $\partial L / \partial \dot{q}_j$  se obvykle nazývá *zobecněná hybnost* a označuje se  $p_j$ . Rovnice (3.6.17) se tedy dá slovy vyjádřit tak, že zobecněné hybnosti příslušející cyklickým souřadnicím jsou konstantní.

Podotkněme, že označení pochází z analogie: Uvážíme-li v kartézských souřadnicích Lagrangeovu funkci volné částice, tj. částice, na niž nepůsobí žádné síly, platí

$$L = T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad (3.6.18)$$

přičemž kartézské souřadnice ztotožňujeme se zobecněnými,  $q_1 \equiv x$ ,  $q_2 \equiv y$ ,  $q_3 \equiv z$ . Výraz pro  $L$  neobsahuje  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , takže všechny souřadnice jsou v tomto případě cyklické a proto

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p_x, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = p_y, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} = p_z, \quad (3.6.19)$$

což skutečně souhlasí s obvykle definovanými složkami hybnosti částice. Obecně to však neplatí – napíšeme-li např. Lagrangeovu funkci pro centrální pohyb v polárních souřadnicích, je zobecněná hybnost příslušející souřadnici  $\varphi$  rovna momentu hybnosti a nikoliv hybnosti resp. její složce.

### 3.6.3 Problém dvou těles

Mějme dvě částice s hmotnostmi  $m_1, m_2$ ; jediné síly, které na ně působí, nechť jsou silami vzájemného působení. Tyto síly jsou charakterizovány potenciální energií  $U$ , o níž předpokládáme, že je funkcí jen vzdálenosti obou částic  $r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ . Určení pohybu takové soustavy představuje tzv. problém dvou těles. Je to úloha se šesti stupni volnosti. Za zobecněné souřadnice zvolíme tři souřadnice hmotného středu soustavy a tři složky vektoru  $\mathbf{r}$ , který je veden od částice  $m_1$  k částici  $m_2$  (obr. 3.2). Lagrangeova funkce bude

$$L = T(\dot{\mathbf{r}}_T, \dot{\mathbf{r}}) - U(r). \quad (3.6.20)$$

Podle Königova vzorce pro kinetickou energii (2.4.3) platí

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{r}_T^2 + T' \quad (3.6.21)$$

kde

$$T' = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}'_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{r}'_2)^2 \quad (3.6.22)$$

je kinetická energie relativního pohybu částic vzhledem k hmotnému středu,  $\mathbf{r}'_1$  a  $\mathbf{r}'_2$  vektory z hmotného středu k částicím  $m_1$  a  $m_2$ . Tyto vektory najdeme ze vztahu

$$\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1 = \mathbf{r} \quad (3.6.23)$$

z definice hmotného středu, která pro čárkované vektory má tvar

$$m_1\mathbf{r}'_1 + m_2\mathbf{r}'_2 = 0. \quad (3.6.24)$$

Snadno dostaneme

$$\mathbf{r}'_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}, \quad (3.6.25)$$

takže

$$T' = \frac{1}{2}m_1\frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2}m_2\frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\dot{\mathbf{r}}^2. \quad (3.6.26)$$

Lagrangeova funkce pak má tvar

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{\mathbf{r}}_T^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r). \quad (3.6.27)$$

Souřadnice  $\mathbf{r}_T$  jsou cyklické, proto je hmotný střed v klidu nebo se pohybuje přímočaře rovnoměrně. Pohybové rovnice pro  $\mathbf{r}$  nebudou obsahovat  $\mathbf{r}_T$ ; proto lze první člen v Lagrangeově funkci vypustit a zbývající část je ekvivalentní úloze o pohybu jedné částice s polohovým vektorem  $\mathbf{r}$  a hmotností

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.6.28)$$

v centrálním silovém poli.  $\mu$  nazýváme *redukovanou hmotností*.

Použijeme-li polárních souřadnic (neboť pohyb v centrálním silovém poli je rovinný), dá se Lagrangeova funkce pro tento problém přepsat ve tvaru

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r), \quad (3.6.29)$$

kde člen obsahující  $\dot{r}^2$  jsme už z dalších úvah vypustili. Proměnná  $\varphi$  je zde cyklickou souřadnicí a proto

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \dot{\varphi} = \text{konst.}, \quad (3.6.30)$$

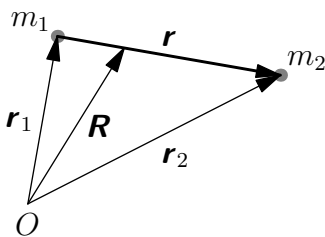
což je v podstatě zákon konstantní plošné rychlosti pro centrální pohyb. Lagrangeova rovnice pro  $r$  dává

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = \mu(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + \frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad (3.6.31)$$

což je rovnice stejného typu jako (1.3.17), kterou jsme již řešili při studiu centrálního pohybu.

### 3.6.4 Malé kmity mechanických soustav

Mějme soustavu  $N$  částic. Jestliže částice o málo vychýlíme z rovnovážných poloh a ony pak zůstanou v libovolném okamžiku po vychýlení v bezprostřední blízkosti rovnovážné polohy, nazýváme takovou rovnovážnou polohu stabilní. V okolí stabilní rovnovážné polohy bude soustava vykonávat kmitavý pohyb.



Obr. 3.2: K zavedení souřadnic u problému 2. těles

Stabilní rovnovážnou polohu mechanické soustavy nám umožňuje určit *věta Lagrangeova-Dirichletova*: Holonomní mechanická soustava se stacionárními vazbami v poli konservativních sil má stabilní rovnovážnou polohu v bodě, ve kterém má její potenciální energie minimum.

Důkaz provedeme takto: Nechť je stav soustavy určen zadáním zobecněných souřadnic  $q_1, q_2, \dots, q_f$ . V  $f$ -rozměrném prostoru těchto souřadnic tedy odpovídá každému stavu soustavy jeden bod. Předpokládejme, že potenciální energie má minimum v počátku souřadnic, že tedy podle uvedené věty je v tomto bodě stav soustavy rovnovážný. Zvolme minimum potenciální energie rovno nule a opišme kolem počátku souřadnic kouli o poloměru  $l$ , která ohraničuje určitou oblast  $D$ . Pro libovolný bod této oblasti je  $U > 0$ . Nechť nejmenší hodnota potenciální energie na hranici oblasti  $D$  je  $U_{\min}$ ; pro libovolný bod na hranici  $D$  platí  $U \geq U_{\min} > 0$ . Nyní vychýlíme soustavu z rovnovážné polohy, přičemž jejím částicím udělíme tak malé počáteční výchylky a rychlosti, že platí  $U_0 < \frac{1}{2}U_{\min}$ ,  $T_0 < \frac{1}{2}U_{\min}$ , kde  $U_0$  a  $T_0$  je jejich počáteční potenciální a kinetická energie. Pak  $U_0 + T_0 < U_{\min}$ . Během dalšího pohybu však platí  $T_0 + U_0 = T + U$ , takže také  $T + U < U_{\min}$  a tedy  $U < U_{\min}$ . Energie soustavy zůstává stále v oblasti  $D$  a proto má soustava v počátku stabilní rovnovážnou polohu. Tím je důkaz uzavřen.

Budeme dále studovat pohyb soustavy, pro niž platí výše uvedená věta, holonomní soustavy se stacionárními vazbami v konservativním silovém poli, kolem minima potenciální energie, tj. kolem bodu, v němž  $\partial U / \partial q_j = 0$ , kde  $U(q_1, q_2, \dots, q_f)$  je potenciální energie soustavy. Nechť má bod, v němž má potenciální energie minimum, souřadnice  $q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0f}$  a studujme pouze malé výchylky soustavy z rovnovážné polohy, takže můžeme psát

$$q_j = q_{0j} + \eta_j, \quad j = 1, 2, \dots, f, \quad (3.6.32)$$

kde  $\eta_j$  jsou malé veličiny.

Rozložme nyní  $U$  do Taylorovy řady kolem rovnovážné polohy, přičemž se omezíme na malé veličiny do 2. řádu včetně. Platí

$$U(q_1, q_2, \dots, q_f) = U(q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0f}) + \sum_{j=1}^f \left( \frac{\partial U}{\partial q_j} \right)_0 \eta_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0 \eta_j \eta_k. \quad (3.6.33)$$

První člen napravo můžeme zvolit roven nule, tj. odečítat potenciální energii od nulové hladiny, která prochází minimum. Druhý člen napravo je roven nule vzhledem k podmínce rovnováhy (neboť  $\frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j$  a v rovnovážné poloze je  $Q_j = 0$ ). Zbývá tedy

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0 \eta_j \eta_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f U_{jk} \eta_j \eta_k, \quad (3.6.34)$$

kde koeficienty  $U_{jk}$  závisí jen na rovnovážných polohách  $q_{0j}$ . Dále je vidět, že  $U_{jk} = U_{kj}$ .

Analogicky lze rozložit v řadu i kinetickou energii kolem bodu  $q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0f}$ . Podle (3.6.13) je - dosazením za  $\dot{q}_j$  z (3.6.32)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f a_{jk} \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k, \quad (3.6.35)$$

kde  $a_{jk}$  jsou funkce zobecněných souřadnic (3.6.14). Rozložíme

$$a_{jk}(q_1, q_2, \dots, q_f) = a_{jk}(q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0f}) + \sum_{l=1}^f \left( \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l} \right)_0 \eta_l + \dots \quad (3.6.36)$$

V (3.6.35) se však už vyskytuje malá veličina  $\dot{\eta}_j$  ve druhé mocnině; abychom ve výrazu pro kinetickou energii dostali stejné přiblížení jako pro energii potenciální - tj. do malých veličin 2. řádu včetně, musíme se v rozvoji koeficientů  $a_{jk}$  omezit jen na první člen, který označíme

$$a_{jk}(q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0f}) = T_{jk} \quad (3.6.37)$$

a dostaneme

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f T_{jk} \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k. \quad (3.6.38)$$

Vzhledem k (3.6.34) a (3.6.38) tedy můžeme zapsat Lagrangeovu funkci pro soustavu částic při malém vychýlení z rovnovážné polohy ve tvaru

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f (T_{jk} \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k - U_{jk} \eta_j \eta_k). \quad (3.6.39)$$

Považujeme-li  $\eta_j$  za zobecněné souřadnice, budou Lagrangeovy rovnice 2. druhu

$$\sum_{k=1}^f (T_{jk} \ddot{\eta}_k + U_{jk} \eta_k) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, f. \quad (3.6.40)$$

To je soustava lineárních diferenciálních rovnic. Protože očekáváme periodický pohyb soustavy, budeme hledat řešení ve tvaru

$$\eta_k = \alpha_k e^{i\omega t} \quad (3.6.41)$$

kde  $\alpha_k$  je komplexní amplituda. Dosazením (3.6.41) do (3.6.40) dostaneme

$$\sum_{k=1}^f (U_{jk} - \omega^2 T_{jk}) \alpha_k = 0, \quad (3.6.42)$$

což je soustava lineárních homogenních rovnic pro  $f$  neznámých amplitud  $\alpha_k$ . Taková soustava má netriviální řešení, jestliže je determinant soustavy roven nule

$$\begin{vmatrix} U_{11} - \omega^2 T_{11} & U_{12} - \omega^2 T_{12} & \dots & U_{1f} - \omega^2 T_{1f} \\ U_{21} - \omega^2 T_{21} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U_{f1} - \omega^2 T_{f1} & \dots & \dots & U_{ff} - \omega^2 T_{ff} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.6.43)$$

Roznásobením determinantu dostaneme rovnici  $f$ -tého stupně pro  $\omega^2$ . Její kořeny (dá se dokázat, že jsou reálné) definují frekvence  $\omega$ , při nichž mohou funkce (3.6.41) být řešením rovnic (3.6.40). Amplitudy  $\alpha_k$  se pak při každé konkrétní frekvenci určí z (3.6.42). Označíme je  $\alpha_{kl}$ . Obecný pohyb soustavy je pak dán lineární kombinací těchto tzv. *hlavních kmitů* (charakteristických kmitů) soustavy

$$\eta_k = \sum_{l=1}^f C_l \alpha_{kl} e^{i\omega_l t}, \quad (3.6.44)$$

kde  $C_l$  jsou konstanty, které lze určit z počátečních podmínek.

Alternativní metoda řešení problému vychází ze skutečnosti, že potenciální a kinetická energie soustavy jsou kvadratické formy, které, jak se dokazuje v algebře, lze převést na tvary

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \dot{\theta}_j^2, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \gamma_j \theta_j^2 \quad (3.6.45)$$

transformací

$$\eta_k = \sum_{l=1}^f \alpha_{kl} \theta_l, \quad (3.6.46)$$

kde  $\theta_l$  jsou nové souřadnice, tzv. *normální souřadnice*.

V normálních souřadnicích jsou Lagrangeovy rovnice rovnicemi druhého řádu s konstantními koeficienty

$$\ddot{\theta}_l + \gamma_l^2 \theta_l = 0, \quad l = 1, 2, \dots, f \quad (3.6.47)$$

a položíme-li  $\gamma_l = \omega_l$ , mají řešení

$$\theta_l = C_l e^{i\omega_l t}, \quad (3.6.48)$$

takže

$$\eta_k = \sum_{l=1}^f \alpha_{kl} C_l e^{i\omega_l t}, \quad (3.6.49)$$

což odpovídá dříve nalezenému řešení (3.6.44).

Dosud jsme při studiu malých kmitů mechanických soustav nebrali v úvahu působení vynucujících sil a sil odporu prostředí, Obecné úvahy o kmitech v odporujícím prostředí jsou komplikované a omezíme se proto jen na nalezení základního tvaru pohybových rovnic v zobecněných souřadnicích, aniž bychom hledali jejich řešení.

Jestliže se zobecněné síly odporu prostředí dají zapsat ve tvaru

$$\tilde{Q}_j = - \sum_{k=1}^f b_{jk} \dot{q}_k \quad (3.6.50)$$

kde  $b_{jk} = b_{kj}$  tvoří symetrickou matici a kvadratická forma  $\sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f b_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$  je kladná, pak výkon zobecněných sil

$$\sum_{j=1}^f \tilde{Q}_j \dot{q}_j = - \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f b_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \leq 0 \quad (3.6.51)$$

je záporný a tedy jde o dissipativní síly. Zavedeme tzv. *Rayleighovu dissipativní funkci*

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f b_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (3.6.52)$$

pro niž platí

$$\tilde{Q}_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j}. \quad (3.6.53)$$

Funkce  $\Phi$  hraje tedy pro dissipativní síly úlohu analogickou úloze potenciálu u potenciálových sil. Fyzikální význam funkce je zřejmý z definice: Je rovna polovičnímu výkonu dissipativních sil. V tomto případě můžeme zapsat Lagrangeovy rovnice (3.4.8) ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \tilde{Q}_j, \quad j = 1, 2, \dots, f \quad (3.6.54)$$

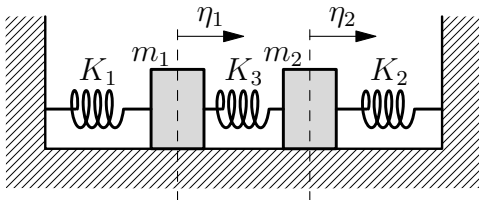
nebo

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, f. \quad (3.6.55)$$

Předpokládáme-li navíc existenci vynucující síly  $\bar{Q}_j(t)$  (bývá obvykle periodickou funkcí času), můžeme rovnici (3.6.55) rozšířit na obecnější tvar

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} + \bar{Q}_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, f, \quad (3.6.56)$$

popisující malé kmity mechanických soustav v odporujícím prostředí a s vynucující silou.



Jako aplikaci obecné teorie studujeme problém tzv. *spřažených oscilátorů*. Předpokládejme dvě částice o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$ , které se pohybují bez tření ve vodorovné přímce a jsou s pevnými stěnami i vzájemně vázány pružinami o tuhostech  $K_1$ ,  $K_2$  a  $K_3$  podle obr. 3.3. Výchylky částic z rovnovážných poloh označíme  $\eta_1$  a  $\eta_2$ .

Potenciální energie soustavy při vychýlení z rovnovážných poloh je, jak snadno určíme,

Obr. 3.3: K zavedení souřadnic spřažených oscilátorů

$$U = \frac{1}{2} K_1 \eta_1^2 + \frac{1}{2} K_2 \eta_2^2 + \frac{1}{2} K_3 (\eta_2 - \eta_1)^2, \quad (3.6.57)$$

takže

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\eta}_2^2 - \frac{1}{2} K_1 \eta_1^2 - \frac{1}{2} K_2 \eta_2^2 - \frac{1}{2} K_3 (\eta_2 - \eta_1)^2 \quad (3.6.58)$$

a Lagrangeovy rovnice 2. druhu dávají

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\eta}_1 + K_1 \eta_1 - K_3 (\eta_2 - \eta_1) &= 0 \\ m_2 \ddot{\eta}_2 + K_2 \eta_2 + K_3 (\eta_2 - \eta_1) &= 0. \end{aligned}$$

Pro další řešení problému zavedeme zjednodušující předpoklady, že hmotnosti obou částic jsou stejné  $m_1 = m_2$  a rovněž dvě pružiny jsou stejné, takže  $K_1 = K_2 = K$ . Pak se pohybové rovnice zjednodušují na

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_1 + (1+k)\omega_0^2 \eta_1 - k\omega_0^2 \eta_2 &= 0 \\ \ddot{\eta}_2 + (1+k)\omega_0^2 \eta_2 - k\omega_0^2 \eta_1 &= 0, \end{aligned}$$

kde  $k = K_3/K$ ,  $\omega_0^2 = K/m$ . Jejich řešení hledáme ve tvaru

$$\eta_1 = A e^{i\omega t}, \quad \eta_2 = B e^{i\omega t}, \quad (3.6.59)$$

což po dosazení dává soustavu rovnic pro amplitudy

$$\begin{aligned} [(1+k)\omega_0^2 - \omega^2]A - k\omega_0^2 B &= 0 \\ -k\omega_0^2 A + [(1+k)\omega_0^2 - \omega^2]B &= 0 \end{aligned} \quad (3.6.60)$$

Tato soustava je řešitelná, jestliže

$$\begin{vmatrix} (1+k)\omega_0^2 - \omega^2 & -k\omega_0^2 \\ -k\omega_0^2 & (1+k)\omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.6.61)$$

Odtud dostáváme charakteristické frekvence

$$\pm \omega_1 = \pm \omega_0, \quad \pm \omega_2 = \pm \omega_0 \sqrt{1+2k}, \quad (3.6.62)$$

takže řešení lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned} \eta_1 &= A_1 e^{i\omega_0 t} + A_{-1} e^{-i\omega_0 t} + A_2 e^{i\omega_0 \sqrt{1+2k} t} + A_{-2} e^{-i\omega_0 \sqrt{1+2k} t} \\ \eta_2 &= B_1 e^{i\omega_0 t} + B_{-1} e^{-i\omega_0 t} + B_2 e^{i\omega_0 \sqrt{1+2k} t} + B_{-2} e^{-i\omega_0 \sqrt{1+2k} t} \end{aligned}$$

Všechny amplitudy  $A, B$  však nejsou nezávislé; z rovnic (3.6.60) plyne

$$\begin{aligned} A &= B & \text{při} & \quad \omega = \omega_1 = \omega_0, \\ A &= -B & \text{při} & \quad \omega = \omega_2 = \omega_0 \sqrt{1+2k}, \end{aligned}$$

takže lze řešení psát

$$\begin{aligned} \eta_1 &= A_1 e^{i\omega_1 t} + A_{-1} e^{-i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t} + A_{-2} e^{-i\omega_2 t} \\ \eta_2 &= A_1 e^{i\omega_1 t} + A_{-1} e^{-i\omega_1 t} - A_2 e^{i\omega_2 t} - A_{-2} e^{-i\omega_2 t}. \end{aligned} \quad (3.6.63)$$

Přímo z tvaru tohoto řešení je snadné najít, jak lze zavést normální souřadnice  $\theta_1$  a  $\theta_2$ . Zvolíme-li

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \eta_1 + \eta_2 = 2(A_1 e^{i\omega_1 t} + A_{-1} e^{-i\omega_1 t}) \\ \theta_2 &= \eta_1 - \eta_2 = 2(A_2 e^{i\omega_2 t} + A_{-2} e^{-i\omega_2 t}), \end{aligned}$$

vidíme, že  $\theta_1$  a  $\theta_2$  skutečně obsahují už jednu charakteristickou frekvenci, takže vykazují harmonický průběh. Jsou-li počáteční podmínky takové, že jen jedna z normálních souřadnic je „nabuzena“ a druhá je rovna nule, zůstane tato nulová stále a vznikají tzv. jednomodové kmity.

Zaveďme nyní počáteční podmínky  $\eta_1 = 0, \dot{\eta}_1 = 0, \eta_2 = a, \dot{\eta}_2 = 0$  pro  $t = 0$ . Dosazením do (3.6.63) dostáváme soustavu rovnic pro amplitudy  $A_1, A_{-1}, A_2, A_{-2}$  a jejím řešením

$$A_1 = A_{-1} = \frac{a}{4}, \quad A_2 = A_{-2} = -\frac{a}{4}, \quad (3.6.64)$$

takže

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{a}{4} [(e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t}) - (e^{i\omega_2 t} + e^{-i\omega_2 t})] = \frac{a}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \\ \eta_2 &= \frac{a}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t). \end{aligned}$$

Tyto výrazy lze přepsat na tvar

$$\begin{aligned} \eta_1 &= a \sin \left( \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \right) \sin \left( \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \\ \eta_2 &= a \cos \left( \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \right) \cos \left( \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right). \end{aligned}$$

Je-li  $\omega_2 \approx \omega_1$ , je

$$\begin{aligned} \eta_1 &= a \sin \left( \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \sin(\bar{\omega} t) \\ \eta_2 &= a \cos \left( \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \cos(\bar{\omega} t), \end{aligned}$$

kde  $\bar{\omega} = \omega_1 + \omega_2/2$ .

Vidíme, že výchylky vykazují harmonický průběh s frekvencí  $\bar{\omega}$  a s pomalu modulovanými amplitudami – vznikají tzv. *rázy*.

### 3.6.5 Použití Lagrangeova formalismu v teorii elektromagnetického pole

Lagrangeovu funkci můžeme zavést i v prakticky významném případě, jestliže se zobecněné síly  $Q_j$  dají zapsat ve tvaru

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad (3.6.65)$$

kde  $V$  je tzv. *zobecněná potenciální energie*. Pak Lagrangeovy rovnice druhého druhu můžeme zapsat ve tvaru (3.4.10), jestliže budeme Lagrangeovu funkci definovat vztahem

$$L = T - V. \quad (3.6.66)$$

Prakticky významný je tento případ proto, že vztah (3.6.65) je splněn pro Lorentzovu sílu, tj. sílu, kterou působí elektromagnetické pole na pohybující se elektricky nabitou částici. Platí

$$\mathbf{F} = e[\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})], \quad (3.6.67)$$

kde  $e$  je elektrický náboj,  $\mathbf{E}$  intenzita elektrického pole,  $\mathbf{B}$  magnetická indukce. Zavedeme-li vektorový potenciál  $\mathbf{A}$  a skalární potenciál  $\varphi$  vztahy (v tenzorové symbolice – viz doplněk A.1.2)

$$B_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j}, \quad E_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t}, \quad (3.6.68)$$

můžeme výraz pro Lorentzovu sílu upravit takto :

$$\begin{aligned} F_i &= e \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} + \epsilon_{ijk} v_j \epsilon_{klm} \frac{\partial A_m}{\partial x_l} \right) = \\ &= e \left[ -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} + (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) v_j \frac{\partial A_m}{\partial x_l} \right] = \\ &= e \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - v_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) = \\ &= e \left[ -\frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi - v_j A_j) - \frac{dA_i}{dt} \right] \end{aligned}$$

kde jsme využili vzorce (A.1.24a) Doplnku, skutečnosti, že  $\mathbf{A}$  je funkcí polohy a času, takže

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \dot{x}_j \quad (3.6.69)$$

a dále vztahu

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \right) = 0. \quad (3.6.70)$$

Upravíme-li ještě formálně poslední člen v hranaté závorce

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial (A_i v_i)}{\partial v_i} \right] \quad (3.6.71)$$

a ztotožníme zobecněné souřadnice s kartézskými, budou také zobecněné síly totožné s kartézskými složkami Lorentzovy síly a lze je zapsat ve tvaru (3.6.65), jestliže položíme

$$V = e\varphi - eA_i v_i = e\varphi - e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \quad (3.6.72)$$

Lagrangeovu funkci pro elektricky nabitou částici v elektromagnetickém poli můžeme tedy volit ve tvaru

$$L = T - e(\varphi - \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}), \quad (3.6.73)$$

kde  $T$  je kinetická energie částice.

### 3.7 Řešené příklady

#### Příklad 3.1

Rozhodněte, zda vazba popsaná diferenciální rovnicí

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0$$

je holonomní.

*Řešení:*

Rovnice vazby sice obsahuje rychlosti  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$ , ale můžeme ji přepsat do tvaru

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$



a po integraci získat ekvivalentní podmínku

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{konst.}$$

typu (3.1.2). Jedná se proto o holonomní vazbu.

### Příklad 3.2

Vyšetřete pohyb hmotného bodu po nakloněné rovině pomocí Lagrangeových rovnic prvního druhu.

*Řešení:*

Pohyb hmotného bodu je vázán na rovinu, jejíž rovnice má ve zvolené souřadnicové soustavě tvar

$$\Phi(x, y, z) = y - kx - q = 0,$$

kde  $k = \text{tg } \alpha$ ,  $\alpha$  je úhel, který svírá nakloněná rovina s vodorovnou rovinou. Protože

$$\frac{\partial \Phi(x, y, z)}{\partial x} = -\text{tg } \alpha, \quad \frac{\partial \Phi(x, y, z)}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

po dosazení do (3.3.2) obdržíme pohybové rovnice

$$m\ddot{x} = -\lambda \text{tg } \alpha, \quad m\ddot{y} = -mg + \lambda, \quad m\ddot{z} = 0.$$

Pro počáteční podmínky  $x_0 = z_0 = 0$ ,  $y_0 = q$ ,  $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$  snadno najdeme i jejich řešení

$$x = -\frac{\lambda t^2}{2m} \text{tg } \alpha, \quad y = q + \frac{1}{2m}(\lambda - mg)t^2, \quad z = 0.$$

Lagrangeův multiplikátor  $\lambda$  najdeme dosazením za  $x$ ,  $y$  do rovnice nakloněné roviny

$$\lambda - mg + \lambda \text{tg}^2 \alpha = 0, \quad \lambda = mg \cos^2 \alpha.$$

Dosadíme-li zpět za  $\lambda$  do pohybových rovnic, získáme

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad y = q - \frac{1}{2}gt^2 \sin^2 \alpha.$$

Pro dráhu, kterou hmotný bod za dobu  $t$  urazí, pak platí

$$s = \sqrt{x^2 + (y - y_0)^2} = \frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha.$$

Složky síly reakce vazby podle (3.3.3) budou

$$N_x = -\lambda k = -mg \sin \alpha \cos \alpha, \quad N_y = \lambda = mg \cos^2 \alpha, \quad N_z = 0,$$

pro její velikost pak vychází známá hodnota

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = mg \cos \alpha.$$

### Příklad 3.3

Studujte pohyb matematického kyvadla pomocí Lagrangeových rovnic 1. druhu.

*Řešení:*

Zavedeme-li souřadnice  $x, y$  podle obr. 3.4 (předpokládáme, že jde o rovinné kyvadlo), je rovnice vazby

$$\Phi \equiv x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

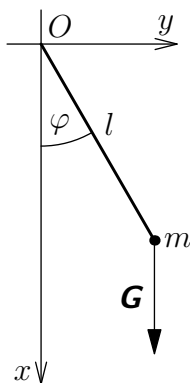
a Lagrangeovy rovnice 1. druhu (3.3.2) mají tvar

$$m\ddot{x} = mg + 2\lambda x \tag{3.7.1a}$$

$$m\ddot{y} = +2\lambda y. \tag{3.7.1b}$$

Násobíme-li první rovnici  $y$ , druhou  $x$  odečteme první od druhé, dostaneme

$$\ddot{y}x - \ddot{x}y \equiv \frac{d}{dt}(xy - yx) = -gy.$$



Obr. 3.4: K příkladu 3.3

Zavedením polárních souřadnic

$$x = l \cos \varphi, \quad y = l \sin \varphi$$

máme

$$\frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}) = l^2 \ddot{\varphi} = -gl \sin \varphi$$

což dává známou rovnici matematického kyvadla při konečném rozkmitu

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (3.7.2)$$

Řešením této rovnice se budeme zabývat v 5. kapitole věnované Hamiltonovým kanonickým rovnicím. Při malém rozkmitu lze psát  $\sin \varphi \approx \varphi$  a (3.7.2) se redukuje na rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0,$$

jejíž řešení je

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \psi), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

kde  $\varphi_0$  je počáteční úhlová výchylka kyvadla. Tím máme vyřešenou první část problému, tj. máme nalezen (přibližně) pohybový zákon. Nyní vypočítáme reakci vazby: Násobme rovnici (3.7.1a)  $x$ , (3.7.1b)  $y$  a sečtěme je. Dostaneme

$$m(x\ddot{x} + y\ddot{y}) = mgx + 2\lambda(x^2 + y^2).$$

Levou stranu lze upravit na tvar

$$2m \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right) - m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = mgx + 2\lambda(x^2 + y^2).$$

Z rovnice vazby je vidět, že první výraz nalevo je derivace konstanty a tedy roven nule, takže

$$-mv^2 = mgx + 2\lambda l^2$$

a odtud

$$\lambda = -\frac{mgx}{2l^2} - \frac{mv^2}{2l^2}. \quad (3.7.3)$$

Podle (3.3.3) najdeme velikost reakce vazby

$$N = \lambda \sqrt{\left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2} = \lambda \sqrt{4x^2 + 4y^2} = 2\lambda l.$$

$\mathbf{N}$  má směr vektoru  $\nabla \Phi$ , míří ve směru vnější normály, tj. k bodu 0, protože  $\Phi > 0$  uvnitř kružnice. Po dosazení za  $\lambda$  dostáváme

$$N = -\frac{mgx}{l} - \frac{mv^2}{l},$$

což souvisí s očekávaným výsledkem: První člen napravo je průmět tíhy do směru závěsu, druhý představuje dostředivou sílu.

### Příklad 3.4

Pro částici na nakloněné rovině z příkladu 3.2 sestavte funkci  $B$  a dokažte, že pro skutečná zrychlení je minimální.

*Řešení:*

Dvojím derivováním rovnice vazby

$$y - kx - q = 0$$

podle času dostaneme

$$\ddot{y} = k\ddot{x}$$

a po dosazení do (3.5.3) vychází

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2}m \left[ (\ddot{x} - 0)^2 + (\ddot{y} - g)^2 + (\ddot{z} - 0)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2}m \left[ \ddot{x}^2 + (k\ddot{x} - g)^2 + \ddot{z}^2 \right] = \frac{1}{2}m (\ddot{x}^2 + k^2\ddot{x}^2 - 2kg\ddot{x} + g^2 + \ddot{z}^2). \end{aligned}$$

Po příslušných algebraických úpravách získáme

$$B = \frac{1}{2}m(1+k^2) \left[ \left( \ddot{x} + \frac{kg}{1+k^2} \right)^2 + \frac{g^2}{(1+k^2)^2} \right] + \frac{1}{2}m\ddot{z}^2.$$

Funkce  $B$  je kvadratická v obou proměnných  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{z}$  a nabývá minima pro

$$\ddot{x} = -\frac{kg}{1+k^2} = -g \sin \alpha \cos \alpha, \quad \ddot{z} = 0,$$

neboť  $k = \operatorname{tg} \alpha$ . Vypočtená zrychlení jsou shodná s výsledky příkladu 3.2.

## Literatura ke kapitole 3

- [1] Bajer J.: *Mechanika 2*. PřF UP Olomouc 2004.
- [2] Brdička M., Hladík A.: *Teoretická mechanika*. Academia, Praha 1987.
- [3] Dvořák L.: „Pružné kyvadlo: od teoretické mechaniky k pokusům a zase zpátky“, *PMFA* 51(4) (2006), 312–327.
- [4] Goldstein H.: *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1980.
- [5] Gregory R.D.: *Classical mechanics*. Cambridge University Press 2006.
- [6] Greiner W.: *Classical mechanics. System of particles and Hamiltonian mechanics*. Springer-Verlag, New York 2003.
- [7] Horský J., Novotný J., Štefaník M.: *Mechanika ve fyzice*. Academia, Praha 2001.
- [8] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.: *Механика*. Наука, Москва 1988.
- [9] Prachař J., Trnka J.: *Úlohy z mechaniky I. Jednoduché soustavy spojené vlákny*. Knihovnička FO č. 66, MAFY, Hradec Králové 2004. Ke stažení na adrese <http://fo.cuni.cz/texty/ulohy1.pdf>.
- [10] Trkal V.: *Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa*. ČSAV, Praha 1956.

# Kapitola 4

## Mechanika tuhého tělesa

Po modelu částice, jímž jsme se dosud zabývali, budeme se nyní věnovat dalšímu modelu, který představuje zjednodušení fyzikální reality – modelu tuhého tělesa.

Tuhé těleso je definováno jako takové těleso, jehož libovolné dva body mají stále stejnou vzájemnou vzdálenost. Vylučují se tedy z úvah jak deformace, které jinak vždy při pohybu skutečných těles vznikají, tak mikroskopické resp. submikroskopické pohyby částic, z nichž je tuhé těleso složeno (nepřihlíží se k jeho struktuře). Omezení rychlosti na rychlost mnohem menší než rychlost světla zde neuvádíme, neboť, jak uvidíme později, je model tuhého tělesa pro teorii relativity nepřijatelný a proto pokládáme tuhé těleso apriorně za model nerelativistický.

### 4.1 Základní pojmy z mechaniky tuhého tělesa

Polohu tuhého tělesa můžeme jednoznačně určit zadáním souřadnic tří bodů tuhého tělesa neležících v jedné přímce, tj. devíti údaji. Vzhledem k definici tuhého tělesa však existují tři vazebné podmínky, vyjadřující tu skutečnost, že vzdálenosti mezi těmito body jsou neproměnné. Můžeme tedy počet údajů nezbytných k jednoznačnému určení polohy tuhého tělesa zredukovat na šest; tuhému tělesu tedy přiřazujeme šest stupňů volnosti. Zpravidla se volí tři z těchto parametrů jako souřadnice určitého význačného bodu v tuhém tělese (hmotného středu), zbývající tři pak určují orientaci tuhého tělesa vzhledem k tomuto bodu; obvykle se volí jako tři tzv. Eulerovy úhly (viz dále).

Pohyb tuhého tělesa můžeme vždy pokládat za složený ze dvou nezávislých pohybů: Z translačního pohybu určitého bodu tělesa a z rotace kolem tohoto bodu. Toto tvrzení můžeme intuitivně připustit a pokládat za správné, i když ve skutečnosti by bylo třeba je dokázat; v poněkud obecnější formě bylo dokázáno francouzským matematikem Chaslesem a je známo jako Chaslesova věta.

Translační pohyb tuhého tělesa můžeme charakterizovat okamžitou rychlostí translace  $\mathbf{V}$  a jeho popis nám nepřináší žádné obtíže, neboť při takovém pohybu lze tuhé těleso modelovat částicí (hmotným bodem). Proto si budeme všimnout především rotace tuhého tělesa.

Při našich úvahách budeme pokládat tuhé těleso za složené z velmi mnoho částic o hmotnostech  $m_\varrho$  a s polohovými vektory  $\mathbf{r}_\varrho$ . Pak můžeme aplikovat výsledky získané pro soustavu částic, navíc pak přibudou určité specifické výsledky vyplývající ze skutečnosti, že jednotlivé elementy tuhého tělesa jsou vzájemně vázány tuhými vazbami, tj. jejich vzájemné vzdálenosti se nemění. Při přechodu od vztahů získaných pro soustavu částic ke vztahům pro tuhé těleso

nám konečné součty  $\sum_{\varrho=1}^N$  přecházejí v  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\varrho=1}^N$  a tedy vlastně v Riemannovy integrály. Tyto přechody však už v našich

úvahách provádět nebudeme a pro větší názornost ponecháme původní sumační symboly, u nichž však už nebudeme připisovat rozpětí sumačního indexu. Takovéto sumace nám tedy budou nahrazovat integrál přes celé tuhé těleso: Tak např. celková hmotnost tuhého tělesa bude v našem označení  $\sum_{\varrho} m_\varrho$ , což je ekvivalentní  $\int_{\mathcal{M}} dm$ .

Předpokládejme nyní, že počátek soustavy souřadnic zvolíme v hmotném středu tuhého tělesa resp. v jiném význačném bodě, vzhledem k němuž budeme pohyb (rotaci) tuhého tělesa studovat. Základní charakter pohybu můžeme určit z definice tuhosti tělesa: Uvažujme nejprve, že všechny elementy tuhého tělesa  $m_\varrho$  zůstávají v konstantních vzdálenostech od počátku, tj. že platí  $r_\varrho^2 = \text{konst.}$  Derivováním podle času odtud plyne

$$\mathbf{r}_\varrho \cdot \dot{\mathbf{r}}_\varrho = 0,$$

což je podmínka, která bude splněna, zvolíme-li

$$\dot{\mathbf{r}}_\varrho = \boldsymbol{\omega}_\varrho \times \mathbf{r}_\varrho. \quad (4.1.1)$$

Vektor  $\boldsymbol{\omega}_\varrho$  je vektor úhlové rychlosti  $\varrho$ -té částice tuhého tělesa kolem počátku. Rozšíříme-li podmínku tuhosti na celé těleso, tj. předpokládáme-li, že libovolné dva elementy s polohovými vektory  $\mathbf{r}_\varrho$  a  $\mathbf{r}_\sigma$  mají stále konstantní vzdálenost, dostaneme derivováním této podmínky analogicky

$$(\mathbf{r}_\varrho - \mathbf{r}_\sigma) \cdot (\dot{\mathbf{r}}_\varrho - \dot{\mathbf{r}}_\sigma) = 0. \quad (4.1.2)$$

Dosazením za  $\dot{\mathbf{r}}_\rho$ ,  $\dot{\mathbf{r}}_\sigma$  ze (4.1.1) dostaneme

$$(\boldsymbol{\omega}_\rho - \boldsymbol{\omega}_\sigma) \cdot (\mathbf{r}_\rho \times \mathbf{r}_\sigma) = 0,$$

což je podmínka, která bude vždy splněna, položíme-li

$$\boldsymbol{\omega}_\rho = \boldsymbol{\omega} + \epsilon_\rho \mathbf{r}_\rho,$$

kde  $\boldsymbol{\omega}$  nezávisí na  $\rho$  a  $\epsilon_\rho$  je libovolné číslo. Z (4.1.1) pak plyne

$$\dot{\mathbf{r}}_\rho = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\rho, \quad (4.1.3)$$

kde  $\boldsymbol{\omega}$  je *vektor úhlové rychlosti* pro soustavu částic vázaných tuhými vazbami resp. pro tuhé těleso jako celek.

Jestliže se počátek soustavy souřadnic, který byl zvolen za pevný bod tuhého tělesa, pohybuje translační rychlostí  $\mathbf{V}$ , je výsledná rychlost  $\rho$ -té částice dána vztahem

$$\dot{\mathbf{r}}_\rho = \mathbf{V} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\rho) \quad (4.1.4)$$

Kinetická energie tuhého tělesa bude

$$T = \frac{1}{2} \sum_\rho m_\rho (\dot{\mathbf{r}}_\rho)^2 = \frac{1}{2} \sum_\rho m_\rho V^2 + \sum_\rho m_\rho \mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\rho) + \frac{1}{2} \sum_\rho m_\rho (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\rho)^2. \quad (4.1.5)$$

Výraz pro kinetickou energii se značně zjednoduší, jestliže zvolíme počátek souřadnic v hmotném středu; pak je prostřední člen napravo roven nule a kinetická energie se dá psát

$$T = T_{\text{transl}} + T_{\text{rot}}, \quad (4.1.6)$$

kde

$$T_{\text{transl}} = \frac{1}{2} V^2 \sum_\rho m_\rho = \frac{1}{2} \mathcal{M} V^2 \quad (4.1.7)$$

je kinetická energie translačního pohybu,

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_\rho m_\rho (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\rho)^2 \quad (4.1.8)$$

je kinetická energie rotačního pohybu. Kinetickou energii rotačního pohybu můžeme přepsat takto:

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_\rho m_\rho \epsilon_{ijk} \omega_j x_{\rho,k} \epsilon_{ilm} \omega_l x_{\rho,m} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_\rho m_\rho (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) \omega_j \omega_l x_{\rho,k} x_{\rho,m} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_\rho m_\rho (\omega_j^2 x_{\rho,k}^2 - \omega_j \omega_k x_{\rho,j} x_{\rho,k}), \end{aligned}$$

kde jsme použili vztahů (A.1.12) a (A.1.24a) z doplňku A.1.4 a Einsteinova sumačního pravidla, takže přes indexy  $i, j, k, l, m$  se sčítá od 1 do 3. Použijeme-li identity

$$\omega_j = \delta_{jk} \omega_k \quad ,$$

můžeme dále psát

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega_j \omega_k \sum_\rho m_\rho (\delta_{jk} x_{\rho,l}^2 - x_{\rho,j} x_{\rho,k}),$$

kde jsme v prvním členu přeznačili sumační index  $k$  na  $l$ . Výraz

$$I_{jk} = \sum_\rho m_\rho (\delta_{jk} x_{\rho,l}^2 - x_{\rho,j} x_{\rho,k}) \quad (4.1.9)$$

definuje *tenzor setrvačnosti tuhého tělesa*. Dostáváme tedy pro  $T_{\text{rot}}$  konečný výraz

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_{jk} \omega_j \omega_k. \quad (4.1.10)$$

Tenzor setrvačnosti je důležitou charakteristikou tuhého tělesa. Z definice (4.1.9) je přímo vidět, že jde o tenzor 2. řádu, a navíc tenzor symetrický, tj.  $I_{jk} = I_{kj}$ . Má proto šest nezávislých složek. Tři z nich,  $I_{11}$ ,  $I_{22}$ ,  $I_{33}$  se nazývají *momenty setrvačnosti* tělesa vzhledem k osám  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , zbývající tři jsou tzv. *deviační momenty*.

Rotuje-li tuhé těleso kolem osy, jejíž směr je charakterizován jednotkovým vektorem  $\mathbf{n}$  o složkách  $(\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3)$ , můžeme psát úhlovou rychlost ve tvaru  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n}$  a její složky budou

$$\omega_i = \omega \cos \alpha_i.$$

Pro kinetickou energii rotačního pohybu tuhého tělesa vzhledem k této ose dostaneme

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2,$$

kde výraz

$$I = I_{11} \cos^2 \alpha_1 + I_{22} \cos^2 \alpha_2 + I_{33} \cos^2 \alpha_3 + 2I_{12} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + 2I_{23} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + 2I_{31} \cos \alpha_3 \cos \alpha_1 \quad (4.1.11)$$

je moment setrvačnosti tuhého tělesa vzhledem k ose rotace určené jednotkovým vektorem  $\mathbf{n}$ . Pokud je směr vektoru  $\mathbf{n}$  neměnný, dostali jsme tak výsledek známý z elementární fyziky.

Všimněme si nyní momentu hybnosti tuhého tělesa  $\mathbf{L}$  vzhledem k nějakému pevnému bodu. Platí

$$\mathbf{L} = \sum_{\rho} (\mathbf{r}_{\rho} \times \mathbf{p}_{\rho}) = \sum_{\rho} m_{\rho} [\mathbf{r}_{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\rho})] \quad (4.1.12)$$

a obdobným výpočtem jako při odvozování (4.1.10) dostaneme

$$L_j = I_{jk} \omega_k. \quad (4.1.13)$$

Protože je  $I_{jk}$  symetrický tenzor, můžeme mu jako každému symetrickému tenzoru druhého řádu přiřadit kvadratickou plochu. Zpravidla provádíme toto přiřazení tak, že zavedeme vektor  $\boldsymbol{\xi}$  o složkách  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , ležící ve směru osy rotace charakterizované jednotkovým vektorem  $\mathbf{n}$  o složkách  $\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3$ . Velikost vektoru  $\boldsymbol{\xi}$  volíme rovnu  $1/\sqrt{I}$ . Protože platí

$$\cos \alpha_i = \frac{\xi_i}{\xi} = \xi_i \sqrt{I},$$

dostáváme po dosazení do (4.1.11) rovnici kvadratické plochy

$$I_{11} \xi_1^2 + I_{22} \xi_2^2 + I_{33} \xi_3^2 + 2I_{12} \xi_1 \xi_2 + 2I_{23} \xi_2 \xi_3 + 2I_{31} \xi_3 \xi_1 = 1.$$

Tuto plochu nazýváme *elipsoid setrvačnosti*. Jako každou kvadratickou plochu můžeme i elipsoid setrvačnosti převést do souřadnicové soustavy *hlavních os setrvačnosti*  $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3$ , které mají tu vlastnost, že se v nich rovnice kvadratické plochy redukuje na tzv. kanonický tvar

$$I_1 \xi'^2_1 + I_2 \xi'^2_2 + I_3 \xi'^2_3 = 1.$$

V těchto souřadnicích tedy vymizí deviační momenty a tenzor setrvačnosti se redukuje na diagonální tvar

$$I'_{jk} = I_j \delta_{jk} \quad , \quad (4.1.14)$$

kde čárkou jsou označeny složky tenzoru setrvačnosti do hlavních os setrvačnosti,  $I_1, I_2, I_3$  pak jsou tzv. *hlavní momenty setrvačnosti*. V souřadnicové soustavě se moment hybnosti redukuje na tvar

$$L'_j = I_j \delta_{jk} \omega'_k = I_j \omega'_j \quad (4.1.15)$$

a kinetická energie na

$$T'_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_j \delta_{jk} \omega'_j \omega'_k = \frac{1}{2} I_j \omega'^2_j, \quad (4.1.16)$$

kde čárkou jsou opět označeny veličiny v soustavě hlavních os setrvačnosti. V (4.1.15) se přes  $j$  nesčítá.

Hlavní osy setrvačnosti jsou pevně spojeny s rotujícím tuhým tělesem. Chceme-li tedy zapsat pohybové rovnice (větu o kinetickém momentu) v soustavě hlavních os setrvačnosti, musíme nejprve vyjádřit derivaci nějakého vektoru  $\mathbf{A}$  podle času v takové rotující soustavě. Platí

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 A'_i \mathbf{e}'_i,$$

kde  $\mathbf{e}_i$  jsou jednotkové vektory soustavy v prostoru pevné,  $\mathbf{e}'_i$  jednotkové vektory soustavy rotující s úhlovou rychlostí  $\boldsymbol{\omega}$  kolem společného počátku obou soustav. Pak

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{dA_i}{dt} \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{dA'_i}{dt} \mathbf{e}'_i + \sum_{i=1}^3 A'_i \frac{d\mathbf{e}'_i}{dt}.$$

Analogicky se (4.1.3) však můžeme psát

$$\frac{d\mathbf{e}'_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i,$$

takže po dosazení

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{dA'_i}{dt} \mathbf{e}'_i + \boldsymbol{\omega} \times \sum_{i=1}^3 A'_i \mathbf{e}'_i = \frac{d'\mathbf{A}}{dt} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A})$$

První člen napravo, označený  $d'\mathbf{A}/dt$ , představuje relativní změnu vektoru  $\mathbf{A}$  vzhledem k rotující soustavě. Symbolicky můžeme tuto rovnici zapsat takto:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d'}{dt} + [\boldsymbol{\omega} \times]. \quad (4.1.17)$$

Aplikujeme-li ji na vektor  $\boldsymbol{\omega}$ , dostaneme  $d\boldsymbol{\omega}/dt = d'\boldsymbol{\omega}/dt$ . Věta o kinetickém momentu

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$$

bude tedy v rotující soustavě mít tvar

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} + (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L}') = \mathbf{M}',$$

kde čárkou vyjadřujeme skutečnost, že odpovídající veličiny jsou brány v soustavě hlavních os setrvačnosti. Po dosazení ze (4.1.15) a rozepsání do složek dostáváme tři tzv. *Eulerovy dynamické rovnice* pro pohyb tuhého tělesa s jedním pevným bodem

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\omega'_1}{dt} + (I_3 - I_2) \omega'_2 \omega'_3 &= M'_1 \\ I_2 \frac{d\omega'_2}{dt} + (I_1 - I_3) \omega'_1 \omega'_3 &= M'_2 \\ I_3 \frac{d\omega'_3}{dt} + (I_2 - I_1) \omega'_1 \omega'_2 &= M'_3 \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

Aplikacemi těchto rovnic na konkrétní pohyby tuhého tělesa se budeme zabývat v následující kapitole

Dosud jsme pracovali s tenzorem setrvačnosti  $I_{jk}$  počítaným v soustavě s počátkem  $O$  v hmotném středu. Mnohdy bývá účelné vypočítat analogický tenzor setrvačnosti  $\bar{I}_{jk}$  vzhledem k jinému počátku souřadnic  $\bar{O}$ , přičemž poloha tohoto nového počátku souřadnic je určena polohovým vektorem  $\mathbf{a}$ ; platí tedy  $x_i = \bar{x}_i + a_i$  a můžeme psát

$$\begin{aligned} \bar{I}_{jk} &= \sum_{\varrho} m_{\varrho} (\delta_{jk} \bar{x}_{\varrho,l}^2 - \bar{x}_{\varrho,j} \bar{x}_{\varrho,k}) = \\ &= \sum_{\varrho} m_{\varrho} [\delta_{jk} (x_{\varrho,l} - a_l)^2 - (x_{\varrho,j} - a_j)(x_{\varrho,k} - a_k)] = \\ &= \sum_{\varrho} m_{\varrho} (\delta_{jk} x_{\varrho,l}^2 - x_{\varrho,j} x_{\varrho,k}) + \sum_{\varrho} m_{\varrho} [\delta_{jk} (a_l^2 - 2x_{\varrho,l} a_l) + (a_j x_{\varrho,k} + a_k x_{\varrho,j} - a_j a_k)]. \end{aligned}$$

První výraz napravo je tenzor setrvačnosti  $I_{jk}$  vzhledem k hmotnému středu. Druhý výraz napravo se zredukuje vzhledem k tomu, že  $O$  je podle předpokladu hmotný střed a tedy platí  $\sum_{\varrho} m_{\varrho} x_{\varrho,k} = 0$ , takže nakonec dostaneme

$$\bar{I}_{jk} = I_{jk} + \mathcal{M}(\delta_{jk} a_l^2 - a_j a_k), \quad (4.1.19)$$

kde  $\mathcal{M}$  je celková hmotnost tělesa  $\mathcal{M} = \sum_{\varrho} m_{\varrho}$ . Vztah (4.1.19) představuje zobecnění známé *Steinerovy věty*.

V další kapitole se, jak už bylo řečeno, budeme zabývat konkrétními pohyby tuhého tělesa. Budeme přitom vycházet jednak z Eulerových rovnic (4.1.18), jednak si ukážeme jinou metodu, založenou na použití Lagrangeových rovnic 2. druhu.

## 4.2 Některé konkrétní úlohy dynamiky tuhého tělesa

### 4.2.1 Rotace tuhého tělesa kolem pevné osy

Rotuje-li tuhé těleso kolem pevné osy, stačí k určení jeho polohy v každém okamžiku jen úhel otočení  $\varphi$ . Předpokládejme, že je osa tuhého tělesa určena dvěma body  $O$ ,  $O'$  a výsledný moment vnějších sil nechť je  $\mathbf{M}$ . Kdyby nebylo vazeb fixujících osu rotace, pohybovala by se tato osa současně s tělesem. Vazby si můžeme myslet nahrazeny dvěma silami  $\mathbf{N}_o$  a  $\mathbf{N}_{o'}$ , působícími v bodech  $O$  a  $O'$  kolmo na osu rotace (neboť složky sil do směru rotace se anulují následkem tuhosti tělesa). Zvolíme-li počátek souřadnic v bodě  $O$ , vymizí moment síly  $\mathbf{N}_o$  vzhledem k tomuto bodu a věta o momentu hybnosti dává

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} + (\mathbf{r}_{o'} \times \mathbf{N}_{o'}), \quad (4.2.1)$$

kde  $\mathbf{r}_{o'}$  je polohový vektor bodu  $O'$  z počátku  $O$ .

Zpravidla nepotřebujeme počítat reakce vazby a stačí nám určení závislosti  $\varphi = \varphi(t)$ . V tomto případě se úloha zjednoduší; protože je moment síly  $\mathbf{N}_{o'}$ , kolmý na osu rotace, uvažujeme jen složku rovnice (4.2.1) do osy rotace, do níž proložíme např. osu  $x_3$  soustavy souřadnic. Pak  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ ,  $\omega_3 \neq 0$  a ze (4.1.13) plyne

$$L_3 = I_{33}\omega_3,$$

$$I_{33} = \sum_{\varrho} m_{\varrho} [(x_{\varrho,1}^2 + x_{\varrho,2}^2 + x_{\varrho,3}^2) - x_{\varrho,3}^2] = \sum_{\varrho} m_{\varrho} (x_{\varrho,1}^2 + x_{\varrho,2}^2)$$

je moment setrvačnosti vzhledem k ose  $x_3$ . Věta o momentu hybnosti dává pro složku do osy  $x_3$

$$I_{33} \frac{d\omega_3}{dt} = M_3,$$

nebo, protože  $\omega_3 = \dot{\varphi}$ ,

$$I_{33} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_3. \quad (4.2.2)$$

Prakticky důležitý je případ tzv. *torzních kmitů*, které se realizují, jestliže složka výsledného momentu síly do osy rotace je přímo úměrná úhlové výchylce  $\varphi$  z rovnovážné polohy a namířena proti jejímu směru,  $M_3 = -D\varphi$ , kde  $D$  je tzv. *tuhost v torzi* (viz kapitola 7.1). V tomto případě se (4.2.2) redukuje na rovnici

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0,$$

kde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{I_{33}}}$$

je úhlová frekvence torzních kmitů.

Pokud bychom ovšem měli za úkol zjistit reakce vazby (resp. síly, jimiž působí rotující tuhé těleso na osu), museli bychom vyjít z rovnice (4.2.1) a připojit ještě i větu o hybnosti

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{R} + \mathbf{N}_o + \mathbf{N}_{o'}.$$

Z těchto rovnic by pak bylo možno určit síly  $\mathbf{N}_o$  a  $\mathbf{N}_{o'}$ . Tato úloha bývá však častěji řešena v technické mechanice a nebudeme se jí zde dále zabývat.

### 4.2.2 Volný symetrický setrvačnick

Setrvačnickem nazýváme zpravidla těleso, které má určitou osu symetrie a jehož rotace vzhledem k této ose symetrie je relativně velká proti rotaci kolem jakékoliv jiné osy. Přitom budeme předpokládat, že jeden bod setrvačnicku bude zůstat v prostoru pevný, takže jeho pohyb bude popsán rovnicemi (4.1.18), v nichž, vzhledem k symetrii setrvačnicku, položíme např.  $I_1 = I_2$ ; osa symetrie setrvačnicku bude současně jeho hlavní osou setrvačnosti.

Studujme nejprve tzv. volný setrvačnick, tj. setrvačnick, na který nepůsobí žádný vnější silový moment. Takový případ by se dal realizovat podepřením setrvačnicku v těžišti. Osou rotace proložíme osu  $x'_3$  a vzhledem k  $I_1 = I_2$  a  $\mathbf{M} = 0$  plyne z (4.1.18)

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\omega'_1}{dt} + (I_3 - I_1) \omega'_2 \omega'_3 &= 0 \\ I_2 \frac{d\omega'_2}{dt} + (I_1 - I_3) \omega'_1 \omega'_3 &= 0 \\ I_3 \frac{d\omega'_3}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (4.2.3)$$



Z poslední rovnice plyne ihned  $\omega'_3 = \text{konst.}$ . Dělíme-li první dvě rovnice  $I_1$ , můžeme je zapsat ve tvaru

$$\frac{d\omega'_1}{dt} - \Omega\omega'_2 = 0, \quad (4.2.4a)$$

$$\frac{d\omega'_2}{dt} + \Omega\omega'_1 = 0, \quad (4.2.4b)$$

kde jsme označili

$$\Omega = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega'_3 = \text{konst.}$$

Derivací rovnice (4.2.4a) podle času a dosazením z (4.2.4b) za  $d\omega'_2/dt$  máme

$$\frac{d^2\omega'_1}{dt^2} + \Omega^2\omega'_1 = 0,$$

což ukazuje, že složka úhlové rychlosti do osy  $x'_1$  vykonává harmonické kmity

$$\omega'_1 = A \sin(\Omega t + \alpha),$$

kde  $A, \alpha$  jsou integrační konstanty. Z rovnice (4.2.4a) plyne dosazením za  $\omega'_1$

$$\omega'_2 = A \cos(\Omega t + \alpha)$$

a protože  $\omega'_3 = \text{konst.}$ , vyplývá odtud, že koncový bod vektoru  $\boldsymbol{\omega}$  opisuje v čárkované soustavě kružnici v rovině kolmé na osu  $x'_3$ . Tento pohyb setrvačnicku nazýváme *regulární precesí*.

Protože studujeme volný setrvačnick, tj.  $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{O}$ , je  $\boldsymbol{L} = \text{konst.}$  Podle (4.1.15) tedy je

$$L'_1 = I_1\omega'_1 = I_1 A \sin(\Omega t + \alpha), \quad (4.2.5)$$

$$L'_2 = I_2\omega'_2 = I_2 A \cos(\Omega t + \alpha), \quad (4.2.6)$$

$$L'_3 = I_3\omega'_3. \quad (4.2.7)$$

Vektory  $\boldsymbol{L}$  a  $\boldsymbol{\omega}$  svírají úhel  $\Theta$ , který určíme z podmínky

$$\cos \Theta = \frac{\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{\omega}}{L\omega} = \frac{1}{L\omega} (I_1 A^2 + I_3 \omega_3'^2).$$

Velikost vektoru  $\boldsymbol{\omega}$  je konstantní, jak plyne sečtením dvojmocí jeho složek a proto  $\Theta = \text{konst.}$  Vektor  $\boldsymbol{L}$  je konstantní a tedy neproměnný i v nečárkované soustavě; okamžitá osa otáčení setrvačnicku určená vektorem  $\boldsymbol{\omega}$  svírá proto při pohybu stále stejný úhel  $\Theta$  s vektorem  $\boldsymbol{L}$ .

### 4.2.3 Těžký symetrický setrvačnick

Nyní budeme řešit pohyb těžkého symetrického setrvačnicku, tj. pohyb setrvačnicku v homogenním tíhovém poli. Při řešení této úlohy bude nutné odvodit vztahy mezi složkami úhlové rychlosti v soustavě pevně spojené s rotujícím setrvačnickem a v soustavě v prostoru pevné. K určení polohy setrvačnicku je výhodné použít tři úhlových parametrů, tzv. Eulerových úhlů  $\varphi, \vartheta, \psi$ , které nám úplně charakterizují libovolné vzájemné otočení dvou souřadnicových soustav se společným počátkem. Jejich zavedení si znázorníme na kruhovém disku ležícím původně v rovině  $xx_1$  souřadnicové soustavy  $x_1, x_2, x_3$ , který trojím otočením převedeme do libovolné polohy  $x'_1, x'_2, x'_3$ .

První otočení soustavy provedeme kolem osy  $x_3$  o úhel  $\varphi$ , takže osy  $x_1, x_2$  nám přejdou do nových poloh  $x_{11}, x_{21}$  (obr. 4.1a). Kolem nové osy  $x_{11}$  (říká se jí též *uzlová přímka*) otočíme nyní soustavu o úhel  $\vartheta$ , takže osa  $x_3$  přejde v novou osu  $x'_3$  a osa  $x_{21}$  v osu  $x_{22}$ . Poslední otočení provedeme kolem nové osy  $x'_3$  o úhel  $\psi$ , takže osa  $x_{11}$  přejde v  $x'_1$ , osa  $x_{22}$  v  $x'_2$ , jež reprezentují konečnou polohu os soustavy (obr. 4.1b). Vzhledem k tomu, že jsme provedli rotaci kolem tří os, můžeme si příslušné úhlové rychlosti  $\dot{\boldsymbol{\varphi}}, \dot{\boldsymbol{\vartheta}}, \dot{\boldsymbol{\psi}}$  znázornit jako vektory ležící v těchto osách rotace, jak je ukázáno na (obr. 4.1b).

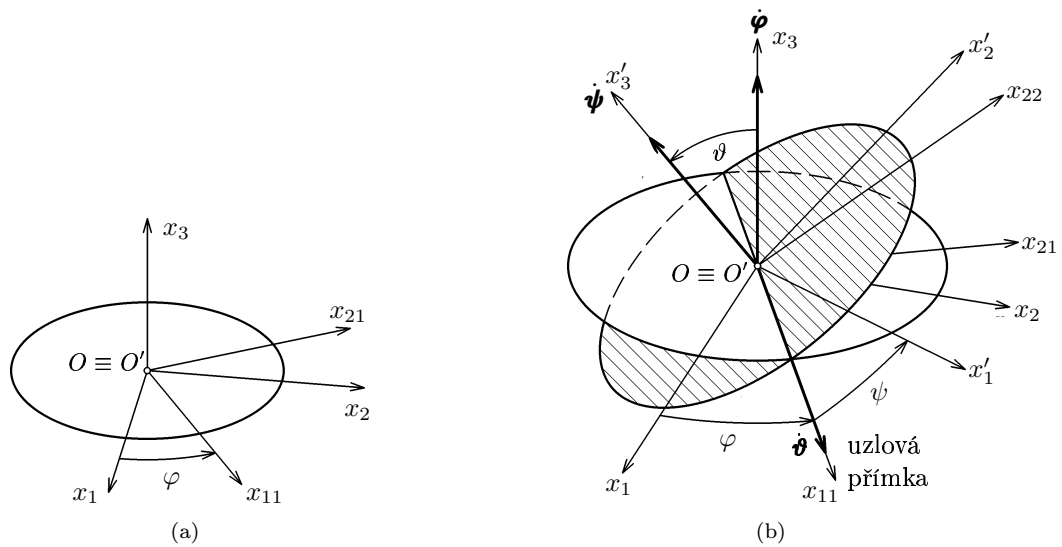
Úhlová rychlost  $\dot{\boldsymbol{\vartheta}}$  má směr osy  $x_{11}$ ; její složky do os  $x'_1, x'_2, x'_3$  jsou

$$\dot{\vartheta}_{x'_1} = \dot{\vartheta} \cos \psi, \quad \dot{\vartheta}_{x'_2} = -\dot{\vartheta} \sin \psi, \quad \dot{\vartheta}_{x'_3} = 0.$$

Úhlová rychlost  $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$  má směr osy  $x_3$ ; její průmět do  $x'_3$  bude  $\dot{\varphi}_{x'_3} = \dot{\varphi} \cos \vartheta$ . Průmět do roviny  $x'_1 x'_2$  bude  $\dot{\varphi} \sin \vartheta$  a příslušné průměty do os  $x'_1$  a  $x'_2$  jsou

$$\dot{\varphi}_{x'_1} = \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi, \quad \dot{\varphi}_{x'_2} = \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi.$$

Úhlová rychlost  $\dot{\boldsymbol{\psi}}$  leží v ose  $x'_3$ . Pro přehlednost si můžeme sestavit tabulku těchto průmětů:



Obr. 4.1: K otočení souřadnicových soustav a zavedení Eulerových úhlů

	$x'_1$	$x'_2$	$x'_3$
$\dot{\vartheta}$	$\dot{\vartheta} \cos \psi$	$-\dot{\vartheta} \sin \psi$	0
$\dot{\varphi}$	$\dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi$	$\dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi$	$\dot{\varphi} \cos \vartheta$
$\dot{\psi}$	0	0	$\dot{\psi}$

Z této tabulky už lehce najdeme výsledné složky úhlové rychlosti do čárkovaných os

$$\omega_{x'_1} \equiv \omega'_1 = \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi \quad (4.2.8a)$$

$$\omega_{x'_2} \equiv \omega'_2 = \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi \quad (4.2.8b)$$

$$\omega_{x'_3} \equiv \omega'_3 = \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi} \quad (4.2.8c)$$

Tyto vztahy obvykle nazýváme *Eulerovými kinematickými rovnicemi*. Spolu s dynamickými rovnicemi (4.1.18) nám pohyb setrvačnicku plně popisují. Přesto se však většinou při řešení problému těžkého setrvačnicku nehledá řešení této soustavy rovnic, nýbrž se používá efektivnější metody – Lagrangeových rovnic 2. druhu, které nám umožní rychle najít první integrály – integrál energie a dva integrály cyklických souřadnic. Za zobecněné proměnné přitom volíme právě Eulerovy úhly  $\varphi, \vartheta, \psi$ .

Kinetickou energii studovaného setrvačnicku můžeme podle (4.1.16) psát ve tvaru

$$T = \frac{1}{2} I_1 (\omega_1'^2 + \omega_2'^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3'^2$$

nebo dosazením z (4.2.8a)–(4.2.8c)

$$T = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta)^2$$

Je-li  $l$  výška těžiště setrvačnicku nad bodem upevnění, je potenciální energie setrvačnicku

$$U = \mathcal{M}gl \cos \vartheta,$$

kde  $\mathcal{M}$  je jeho hmotnost. Lagrangeova funkce pak bude

$$L = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta)^2 - \mathcal{M}gl \cos \vartheta \quad (4.2.9)$$

Úhly  $\varphi$  a  $\psi$  se v této Lagrangeově funkci explicitně nevyskytují, proto budou příslušné zobecněné hybnosti konstantní,

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta) = I_1 a \quad (4.2.10)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = (I_1 \sin^2 \vartheta + I_3 \cos^2 \vartheta) \dot{\varphi} + I_3 \dot{\psi} \cos \vartheta = I_1 b, \quad (4.2.11)$$

kde jsme konstanty označili  $I_1 a$  a  $I_1 b$ . To jsou dva první integrály pohybových rovnic. Protože je soustava v konzervativním silovém poli, můžeme napsat další integrál pohybových rovnic ve tvaru zákona zachování mechanické energie

$$E = T + U = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta)^2 + \mathcal{M}gl \cos \vartheta \quad (4.2.12)$$

Při další integraci tedy už můžeme vycházet jen z této soustavy tří nezávislých prvních integrálů pohybových rovnic  
Vypočítáme  $\dot{\psi}$  z (4.2.10)

$$I_3 \dot{\psi} = I_1 a - I_3 \dot{\varphi} \cos \vartheta \quad (4.2.13)$$

a dosadíme do (4.2.11), čímž vyloučíme  $\dot{\psi}$ :

$$\dot{\varphi} I_1 \sin^2 \vartheta + I_1 a \cos \vartheta = I_1 b \quad .$$

Odtud

$$\dot{\varphi} = \frac{b - a \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \quad . \quad (4.2.14)$$

Budeme-li tedy znát závislost  $\vartheta = \vartheta(t)$ , můžeme z (4.2.14) najít  $\varphi = \varphi(t)$ . Dosadíme-li pak (4.2.14) do (4.2.13), dostaneme

$$\dot{\psi} = \frac{I_1}{I_3} a - \cos \vartheta \frac{b - a \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \quad , \quad (4.2.15)$$

což dává – opět, známe-li funkci  $\vartheta = \vartheta(t)$  – závislost  $\psi = \psi(t)$ . Závislost  $\vartheta = \vartheta(t)$  můžeme získat, vyloučíme-li v (4.2.12)  $\dot{\psi}$  a  $\varphi$  pomocí (4.2.14) a (4.2.15). Z (4.2.10) plyne, že

$$\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta = \frac{I_1}{I_3} a$$

a proto můžeme zavést místo energie novou konstantu

$$E' = E - \frac{1}{2} I_3 \left( \frac{I_1}{I_3} a \right)^2$$

a psát (4.2.12) ve tvaru

$$E' = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) + \mathcal{M}gl \cos \vartheta \quad . \quad (4.2.16)$$

Odtud dosazením za  $\dot{\varphi}$  z (4.2.14)

$$\frac{1}{2} I_1 \dot{\vartheta}^2 = E' - \frac{(b - a \cos \vartheta)^2}{\sin^2 \vartheta} \frac{I_1}{2} - \mathcal{M}gl \cos \vartheta \quad ,$$

neboli

$$(\sin^2 \vartheta) \dot{\vartheta}^2 = \sin^2 \vartheta (\alpha - \beta \cos \vartheta) - (b - a \cos \vartheta)^2 \quad ,$$

kde jsme označili

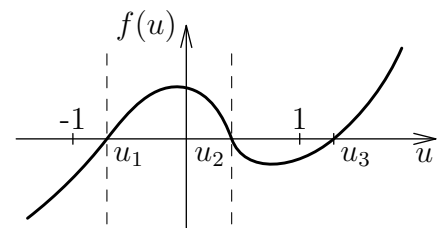
$$\alpha = \frac{2E'}{I_1} \quad , \quad \beta = \frac{2\mathcal{M}gl}{I_1} \quad .$$

Zavedeme nyní novou proměnnou  $u = \cos \vartheta$ , takže  $\dot{u} = -(\sin \vartheta) \dot{\vartheta}$ . Pak

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2 \quad (4.2.17)$$

a integrací

$$t = \int_{u(0)}^{u(t)} \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2}} \quad (4.2.18)$$



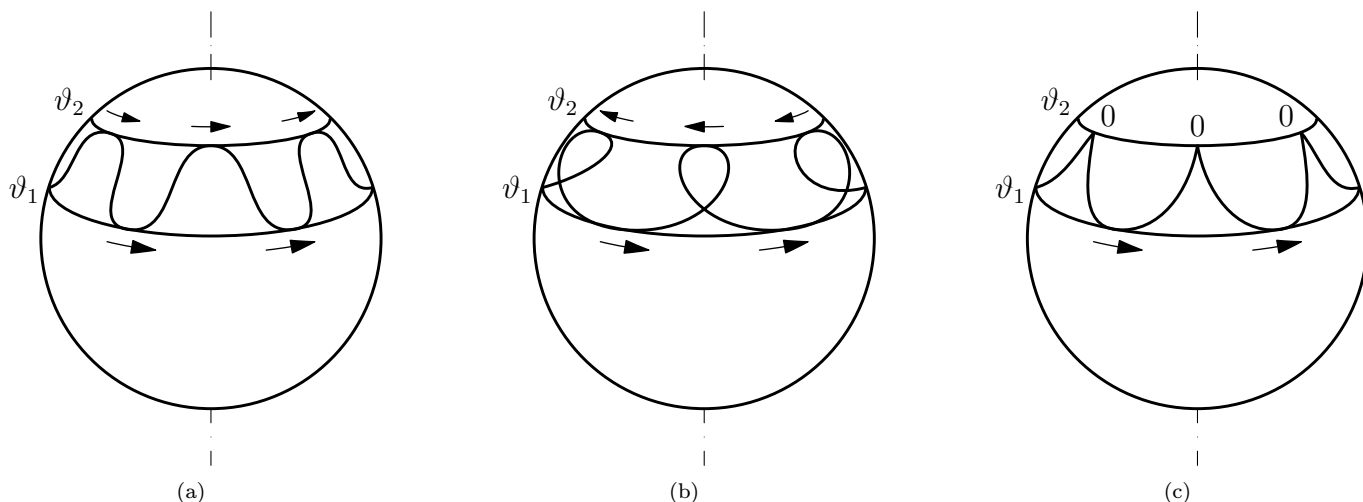
Obr. 4.2: Možný Průběh funkce  $f(u)$

Integrál (4.2.18) obsahuje pod odmocninou kubický polynom a nelze jej vypočítat elementárními funkcemi. Kdybychom jej však dovedli spočítat, dostali bychom  $\vartheta = \vartheta(t)$  a z rovnic (4.2.14) a (4.2.15) bychom mohli určit  $\varphi(t)$  a  $\psi(t)$ , čímž by naše úloha byla vyřešena.

Základní charakter pohybu můžeme naštěstí posoudit i bez výpočtu integrálu (4.2.18). Označme  $f(u)$  pravou stranu (4.2.17). Jak vidíme, je to kubický polynom a jeho kořeny určují úhly  $\vartheta_1, \vartheta_2$ , při nichž mění  $\dot{\vartheta}$  znaménko. Při velkých hodnotách  $u$  je převládajícím členem tohoto polynomu člen  $\beta u^3$ . Podle definice je  $\beta > 0$  a tedy  $f(u)$  bude pro velká kladná  $u$  funkce kladnou, pro velká záporná  $u$  funkcí zápornou. V bodech  $u = \pm 1$  je  $f(u)$  rovna  $-(b - au)^2$  a tedy záporná (s výjimkou případu, kdy  $u = \pm 1$  je kořenem  $f(u)$ ). Průběh funkce  $f(u)$  tedy bude mít charakter zobrazený na (obr.4.2). Protože  $f(u) = \dot{u}^2 > 0$  a protože pro reálné úhly musí být  $-1 \leq u \leq 1$ , tj.  $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$ , bude se zřejmě setrvačnick pohybovat tak, že  $\cos \vartheta$  bude stále mezi kořeny  $u_1$  a  $u_2$ .

Pohyb setrvačnicku se dá výhodně zobrazit pomocí křivky, kterou opisuje koncový bod jednotkového vektoru namířeného v kladném směru pohyblivé osy  $x_3$  (tento vektor se nazývá *apex*). Je to sférická křivka a její souřadnice na kouli odpovídají úhlům  $\vartheta$  a  $\varphi$ . Z předchozího je vidět, že tato křivka musí ležet mezi kružnicemi  $\vartheta_1 = \arccos u_1$  a  $\vartheta_2 = \arccos u_2$ , přičemž  $\dot{\vartheta}$  je na těchto kružnicích rovno nule.

Abychom blíže specifikovali tvar křivky opisované apexem, musíme uvažovat o znaménku  $\dot{\varphi}$  v (4.2.14), které je určeno čitatelem, tedy výrazem  $b - au$ . Jestliže kořen tohoto výrazu leží vně intervalu  $(u_1, u_2)$  (poloha tohoto kořene je ovlivněna počátečními podmínkami pohybu), bude derivace  $\dot{\varphi}$  mít stejné znaménko při všech  $\vartheta$  ležících mezi mezními hodnotami, a tedy křivka opisovaná apexem se bude kružnic  $\vartheta_1$  a  $\vartheta_2$  dotýkat tak, že  $\dot{\varphi}$  bude mít jak při  $\vartheta_1$ , tak při  $\vartheta_2$  stejný směr. V tomto případě se úhel mění monotonně, osa setrvačnicku vykonává kolem vertikální osy *precesní pohyb*. Kromě toho se osa kolébá mezi krajními úhly  $\vartheta_1$  a  $\vartheta_2$  – tento pohyb se nazývá *nutací*. Jsou-li počáteční podmínky takové, že kořen činitele  $b - au$  leží mezi  $u_1$  a  $u_2$ , bude  $\dot{\varphi}$  měnit znaménko. Je-li kořen  $b - au$  roven kořenu polynomu  $f(u)$ , bude v příslušném bodě odpovídající hraniční kružnice jak  $\dot{\vartheta} = 0$ , tak také  $\dot{\varphi} = 0$ . Křivky opisované apexem v těchto případech jsou zobrazeny na (obr. 4.3a–c).



Obr. 4.3: Křivky opisované apexem

Speciálním případem pohybu těžkého setrvačnicku je tzv. *spící setrvačnick*. Předpokládejme, že setrvačnick je roztáčen ve vertikální ose, tj.  $\vartheta = 0$ ,  $\psi \neq 0$ ; pak z (4.2.10) a (4.2.11) plyne, že  $a = b$  a dále z (4.2.16) je

$$E' = Mgl,$$

takže

$$\alpha = \frac{2E'}{I_1} = \frac{2Mgl}{I_1} = \beta.$$

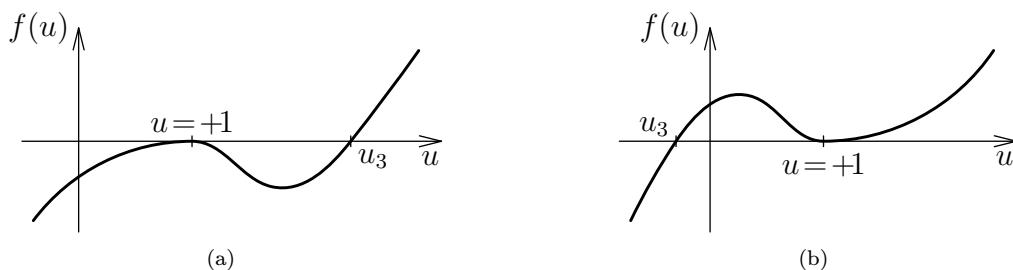
Z (4.2.17) pak bude

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2)\beta(1 - u) - a^2(1 - u)^2$$

nebo

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2) [\beta(1 + u) - a^2].$$

Je tedy  $u = 1$  dvojnásobný kořen, třetí kořen je  $u_3 = a^2/\beta - 1$ . Pro  $a^2/\beta > 2$  je  $u_3 > 1$  a jediný možný pohyb je při  $u = 1$ , tj. setrvačnick rotuje stále kolem vertikální osy („spící“). Pro  $a^2/\beta < 2$  je  $u_3 < 1$  a dochází k nutaci mezi polohami  $u = 1$  a  $u = u_3$  (obr. 4.4a,b). Hodnota výrazu  $a^2/\beta$  závisí na počátečních podmínkách.



Obr. 4.4: Speciální případy  $f(u)$  pro spící setrvačnick

Reálný pohyb setrvačnicku probíhá tak, že počíná-li při  $a^2/\beta > 2$ , zmenšuje se vlivem tření rychlost rotace setrvačnicku, až při určité kritické rychlosti rotace  $\omega_k$  vzniká precese setrvačnicku původně „spícího“. Platí

$$\frac{a^2}{\beta} = \left(\frac{I_3}{I_1}\right)^2 \frac{\omega_k^2 I_1}{2Mgl} = \left(\frac{I_3}{I_1}\right) \frac{I_3 \omega_k^2}{2Mgl} = 2,$$

odkud můžeme určit kritickou rychlost

$$\omega_k = \frac{2}{I_3} \sqrt{\mathcal{M}glI_1}.$$

#### 4.2.4 Pohyb částice v rotující soustavě

Studujeme nyní pohyb částice v soustavě rotující úhlovou rychlostí  $\boldsymbol{\omega}$  kolem počátku; (předpokládejme pro jednoduchost, že  $\boldsymbol{\omega} = \text{konst.}$  I když tato úloha není úlohou na pohyb tuhého tělesa, setkali jsme se s nutností popsat pohyb z hlediska rotující soustavy právě v souvislosti s rotací tuhého tělesa a proto ji zařazujeme na tomto místě.

Vztah (4.1.17) umožňující nalezení časové derivace libovolného vektoru v rotující soustavě můžeme aplikovat i na polohový vektor  $\mathbf{r}$  charakterizující polohu částice. Dostáváme

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d'\mathbf{r}}{dt} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (4.2.19)$$

Výraz  $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}_a$  představuje rychlost částice v soustavě nepohyblivé, tzv. *absolutní rychlost částice*,  $d'\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}_r$  je *relativní rychlost* částice vzhledem k rotující soustavě,  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{v}_u$  je rychlost, kterou je částice "unášena" soustavou a nazývá se proto *rychlostí unášivou*. Píšeme tedy

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_u.$$

Další aplikací symbolického vzorce (4.1.17) na (4.2.19) (za předpokladu  $\boldsymbol{\omega} = \text{konst.}$ ) dostaneme

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d'^2\mathbf{r}}{dt^2} + 2 \left( \boldsymbol{\omega} \times \frac{d'\mathbf{r}}{dt} \right) + [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]. \quad (4.2.20)$$

První výraz napravo je opět *relativní zrychlení*, druhý představuje tzv. *Coriolisovo zrychlení* a třetí je *zrychlení unášivé*; jejich součet dává zrychlení v nepohyblivé soustavě, tzv. *zrychlení absolutní*. Podle 2. Newtonova zákona pak platí

$$m \frac{d'^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - 2m \left( \boldsymbol{\omega} \times \frac{d'\mathbf{r}}{dt} \right) - m [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]. \quad (4.2.21)$$

V rotující soustavě působí tedy na částici kromě pravé síly  $\mathbf{F}$  ještě síla odstředivá  $\mathbf{F}_o = -m [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]$  a síla Coriolisova  $\mathbf{F}_c = -2m (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r)$ , která je nenulová, jen když se částice pohybuje vzhledem k rotující soustavě.

Protože je naše Země rovněž rotující soustavou, můžeme ocenit velikost těchto přídatných sil u pohybů probíhajících na povrchu Země. Úhlová rychlost rotace Země je  $\omega \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ .

Odstředivé zrychlení je maximální na rovníku, kde jsou vektory  $\boldsymbol{\omega}$  a  $\mathbf{r}$  na sebe kolmé; přibližně je tam  $\omega_r^2 \approx 0,034 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , to činí jen asi 0,3% tíhového zrychlení. Odstředivá síla je tedy na zemském povrchu zanedbatelná.

Jiná je situace u síly Coriolisovy. Maximální velikost Coriolisova zrychlení je  $a_c^{\text{max}} = 2\omega v_r \approx 1,5 \cdot 10^{-4} v_r$ , tedy zdánlivě zanedbatelná proti vlastní rychlosti  $\mathbf{v}_r$ . Nesmíme však zapomínat, že Coriolisovo zrychlení je kolmé na rychlost  $\mathbf{v}_r$ ; Pohybuje-li se částice delší dobu rychlostí  $\mathbf{v}_r$ , způsobí Coriolisova síla zakřivení trajektorie částice a to na severní polokouli doprava, na jižní doleva. Působením Coriolisovy síly můžeme vysvětlit existenci rotujících vzdušných proudění, která mají na severní a jižní polokouli opačný směr rotace (cyklony a anticyklony), ale také tvoření meandrů při toku řeky apod.

Rovněž při výpočtu pohybů mezikontinentálních balistických střel je třeba s Coriolisovou silou pracovat. Experimentální stanovení Coriolisova zrychlení je možné z měření stočení roviny kyvu matematického kyvadla (s velkou délkou závěsu), tzv. Foucaultova kyvadla.

#### Literatura ke kapitole 4

- [1] Arnold V.I.: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, New York–Berlin–Heidelberg 1997.
- [2] Bajer J.: *Mechanika 2*. PřF UP Olomouc 2004.
- [3] Brdička M., Hladík A.: *Teoretická mechanika*. Academia, Praha 1987.
- [4] Chorlton F.: *Textbook of Dynamics*. D. van Nostrand Company Ltd., London 1963.
- [5] Goldstein H.: *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1980.
- [6] Gregory R.D.: *Classical mechanics*. Cambridge University Press 2006.
- [7] Greiner W.: *Classical mechanics. System of particles and Hamiltonian mechanics*. Springer-Verlag, New York 2003.
- [8] Horský J., Novotný J., Štefaník M.: *Mechanika ve fyzice*. Academia, Praha 2001.
- [9] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.: *Механика*. Наука, Москва 1988.
- [10] Tözeren A.: *Human Body Dynamics. Classical Mechanics and Human Movement*. Springer-Verlag, New York 2000.

- [11] Trkal V.: *Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa*. ČSAV, Praha 1956.
- [12] Vybíral B.: *Kinematika a dynamika tuhého tělesa*. Knihovnička FO č. 31, MAFY, Hradec Králové 1997. Ke stažení na adrese <http://fo.cuni.cz/texty/dynamika.pdf>.
- [13] Vybíral B.: *Setrvačnický a jejich aplikace*. Knihovnička FO č. 34, MAFY, Hradec Králové 1998. Ke stažení na adrese <http://fo.cuni.cz/texty/setrv.pdf>.

# Kapitola 5

## Obecné principy mechaniky

V 3. kapitole jsme formulovali jeden velmi obecný princip mechaniky, princip virtuální práce. Z něj jsme pak s použitím principu d'Alembertova odvodili prakticky všechny důležité rovnice, které popisovaly pohyb soustavy částic nebo tuhého tělesa. Princip virtuální práce ovšem vycházel z okamžitého stavu soustavy a z malých virtuálních změn tohoto stavu; můžeme jej proto označit za *princip diferenciální*. Ukážeme nyní, že je možné také formulovat princip umožňující popis chování soustavy během určitého konečného časového intervalu. Principy tohoto typu označujeme za *principy integrální*. Nejvýznamnějším z nich je princip Hamiltonův, jemuž věnujeme následující část.

### 5.1 Hamiltonův princip

Polohu všech částic soustavy určujeme v daném okamžiku zadáním zobecněných souřadnic  $q_1, q_2, \dots, q_f$ ; říkáme, že zadání těchto souřadnic nám určuje *konfiguraci* soustavy. Souřadnice  $q_1, q_2, \dots, q_f$  můžeme pokládat za souřadnice bodu, tzv. *reprezentujícího bodu v  $f$ -rozměrném konfiguračním prostoru*. Každý reprezentující bod tedy reprezentuje určitou konfiguraci soustavy. V průběhu času se stav soustavy mění a reprezentující bod v konfiguračním prostoru opisuje křivku, tzv. *konfigurační trajektorii*. Pohyb soustavy můžeme tedy studovat jako pohyb reprezentujícího bodu po konfigurační trajektorii. Čas  $t$  lze přitom pokládat za parametr.

Konfigurační prostor nesplyvá ovšem obecně s trojrozměrným prostorem, v němž se soustava pohybuje a rovněž konfigurační trajektorie není totožná s určitou trajektorií některé částice soustavy: Každý bod konfigurační trajektorie popisuje polohy všech částic soustavy.

Představme si nyní, že v určitém okamžiku  $t_1$  je konfigurace soustavy popsána souřadnicemi  $q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, \dots, q_f^{(1)}$  (zkráceně je budeme značit  $q_j^{(1)}$ ) a v okamžiku  $t_2$  souřadnicemi  $q_j^{(2)}$ . Těmto konfiguracím necht' odpovídají body  $A(q_j^{(1)}, t_1)$  a  $B(q_j^{(2)}, t_2)$  v konfiguračním prostoru. Pro jednorozměrný konfigurační prostor můžeme rozvinout konfigurační trajektorii v čase, jak je znázorněno na obr. 5.1; analogickou situaci si však můžeme představit i pro konfigurační trajektorii v obecném případě.

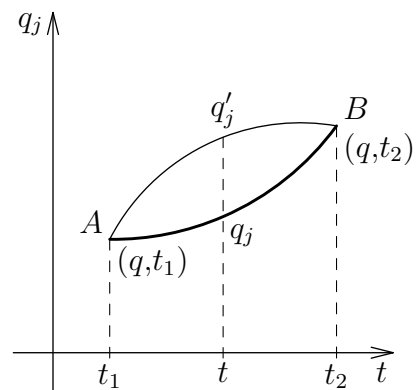
Představme si, že na obr. 5.1 odpovídá silná čára konfigurační trajektorii reprezentující skutečný pohyb soustavy v intervalu od  $t_1$  do  $t_2$ . Spolu se skutečným pohybem soustavy však můžeme uvažovat i jiné kinematicky přípustné pohyby, tj. pohyby slučitelné s vazbami, jímž je studovaná soustava podrobena. Při nich by se reprezentující bod pohyboval po jiných konfiguračních trajektoriích, z nichž jedna (rozvinutá opět v čase) je na obr. 5.1 vyznačena slabší čarou.

Protože se jedná o kinematicky přípustné pohyby, můžeme odpovídající zobecněné souřadnice při určitém  $t$  dostat vždy virtuální změnou  $q'_j = q_j + \delta q_j$ ; výraz  $\delta q_j$  budeme v dalších úvahách nazývat *variací  $q_j$* .

Neznáme-li konfigurační trajektorii, která odpovídá skutečnému pohybu soustavy, můžeme ji ze všech možných kinematicky přípustných trajektorií, které lze proložit body  $A$  a  $B$  vybrat na základě *Hamiltonova principu*:

Skutečný pohyb konzervativní soustavy v intervalu od  $t_1$  do  $t_2$  je zobrazen takovou konfigurační trajektorií, na které integrál

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f, t) dt$$



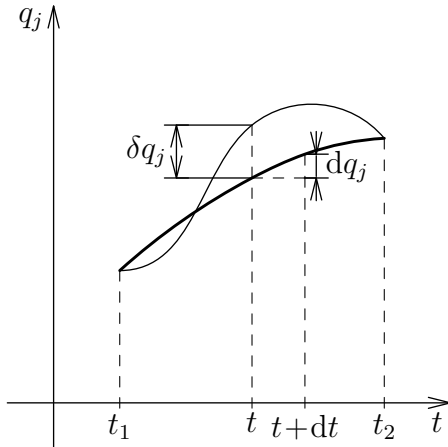
Obr. 5.1: Rozvinutí konfigurační trajektorie v čase

nabývá extrémní hodnoty. Zde  $L$  je Lagrangeova funkce  $L = T - U$ . Matematicky formulujeme Hamiltonův princip jako tvrzení, že variace integrálu  $S$  při pevných hodnotách  $t_1$  a  $t_2$  je rovna nule

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0. \quad (5.1.1)$$

Hamiltonův princip a princip virtuální práce jsou ekvivalentní. Z Hamiltonova principu je možné odvodit Lagrangeovy rovnice, lze ale také vyjít z principu virtuální práce a odvodit z něho princip Hamiltonův. Kterýkoliv z těchto principů tedy můžeme zvolit za základní a vybudovat na něm celou mechaniku.

Zmínili jsme se již, že přechod od konfigurační trajektorie, která odpovídá skutečnému pohybu k jiné kinematicky přípustné trajektorii je charakterizován virtuální změnou každé souřadnice  $\delta q_j$ , kterou nazýváme variací (přesněji izochronní variací, neboť se bere při konstantním  $t$ ). Kinematicky znamená  $\delta q_j$  virtuální posunutí; ujasněme si nyní, co znamená geometricky.



Necht' je nějaká souřadnice  $q_j$  známou funkcí času  $q_j(t)$ ; její diferenciál  $dq_j$  představuje změnu souřadnice v důsledku skutečného pohybu soustavy. Změňme nyní souřadnici  $q_j$  tím způsobem, že položíme

$$q'_j = q_j + \alpha \eta_j(t), \quad (5.1.2)$$

kde  $\alpha$  je libovolný parametr,  $\eta_j(t)$  diferencovatelná funkce času. Taková změna  $q_j$  vznikající v důsledku změny funkce  $q_j(t)$  jako celku se nazývá variací

$$\delta q_j = q'_j - q_j = \alpha \eta_j(t)$$

Geometrický rozdíl mezi  $dq_j$  a  $\delta q_j$  je vidět na obr. 5.2.

Lehce se můžeme přesvědčit, že operace variování a derivování podle času jsou záměnné – např.

$$\delta \dot{q}_j = \dot{q}'_j - \dot{q}_j = \frac{d}{dt}(\alpha \eta_j) = \frac{d}{dt}(\delta q_j).$$

Obr. 5.2: Geometrický rozdíl mezi  $dq_j$  a  $\delta q_j$

Dáváme-li parametru  $\alpha$  v (5.1.2) různé hodnoty, dostáváme jednoparametrickou soustavu křivek. Každou z těchto křivek můžeme tedy považovat za funkci času a parametru  $\alpha$ ,  $q_j = q_j(t, \alpha)$ . Variace odčítáme vždy jako rozdíl funkčních hodnot nějaké křivky z této soustavy a křivky základní, odpovídající skutečnému pohybu. Předpokládejme, že této základní křivce přísluší hodnota parametru  $\alpha = \alpha_0$ . Variace se pak dá psát

$$\delta q_j = q_j(t, \alpha) - q_j(t, \alpha_0).$$

Jestliže předpokládáme, že se  $\alpha$  málo liší od  $\alpha_0$ , např.  $\alpha = \alpha_0 + d\alpha$ , můžeme rozvinout  $q_j(t, \alpha)$  v Taylorovu řadu a omezit se na první člen řady, takže

$$\delta q_j = \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} d\alpha. \quad (5.1.3)$$

Aby studovaná jednoparametrická soustava křivek popisovala jen takové trajektorie, které procházejí body  $A$  a  $B$ , musíme navíc požadovat, aby

$$\delta q_j|_{t=t_1} = \delta q_j|_{t=t_2} = 0. \quad (5.1.4)$$

Při volbě soustavy křivek definované rovnicí (5.1.2) to znamená, že funkce  $\eta_j(t)$  musejí pro  $t = t_1$  a  $t = t_2$  být rovny nule.

Nyní už můžeme přejít k vlastní matematické formulaci problému, tj. k nalezení takové funkce  $q(t)$ , která dává integrálu  $S$  extrémní hodnotu. Vzhledem k tomu, že každá z přípustných křivek odpovídá nějaké hodnotě parametru  $\alpha$ , můžeme integrál  $S$  pokládat za funkci tohoto parametru. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že extrémní hodnotu dává integrálu  $S$  křivka odpovídající parametru  $\alpha = 0$ . Podmínku extrému  $S$  můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\left( \frac{\partial S}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = 0$$

nebo, násobením  $d\alpha$

$$\left( \frac{\partial S}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha = \delta S = 0, \quad (5.1.5)$$

kde analogicky s (5.1.3) nazýváme  $\delta S$  variací integrálu  $S$ . Vypočítejme nejprve  $\partial S / \partial \alpha$ :

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \right) dt.$$



Rozvedením na dva integrály zjistíme, že druhý integrál se dá vypočítat per partes

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right) dt = \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} dt.$$

Znásobíme-li nyní celou rovnicí  $d\alpha$  a položíme  $\alpha = 0$ , a uvážíme-li, že vzhledem k podmínce (5.1.4) je vyintegrováný člen roven nule, dostáváme

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt = 0.$$

Protože jsou souřadnice  $q_1, \dots, q_f$  nezávislé, jsou také variace  $\delta q_i$  nezávislé; proto bude tento vztah splněn, jestliže

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, f,$$

což jsou skutečně Lagrangeovy rovnice druhého druhu. Integrál  $S$  tedy nabývá extrémní hodnoty pro takové funkce  $q_1, q_2, \dots, q_f$ , které jsou řešením soustavy diferenciálních rovnic (5.1.5)

Podotkněme, že naše úloha byla formulována natolik obecně, že rovnice (5.1.5) můžeme považovat za základní rovnice pro řešení tzv. *variační úlohy*: Najít křivku, která dává extrém integrálu typu  $S$ . V matematice se tyto rovnice zpravidla nazývají *Eulerovy-Lagrangeovy rovnice variačního počtu*.

Ukázali jsme, že z Hamiltonova principu lze odvodit Lagrangeovy rovnice 2. druhu, dá se však ukázat i naopak, že z principu virtuální práce pro soustavu v pohybu lze odvodit princip Hamiltonův – touto problematikou se zde však již zabývat nebudeme.

## 5.2 Hamiltonovy kanonické rovnice

V předešlé části jsme formulovali Hamiltonův princip, o němž jsme si řekli, že jej lze pokládat za základní princip mechaniky. Pro konkrétní řešení pohybu mechanické soustavy bychom ovšem museli postupovat tak, jak bylo v minulé kapitole naznačeno, tj. odvodit z principu Hamiltonova Lagrangeovy pohybové rovnice a tyto rovnice pak obvyklými metodami řešit. Této metodě řešení mechanických problémů se zpravidla říká metoda Lagrangeova. I když je to v praxi velmi běžná metoda, není jediná; existují také jiné metody a nejdůležitější z nich, tzv. Hamiltonovu metodu, si nyní popíšeme.

Lagrangeovy rovnice jsou diferenciální rovnice 2.řádu; aby byl pohyb soustavy určen jednoznačně, je třeba zadat počáteční podmínky, tj. počáteční hodnoty všech  $q_i$  a  $\dot{q}_i$ . V tomto smyslu představují  $q_i$  a  $\dot{q}_i$  úplnou soustavu  $2f$  nezávisle proměnných potřebných k popisu pohybového stavu soustavy. Pohyb soustavy je ale možné popsat také zadáním zobecněných souřadnic  $q_i$  a zobecněných hybností  $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ ; tyto parametry lze opět pokládat za soustavu  $2f$  nezávisle proměnných ve  $2f$ -rozměrném prostoru, který nazýváme *prostorem fázovým*. Chceme-li však používat proměnné  $(q, p, t)$  místo dosud užívaných  $(q, \dot{q}, t)$ , je nutné, abychom místo funkce  $L(q, \dot{q}, t)$  zavedli jinou funkci podobných vlastností jako  $L$ , která však bude funkcí proměnných  $(q, p, t)$ .

Nejvhodnější způsob přechodu od proměnných  $(q, \dot{q}, t)$  k proměnným  $(q, p, t)$  spočívá v použití matematické transformace známé jako Legendreova transformace. Ukážeme si tento postup na jednoduchém příkladě.

Uvažme libovolnou funkci dvou proměnných  $f(x, y)$ ; její diferenciál je

$$df = u dx + v dy,$$

kde

$$u = \frac{\partial f}{\partial x} \quad , \quad v = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Přejdeme nyní od nezávisle proměnných  $x, y$  k proměnným  $u, y$  a tedy od diferenciálů  $dx, dy$  k diferenciálům  $du, dy$ . Definujeme-li funkci

$$g = ux - f, \tag{5.2.1}$$

bude její diferenciál

$$dg = u dx + x du - df = x du - v dy,$$

kde veličiny  $x, v$  jsou nyní funkcemi proměnných  $u, y$  a definují se rovnicemi

$$x = \frac{\partial g}{\partial u} \quad , \quad v = -\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Přechodu od funkce  $f$  proměnných  $x, y$  k funkci  $g$  proměnných  $\partial f / \partial x, y$  uskutečněnému rovnicí (5.2.1) se říká *Legendreova transformace*. Dá se jednoduše rozšířit i na případ funkcí více proměnných. Naše hledaná transformace bude zřejmě stejného typu, protože od funkce  $L$  proměnných  $(q, \dot{q}, t)$  chceme přejít k funkci proměnných  $(q, \partial L / \partial \dot{q}, t)$ .

Označíme-li transformovanou funkci  $H$ , můžeme ji definovat vztahem

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t), \quad (5.2.2)$$

kde zkrácené označení  $H(q, p, t)$  je opět třeba chápat jako

$$H(q, p, t) = H(q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f, t).$$

Tuto funkci nazýváme *Hamiltonovou funkcí (hamiltoniánem)*. V kapitole (6.1) jsme definovali podobnou funkci, ale jen pro případ  $L \neq L(t)$ . Tam jsme též viděli, že v případě stacionárních vazeb je  $H$  konstantní, rovna celkové mechanické energii soustavy. V tomto případě máme také jednoduchou metodu pro sestavení hamiltoniánu: stačí, jestliže ve výrazu  $T + U$  nahradíme zobecněné rychlosti  $\dot{q}$  zobecněnými hybnostmi  $p$ .

Protože je funkce  $H$  definována rovnicí (5.2.2), je její úplný diferenciál

$$dH = \sum_{i=1}^f \dot{q}_i dp_i + \sum_{i=1}^f p_i d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (5.2.3)$$

Na druhé straně z předpokladu, že  $H = H(q, p, t)$  vyplývá pro diferenciál přímo

$$dH = \sum_{i=1}^f \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^f \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (5.2.4)$$

Druhý a třetí člen napravo v (5.2.3) se ruší vzhledem k definici zobecněné hybnosti. Kromě toho můžeme do čtvrtého členu napravo dosadit z Lagrangeových rovnic

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \dot{p}_i$$

Porovnáním koeficientů u  $dq_i, dp_i$  a  $dt$  v (5.2.3) a (5.2.4) dostáváme vztahy

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}, \quad (5.2.5)$$

$$i = 1, 2, \dots, f$$

což je vztah plynoucí přímo z definice funkce  $H$ . Rovnice (5.2.5) se nazývají *Hamiltonovy kanonické rovnice*.

Soustava Hamiltonových kanonických rovnic je ekvivalentní  $f$  rovnicím Lagrangeovým. Z matematického hlediska představuje tato soustava převedení  $f$  rovnic Lagrangeových, které jsou rovnicemi druhého řádu, na  $2f$  rovnic řádu prvního. Integrací Hamiltonových kanonických rovnic dostaneme  $q_i, p_i$  jako funkce času a  $f$  libovolných integračních konstant.

Hamiltonovy kanonické rovnice můžeme odvodit také z Hamiltonova principu, jestliže variujeme proměnné  $q_i, p_i$  jako nezávislé, tj. variujeme křivku, která charakterizuje pohyb soustavy v  $2f$ -rozměrném fázovém prostoru. Dosadíme-li do (5.1.1) za  $L$  z (5.2.2), je

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - H \right) dt = 0. \quad (5.2.6)$$

Dále můžeme postupovat formálně shodně jako v předcházející kapitole; variováním za integračním znaménkem dostaneme

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{i=1}^f p_i \delta \dot{q}_i + \sum_{i=1}^f \dot{q}_i \delta p_i - \sum_{i=1}^f \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \sum_{i=1}^f \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt = 0, \quad (5.2.7)$$

přičemž už nerozepisujeme variace pomocí parametru  $\alpha$ , nýbrž využíváme zřejmé formální analogie mezi diferencováním při konstantním  $t$  a variací. První člen pak integrujeme per partes

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f p_i \delta \dot{q}_i dt = \sum_{i=1}^f p_i \delta q_i \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f \dot{p}_i \delta q_i dt$$

a vyintegrovaný člen je opět roven nule vzhledem k (5.1.4). Zaměníme-li ještě pořadí variace a sumace, můžeme (5.2.7) přepsat

$$\sum_{i=1}^f \int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left( \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] dt = 0. \quad (5.2.8)$$

Přesně vzato, nejsou variace  $\delta q_i$  a  $\delta p_i$  nezávislé, neboť jsou vázány časovou závislostí. Nemůžeme proto jednoduše říci, že je vztah (5.2.8) splněn, jsou-li výrazy v kulatých závorkách nulové. K tomuto závěru však vede jiná cesta: Derivujeme rovnici (5.2.2) parciálně podle  $p_i$ . Dostaneme

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i + \sum_{j=1}^f p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i},$$

což vzhledem k definici  $p_j$  dává

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

První kulatá závorka v (5.2.8) je tedy rovna nule a v důsledku nezávislosti  $q_i$  je pak už rovna nule i závorka druhá pro všechna  $i$ . Dostáváme tedy opět soustavu rovnic (5.2.5). Ukažme použití Hamiltonova formalismu na jednoduchých příkladech.

### Volný pád v neodporujícím prostředí

Částice necht' má hmotnost  $m$  a pohybuje se po vertikále,  $q$  necht' je její vzdálenost od povrchu Země. Pak

$$T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 \quad , \quad U = mgq.$$

Protože

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m\dot{q},$$

je  $\dot{q} = p/m$  a tedy

$$H = T + U = \frac{p^2}{2m} + mgq.$$

Kanonické rovnice mají tvar

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad , \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -mg.$$

První z nich je jen definicí zobecněné hybnosti a nedává tedy nic nového. Druhá rovnice po integraci dává

$$p = -mgt + C_1,$$

kde  $C_1$  je integrační konstanta. Dosazením  $p = m\dot{q}$  plyne

$$\dot{q} = -gt + C_2,$$

kde  $C_2 = \frac{C_1}{m}$  a integrací

$$q = -\frac{1}{2}gt^2 + C_2t + C_3.$$

Položíme-li počáteční podmínky  $q = q_0$ ,  $\dot{q} = v_0$  pro  $t = 0$ , plyne  $C_3 = q_0$ ,  $C_2 = v_0$ , takže

$$q = q_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2,$$

což je známá rovnice pro volný pád v neodporujícím prostředí.

### Pohyb v poli centrální síly

Při obvyklé formulaci problému položíme  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \varphi$ , takže

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$$

a odtud

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi},$$

takže

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}.$$

Hamiltonova funkce bude

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + U(r)$$

a kanonické rovnice dávají soustavu

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - \frac{\partial U}{\partial r}, \quad \dot{p}_\varphi = 0$$

První dvojice rovnic jsou opět definiční rovnice zobecněných hybností, druhé dvě představují pohybové rovnice zapsané v zobecněných hybnostech. Je zřejmé, že při přechodu od proměnných  $p_r, p_\varphi$  zpět k zobecněným rychlostem by tyto rovnice přešly na známé rovnice centrálního pohybu; jejich řešením v proměnných  $p_r, p_\varphi$  se už zabývat nebudeme.

Seznámili jsme se už tedy s Lagrangeovou a Hamiltonovou metodou studia mechanických problémů. V některých případech bývá výhodné spojit obě uvedené metody zavedením tzv. *Routhovy funkce*, která nám umožňuje zapsat pohybové rovnice zčásti jako rovnice 1. řádu, zčásti jako rovnice 2. řádu.

Rozdělme si zobecněné souřadnice na dvě skupiny, které označíme

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\nu)(q_1, q_2, \dots, q_{f-\nu}).$$

Lagrangeova funkce je funkcí proměnných  $q_i, \dot{q}_i, \xi_j, \dot{\xi}_j, t$ , kde  $j = 1, 2, \dots, \nu$ ,  $i = 1, 2, \dots, f - \nu$ . Pak lze definovat Routhovu funkci

$$R(q_i, \dot{q}_i, \xi_j, p_{\xi_j}, t) = \sum_{j=1}^{\nu} p_{\xi_j} \dot{\xi}_j - L \quad (5.2.9)$$

a metodou obdobnou jako při odvození Hamiltonových kanonických rovnic, tj. vytvořením úplných diferenciálů a porovnáním koeficientů zjistíme, že platí

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (5.2.10)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \xi_j} = -\dot{p}_{\xi_j}, \quad \frac{\partial R}{\partial p_{\xi_j}} = \dot{\xi}_j \quad (5.2.11)$$

a také

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Přepíšeme-li pro proměnné  $q_1, q_2, \dots, q_{f-\nu}$  Lagrangeovy rovnice pomocí Routhovy funkce, dostaneme s přihlédnutím k (5.2.10)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, f - \nu \quad (5.2.12)$$

Rovnice (5.2.11) a (5.2.12) jsou v podstatě identické s Hamiltonovými a Lagrangeovými rovnicemi, v nichž hraje Routhova funkce v jednom případě úlohu lagranžiánu, v druhém hamiltoniánu.

Použití  $R$  je výhodné zejména tehdy, jsou-li některé souřadnice cyklické v Routhově funkci. Z definice  $R$  plyne, že je-li některá souřadnice cyklická v lagranžiánu, je cyklická i v Routhově funkci. Předpokládejme, že  $\nu$  souřadnic je cyklických a označme je  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\nu$ . Pak z (5.2.11) plyne  $p_{\xi_j} = C_j$  a  $R$  je funkcí jen proměnných

$$R = R(q_i, \dot{q}_i, C_j, t),$$

takže zbývá  $f - \nu$  pohybových rovnic (5.2.12). Zavedení Routhovy funkce nám umožnilo v tomto případě snížit počet pohybových rovnic, jež je třeba integrovat, na  $f - \nu$ . Je-li  $R$  známa, určí se cyklické souřadnice  $\xi_j$  pomocí jedné kvadratury. Z (5.2.11) plyne

$$\dot{\xi}_j = \frac{\partial R}{\partial p_{\xi_j}} = \frac{\partial R}{\partial C_j},$$

takže

$$\xi_j = \int \frac{\partial R}{\partial C_j} dt + \alpha_j,$$

kde  $\alpha_j$  jsou integrační konstanty.

Zapišme ještě integrál energie pomocí funkce  $R$ . Platí

$$\sum_{i=1}^{f-\nu} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_j} \dot{\xi}_j - L = C.$$

Vzhledem k (5.2.10) a definici  $R$  se však dá poslední vztah zapsat ve tvaru

$$R - \sum_{i=1}^{f-\nu} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = C.$$

Nezávisí-li  $L$  na čase,  $L \neq L(t)$  a kinetická energie je homogenní funkcí 2.stupně v zobecněných rychlostech (stacionární vazby), je  $C = E$  a integrál energie je

$$R - \sum_{i=1}^{f-\nu} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = E. \quad (5.2.13)$$

### 5.3 Jiné integrální principy

Integrál

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (5.3.1)$$

často také nazýváme *integrálem akce* (přesněji *Hamiltonova akce*).  $S$  je funkcí  $q_i^{(1)}$ ,  $t_1$ ,  $q_i$ ,  $t$ , považujeme-li horní mez za proměnnou. Můžeme se o tom přesvědčit takto: Předpokládejme, že známe

$$q_i = q_i(q_j^{(1)}, p_j^{(1)}, t_1, t) \quad (5.3.2)$$

$$p_i = p_i(q_j^{(1)}, p_j^{(1)}, t_1, t).$$

Derivací podle času

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_j^{(1)}, p_j^{(1)}, t_1, t)$$

a dosazením do (5.3.1) zjistíme, že

$$S = S(q_j^{(1)}, p_j^{(1)}, t_1, t).$$

Vyloučením  $p_j^{(1)}$  z (5.3.2) dostaneme

$$p_j^{(1)} = p_j^{(1)}(q_i^{(1)}, t_1, q_i, t)$$

a dosazením do  $S$  je

$$S = S(q_i^{(1)}, t_1, q_i, t), \quad (5.3.3)$$

což je hledaná závislost. Speciálně pro určitou horní mez  $t = t_2$ ,  $q_i = q_i^{(2)}$  a dostáváme

$$S = S(q_i^{(1)}, t_1, q_i^{(2)}, t_2). \quad (5.3.4)$$

Hamiltonův princip se zabývá pohybem mezi dvěma body pevnými v prostoru a čase, přičemž tvrdí, že pro skutečný pohyb je  $\delta S = 0$ . Můžeme se také ale zajímat, jaká bude změna integrálu (5.3.1), jestliže od jednoho skutečného pohybu přejdeme ke křivce charakterizující jiný skutečný pohyb, probíhající mezi jinými, změněnými body, přičemž čas zůstává konstantní. Tato situace odpovídá tomu, že pozbude platnosti podmínka (5.1.4), že

$$\delta q_i|_{t=t_1} = \delta q_i|_{t=t_2} = 0.$$

Variaci integrálu akce pak spočítáme

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt + \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} \quad (5.3.5)$$

Protože zde uvažujeme skutečné pohyby, musejí být splněny Lagrangeovy rovnice 2. druhu a (5.3.5) se tedy redukuje na

$$\delta S = \sum_{i=1}^f p_i^{(2)} \delta q_i^{(2)} - \sum_{i=1}^f p_i^{(1)} \delta q_i^{(1)}. \quad (5.3.6)$$

Z (5.3.4) plyne při  $\delta t_1 = \delta t_2$

$$\delta S = \sum_{i=1}^f \frac{\partial S}{\partial q_i^{(1)}} \delta q_i^{(1)} + \sum_{i=1}^f \frac{\partial S}{\partial q_i^{(2)}} \delta q_i^{(2)}$$

a porovnáním s (5.3.6)

$$-p_i^{(1)} = \frac{\partial S}{\partial q_i^{(1)}}, \quad p_i^{(2)} = \frac{\partial S}{\partial q_i^{(2)}}. \quad (5.3.7)$$

$S$  tedy představuje jakýsi „potenciál zobecněných hybností“.

Dalším zobecněním našich úvah by mohlo být zjištění  $\delta S$  v případě, že bychom variovali i čas, tj. místo variace při konstantním  $t$  bychom uvažovali tzv. *úplnou variaci*. Pro proměnnou  $q_i$  platí

$$\Delta q_i = \delta q_i + \dot{q}_i \Delta t \quad (5.3.8)$$

a obecně i pro funkci  $f(q, t)$  je

$$\Delta f = \delta f + \dot{f} \Delta t,$$

kde  $\Delta t$  je variace času a  $\Delta$  značíme úplnou variaci. Pak se dá psát

$$\Delta S = \Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + [L \Delta t]_{t_1}^{t_2} = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + [L \Delta t]_{t_2} - [L \Delta t]_{t_1}.$$

Uvažujeme-li navíc i nenulování  $\delta q$  v okrajových bodech a zjišťujeme-li variaci mezi skutečnými trajektoriemi, bude

$$\Delta S = [L \Delta t]_{t_2} - [L \Delta t]_{t_1} + \sum_{i=1}^f p_i^{(2)} \delta q_i^{(2)} - \sum_{i=1}^f p_i^{(1)} \delta q_i^{(1)}. \quad (5.3.9)$$

Dosadíme-li sem za  $\Delta q_i$  z (5.3.8), je

$$\begin{aligned} \Delta S &= [L \Delta t]_{t_2} - [L \Delta t]_{t_1} + \sum_{i=1}^f p_i^{(2)} \Delta q_i^{(2)} - \sum_{i=1}^f p_i^{(1)} \Delta q_i^{(1)} - \sum_{i=1}^f p_i^{(2)} \dot{q}_i^{(2)} \Delta t \Big|_{t_2} + \sum_{i=1}^f p_i^{(1)} \dot{q}_i^{(1)} \Delta t \Big|_{t_1} = \\ &= \sum_{i=1}^f p_i^{(2)} \Delta q_i^{(2)} - \sum_{i=1}^f p_i^{(1)} \Delta q_i^{(1)} - [H \Delta t]_{t_2} + [H \Delta t]_{t_1} \end{aligned}$$

neboli

$$\Delta S = \left( \sum_{i=1}^f p_i^{(2)} \Delta q_i^{(2)} - H_2 \Delta t_2 \right) - \left( \sum_{i=1}^f p_i^{(1)} \Delta q_i^{(1)} - H_1 \Delta t_1 \right). \quad (5.3.10)$$

Uvažujeme-li speciálně trajektorie, pro které  $\Delta t_1 \neq 0$ ,  $\Delta t_2 \neq 0$ , ale  $\Delta q_i|_{t_1} = \Delta q_i|_{t_2} = 0$ , platí pro ně z (5.3.8)

$$\delta q_i = -\dot{q}_i \Delta t$$

a z (5.3.10) plyne

$$\Delta S = -[H \Delta t]_{t_1}^{t_2}. \quad (5.3.11)$$

Omezíme-li se na konzervativní soustavy, je  $H = \text{konst.}$ , a protože lze psát

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} dt = \Delta t_2 - \Delta t_1,$$

můžeme (5.3.11) vyjádřit ve tvaru

$$\Delta S + \Delta \int_{t_1}^{t_2} H dt = \Delta \int_{t_1}^{t_2} (L + H) dt = 0.$$

Protože platí  $L + H = \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i$ , dostáváme v tomto případě variační princip

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i dt = 0. \quad (5.3.12)$$

Výraz

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i dt \quad (5.3.13)$$

se také nazývá *zkrácená akce* (*charakteristická funkce Hamiltonova*). Je-li  $T$  homogenní funkcí 2. stupně v  $\dot{q}_i$ , je  $\sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i = 2T$  a dostáváme *Maupertuisův princip*

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = 0. \quad (5.3.14)$$

Významná je též alternativní forma principu (5.3.14), vycházející z geometrických představ. Připomeneme výraz pro kinetickou energii soustavy částic

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^N \sum_{i=1}^3 \dot{x}_{\rho,i}^2 m_{\rho}.$$

Zavedeme-li souřadnice  $\tilde{x}_{\rho,i}$

$$\tilde{x}_{\rho,i} = \sqrt{m_{\rho}} x_{\rho,i},$$

můžeme prostor proměnných  $\tilde{x}_{\rho,i}$  pokládat za konfigurační prostor (není-li vazeb). Reprezentující bod opisuje v tomto prostoru trajektorii, jejíž element  $ds$ , za předpokladu, že  $\tilde{x}_{\rho,i}$  jsou ortogonální souřadnice, se dá vyjádřit ve tvaru

$$ds^2 = \sum_{\rho=1}^N \sum_{i=1}^3 d\tilde{x}_{\rho,i}^2,$$

takže pak

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \sum_{\rho=1}^N \sum_{i=1}^3 \dot{\tilde{x}}_{\rho,i}^2 = 2T.$$

Rovnice

$$ds^2 = 2T dt^2$$

nezávisí na použité souřadnicové soustavě a může být pokládána za definici elementu oblouku konfigurační trajektorie i v obecném prostoru proměnných  $q_i$ .

Vypočítáme-li

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2T}}$$

a dosadíme do (5.3.12), dostáváme

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} 2T dt = \Delta \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{2T} ds = \Delta \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{2(E-U)} ds, \quad (5.3.15)$$

což je tzv. *Jacobiho princip*.

Uvažme nyní ještě funkci  $S$  ve tvaru (5.3.3) a vypočítáme její úplnou variaci

$$\Delta S = \frac{\partial S}{\partial t_1} \Delta t_1 + \sum_{i=1}^f \frac{\partial S}{\partial q_i^{(1)}} \Delta q_i^{(1)} + \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t + \sum_{i=1}^f \frac{\partial S}{\partial q_i} \Delta q_i.$$

Porovnáme-li tento výraz s (5.3.10), kde klademe

$$p_i^{(2)} = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad H_2 = -\frac{\partial S}{\partial t}, \quad (5.3.16)$$

dostaneme

$$p_i^{(1)} = -\frac{\partial S}{\partial q_i^{(1)}}, \quad H_1 = \frac{\partial S}{\partial t_1}.$$

Vyjádříme-li zde  $H(q,p,t)$  jako  $H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t)$ , dostáváme tzv. *Hamiltonovu-Jacobiho rovnici*

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (5.3.17)$$

kterou se budeme podrobně zabývat v části 5.5.

## 5.4 Kanonické transformace

Při řešení mechanických problémů můžeme velmi lehce najít první integrály, jestliže některé souřadnice jsou cyklické, tedy nevyskytují se explicitně v Lagrangeově resp. Hamiltonově funkci. Na praktických ukázkách jsme viděli, že skutečnost, že některá souřadnice je cyklická, je podmíněna vhodnou volbou soustavy souřadnic. Tak např. při řešení centrálního pohybu v polárních souřadnicích byla souřadnice  $\varphi$  cyklická, zatímco kdybychom použili souřadnic kartézských, žádná souřadnice by cyklická nebyla.

Kdyby se nám podařilo najít takovou soustavu souřadnic, které by všechny byly v hamiltoniánu cyklické a kdyby navíc hamiltonián explicitně nezávisel na čase, bylo by řešení pohybových rovnic triviální. Hamiltonova funkce by pak měla tvar  $H(C_1, C_2, \dots, C_f)$  a kanonické rovnice by dávaly

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial C_i} = A_i, \quad i = 1, 2, \dots, f, \quad (5.4.1)$$

kde  $A_i$  jsou rovněž konstanty, neboť mohou být jen funkcí  $C_1, C_2, \dots, C_f$ . Integrací pak přímo

$$q_i = A_i t + B_i, \quad i = 1, 2, \dots, f, \quad (5.4.2)$$

kde  $B_i$  jsou integrační konstanty.

Najít takovou soustavu souřadnic však není jednoduchá úloha, i když se dá ukázat, že v každém konkrétním případě je taková volba souřadnic možná. Avšak i když tato volba možná je, je třeba mít zaručeno, že nové souřadnice si ponechají výhody souřadnic původních, speciálně, že v nich zůstane zachován tvar Hamiltonových kanonických rovnic. Tomuto problému se nyní budeme věnovat.

V Hamiltonově funkci vystupují souřadnice  $q$  a  $p$  jako nezávislé parametry, takže hledanou transformaci musíme hledat jako transformaci ve fázovém prostoru, tj. v prostoru proměnných  $q, p$ . Nejobecnější transformace ve fázovém prostoru bude mít tvar

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t) \\ P_i &= P_i(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t), \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

kde velkými písmeny začínáme nové, transformované souřadnice a hybnosti. Ze všech možných transformací tohoto typu nás však budou zajímat jen takové, které zachovávají tvar Hamiltonových kanonických rovnic, t.j. budeme požadovat, aby v nových proměnných platilo

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, f, \quad (5.4.4)$$

kde  $K(Q, P, t)$  je transformovaný hamiltonián. Transformacím, které zachovávají nezměněný tvar kanonických rovnic, říkáme *kanonické transformace*.

Kanonické rovnice jsme odvodili z Hamiltonova principu, který jsme zapsali ve tvaru

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right] dt = 0.$$

Je tedy jisté, že rovnice (5.4.4) mohou být rovněž odvozeny z Hamiltonova principu, formulovaného tentokrát v nových proměnných

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{i=1}^f P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) \right] dt = 0 \quad (5.4.5)$$

Oba poslední vztahy musejí platit současně. Z toho ovšem nevyplývá, že by podintegrální funkce musely být sobě rovny. Jestliže totiž vezmeme variaci z úplné derivace nějaké funkce podle času, platí pro ni

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = \delta [F(t_2) - F(t_1)],$$

je tedy tato variace rovna nule, neboť jde vlastně o variaci rozdílu konstant - funkčních hodnot ve dvou daných bodech. Proto také, definujeme-li Lagrangeovu funkci na základě Hamiltonova principu, musíme říci, že  $L$  je určena až na derivaci nějaké funkce podle času  $dF/dt$ . Funkce

$$L' = L + \frac{dF}{dt}$$



totiž splňuje Hamiltonův princip stejně jako funkce  $L$ , to jest vyplývají z ní naprosto stejné pohybové rovnice. Pro nás to tedy znamená, rozdíl obou podintegrálních výrazů může být roven úplné derivaci podle času nějaké funkce  $F$ , tedy

$$\left( \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - H \right) - \left( \sum_{i=1}^f P_i \dot{Q}_i - K \right) = \frac{dF}{dt}. \quad (5.4.6)$$

Na levé straně této rovnice jsou ovšem funkce proměnných  $q, p, Q, P, t$  a tedy také funkce  $F$  napravo může být funkcí těchto  $4f + 1$  proměnných. Vzhledem k rovnicím (5.4.3) je však možné  $2f$  z těchto proměnných vyloučit. Aby funkce obsahovala vždy jednu skupinu starých a jednu skupinu nových proměnných, aby tedy byla jakýmsi pojítkem mezi starými a novými proměnnými, volíme ji zpravidla v jednom ze čtyř tvarů, které se standartně označují indexy 1 až 4, tj.

$$F_1(q, Q, t) \quad F_2(q, P, t) \quad F_3(p, Q, t) \quad F_4(p, P, t).$$

Speciální volba typu  $F$  je dána charakterem úlohy, při níž ji používáme. Předpokládejme nyní, že máme funkci typu  $F_1$ ; z (5.4.6) pak

$$\sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - H - \sum_{i=1}^f P_i \dot{Q}_i + K = \frac{d}{dt} [F_1(q, Q, t)], \quad (5.4.7)$$

kde

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

Protože staré i nové proměnné jsou považovány za nezávislé, je rovnice (5.4.7) splněna, jsou-li koeficienty u  $\dot{q}_i$ ,  $\dot{Q}_i$  na levé i pravé straně rovnice stejné, tj. v našem případě musí

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}, \quad i = 1, 2, \dots, f. \quad (5.4.8)$$

Řešením první skupiny rovnic můžeme najít  $Q_i = Q_i(q, p, t)$ , dosazením do druhé skupiny rovnic plyne  $P_i = P_i(q, p, t)$ . Známe-li funkci  $F_1$ , můžeme z ní tedy získat transformační vzorce (5.4.3). Proto funkci nazýváme *vytvorující funkci kanonické transformace*.

Při jiných tvarech funkce  $F$  lze získat podobné výsledky. Uvažme např. funkci  $F_2(q, P, t)$ . Z druhé rovnice (5.4.8) je vidět, že  $F_2$  můžeme dostat z  $F_1$  pomocí Legendrovy transformace

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + \sum_{i=1}^f P_i Q_i.$$

Vypočítáme-li odtud  $F_1$  a její derivaci dosadíme do (5.4.5), dostaneme

$$\sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^f P_i \dot{Q}_i - K + \frac{d}{dt} \left[ F_2(q, P, t) - \sum_{i=1}^f Q_i P_i \right] = - \sum_{i=1}^f Q_i \dot{P}_i - K + \frac{\partial F_2}{\partial t} + \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial P_i} \dot{P}_i \right),$$

což porovnáním koeficientů opět dává

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (5.4.9)$$

Analogicky lze odvodit obdobné vztahy pro funkce  $F_3$  a  $F_4$

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}, \quad K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \quad (5.4.10)$$

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}, \quad K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}. \quad (5.4.11)$$

Uveďme si nyní některé příklady kanonických transformací.

### Záměna zobecněných souřadnic a zobecněných hybností

Zvolme vytvorující funkce ve tvaru

$$F_1 = \sum_{i=1}^f q_i Q_i.$$

Podle (5.4.8) dostáváme

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = Q_i, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -q_i, \quad K = H.$$

Zvolená funkce je tedy vytvorující funkci kanonické transformace, při které se staré souřadnice stávají novými hybnostmi a naopak. Tato transformace je důkazem naprosté rovnocennosti souřadnic a hybností ve fázovém prostoru.

## Identická kanonická transformace

Studujme vytvořující funkci

$$F_2 = \sum_{i=1}^f q_i P_i. \quad (5.4.12)$$

Podle rovnic (5.4.9) bude

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i, \quad K = H,$$

čili při této transformaci staré souřadnice splývají s novými. Je to vytvořující funkce tzv. *identické transformace*.

## Lineární harmonický oscilátor

Řešme nyní pohyb harmonického oscilátoru pomocí kanonické transformace. Hamiltonián kanonického pohybu bude (výchylku z rovnovážné polohy zvolíme za  $q$ )

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$$

nebo pomocí vlastní frekvence oscilátoru  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q^2}{2}.$$

Zvolme nyní vytvořující funkci

$$F_1 = \frac{m}{2} \omega_0 q^2 \cotg Q. \quad (5.4.13)$$

Z (5.4.8) plyne

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega_0 q \cotg Q$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega_0 q^2}{2 \sin^2 Q}.$$

Z poslední rovnice

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega_0}} \sin Q \quad (5.4.14)$$

a dosazením do první dostáváme

$$p = m\omega_0 \sqrt{\frac{2P}{m\omega_0}} \sin Q \cotg Q = \sqrt{2Pm\omega_0} \cos Q.$$

Poslední dva vztahy nám udávají transformaci příslušející zvolené vytvořující funkci (5.4.13). Dosadíme-li z nich za  $q, p$  do hamiltoniánu dostaneme

$$K = H = \omega_0 P, \quad (5.4.15)$$

protože vytvořující funkce nezávisí explicitně na čase. Tento hamiltonián neobsahuje  $Q$ , proto kanonické rovnice budou

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega_0, \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0.$$

Druhá rovnice dává  $P = \text{konst.}$ ; ze (5.4.15) plyne, že tato konstanta bude  $P = E/\omega_0$ , protože konstantní hamiltonián má význam úplné energie  $E$ . Z první kanonické rovnice plyne  $Q = \omega_0 t + \varphi$ , kde  $\varphi$  je integrační konstanta, kterou lze určit z počátečních podmínek. Dosazením za  $Q$  a  $P$  do (5.4.4) dostaneme výsledné řešení

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0}} \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Z posledního příkladu se zdá, že volbu vytvořující funkce jsme provedli jen odhadem; kdyby tomu tak skutečně bylo, nemělo by smysl teorii kanonických transformací rozpracovávat, protože by neměla praktický význam. Naštěstí existuje racionální metoda hledání vytvořující funkce – pomocí Hamiltonovy-Jacobiho rovnice.

## 5.5 Hamiltonova–Jacobiho rovnice

V předcházející části jsme si ukázali, že pracujeme-li se soustavou souřadnic, které jsou v hamiltoniánu cyklické a nezávisí-li hamiltonián explicitně na čase, je řešení mechanického problému triviální. Je ovšem nejprve třeba najít vytvářející funkci kanonické transformace, která nám přechod k takové soustavě souřadnic umožní. Pokud hamiltonián závisí explicitně na čase, může být integrace kanonických rovnic komplikovaná i když najdeme soustavu souřadnic, které jsou v hamiltoniánu cyklické.

Předpokládejme nyní, že chceme najít takovou soustavu kanonických proměnných, v nichž bude transformovaný hamiltonián  $K$  roven nule. Avšak pro všechny typy vytvářejících funkcí je transformovaný hamiltonián  $K$  vázán se starým hamiltoniánem  $H$  vztahem

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Při podmínce  $K = 0$  musí tedy být splněna rovnice

$$H(q,p,t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Zvolíme-li speciálně vytvářející funkci typu  $F_2(q,P,t)$  (tato volba nijak nenaruší obecnost našich následujících úvah), můžeme vzhledem k (5.4.9) tuto rovnici zapsat ve tvaru

$$H\left(q_1, \dots, q_f, \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_f}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0. \quad (5.5.1)$$

Tato rovnice se nazývá Hamiltonova-Jacobiho rovnice. Je to parciální diferenciální rovnice prvního řádu, určující závislost hledané vytvářející funkce na  $q_1, \dots, q_f$ . Řešení této rovnice nazýváme obvykle *hlavní Hamiltonovou funkcí* a označujeme  $S$ . Protože v rovnici (5.5.1) je  $f + 1$  proměnných, musí obecné řešení obsahovat  $f + 1$  nezávislých integračních konstant  $C_1, \dots, C_f, C_{f+1}$ . V rovnici (5.5.1) se vyskytují jen derivace funkce  $S$ , takže řešením je také  $S + C$ , kde  $C$  je libovolná konstanta. Protože taková konstanta musí být zahrnuta do celkového počtu konstant a protože v transformačních rovnicích vystupují jen parciální derivace  $S$ , nebudeme tuto konstantu uvažovat a můžeme tedy úplný integrál rovnice (5.5.1) zapsat ve tvaru

$$S(q_1, \dots, q_f, C_1, \dots, C_f, t), \quad (5.5.2)$$

kde už žádná z konstant  $C_i$  není aditivní.

Tato funkce plně souhlasí s tvarem požadované vytvářející funkce  $F_2$  a můžeme tedy ztotožnit  $P_i = C_i$ . První ze vzorců (5.4.9) nám pak dává

$$p_i = \frac{\partial S(q,C,t)}{\partial q_i}, \quad (5.5.3)$$

což při  $t = t_0$  nám dá  $f$  rovnic, které ukáží závislost  $f$  veličin  $C_j$  na počátečních hodnotách  $q_i$  a  $p_j$ . Odtud pak můžeme určit konstanty  $C_j$  pomocí daných počátečních podmínek. Druhý vztah (5.4.9) určuje nové konstantní souřadnice

$$Q_i = \frac{\partial S(q,C,t)}{\partial C_i};$$

konstantní musejí být vzhledem k první soustavě kanonických rovnic v nových proměnných, která dává  $\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0$ , protože  $K = 0$ . Máme tedy

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial C_i} = B. \quad (5.5.4)$$

a odtud můžeme vyjádřit  $B_i$  pomocí počátečních hodnot  $q_i$ . Řešíme-li pak (5.5.4) pro  $q_i$ , dostaneme

$$q_i = q_i(B,C,t),$$

což, řeší naši úlohu, neboť dostáváme souřadnice jako funkce počátečních podmínek a času.

Vzhledem k tomu, že nový transformovaný hamiltonián je roven nule a nové zobecněné souřadnice jsou konstantní (viz. (5.5.4)), je nový transformovaný lagranžiián roven nule a z (5.4.6) plyne

$$L = \frac{dF_2}{dt},$$

odkud

$$F_2 = \int_{t_1}^{t_2} L dt = S,$$

kde  $S$  je hlavní funkce Hamiltonova, která je tedy totožná s integrálem akce; tím se nám ozřejmilo, proč jsme v obou případech použili pro tuto funkci stejného označení.

Převedení mechanického problému na řešení parciální diferenciální rovnice místo soustavy obyčejných diferenciálních rovnic má ovšem smysl jen tehdy, dá-li se parciální diferenciální rovnice jednoduše řešit. V případě rovnice (5.5.1) můžeme poměrně snadno najít řešení, jestliže  $H$  nezávisí explicitně na čase a jestliže některé proměnné jsou cyklické. V těchto případech můžeme v rovnici (5.5.1) provést tzv. separaci proměnných, přičemž ovšem tento termín má poněkud jiný obsah než jak bývá používán v souvislosti s obyčejnými diferenciálními rovnicemi.

Předpokládejme nejprve, že  $H \neq H(t)$ . Pak se (5.5.1) redukuje na

$$H\left(q_1, \dots, q_f, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_f}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Položíme-li

$$S(q, C, t) = W(q, C) + \bar{S}(t, C),$$

můžeme psát

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) + \frac{\partial \bar{S}}{\partial t} = 0.$$

Protože první člen obsahuje jen proměnné  $q$ , druhý jen  $t$ , může tato rovnice platit jen když jsou oba členy konstantní,

$$H\left(q_1, \dots, q_f, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_f}\right) = C_1 \quad (5.5.5)$$

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial t} = -C_1$$

Poslední rovnice dává

$$\bar{S} = -C_1 t.$$

Hlavní funkci Hamiltonovu můžeme tedy v případě  $H \neq H(t)$  hledat ve tvaru

$$S(q, C, t) = W(q, C) - C_1 t.$$

Konstantu v rovnici (5.5.5) jsme označili  $C_1$ , protože musí být jednou z celkového počtu  $f$  integračních konstant. Její hodnota je rovna konstantní hodnotě hamiltoniánu, což zpravidla bývá úplná energie soustavy (podmínky byly již několikrát uvedeny). Proto obvykle píšeme přímo

$$S(q, C, t) = W(q, C) - Et. \quad (5.5.6)$$

Funkce  $W$  je zde zavedena jen jako část vytvářející funkce  $S$  v případě, že  $H$  neobsahuje explicitně čas. Nazývá se obvykle *Hamiltonovou charakteristickou funkcí*. I v tomto případě srovnáním s (5.3.13) zjistíme, že  $W$  je totožná s tam definovanou funkcí téhož označení. Je-li  $H$  nezávislý na čase a roven celkové energii soustavy, platí

$$H = \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - L = E.$$

Integrace přes  $t$  dává

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i dt - \int_{t_1}^{t_2} L dt = E(t_2 - t_1).$$

Položíme-li  $t_2 = t$ , dostaneme odtud

$$S = -Et + W + konst.,$$

což je hledaný vztah, neboť aditivní konstanta je nepodstatná.

Hamiltonovu charakteristickou funkci  $W$  můžeme považovat rovněž za vytvářející funkci nějaké kanonické transformace, odlišné od transformace, kterou charakterizuje funkce  $S$ . Předpokládejme, že provedeme transformaci s vytvářející funkcí rovnou  $W$ . Dostaneme nový hamiltonián  $\bar{K}$ . Protože  $\bar{K} = H = E$  je konstantní, jsou v něm všechny nové souřadnice cyklické (tyto nové souřadnice budeme značit  $\bar{Q}_i$ ) a všechny nové hybnosti  $\bar{P}_i$  jsou konstantní. Kanonické rovnice dávají

$$\dot{\bar{P}}_i = -\frac{\partial \bar{K}}{\partial \bar{Q}_i} = 0,$$

takže skutečně  $\overline{P}_i = C_i$  a druhá série dává

$$\dot{\overline{Q}}_i = \frac{\partial \overline{K}}{\partial C_i} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = 1 \\ 0 & \text{pro } i \neq 1 \end{cases}$$

protože jsme ztotožnili  $E = C_1$ , což je konstantní hodnota nového transformovaného hamiltoniánu. Bude proto

$$\overline{Q}_1 = t + B_1, \quad \overline{Q}_i = B_i \quad \text{pro } i \neq 1.$$

Protože přitom pokládáme  $\overline{Q}$  za nové souřadnice vzniklé kanonickou transformací zprostředkovanou vytvořující funkcí  $W(q, C)$ , což je (protože  $C_i = \overline{P}_i$ ) funkce typu  $F_2$ , platí

$$\overline{Q}_i = B_i = \frac{\partial W(q, C)}{\partial C_i}, \quad i \neq 1 \quad (5.5.7)$$

$$\overline{Q}_1 = t + B_1 = \frac{\partial W(q, C)}{\partial E},$$

odkud lze najít  $q$  jako funkci času a konstant (počátečních podmínek), což řeší daný problém.

Kromě ukázané metody je možné v (5.5.1) separovat proměnné také tehdy, jestliže některé souřadnice jsou cyklické. Předpokládejme např., že souřadnice  $q_1, \dots, q_m$  jsou cyklické,  $q_{m+1}, \dots, q_f$  jsou necyklické. Označíme-li index cyklických souřadnic  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) a index necyklických souřadnic  $i$ , ( $i = m + 1, m + 2, \dots, f$ ), platí

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j} = C_j \quad (5.5.8)$$

a rovnici (5.5.1) můžeme psát

$$H \left( q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, C_j t \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Položme nyní

$$S = S_1(q_1) + \dots + S_m(q_m) + \overline{S}(q_i, C_i, t) \quad (i = m + 1, \dots, f)$$

(konstanty  $C_j$  nebudeme už do argumentu funkcí  $S_j$  zapisovat; vyjdou při řešení jako integrační konstanty). Dosazením do (5.5.8) plyne ihned

$$S_j(q_j) = C_j q_j,$$

takže můžeme volit

$$S = \sum_{j=1}^m C_j q_j + \overline{S}(q_i, C_i, t). \quad (5.5.9)$$

Hamiltonova – Jacobiho rovnice pak dává

$$H \left( q_i, \frac{\partial \overline{S}}{\partial q_i}, C_j, t \right) + \frac{\partial \overline{S}}{\partial t} = 0,$$

kde funkce  $\overline{S}$  už závisí jen na  $f - m$  proměnných. Jestliže navíc kromě cyklických proměnných neobsahuje hamiltonián explicitně čas, můžeme provést další separaci a klást

$$S = \sum_{j=1}^m C_j q_j + \overline{W}(q_i, C_i) - Et, \quad (5.5.10)$$

přičemž Hamiltonova – Jacobiho rovnice opět nabude tvaru

$$H \left( q_i, \frac{\partial \overline{W}}{\partial q_i}, C_j \right) = E. \quad (5.5.11)$$

Pro ilustraci metod separace proměnných si nyní uvedme dva příklady.

## Pohyb v konzervativním silovém poli

Studujme pohyb s jedním stupněm volnosti částice o hmotnosti  $m$  v konzervativním silovém poli  $U = U(q)$ . Hamiltonián je zřejmě

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(q)$$

a záměnou  $p$  za  $\partial S/\partial q$  dostáváme Hamiltonovu-Jacobiho rovnici

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + U(q) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Protože  $H \neq H(t)$ , můžeme položit

$$S(q,t) = W(q) - Et$$

a pro určení  $W$  máme obyčejnou diferenciální rovnici

$$\frac{dW}{dq} = \sqrt{2m[E - U(q)]},$$

odkud

$$W = \int \sqrt{2m[E - U(q)]} dq + C.$$

Při konkrétním tvaru  $U(q)$  můžeme integrovat a pro hlavní Hamiltonovu funkci bychom dostali

$$S = \int \sqrt{2m[E - U(q)]} dq - Et + C$$

Aniž bychom však počítali  $S$ , můžeme přímo z (5.5.7) psát (klademe  $C_1 = E$ )

$$\frac{\partial W}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial W}{\partial C_1} = \frac{\partial W}{\partial E} = t + B$$

neboli

$$p = \sqrt{2m[E - U(q)]}, \quad t + B = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dq}{\sqrt{E - U(q)}}.$$

Kdybychom při konkrétním zadání  $U(q)$  zintegrovali poslední rovnici a konstantu  $B$  určili z počátečních podmínek, dostali bychom závislost  $q$  na  $t$  a počátečních podmínkách, což by bylo řešení.

## Pohyb v centrálním silovém poli

Jako druhý příklad studujme opět centrální pohyb. Stejně jako v příkladu na s. 85 můžeme najít

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + U(r).$$

Tento hamiltonián je jednak nezávislý na čase, jednak je v něm  $\varphi$  cyklickou souřadnicí. Proto můžeme psát rovnou

$$W = \bar{W}(r) + C_\varphi \varphi,$$

kde  $\varphi$  je konstantní zobecněná hybnost odpovídající cyklické souřadnici  $\varphi$ . Rovnice (5.5.11) pak bude

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{d\bar{W}}{dr} \right)^2 + \frac{C_\varphi^2}{r^2} \right] + U(r) = E,$$

odkud

$$\frac{d\bar{W}}{dr} = \sqrt{2m(E - U) - \frac{C_\varphi^2}{r^2}}.$$

Je tedy

$$\bar{W} = \int \sqrt{2m(E - U) - \frac{C_\varphi^2}{r^2}} dr,$$

kde aditivní konstantu vznikající při integraci neuvažujeme, neboť ji lze připojit k libovolné aditivní konstantě, již se řešení  $S$  rovnice (5.5.1) mohou odlišovat. Pak

$$W = \int \sqrt{2m(E - U) - \frac{C_\varphi^2}{r^2}} dr + \varphi C_\varphi$$

Z (5.5.7) pak

$$t + B_1 = \frac{\partial W}{\partial C_1} \equiv \frac{\partial W}{\partial E} = \int \frac{m dr}{\sqrt{2m(E - U) - \left(\frac{C_\varphi}{r}\right)^2}}$$

$$B_2 = \frac{\partial W}{\partial C_2} \equiv \frac{\partial W}{\partial C_\varphi} = - \int \frac{C_\varphi dr}{r^2 \sqrt{2m(E - U) - \left(\frac{C_\varphi}{r}\right)^2}} + \varphi.$$

Tyto rovnice dávají řešení centrálního pohybu, které by bylo možné převést na tvar získaný běžnými metodami.

Zbývá nám ještě zmínit se o metodě řešení Hamiltonovy-Jacobiho rovnice, kterou je výhodné použít zejména u úloh, při nichž je  $q$  periodická funkce. Pak je výhodné volit konstanty integrace  $C_i$  (tj. nové zobecněné hybnosti) ve tvaru

$$\mathcal{J}_i = \oint p_i dq_i, \quad (5.5.12)$$

kde integrujeme přes úplnou periodu změny funkce  $q_i$ . Výrazy  $\mathcal{J}_i \equiv C_i$  nazýváme akcemi; akce  $\mathcal{J}_i$  za jednu periodu změny  $q_i$  je tedy konstantní.

Protože při úlohách tohoto typu je hamiltonián konstantní, použijeme přímo charakteristické funkce Hamiltonovy  $W$  a píšeme

$$\mathcal{J}_i = \oint \frac{\partial W}{\partial q_i} dq_i,$$

přičemž

$$W = W(q_1, \dots, q_f, \mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_f). \quad (5.5.13)$$

Nové zobecněné souřadnice příslušející novým konstantním hybnostem se nazývají úhlové proměnné  $w_i$  a jsou definovány vztahy

$$w_i = \frac{\partial W}{\partial \mathcal{J}_i}. \quad (5.5.14)$$

Protože  $\mathcal{J}_i$  jsou konstantní, jsou nové proměnné  $w_i$  cyklické v novém hamiltoniánu a tedy platí

$$\dot{w}_i = \frac{\partial K(\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_f)}{\partial \mathcal{J}_i} = \nu_i(\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_f) = \text{konst.},$$

takže

$$w_i = \nu_i t + \beta_i, \quad \beta_i = \text{konst.} \quad (5.5.15)$$

Určíme nyní fyzikální význam konstant  $\nu_i$ . Nechť  $q_j$  vykoná celý cyklus změny, přičemž ostatní souřadnice se nemění. Změna  $w_i$  při takové změně  $q_j$  bude označena  $\Delta w_i$  a platí

$$\Delta w_i = \oint dw_i,$$

kde  $dw_i$  je nekonečně malá změna  $w_i$  následkem nekonečně malé změny  $q_j$ . Platí

$$dw_i = \frac{\partial w_i}{\partial q_j} dq_j,$$

takže s použitím (5.5.14)

$$\Delta w_i = \oint \frac{\partial w_i}{\partial q_j} dq_j = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial q_j \partial \mathcal{J}_i} dq_j = \frac{\partial}{\partial \mathcal{J}_i} \oint \frac{\partial W}{\partial q_j} dq_j = \frac{\partial \mathcal{J}_j}{\partial \mathcal{J}_i} = S_{ij}.$$

Při  $i = 1$  je tedy změna úhlové proměnné rovna 1, při  $i \neq j$  nule. Jestliže je  $\tau_i$  perioda jednoho cyklu  $q_i$ , je podle (5.5.15)

$$\Delta w_i = 1 = \nu_i \tau_i,$$

odkud

$$\nu_i = \frac{1}{\tau_i},$$

takže  $\nu_i$  je rovno frekvenci změny  $q_i$ .

Takto zavedených proměnných (říká se jim též *proměnné akce – úhel*) je třeba použít, chceme-li odvodit vytvořující funkci pro harmonický oscilátor (5.4.13). Zavedeme-li úhlovou frekvenci  $\omega_0$ , můžeme hamiltonián najít ve tvaru

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q^2}{2}.$$

Hamiltonova - Jacobiho rovnice pro  $W$  je

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{dW}{dq} \right)^2 + \frac{m\omega_0^2 q^2}{2} = E.$$

Integrací

$$W = \sqrt{m} \int \sqrt{2E - m\omega_0^2 q^2} dq.$$

Vypočítáme nyní akci  $\mathcal{J}$

$$\mathcal{J} = \oint pdq = \oint \frac{\partial W}{\partial q} dq = m\omega_0 \oint \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2} - q^2} dq.$$

Zavedeme substituci

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} \sin \varphi,$$

takže

$$\mathcal{J} = \frac{2E}{\omega_0} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{2\pi E}{\omega_0},$$

čili

$$E = \frac{\omega_0}{2\pi} \mathcal{J} = \nu \mathcal{J} = K.$$

Dosazením za  $E$  do  $W$

$$W = \sqrt{m} \int \sqrt{2E - m\omega_0^2 q^2} dq = \sqrt{m} \int \sqrt{\frac{\omega_0 \mathcal{J}}{\pi} - m\omega_0^2 q^2} dq.$$

Úhlová proměnná  $\omega$  je dána

$$\omega = \frac{\partial W}{\partial \mathcal{J}} = \frac{\sqrt{m}\omega_0}{2\pi} \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{\omega_0 \mathcal{J}}{\pi} - m\omega_0^2 q^2}} = \frac{1}{2\pi} \arcsin \left( \sqrt{\frac{m\pi\omega_0}{\mathcal{J}}} q \right),$$

takže

$$q = \sqrt{\frac{\mathcal{J}}{m\pi\omega_0}} \sin(2\pi\omega)$$

a dosazením do  $W$  vyjde

$$W = \mathcal{J} \left[ \omega + \frac{1}{4\pi} \sin(4\pi\omega) \right]$$

Vypočítaná funkce je typu  $F_2(q, P)$ . Z Legendreovy transformace pak dostaneme  $F_1(q, Q) = F_2(q, P) - QP$ , tedy

$$F_1(q, Q) = W - \mathcal{J}\omega = \frac{\mathcal{J}}{4\pi} \sin(4\pi\omega) = \frac{1}{2} m\omega_0 q^2 \cotg(2\pi\omega),$$

což v podstatě je už vytvořující funkce (5.4.13).

## 5.6 Invarianty kanonických transformací

Základní podmínkou pro kanoničnost transformací typu (5.4.3) je, aby při nich zachovávaly svůj tvar Hamiltonovy kanonické rovnice. Můžeme tedy říci, že kanonické rovnice jsou vůči kanonickým transformacím invariantní. Existují však také jiné invarianty kanonických transformací. Nejdůležitější z nich jsou invariantní integrály, nazývané *Poincarého integrály*.

Zvolme si ve  $2f$ -rozměrném prostoru proměnných  $q, p$ , tedy ve fázovém prostoru hyperplochy, od dvourozměrné  $\varphi_1$  až po  $2f$ -rozměrnou, která pak vlastně reprezentuje jistý objem  $V$  tohoto prostoru. Poincaré ukázal, že integrály

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{\varphi_1} \sum_{i=1}^f dq_i dp_i \\ I_2 &= \iiint_{\varphi_2} \sum_{i=1}^f \sum_{j=1}^f dq_i dp_i dq_j dp_j \\ &\dots \\ I_f &= \iiint_V \dots \int dq_1 dq_2 \dots dq_f dp_1 dp_2 \dots dp_f \end{aligned}$$



jsou invarianty kanonických transformací. Protože integrál  $I_f$  představuje vlastně objem určité oblasti fázového prostoru, je podmínka jeho invariantnosti ekvivalentní tvrzení, že se objem libovolné části fázového prostoru při kanonických transformacích nemění. To je tvrzení velmi důležité ve statistické fyzice, známé tam pod názvem *Liouvilleova věta*.

Nebudeme zde dokazovat invariantnost všech těchto integrálů; omezíme se jen na důkaz invariance  $I_1$ , tj. dokážeme, že platí

$$\iint_{\varphi_1} \sum_{i=1}^f dq_i dp_i = \iint_{\varphi_1} \sum_{j=1}^f dQ_j dP_j. \quad (5.6.1)$$

Uvědomíme si především, že na libovolné dvourozměrné ploše  $\varphi_1$  lze polohu bodu určit dvěma parametry, např.  $u$ ,  $v$ . Pak  $q_i$ ,  $p_i$  na ploše  $\varphi_1$  můžeme pokládat za funkce těchto parametrů  $q_i(u,v)$ ,  $p_i(u,v)$ . Jak je známo z matematické analýzy, je vztah mezi plošným elementem  $dq_i dp_i$  a elementem v souřadnicích  $u$ ,  $v$  dán

$$dq_i dp_i = \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial u} & \frac{\partial p_i}{\partial u} \\ \frac{\partial q_i}{\partial v} & \frac{\partial p_i}{\partial v} \end{vmatrix} du dv$$

kde funkcionální determinant nazýváme jakobián. Rovnici (5.6.1) můžeme tedy přepsat ve tvaru

$$\iint_{\varphi_1} \sum_{i=1}^f \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} du dv = \iint_{\varphi_1} \sum_{j=1}^f \frac{\partial(Q_j, P_j)}{\partial(u, v)} du dv,$$

což bude splněno (protože oblast integrace je libovolná), jen když

$$\sum_{i=1}^f \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} = \sum_{j=1}^f \frac{\partial(Q_j, P_j)}{\partial(u, v)}. \quad (5.6.2)$$

Důkaz invariance integrálu (5.6.1) jsme tedy převedli na důkaz invariance sumy jakobiánů (5.6.2). Dále musíme zvolit některý konkrétní typ vytvářející funkce; zvolíme funkci  $F_2(q, P, t)$  – stejně tak bychom ale mohli důkaz provést pro všechny ostatní typy vytvářejících funkcí. Levou stranu (5.6.2) upravíme

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^f \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} &= \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial q_i}{\partial v} \frac{\partial p_i}{\partial u} \right) = \sum_{i=1}^f \left[ \frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial q_i}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \right) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^f \left[ \frac{\partial q_i}{\partial u} \sum_{j=1}^f \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial v} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial v} \right) - \frac{\partial q_i}{\partial v} \sum_{j=1}^f \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial u} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial u} \right) \right] = \\ &= \sum_{j=1}^f \left[ \frac{\partial P_j}{\partial v} \sum_{i=1}^f \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_j} \frac{\partial q_i}{\partial u} - \frac{\partial P_j}{\partial u} \sum_{i=1}^f \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_j} \frac{\partial q_i}{\partial v} \right]. \end{aligned}$$

Přičteme-li a odečteme výraz

$$\sum_{j=1}^f \frac{\partial P_j}{\partial v} \sum_{i=1}^f \frac{\partial^2 F_2}{\partial P_i \partial P_j} \frac{\partial P_i}{\partial u},$$

můžeme psát

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^f \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} &= \sum_{j=1}^f \left[ \frac{\partial P_j}{\partial v} \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_j} \frac{\partial q_i}{\partial u} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial P_i \partial P_j} \frac{\partial P_i}{\partial u} \right) - \frac{\partial P_j}{\partial u} \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_j} \frac{\partial q_i}{\partial v} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial P_i \partial P_j} \frac{\partial P_i}{\partial v} \right) \right] = \\ &= \sum_{j=1}^f \left[ \frac{\partial P_j}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial F_2}{\partial P_j} \right) - \frac{\partial P_j}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial F_2}{\partial P_j} \right) \right] = \sum_{j=1}^f \left( \frac{\partial Q_j}{\partial u} \frac{\partial P_j}{\partial v} - \frac{\partial Q_j}{\partial v} \frac{\partial P_j}{\partial u} \right) = \sum_{j=1}^f \frac{\partial(Q_j, P_j)}{\partial(u, v)}. \end{aligned}$$

Tím je dokázána rovnice (5.6.2) a tedy invariantnost prvního Poincarého integrálu.

Při předcházejícím důkazu jsme zjistili další invariant kanonických transformací, jímž je součet jakobiánů, který symbolicky značíme

$$\{u, v\} = \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial q_i}{\partial v} \frac{\partial p_i}{\partial u} \right) \quad (5.6.3)$$

a nazýváme *Lagrangeovy závorky*. Je ihned vidět, že

$$\{u, v\} = -\{v, u\}. \quad (5.6.4)$$

Dále platí

$$\{q_j, q_l\} = \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial q_i}{\partial q_j} \frac{\partial p_i}{\partial q_l} - \frac{\partial p_i}{\partial q_j} \frac{\partial q_i}{\partial q_l} \right) = 0, \quad (5.6.5)$$

protože  $q, p$  jsou nezávislé proměnné a tedy  $\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = 0$ . Podobně

$$\{p_j, p_l\} = 0. \quad (5.6.6)$$

Položíme-li konečně  $u = q_j, v = p_l$ , platí

$$\{q_j, p_l\} = \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial q_i}{\partial q_j} \frac{\partial p_i}{\partial p_l} - \frac{\partial q_i}{\partial p_l} \frac{\partial p_i}{\partial q_j} \right) = \sum_{i=1}^f \delta_{ij} \delta_{il} = \delta_{jl}. \quad (5.6.7)$$

Vztahy (5.6.5-5.6.7) se též nazývají *fundamentální Lagrangeovy závorky*.

Podobně jako Lagrangeovy závorky definujeme *Poissonovy závorky*<sup>1</sup>

$$[u, v]_{q,p} = \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right). \quad (5.6.8)$$

Z definice Poissonových závorek nevyplývá, že jsou tyto závorky při kanonických transformacích invariantní; proto jsme u závorek (5.6.8) museli připsat příslušné kanonické proměnné. Porovnáním s definicí Lagrangeových závorek se však dá očekávat, že mezi obojími závorkami bude existovat nějaký vztah. Najdeme jej takto:

Uvažme  $2f$  nezávislých funkcí  $u_1, u_2, \dots, u_{2f}$  proměnných  $q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f$ . Tyto proměnné naopak mohou být pokládány za funkce  $u_1, u_2, \dots, u_{2f}$ . Studujeme nyní součin

$$\sum_{r=1}^{2f} [u_r, u_i] \{u_r, u_j\} = \sum_{r=1}^{2f} \sum_{k=1}^f \sum_{l=1}^f \left( \frac{\partial u_r}{\partial q_k} \frac{\partial u_i}{\partial p_k} - \frac{\partial u_r}{\partial p_k} \frac{\partial u_i}{\partial q_k} \right) \left( \frac{\partial q_l}{\partial u_r} \frac{\partial p_l}{\partial u_j} - \frac{\partial q_l}{\partial u_j} \frac{\partial p_l}{\partial u_r} \right).$$

Protože

$$\sum_{r=1}^{2f} \frac{\partial u_r}{\partial q_k} \frac{\partial q_l}{\partial u_r} = \sum_{r=1}^{2f} \frac{\partial u_r}{\partial p_k} \frac{\partial p_l}{\partial u_r} = \delta_{kl}$$

a dále

$$\sum_{r=1}^{2f} \frac{\partial u_r}{\partial q_k} \frac{\partial p_l}{\partial u_r} = \sum_{r=1}^{2f} \frac{\partial u_r}{\partial p_k} \frac{\partial q_l}{\partial u_r} = 0,$$

dostáváme

$$\sum_{r=1}^{2f} [u_r, u_i] \{u_r, u_j\} = \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial u_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial u_j} + \frac{\partial u_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial u_j} \right) = \delta_{ij}. \quad (5.6.9)$$

Tento vztah bychom mohli pokládat za maticovou rovnici, kdybychom zavedli matice, jejichž prvky  $P_{ri}$  a  $L_{rj}$  byly rovny příslušným závorkám Poissonovým resp. Lagrangeovým. Pak je zřejmé, že díky rovnici (5.6.9) určuje matice Lagrangeových závorek matice Poissonových závorek a naopak, odkud vyplývá, že jsou-li Lagrangeovy závorky invariantem kanonických transformací, musejí jím být i závorky Poissonovy. Z tohoto důvodu nemusíme už nadále k Poissonovým závorkám připsávat index značící kanonické proměnné, v nichž je závorka počítána.

Z přímého výpočtu bychom lehce dostali

$$[u, v] = -[v, u]$$

a dále

$$[q_j, q_l] = 0, \quad [p_j, p_l] = 0, \quad [q_j, p_l] = \delta_{jl}. \quad (5.6.10)$$

Vztahy (5.6.10) nazýváme *fundamentálními Poissonovými závorkami*.

Další důležité vztahy dostaneme, hledáme-li Poissonovy závorky kanonických proměnných a hamiltoniánu. Platí zřejmě

$$\begin{aligned} [q_i, H] &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \\ [p_i, H] &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i, \end{aligned} \quad (5.6.11)$$

<sup>1</sup>V některé literatuře, např. v [8] jsou zavedeny s opačným znaménkem.

Kde jsme využili platnosti Hamiltonových kanonických rovnic. Vztahy (5.6.11) představují pohybové rovnice zapsané pomocí Poissonových závorek.

Je-li  $f(q,p,t)$  nějaká funkce kanonických proměnných a času, platí pro její úplnou derivaci podle času

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Dosadíme-li za  $\dot{q}_i, \dot{p}_i$  z Hamiltonových kanonických rovnic, dostáváme

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$$

neboli

$$\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (5.6.12)$$

Položíme-li  $f = H$ , vychází

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t},$$

což vede k zákonu zachování energie v případě, že  $H$  nezávisí explicitně na čase. Nezávisí-li funkce  $f(q,p)$  na čase explicitně, platí

$$\frac{df}{dt} = [f, H],$$

což ukazuje, že Poissonova závorka může být kritériem toho, zda nějaká funkce je nebo není integrálem pohybu; má-li jím být, musí být rovna nule Poissonova závorka této funkce a funkce Hamiltonovy. Tento výsledek nám umožňuje určit integrály pohybu nezávisle na tom, zda sama  $H$  je integrálem pohybu nebo nikoliv.

Poznamenejme ještě, že pro Poissonovy závorky lze dokázat tzv. Jacobiho identitu: Jsou-li  $f, g, h$  funkce kanonických proměnných, platí

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0. \quad (5.6.13)$$

Důkaz lze provést přímým výpočtem a ponecháváme jej jako úlohu pro samostatnou práci.

Položíme-li v této identitě  $h = H$  a předpokládáme-li že  $f$  a  $g$  jsou integrály pohybu, dostáváme

$$[H, [f, g]] = 0, \quad (5.6.14)$$

takže výraz  $[f, g]$  je rovněž integrálem pohybu. Vztahu (5.6.14) můžeme použít, chceme-li ze známých integrálů pohybu zkonstruovat nové.

Obraťme se nyní k problematice tzv. *infinitesimálních kanonických transformací*. Nazýváme tak transformace, které jsou kanonické a mají přitom tu vlastnost, že nové souřadnice a hybnosti se jen málo liší od původních, takže lze psát

$$\begin{aligned} Q_i &= q_i + \Delta q_i \\ P_i &= p_i + \Delta p_i \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, f \quad (5.6.15)$$

Hledáme-li takové transformace, je přirozené předpokládat, že vytvářející funkce takové transformace se bude jen velmi málo lišit od vytvářející funkce transformace identické (5.4.12), tj. že bude

$$F_2(q, P, t) = \sum_{i=1}^f q_i P_i + \epsilon G(q, P, t), \quad (5.6.16)$$

kde  $\epsilon$  je velmi malý parametr. Rovnice (5.4.9) nám dávají

$$p_i = P_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}, \quad Q_i = q_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}, \quad i = 1, 2, \dots, f.$$

Protože se  $P_i$  liší od  $p_i$  jen velmi málo, můžeme s dostatečnou přesností ve funkci  $G$  zaměnit  $P$  za  $p$  a derivaci podle  $P_i$  nahradit derivací podle  $p_i$ . S použitím (5.6.15) pak dostaneme

$$\Delta q_i = \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}, \quad \Delta p_i = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}. \quad (5.6.17)$$

Funkci  $G$  nazýváme vytvářející funkcí (generátorem) infinitesimální kanonické transformace.

Máme-li nějakou funkci  $f(q,p)$ , pak po provedení transformace (5.6.15) se tato funkce změní a její změna je

$$\Delta f = f(q + \Delta q, p + \Delta p) - f(q, p).$$

Rozvineme-li funkci  $f$  v Taylorovu řadu a omezíme se na první členy, dostaneme

$$\Delta f = \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \Delta q_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \Delta p_i \right) = \epsilon \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right),$$

kde jsme dosadili z (5.6.17). Poslední výraz se ale dá zapsat

$$\Delta f = \epsilon [f, G]. \quad (5.6.18)$$

Položíme-li nyní  $G = H$ ,  $\epsilon = dt$ , dostáváme

$$\Delta f = dt [f, H]. \quad (5.6.19)$$

Bude-li  $f = q_i$ , dostáváme odtud

$$\Delta q_i = dt [q_i, H] = \dot{q}_i dt$$

a podobně, bude-li  $f = p_i$ , dostaneme

$$\Delta p_i = dt [p_i, H] = \dot{p}_i dt.$$

Tyto vztahy ukazují, že souřadnice a hybnosti se při této transformaci změní tak, že místo hodnot  $q(t), p(t)$  nabývají hodnot  $q(t + dt), p(t + dt)$ , které odpovídají jejich skutečným změnám při pohybu. Můžeme tedy říci, že infinitesimální kanonická transformace charakterizovaná generátorem rovným hamiltoniánu odpovídá skutečnému pohybu soustavy. Změnu stavu soustavy v nějakém konečném časovém intervalu pak můžeme chápat jako posloupnost nekonečně malých kanonických transformací, které ovšem bychom mohli všechny nahradit jedinou transformací závislejší na čase. Pohyb soustavy můžeme studovat jako spojitě vykonávanou kanonickou transformaci, jejímž generátorem v každém okamžiku je Hamiltonova funkce soustavy.

Ze vztahu (5.6.18) vyplývá ještě další důsledek. Položíme-li v něm  $f = H$ , je

$$\Delta H = \epsilon [H, G].$$

Jestliže však je  $G$  integrálem pohybu, je  $[H, G] = 0$  a tedy také  $\Delta H = 0$ . Hamiltonián se tedy nemění při kanonických transformacích, jejichž generátory jsou integrály pohybu; platí pro něj zákon zachování.

Souvislost kanonických transformací a zákonů zachování má však mnohem hlubší základ a je speciálním případem aplikace významné věty E. Nötherové, věta! Nötherové která se obecně zabývá souvislostí určitých tříd transformací souřadnic a času s integrály pohybu, resp. funkcemi, které při pohybu zůstávají konstantní. Pokud pak tyto funkce nezávisí explicitně na čase, mluvíme o zachovávaných se veličinách, resp. zákonech zachování těchto veličin. Větu E. Nötherové, významnou zejména v moderních teoretických disciplínách, můžeme formulovat např. takto:<sup>2</sup>

Mějme soustavu popsanou Lagrangeovou funkcí  $L(q, \dot{q}, t)$  a uvažme transformace proměnných  $q$  a  $t$  dané vztahy

$$Q_j = Q_j(q, \dot{q}, t, \epsilon), \quad T = T(q, \dot{q}, t, \epsilon),$$

kde parametr  $\epsilon$  nezávisí na čase a platí

$$Q_j|_{t=0} = q_j, \quad T|_{t=0} = t.$$

Nahradíme v Lagrangeově funkci  $L(q, \dot{q}, t)$  původní proměnné novými transformovanými proměnnými  $Q_j, T$  a

$$\dot{Q}_j \equiv \frac{dQ_j}{dT} = \frac{\frac{dQ_j}{dt}}{\frac{dT}{dt}} = \frac{\dot{Q}_j(q, \dot{q}, \ddot{q}, t, \epsilon)}{\dot{T}(q, \dot{q}, \ddot{q}, t, \epsilon)}.$$

Jestliže výsledná funkce splňuje vztah

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \epsilon} [L(Q, \dot{Q}, T) \cdot \dot{T}] \right\}_{t=0} = \frac{d\bar{F}}{dt} \quad (5.6.20)$$

kde  $\bar{F} = \bar{F}(q, \dot{q}, t)$ , pak veličina

$$L\xi + \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} (\eta_j - \dot{q}_j \xi) - \bar{F} = \text{konst.}, \quad (5.6.21)$$

<sup>2</sup>Obvyklejší je formulace věty E. Nötherové vycházející z variačního principu (viz např. [5, 8]); pro aplikaci v mechanice jsme zvolili z našeho pohledu vhodnější postup, vycházející z práce [3].

tj. je integrálem pohybu. Zde je označeno

$$\xi = \left. \frac{\partial T}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0}, \quad \eta_j = \left. \frac{\partial Q_j}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0}.$$

Pro důkaz tohoto tvrzení rozvineme nejprve  $Q_j$  a  $T$  do řady, takže

$$Q_j = Q_j|_{\epsilon=0} + \left. \frac{\partial Q_j}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \epsilon + \dots = q_j + \eta_j \epsilon$$

$$T = T|_{\epsilon=0} + \left. \frac{\partial T}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \epsilon + \dots = t + \xi \epsilon$$

a odtud

$$\dot{Q}_j = \dot{q}_j + \dot{\eta}_j \epsilon + \dots, \quad \dot{T} = 1 + \dot{\xi} \epsilon + \dots$$

Výpočet derivace v (5.6.20) dává

$$\left\{ \left[ \frac{\partial L}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \epsilon} + \sum_{j=1}^f \left( \frac{\partial L}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} \frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \epsilon} \right) \right] \dot{T} + L \frac{\partial \dot{T}}{\partial \epsilon} \right\}_{\epsilon=0} = \frac{d\bar{F}}{dt}$$

a po dosazení příslušných veličin z rozvoje  $Q_j$  a  $T$  s přihlédnutím k tomu, že

$$\left[ \frac{\partial L(Q, \dot{Q}, T)}{\partial T} \right]_{\epsilon=0} = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial t}$$

a k dalším analogickým vztahům dostaneme

$$\frac{\partial L}{\partial t} \xi + \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial q_j} \eta_j + \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} (\dot{\eta}_j - \dot{q}_j \dot{\xi}) + L \dot{\xi} = \frac{d\bar{F}}{dt}.$$

Použijeme-li vztahů

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{dL}{dt} - \sum_{j=1}^f \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right), \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{\eta}_j &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \eta_j \right) - \eta_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right), \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \dot{\xi} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \xi \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j \xi - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \xi, \end{aligned}$$

můžeme předcházející rovnici upravit na

$$\sum_{j=1}^f \left[ \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] (\eta_j - \dot{q}_j \xi) + \frac{d}{dt} \left[ L \xi + \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} (\eta_j - \dot{q}_j \xi) - \bar{F} \right] = 0,$$

což, vzhledem k platnosti Lagrangeových rovnic 2. druhu, vede k důkazu uvedené věty.

Na základě dokázané věty můžeme ukázat souvislost některých základních zákonů zachování se symetriemi prostoru a času, tj. s homogeností a izotropností prostoru a s homogeností času.

Jestliže nějaká fyzikální soustava  $A$  je ovlivňována jinou soustavou  $B$ , pak fyzikální chování soustavy  $A$  závisí na tom, jak daleko je  $A$  od  $B$ , což znamená, že mezi všemi možnými souřadnicovými soustavami, v nichž lze popisovat chování soustavy  $A$  by bylo možné vždy najít jednu, která by měla vlastnosti privilegované. Pokud je však soustava  $A$  umístěna v prostoru jinak prázdném, můžeme předpokládat, že její fyzikální chování nebude záviset na místě, v němž je soustava situována, jinými slovy, prostor sám můžeme pokládat za homogenní. Podobně jestliže by soustava  $A$  byla ovlivňována nějakou vnější silou daného směru, záviselo by její chování na orientaci vzhledem k tomuto směru; pokud však v prostoru neexistuje fyzikálně rozlišitelný směr, nezávisí chování soustavy  $A$  na její orientaci v prostoru, tj. prostor sám je izotropní. Žádná pozorovaná veličina charakterizující soustavu  $A$  tedy nesmí změnit svoji hodnotu při translaci a rotaci souřadnic.

Podobně neexistuje-li privilegovaný časový okamžik, lze očekávat, že fyzikální chování soustavy nemůže být ovlivněno změnou počátku odčítání času („posunutím“ v čase), tj. čas musí být homogenní. Podle principu relativity nesmějí být zákony mechaniky ovlivněny ani přechodem k jiné inerciální vztážené soustavě Galileiho transformací. Studujeme nyní tyto transformace z hlediska věty E. Nötherové.

## Homogennost času

Předpokládejme transformaci

$$T = t + \epsilon, \quad Q_j = q_j, \quad \dot{Q}_j = \frac{\dot{Q}_j}{\dot{T}} = \dot{q}_j.$$

dosazením do (5.6.20) zjišťujeme, že tento vztah bude platit, jestliže zvolíme  $\bar{F} = 0$ , což odpovídá předpokladu, že  $L$  nezávisí explicitně na čase. Protože nyní  $\xi = 1$ ,  $\eta_j = 0$ , plyne z (5.6.21)

$$L - \sum_{j=1}^f \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \equiv -E = \text{konst.},$$

což je integrál energie (3.6.5); funkce na levé straně nezávisí explicitně na čase, pro energii tedy platí zákon zachování.

## Homogennost a izotropnost prostoru

Předpokládejme nyní transformaci

$$T = t, \quad Q_j = q_j \quad \text{pro } j \neq k, \quad Q_k = q_k + \epsilon, \quad \dot{Q}_j \equiv \frac{\dot{Q}_j}{\dot{T}} = \dot{q}_j.$$

Tato transformace může obecně charakterizovat jak posunutí v prostoru, tak otočení, podle toho, zda  $q_j$  je souřadnice délková nebo úhlová. Vztah (5.6.20) bude opět splněn při  $\bar{F} = 0$ , což odpovídá nezávislosti  $L$  na příslušné souřadnici ( $q_k$  je cyklická souřadnice). Nyní platí  $\xi = 0$ ,  $\eta_j = 0$  pro  $j \neq k$ ,  $\eta_k = 1$  a z (5.6.21) plyne

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \equiv p_k = \text{konst.}$$

tj. dostali jsme integrál cyklické proměnné.

Specifikujeme nyní tyto výsledky na soustavu  $N$  částic; hmotnost  $\rho$ -té částice je  $m_\rho$ , její polohový vektor  $\mathbf{r}_\rho$  a rychlost  $\mathbf{v}_\rho$ . Transformaci translace v prostoru zapišme ve tvaru

$$T = t, \quad \tilde{x}_\rho = x_\rho + \epsilon, \quad \tilde{y}_\rho = y_\rho, \quad \tilde{z}_\rho = z_\rho, \quad \bar{F} = 0.$$

Nové souřadnice jsme zde označili vlnovkou, aby nedošlo k záměně se složkami síly a místo indexu průběžného číslování os použijeme dále indexy  $x, y, z$ . Nyní  $\xi = 0$ ,  $\eta_{x,\rho} = 1$ ,  $\eta_{y,\rho} = \eta_{z,\rho} = 0$ , takže z (5.6.21)

$$\sum_{\rho=1}^N \frac{\partial L}{\partial v_{x,\rho}} = \text{konst.}$$

Předpokládáme-li, že v Lagrangeově funkci  $L = T - U$  potenciální energie nezávisí na rychlostech částic, platí

$$\sum_{\rho=1}^N \frac{\partial L}{\partial v_{x,\rho}} = \sum_{\rho=1}^N m_\rho v_{x,\rho} = \text{konst.}$$

takže pro  $x$ -ovou složku výsledné hybnosti platí zákon zachování. Uvažujeme-li obecné translace v libovolných směrech, dostaneme pak zákon zachování celkové hybnosti.

Studujeme-li transformaci rotace v prostoru, můžeme ji pro otočení kolem osy  $z$  v kartézských souřadnicích zapsat ve tvaru

$$T = t, \quad \tilde{x}_\rho = x_\rho \cos \epsilon + y_\rho \sin \epsilon, \quad \tilde{y}_\rho = -x_\rho \sin \epsilon + y_\rho \cos \epsilon, \quad \tilde{z}_\rho = z_\rho, \quad \bar{F} = 0,$$

takže

$$\xi = 0, \quad \eta_{x,\rho} = y_\rho, \quad \eta_{y,\rho} = -x_\rho, \quad \eta_{z,\rho} = 0$$

a z věty (5.6.21) plyne

$$\sum_{\rho=1}^N \left( x_\rho \frac{\partial L}{\partial v_{y,\rho}} - y_\rho \frac{\partial L}{\partial v_{x,\rho}} \right) = \text{konst.},$$

což opět vede k zákonu zachování  $z$ -ové složky výsledného momentu hybnosti soustavy, předpokládáme-li, že potenciální energie soustavy nezávisí na rychlostech částic.

## Princip relativity

Studujeme nyní pro jednoduchost soustavu tvořenou jedinou volnou částicí o hmotnosti  $m$ , pohybující se v ose  $x$ . Její Lagrangeova funkce je  $L(x, \dot{x}, t) = 1/2 (m\dot{x}^2)$ . Transformace odpovídající Galileiho transformaci mezi inerciálními soustavami může být popsána vztahy  $T = t$ ,  $\tilde{x} = x - \epsilon t$ , takže

$$\dot{\tilde{x}} = \frac{\dot{x}}{T} = \dot{x} - \epsilon$$

a dále

$$L(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, T) = \frac{1}{2} m (\dot{x} - \epsilon)^2.$$

Vztah (5.6.20) dává

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[ L(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, T) \cdot \dot{T} \right] \right\}_{\epsilon=0} = -m\dot{x} = \frac{d}{dt} (-mx),$$

takže funkci  $\bar{F}$  nyní položíme rovnu  $\bar{F} = -mx$ . Protože

$$\frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \xi = 0, \quad \eta = -t,$$

dostáváme z (5.6.21)

$$-m\dot{x}t + mx = \text{konst.},$$

což je ekvivalentní podmínce  $\dot{x} = \text{konst.}$

Důsledkem požadavku, že zákony pohybu volné částice se nesmějí změnit při aplikaci Galileiho transformace, je tedy tvrzení, že rychlost této částice je konstantní.

Těmto problémům jsme věnovali zvýšenou pozornost z toho důvodu, že hrají významnou úlohu při snaze o hledání souvislostí různých teoretických koncepcí i snaze o hlubší porozumění základním fyzikálním principům.

## Literatura ke kapitole 5

- [1] Arnold V.I.: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, New York–Berlin–Heidelberg 1997.
- [2] Brdička M., Hladík A.: *Teoretická mechanika*. Academia, Praha 1987.
- [3] Desloge E.A., Karch R.I.: „Noether’s theorem in classical mechanics“, *Am. J. Phys.* **45**(4) (1977), 336–339.
- [4] Elsgolc L.E.: *Variční počet*. SNTL, Praha 1965.
- [5] Goldstein H.: *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1980.
- [6] Gregory R.D.: *Classical mechanics*. Cambridge University Press 2006.
- [7] Greiner W.: *Classical mechanics. System of particles and Hamiltonoan mechanics*. Springer-Verlag, New York 2003.
- [8] Horský J., Novotný J., Štefaník M.: *Mechanika ve fyzice*. Academia, Praha 2001.
- [9] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.: *Механика*. Наука, Москва 1988.
- [10] Trkal V.: *Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa*. ČSAV, Praha 1956.

**Část II**

**Mechanika kontinua**



## Kapitola 6

### Pohybové rovnice kontinua

Dosud jsme ve svých úvahách pracovali s modelem částice resp. soustavy částic a s modelem tuhého tělesa. Tyto modely však nemůžeme použít, studujeme-li pohyb tekutin nebo pružnou deformaci elastických těles. Je proto třeba vybudovat takový model, který by se co nejvíce přiblížil chování takových soustav, tj. tekutin a elastických těles a který by byl přitom natolik jednoduchý, že by bylo možné jej bez větších problémů matematicky popsat. Takovým modelem je model *kontinua* – tělesa, v němž se vzdálenosti jednotlivých „částic“ při pohybu mění, částice už nejsou vázány tuhými vazbami. Přitom mluvíme-li o „částici kontinua“, máme na mysli určitou malou část studovaného objektu s hmotností spojitě rozloženou. Toto spojitě rozložené hmotnosti bude základní charakteristikou kontinua a spojitost budeme předpokládat i u jiných veličin, které stav kontinua popisují.

Budujeme-li model kontinua, nepřehlídíme tedy k mikrostruktuře látek, která je příčinou jejich různých mechanických vlastností; také se nesnažíme příčiny různých vlastností látek hledat a objasňovat. Mechanika kontinua je tedy teorií fenomenologickou.

#### 6.1 Síly objemové a plošné, tenzor napětí

Síly, s nimiž jsme se dosud v teoretické mechanice setkávali, byly zpravidla takového typu, že jsme mohli předpokládat jejich působení v jediném bodě. V mechanice kontinua je situace komplikovanější: Síly, které zde působí, jsou v podstatě dvojího druhu. První typ tvoří tzv. *síly objemové*. Myslíme si kontinuum rozděleno na hmotné elementy, můžeme objemovou sílu působící na určitý element pokládat za úměrnou hmotnosti resp. také objemu tohoto elementu. Objemovými silami jsou např. síly gravitační. Protože nemá smysl udávat objemovou sílu působící na nějaký element kontinua, který může mít různou velikost, pracujeme obvykle s objemovými silami vztaženými na jednotku objemu kontinua (označujeme je  $F_i$ ) nebo na element kontinua o jednotkové hmotnosti (označíme je  $G_i$ ). Výsledná objemová síla  $\mathbf{R}^{\text{obj}}$  působící na objem  $V$  kontinua pak bude

$$\mathbf{R}^{\text{obj}} = \int_V \mathbf{F} \, dV. \quad (6.1.1)$$

Důležitější úlohu hrají v mechanice kontinua tzv. *síly plošné*. Jsou to vlastně síly, které charakterizují vzájemné ovlivňování jednotlivých elementů kontinua. Předpokládáme-li, že se podstatně ovlivňují jen ty elementy, které jsou si nejbližší, dospějeme k závěru, že účinek těchto sil se přenáší po ploše; od jedné plochy, na kterou působí síla, se bude silové působení přenášet vždy na přilehlou sousední plochu. Výsledná síla působící na určitou plošku bude ovšem také záviset na orientaci této plošky, která je určena jednotkovým vektorem vnější normály  $\mathbf{n}$ . Vztáhneme-li plošnou sílu na jednotkovou plošku s vnější normálou  $\mathbf{n}$ , budeme ji označovat  $\overset{n}{\mathbf{T}}$  a nazývat *vektorem napětí*. Výsledná plošná síla působící na plochu  $S$  v kontinuu je pak

$$\mathbf{R}^{\text{pl}} = \int_S \overset{n}{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{S}. \quad (6.1.2)$$

V každém bodě kontinua můžeme tedy udat nekonečně mnoho vektorů napětí pro všechny možné orientace normál  $\mathbf{n}$ ; k popisu napětí v určitém bodě kontinua bychom tedy vlastně měli požadovat nekonečně mnoho údajů. Naštěstí to není třeba a stačí, jestliže určíme vektory napětí pro plošky ležící ve třech základních souřadnicových rovinách. Pomocí nich, jak dále ukážeme, můžeme pak vyjádřit vektor napětí pro plošku s libovolně orientovanou vnější normálou  $\mathbf{n}$ .

Označme vektor napětí pro plošku, jejíž normála má směr  $j$ -té osy, symbolem  $\overset{j}{\mathbf{T}}$ ; složky tohoto vektoru do souřadnicových os označíme

$$\overset{j}{T}_i = \tau_{ji}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.1.3)$$

Položme počátek souřadnicové soustavy do bodu kontinua  $O$ , v němž studujeme napětí. Rovinu s normálou  $\mathbf{n}$ , v níž leží ploška, pro kterou chceme určit vektor napětí, necháme procházet v blízkosti počátku, takže nám spolu se souřadnicovými rovinami vymezí elementární čtyřstěn  $OABC$  (viz obr. 6.1). Je-li  $\sigma$  obsah trojúhelníka  $ABC$  a  $\sigma_1, \sigma_2,$

$\sigma_3$  plochy trojúhelníků  $OBC$ ,  $OAC$ ,  $OAB$ , pak veličiny  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  představují vlastně průměty trojúhelníka  $ABC$  do jednotlivých souřadnicových rovin. Protože složky normály  $\mathbf{n}$  jsou přímo rovny kosinům úhlů, které normála  $\mathbf{n}$  svírá se souřadnicovými osami, platí  $\sigma_j = \sigma n_j$ . Označíme-li dále  $h$  kolmou vzdálenost bodu  $O$  od roviny trojúhelníka  $ABC$ , je objem čtyřstěnu roven  $\frac{1}{3}oh$ .

Uvážíme-li, že vektor napětí působící na plošce  $\sigma$  má snahu vzdálit tuto plošku od bodu  $O$ , musíme si, má-li čtyřstěn být v rovnováze, představit, že v ploškách  $\sigma_j$  působí kompenzující vektory napětí. O všech těchto silách ovšem musíme předpokládat, že působí v bodech málo se lišících od bodu  $O$  – v těžištích stěn čtyřstěnu, a stejně tak objemovou sílu si budeme myslet jako sílu působící v těžišti čtyřstěnu. Tuto skutečnost vyjádříme tím způsobem, že ke všem působícím silám přidáme malé veličiny, které se v limitě budou blížit nule, bude-li se výška čtyřstěnu zmešovat a které představují korekce nutné k převedení všech sil do téhož bodu. Budeme tedy předpokládat, že v těžišti plochy  $\sigma$  působí síla o složkách  $(\overset{n}{T}_i + \varepsilon_i)\sigma$ , v těžišti plošky  $\sigma_1$  síla  $(-\overset{1}{T}_i + \varepsilon_{1i})\sigma n_1$  a podobně v těžištích plošek  $\sigma_2$  a  $\sigma_3$  (kde záporným znaménkem vyjádřujeme skutečnost, že normály těchto plošek mají směr záporných os), a v těžišti čtyřstěnu síla  $(F_i + \varepsilon'_i)\frac{1}{3}oh$ .

Má-li být uvažovaný čtyřstěn v rovnováze, musí vymizet výslednice všech sil převedených do téhož bodu, tj. musí platit

$$\left(\overset{n}{T}_i + \varepsilon_i\right)\sigma + (-\tau_{ji} + \varepsilon_{ji})\sigma n_j + (F_i + \varepsilon'_i)\frac{1}{3}oh = 0,$$

kde ve druhém členu je  $j$  sčítací index a použili jsme (6.1.3).

Přejdeme-li po krácení  $\sigma$  v této rovnici k limitě pro  $h \rightarrow 0$ , dostaneme

$$\overset{n}{T}_i = \tau_{ji}n_j. \quad (6.1.4)$$

Vyjádřili jsme tedy vektor napětí pro libovolně orientovanou plochu pomocí devíti složek  $\tau_{ji}$  vektorů napětí vzhledem k třem souřadnicovým rovinám. Veličiny  $\tau_{ji}$  nazýváme složkami *tenzoru napětí*. Dá se dokázat, že veličiny  $\tau_{ji}$  mají skutečně charakter tenzoru 2. řádu v kartézských souřadnicích.

Složky tenzoru napětí mají konkrétní fyzikální význam: Složky se stejnými indexy  $i = j$  určují průměty plošných sil (resp. vektorů napětí) do normály plošky kolmé na příslušnou osu  $x_i$ . Nazýváme je též *normálovými napětími*. Složky s různými indexy mají tendenci posunovat plošky v souřadnicových rovinách; nazýváme je *tečnými napětími*.

Nyní budeme hledat podmínky rovnováhy kontinua. Předpokládejme, že v počátečním, tzv. přirozeném stavu nepůsobí na kontinuum žádné vnější síly a že uvnitř ani na jeho povrchu nevznikla elastická posunutí.

Začnou-li působit vnější síly, kontinuum se deformuje; po krátkou dobu přechází z přirozeného stavu do stavu deformovaného a po tuto dobu není v rovnováze, pak se však opět ustaví rovnováha.

Při rovnováze volného tuhého tělesa musejí vymizet výslednice vnějších sil působících na tuhé těleso a jejich výsledný moment. Kdybychom stejné podmínky kladli na kontinuum, vypadla by nám vnitřní napětí, která právě nás zajímají. Musíme proto úlohu formulovat tak, aby vnitřní plošné síly se stali vnějšími: Vydělíme z deformovaného tělesa libovolnou část o objemu  $V$  a ohraničenou plochou  $S$ . Složky výslednice objemových sil jsou dány vztahem (6.1.1), výslednice plošných sil je určena z (6.1.2). Má-li vymizet výslednice působících sil pro zvolenou část kontinua, musí platit:

$$R_i^{obj} + R_i^{pl} = \int_V F_i dV + \int_S \overset{n}{T}_i dS = \int_V F_i dV + \int_S \tau_{ji}n_j dS = 0.$$

Plošný integrál převedeme na objemový pomocí Gaussovy věty. Pak tedy:

$$\int_V \left( F_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \right) dV = 0.$$

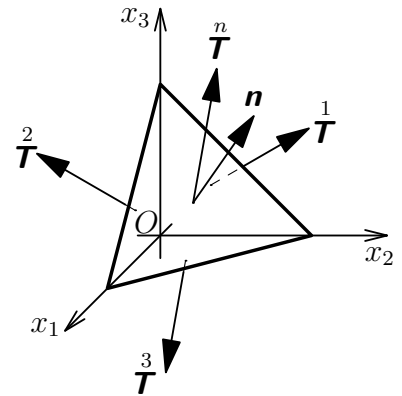
Protože objem byl libovolný, bude tato podmínka splněna, jestliže

$$F_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.1.5)$$

To je první *podmínka rovnováhy kontinua*.

Druhou podmínku rovnováhy dostaneme z podmínky vymizení výslednice momentů sil působících na objem  $V$ . Pro  $i$ -tou složku výslednice momentů objemových a plošných sil musí platit

$$\int_V \epsilon_{ijk} x_j F_k dV + \int_S \epsilon_{ijk} x_j \overset{n}{T}_k dS = 0. \quad (6.1.6)$$



Obr. 6.1: K zavedení tenzoru napětí

Plošný integrál opět transformujeme

$$\int_S \epsilon_{ijk} x_j \overset{n}{T}_k dS = \int_S \epsilon_{ijk} x_j \tau_{lk} n_l dS = \int_V \frac{\partial}{\partial x_l} (\epsilon_{ijk} x_j \tau_{lk}) dV =$$

$$\int_V \epsilon_{ijk} \left( \delta_{jl} \tau_{lk} + x_j \frac{\partial \tau_{lk}}{\partial x_l} \right) dV = \int_V \epsilon_{ijk} \left( \tau_{jk} + x_j \frac{\partial \tau_{lk}}{\partial x_l} \right) dV, \quad (6.1.7)$$

takže nakonec podmínka rovnováhy dává

$$\int_V \epsilon_{ijk} \left( x_j F_k + \tau_{jk} + x_j \frac{\partial \tau_{lk}}{\partial x_l} \right) dV = 0.$$

Ze vztahu (6.1.5) plyne

$$\frac{\partial \tau_{lk}}{\partial x_l} = -F_k,$$

takže musí

$$\int_V \epsilon_{ijk} \tau_{jk} dV = 0,$$

což je při libovolném  $V$  opět splněno, jestliže

$$\epsilon_{ijk} \tau_{jk} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.1.8)$$

Zde jsou  $j, k$  sčítací indexy. Jsou-li  $i, j, k$  navzájem různé, má tenzor  $\epsilon_{ijk}$  nenulové hodnoty. Vztah (6.1.8) proto reprezentuje tři vztahy

$$\tau_{12} = \tau_{21}, \quad \tau_{13} = \tau_{31}, \quad \tau_{23} = \tau_{32}$$

neboli

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}, \quad (6.1.9)$$

tj. tenzor napětí musí být symetrický. Tato podmínka se zpravidla mlčky předpokládá; mluvíme-li o tenzoru napětí, máme vždy na mysli symetrický tenzor, takže jedinou podmínkou rovnováhy kontinua pak zůstává vztah (6.1.5).

Pro zobrazení stavu napětí v kontinuu je vhodné v každém bodě kontinua definovat kvadratickou plochu – *Cauchyho kvadriku napětí*, kterou lze přiřadit tenzoru napětí (podobně jako lze kvadriku přiřadit každému symetrickému tenzoru 2. řádu).

Zvolme bod  $P$  v kontinuu a v něm počátek souřadnicové soustavy. Bodem  $P$  nechť prochází elementární ploška mající kladnou normálu  $\mathbf{n}$ . Normálová složka  $N$  vektoru napětí  $\overset{n}{\mathbf{T}}$ , který působí na tuto plošku, bude

$$N = \overset{n}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} = \tau_{ij} n_j n_i. \quad (6.1.10)$$

$N > 0$  odpovídá tzv. normálovému tahu,  $N < 0$  normálovému tlaku. Na normále si zvolíme bod  $Q$  o souřadnicích  $\xi_i$ ; označíme délku  $\overline{PQ} = A$ , takže můžeme definovat vektor  $\mathbf{A} = A\mathbf{n}$ ,

$$A_i = \xi_i = A\nu_i, \quad \nu_i = \frac{\xi_i}{A}.$$

Dosazením do (6.1.10) dostaneme

$$NA^2 = \tau_{ij} \xi_i \xi_j.$$

Délka  $A$  byla zatím libovolná; zvolíme ji nyní tak, aby

$$NA^2 = \pm k^2,$$

kde znaménko  $+$  odpovídá normálovému tahu, znaménko  $-$  normálovému tlaku a  $k$  je libovolná reálná konstanta. Poslední rovnice pak bude

$$\tau_{ij} \xi_i \xi_j = \pm k^2. \quad (6.1.11)$$

To je rovnice Cauchyho kvadriky napětí. Jako u každé kvadratické plochy můžeme i u Cauchyho kvadriky napětí najít hlavní směry – zde se nazývají *hlavní směry napětí*. Jejich fyzikální význam je ten, že v těchto směrech vymizejí tečné složky vektoru napětí, což znamená, že vektor napětí působí kolmo na studovanou plošku. Platí tedy

$$\overset{n}{T}_i \sim n_i$$

nebo, označíme-li  $\tau$  faktor úměrnosti,

$$\tau_{ij}n_j = \tau n_i,$$

což lze pomocí identity  $n_i = \delta_{ij}n_j$  psát

$$(\tau_{ij} - \delta_{ij}\tau)n_j = 0. \quad (6.1.12)$$

Tato soustava lineárních homogenních rovnic bude mít řešení pro  $\tau$ , která jsou řešením „sekulární rovnice“ – podmínky zaručující anulování determinantu soustavy

$$\begin{vmatrix} \tau_{11} - \tau & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} - \tau & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} - \tau \end{vmatrix} = 0.$$

Tato podmínka dává rovnici pro  $\tau$

$$-\tau^3 + \Theta_1\tau^2 - \Theta_2\tau + \Theta_3 = 0 \quad (6.1.13)$$

kde  $\Theta_i$  jsou funkce složek tenzoru napětí (viz doplněk A.1.3).

Rovnice (6.1.13) má tři reálné kořeny (důkazem se zabývat nebudeme), jimž odpovídají po dosazení do (6.1.12) tři směry vzájemně kolmé - hlavní směry napětí. Kořeny  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  rovnice (6.1.13) se nazývají *hlavní napětí*.

V soustavě hlavních os (které označíme  $\xi'_i$ ) má Cauchyho kvadrika napětí (6.1.11) kanonický tvar

$$\tau_1\xi_1'^2 + \tau_2\xi_2'^2 + \tau_3\xi_3'^2 = \pm k^2. \quad (6.1.14)$$

V praxi se často pracuje s určitými specifickými typy napětí, z nichž zde uvedeme:

a) *Homogenní tlak* charakterizovaný podmínkou  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau$ .

Průslušná kvadrika napětí je koule, všechna napětí tedy mají směr normály. Fyzikálně je homogenní tlak realizován v tělese podrobeném hydrostatickému (aerostatickému) tlaku.

b) *Jednoduchý tah* (tlak) je charakterizován podmínkou  $\tau_1 \neq 0, \tau_2 = \tau_3 = 0$ .

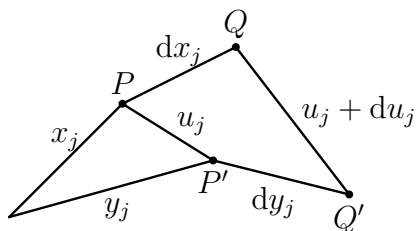
Kvadrika (6.1.14) má rovnici

$$\tau\xi_1'^2 = \pm k^2,$$

degeneruje tedy v tomto případě na dvojici rovnoběžných rovin. Napětí na libovolné ploše má směr osy  $\xi'_1$ .

## 6.2 Tenzor deformace

Kontinuum se pod vlivem vnějších sil pohybuje, přičemž také mění svůj tvar. Tento pohyb se dá rozložit podobně jako u tuhého tělesa na posunutí a rotaci, navíc pak přistupuje tzv. vlastní deformace, spočívající ve změně vzájemných vzdáleností jednotlivých elementů kontinua. Budeme se nyní zabývat popisem této vlastní deformace kontinua.



Obr. 6.2: K zavedení tenzoru deformace

Představme si v kontinuu nějaký bod  $P$  charakterizovaný polohovým vektorem o složkách  $x_i$ ; v jeho blízkosti nechť se nachází jiný bod  $Q$ , jehož poloha bude charakterizována polohovým vektorem o složkách  $x_i + dx_i$ . Předpokládejme dále, že vlivem působení sil přejde bod  $P$  do nové polohy  $P'$  určené vektorem o složkách  $y_i$  a podobně bod  $Q$  přejde do nové polohy  $Q'$  charakterizované polohovým vektorem o složkách  $y_i + dy_i$ . Změna polohy bodu  $P$  je určena vektorem posunutí o složkách  $u_i$  (obr. 6.2).

Protože  $u_i$  je funkcí souřadnic bodu  $P$ , což zkráceně zapíšeme  $u_i = u_i(x)$ , můžeme pro posunutí bodu  $Q$  přibližně psát

$$u_i(x + dx) = u_i(x) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = u_i + du_i.$$

Protože

$$y_i = x_i + u_i$$

$$y_i + dy_i = x_i + dx_i + u_i + du_i,$$

dostáváme odečtením

$$dy_i = dx_i + du_i = dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_j, \quad (6.2.1)$$

kde jsme použili identity  $dx_i = \delta_{ij}dx_j$ .

Za míru vlastní deformace kontinua budeme pokládat rozdíl čtverců vzdáleností bodů  $PQ$  a  $P'Q'$ . Označíme-li

$$ds_0^2 = dx_i dx_i, \quad ds^2 = dy_i dy_i,$$

bude

$$ds^2 - ds_0^2 = \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left( \delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) dx_j dx_k - dx_i dx_i.$$

Roznásobením dostaneme

$$ds^2 - ds_0^2 = \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) dx_j dx_k.$$

Zavedeme-li tzv. *tenzor konečné deformace*

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right), \quad (6.2.2)$$

můžeme psát

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\varepsilon_{jk} dx_j dx_k. \quad (6.2.3)$$

Přímo z definice (6.2.2) je vidět, že  $\varepsilon_{jk}$  jsou skutečně složky kartézského tenzoru 2. řádu (protože  $u_i$  jsou složky vektoru) a že  $\varepsilon_{jk}$  je tenzor symetrický; proto je možné mu přiřadit kvadratickou plochu – *elipsoid deformace* – a najít tzv. *hlavní směry deformace*. My se však budeme ve svých úvahách zabývat jen jednoduššími problémy teorie deformací, takovými deformacemi kontinua, při nichž složky vektoru posunutí  $u_i$  i jejich derivace jsou malé veličiny. Takové deformace budeme nazývat *malými deformacemi*. Pro malé deformace lze v tenzoru konečné deformace zanedbat malé veličiny druhého řádu a přejít tak k *tenzoru malé deformace*

$$e_{jk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right). \quad (6.2.4)$$

Protože v naší teorii budeme studovat výhradně malé deformace, budeme o  $e_{jk}$  mluvit prostě jako o tenzoru deformace.

Podívejme se nyní, jaký je fyzikální význam složek tenzoru deformace  $e_{jk}$ . Definujme-li *relativní prodloužení*  $E_{PQ}$  délkového elementu, který před deformací byl určen body  $P, Q$  vztahem

$$E_{PQ} = \frac{ds - ds_0}{ds_0},$$

plyne z rovnice (6.2.3) pro malé deformace (tj. na pravé straně bude  $e_{jk}$  místo  $\varepsilon_{jk}$ ) dělením  $ds_0^2$

$$\frac{ds^2 - ds_0^2}{ds_0^2} = \frac{ds - ds_0}{ds_0} \frac{ds - ds_0 + 2ds_0}{ds_0} = E_{PQ} (E_{PQ} + 2) = 2e_{jk} \frac{dx_j}{ds_0} \frac{dx_k}{ds_0}. \quad (6.2.5)$$

Výrazy  $\frac{dx_j}{ds_0}$  jsou směrové kosiny směru  $PQ$ ; zvolíme-li element v ose  $x_1$  (tj.  $dx_1/ds_0 = 1$ ,  $dx_2/ds_0 = 0$ ,  $dx_3/ds_0 = 0$ ) a označíme v tomto případě relativní prodloužení symbolem  $E_1$ , plyne z (6.2.5)

$$E_1(E_1 + 2) = 2e_{11}$$

odkud

$$E_1 = \sqrt{1 + 2e_{11}} - 1 \quad (6.2.6)$$

neboli

$$E_i \approx e_{11},$$

kde jsme využili rozvoje odmocniny pro  $e_{11} \ll 1$  a omezili se na dva první členy rozvoje. Podotýkáme ještě, že u odmocniny v (6.2.6) je třeba zvolit jen kladné znaménko, neboť by jinak vycházelo relativní prodloužení stále záporné, což není možné. Podobně bychom pro elementy orientované původně ve směru os  $x_2$  resp.  $x_3$  dostali

$$E_2 \approx e_{22}, \quad E_3 \approx e_{33}.$$

Diagonální složky tenzoru malé deformace jsou tedy rovny relativním prodloužením elementů, které před deformací byly rovnoběžné s osami souřadnic.

Studujme nyní, jak se změní po deformaci úhel dvou elementů, které před deformací byly na sebe kolmé. Předpokládejme, že uvažované elementy původně ležely v osách  $x_1$  a  $x_2$ . Označíme-li jejich délky před deformací  $ds_{01}$  a  $ds_{02}$ , po deformaci pak  $ds_1$  a  $ds_2$  vyplývá z (6.2.6)

$$\frac{ds_1 - ds_{01}}{ds_{01}} = \frac{ds_1}{ds_{01}} - 1 = \sqrt{1 + 2e_{11}} - 1$$

neboli

$$ds_1 = \sqrt{1 + 2e_{11}} ds_{01}$$

a podobně

$$ds_2 = \sqrt{1 + 2e_{22}} ds_{02}.$$

Směrové kosiny těchto elementů po deformaci budou vzhledem k (6.2.1)

$$\frac{dy_{1i}}{ds_1} = \frac{\delta_{i1} + \frac{\partial u_i}{\partial x_1}}{\sqrt{1 + 2e_{11}}}, \quad \frac{dy_{2i}}{ds_2} = \frac{\delta_{i2} + \frac{\partial u_i}{\partial x_2}}{\sqrt{1 + 2e_{22}}}.$$

Označíme-li  $(\pi/2 - \alpha_{12})$  úhel, který oba elementy svírají po deformaci ( $\alpha_{12}$  představuje změnu původně pravého úhlu), vypočítáme jeho kosinus ze vztahu

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{12}\right) = \frac{dy_{1i}}{ds_1} \frac{dy_{2i}}{ds_2} = \frac{\left(\delta_{i1} + \frac{\partial u_i}{\partial x_1}\right) \left(\delta_{i2} + \frac{\partial u_i}{\partial x_2}\right)}{\sqrt{1 + 2e_{11}} \sqrt{1 + 2e_{22}}},$$

což při omezení na malé deformace, kdy platí také  $\sin \alpha_{12} \approx \alpha_{12}$  nám dává přibližný vztah

$$\alpha_{12} \approx \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 2e_{12}. \quad (6.2.7)$$

Úhel  $\alpha_{12}$  nazýváme také *smykovým úhlem*. Obdobnou úvahou můžeme vypočítat smykové úhly pro elementy ležící původně v jiných osách. Platí tedy, že nediagonální složky tenzoru malé deformace jsou přibližně rovny polovině příslušných smykových úhlů.

Zbývá nám konečně zmínit se o kvadratické ploše, kterou přiřazujeme symetrickému tenzoru malé deformace; je jí tzv. *elipsoid deformace*. Můžeme pak pro něj opět najít *hlavní směry deformace*, které mají tu vlastnost, že to jsou jediné směry, které jsou před i po deformaci vzájemně kolmé, neboť smykové úhly jsou nulové. Zapišeme-li podobně jako pro tenzor napětí sekulární rovnici ve tvaru

$$-e^3 + \vartheta_1 e^2 - \vartheta_2 e + \vartheta_3 = 0$$

pro tenzor deformace, je známo (viz doplněk A.1.3), že veličiny  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$  jsou invariantní, tj. nemění se při transformacích souřadnic. Důležitý je zde zejména invariant  $\vartheta_1$ , který je dán výrazem

$$\vartheta_1 = e_{11} + e_{22} + e_{33} = e_1 + e_2 + e_3,$$

kde  $e_1, e_2, e_3$  jsou složky tenzoru deformace v souřadnicové soustavě hlavních os deformace; nazývají se též hlavní prodloužení. Uvažujeme-li kvádr s hranami  $h_1, h_2, h_3$  rovnoběžnými s hlavními osami deformace, je jeho objem

$$V_0 = h_1 h_2 h_3.$$

Po deformaci budou jeho hrany  $h'_1, h'_2, h'_3$  stále na sebe kolmé a bude pro ně platit

$$h'_1 = h_1(1 + e_1)$$

$$h'_2 = h_2(1 + e_2)$$

$$h'_3 = h_3(1 + e_3)$$

takže objem po deformaci bude

$$V = h'_1 h'_2 h'_3 = h_1 h_2 h_3 (1 + e_1)(1 + e_2)(1 + e_3) \doteq h_1 h_2 h_3 (1 + e_1 + e_2 + e_3).$$

*Objemová (kubická) dilatace*  $\vartheta$  je definována

$$\vartheta = \frac{V - V_0}{V_0} = e_1 + e_2 + e_3 = e_{11} + e_{22} + e_{33} \quad (6.2.8)$$

je tedy totožná s invariantem  $\vartheta_1$ . Tento invariant tedy vyjadřuje zvětšení jednotkového objemu při deformaci.

Vraťme se nyní ještě k problému vzájemné polohy dvou bodů v kontinuu. Z (6.2.1) je vidět, že výraz  $\partial u_i / \partial x_j$  nám charakterizuje celkovou změnu polohy dvou blízkých bodů v kontinuu, zahrnuje proto jednak vlastní deformaci, jednak otočení elementu kontinua jako celku, tedy jako tuhého tělesa. Protože  $\partial u_i / \partial x_j$  je obecný tenzor 2. řádu, dá se psát ve tvaru

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

První výraz napravo je však symetrický tenzor deformace  $e_{ij}$  a charakterizuje vlastní deformaci. Druhý výraz proto musí charakterizovat rotaci elementu kontinua; protože je to antisymetrický tenzor, můžeme mu přiřadit vektor (axiální vektor, resp. pseudovektor) úhlového otočení. Tenzor

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (6.2.9)$$

nazýváme *tenzorem rotace*.

Závěrem této kapitoly bude stručná zmínka o tzv. *podmínkách kompability deformací*. Složky tenzoru  $e_{ij}$  jsme v každém bodě určili z vektoru posunutí  $u_i$ , tj. určili jsme vlastně tenzorové pole symetrického tenzoru, které je obecně dáno šesti jeho složkami, jako funkcemi souřadnic, pomocí pole vektorového, které je charakterizováno třemi složkami. Z toho vyplývá, že složky tenzoru  $e_{ij}$  musejí být ještě vázány určitými podmínkami, aby bylo možné ze zadaného pole tenzoru  $e_{ij}$  jednoznačně určit pole vektoru posunutí. Z matematického hlediska tyto podmínky vlastně musejí zaručovat integrabilitu rovnic (6.2.4) pro  $u_j$ . Je možné je dostat u rovnic (6.2.4), vyloučíme-li dalším derivováním funkce  $u_i$ . Podmínky kompability pro malé deformace mají tvar

$$\epsilon_{ikm} \epsilon_{jrs} \frac{\partial^2 l_{kr}}{\partial x_m \partial x_s} = 0 \quad (6.2.10)$$

kde  $\epsilon_{ikm}$  je Levi Civitův tenzor (viz doplněk A.1.4) a nazývají se někdy též *Saint-Venantovými rovnicemi*.

## Literatura ke kapitole 6

- [1] Brdička M., Samek L., Sopko B.: *Mechanika kontinua*. Academia, Praha 2005.
- [2] Chadwick P.: *Continuum mechanics*. Dover Publications, Inc., Mineola, New York 1999.
- [3] Kolář M.: *Sbírka úloh z mechaniky kontinua*. Diplomová práce, Univerzita Palackého Olomouc 2003. Ke stažení na adrese <http://optics.upol.cz/~richterek/files.html>.
- [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.: *Механика сплошных сред*. Наука, Москва 1954.
- [5] Malvern L.E.: *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice Hall 1969.
- [6] Mase G.E.: *Schaum's outlines: Continuum mechanics*. McGraw-Hill, New York 1970.

# Kapitola 7

## Klasická teorie pružnosti

### 7.1 Zobecněný Hookův zákon

Ze zkušenosti je známo, že v některých případech se kontinuum podrobené vnějším silám (neproměnným) deformuje takovým způsobem, že napětí vzniklé deformací vyrovnává ve všech bodech kontinua účinky vnějších sil. Tensor napětí v tomto ustáleném stavu je tedy jistou funkcí složek tenzoru deformace. Kontinuum, pro které lze takovou závislost najít, se zpravidla nazývá *elastické těleso*. Naší snahou nyní bude určit tuto funkční závislost explicitně.

Základní charakter této závislosti můžeme určit jedině na základě experimentu. Významnou pomůckou je existence Hookova zákona, který lze v elementárním tvaru formulovat tak, že při jednorozměrné deformaci (tyč namáhaná tahem) je relativní prodloužení úměrné působícímu napětí. Tento zákon má ovšem jen omezenou platnost; platí jen pro určitou oblast prodloužení a tahů a překročíme-li hranice těchto oblastí, závislost přestává být lineární.

Pokud zde budeme souvislost mezi tenzorem napětí a tenzorem deformace studovat, budeme se omezovat jen na takovou oblast tahů (tlaků) a deformací, při nichž hledaná závislost má lineární charakter; budeme tedy studovat výhradně tzv. *lineární teorii pružnosti*.

Přijatelným zobecněním elementárního Hookova zákona bude předpoklad, že každá ze šesti složek tenzoru napětí bude jistou lineární funkcí šesti složek tenzoru deformace. Tuto závislost lze zapsat ve tvaru

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}e_{kl}. \quad (7.1.1)$$

Protože o tenzorovou rovnici, je zřejmé, že  $C_{ijkl}$  musí být tenzorem čtvrtého řádu. Tento tenzor nazýváme *tenzorem elastických koeficientů*. Obecně je  $C_{ijkl}$  funkcí polohy; my budeme studovat jen homogenní tělesa, pro která  $C_{ijkl}$  na poloze nebude záviset.

Tenzor  $C_{ijkl}$  má obecně  $3^4 = 81$  složek, vzhledem k symetrii  $\tau_{ij}$  a  $e_{kl}$  je však  $C_{ijkl}$  symetrický v indexech  $i, j$  a indexech  $k, l$ . Dá se ukázat, že je symetrický i při záměně dvojic indexů ( $C_{ijkl} = C_{klij}$ ). Díky těmto symetriím se redukuje počet složek tenzoru  $C_{ijkl}$  na 21 nezávislých složek.

Pro anizotropní těleso, mající v různých směrech různé vlastnosti, jak je tomu např. u určitých typů monokrystalů, je třeba při studiu pružných vlastností zadat všech 21 elastických koeficientů.

Pro izotropní těleso, které má ve všech směrech stejné vlastnosti stejné, se počet nezávislých elastických koeficientů redukuje na 2. Izotropní jsou např. látky s polykrystalickou strukturou, zkoumáme-li takové jejich části, které obsahují dostatečný počet krystalků různým způsobem orientovaných, takže anizotropie vymizí; to je případ kovů, které tedy stačí charakterizovat dvěma elastickými koeficienty.

Pro izotropní elastické těleso musí mít i tenzor elastických koeficientů izotropní vlastnosti, tj. jeho složky se nesmějí měnit při transformaci souřadnic otočením. Tuto vlastnost mají izotropní tenzory a proto  $C_{ijkl}$  musí být izotropním tenzorem. Obecný izotropní tenzor čtvrtého řádu lze vyjádřit ve tvaru lineární kombinace součinnů Kroneckerových tenzorů  $\delta_{ij}$ ; lze volit

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \nu(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}),$$

kde  $\lambda, \mu, \nu$  jsou konstanty. Pro izotropní těleso tedy (7.1.1) bude

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}e_{kl} = \lambda\delta_{ij}\vartheta + \mu e_{ij} + \mu e_{ji} + \nu e_{ij} - \nu e_{ji}$$

kde  $\vartheta$  je objemová dilatace, takže

$$\tau_{ij} = \lambda\delta_{ij}\vartheta + 2\mu e_{ij}. \quad (7.1.2)$$

To je *Hookův zákon pro izotropní těleso (zobecněný Hookův zákon)*.  $\lambda, \mu$  jsou tzv. *Laméovy koeficienty*.

Vztah (7.1.1) se dá také formulovat jako inverzní závislost

$$e_{kl} = S_{klij}\tau_{ij}, \quad (7.1.3)$$

kde  $S_{klij}$  nazýváme *tenzorem elastických modulů*. Některé z elastických modulů (složek tenzoru  $S_{klij}$ ) jsou prakticky důležité a proto je zavedeme explicitně.



Vyjděme z inverzního Hookova zákona pro izotropní těleso, jak plyne přímým výpočtem ze (7.1.2)

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu}\tau_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu}\delta_{ij}\vartheta.$$

Na pravé straně zůstal invariant tenzoru deformace  $\vartheta$ , který nyní musíme vyjádřit pomocí složek tenzoru napětí. Zúžíme-li rovnici (7.1.2) v indexech  $i, j$  (sumační indexy označíme  $i = j = k$ ) dostaneme

$$\Theta = \sum_{k=1}^3 \tau_{kk} = \sum_{k=1}^3 \delta_{kk}\lambda\vartheta + 2\mu\vartheta = (3\lambda + 2\mu)\vartheta,$$

kde  $\Theta = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}$  je lineární invariant tenzoru napětí. Odtud

$$\vartheta = \frac{1}{3\lambda + 2\mu}\Theta,$$

takže po dosazení dostáváme inverzní Hookův zákon ve tvaru

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left( \tau_{ij} - \delta_{ij} \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \Theta \right). \quad (7.1.4)$$

Představme si nyní, že na izotropní elastické těleso působí jednoduchý tah, tj.  $\tau_{11} \neq 0$  a ostatní složky tenzoru napětí jsou nulové. Ze (7.1.4) pak

$$e_{11} = \frac{1}{2\mu} \left( 1 - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \right) \tau_{11} = \frac{1}{\mu} \frac{\lambda + \mu}{3\lambda + 2\mu} \tau_{11} \quad (7.1.5)$$

$$e_{22} = e_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu} \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \tau_{11}, \quad e_{ij} = 0 \quad \text{pro } i \neq j. \quad (7.1.6)$$

Nevznikají zde tedy smykové deformace, nýbrž jen relativní prodloužení ve směrech souřadnicových os. Poměr napětí a relativního prodloužení ve směru působícího napětí označujeme  $E$  a nazýváme *Youngův modul*

$$E = \frac{\tau_{11}}{e_{11}} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad (7.1.7)$$

takže ze (7.1.5)

$$e_{11} = \frac{1}{E} \tau_{11}$$

nebo

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{P}{q},$$

kde  $P$  je působící síla,  $l$  délka tělesa (tyče),  $q$  průřez. Dostali jsme tedy *elementární Hookův zákon*.

V technické praxi se dále používá tzv. *Poissonova konstanta* definovaná jako poměr příčného zkrácení k relativnímu prodloužení

$$\nu = \left| \frac{e_{22}}{e_{11}} \right| = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (7.1.8)$$

Inverzní Hookův zákon (7.1.4) vyjádřený pomocí těchto konstant  $E$  a  $\nu$  má pak tvar

$$e_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \tau_{ij} - \delta_{ij} \frac{\nu}{E} \Theta. \quad (7.1.9)$$

Často se tyto konstanty zavádějí i místo Laméových koeficientů do (7.1.2). Snadno najdeme, že pak (7.1.2) nabývá tvaru

$$\tau_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \left( e_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \vartheta \delta_{ij} \right). \quad (7.1.10)$$

Formulace zobecněného Hookova zákona nám umožňuje řešit konkrétní problémy *statické teorie pružnosti*, které v podstatě spočívají v řešení rovnic rovnováhy kontinua (6.1.5). Prakticky se ve statické teorii pružnosti řeší úlohy dvojího typu:

- Určit velikost posunutí a rozložení napětí v elastickém tělese, známe-li rozložení vnějších sil na povrchu,
- určit posunutí a rozložení napětí, známe-li posunutí na povrchu elastického tělesa.

Těmito otázkami se zabývat nebudeme; ukážeme si jen, jak budou vypadat rovnice rovnováhy kontinua vyjádřeny pro vektory posunutí. Vyjdeme z (6.1.5), kam dosadíme za  $\tau_{ij}$  ze (7.1.10):

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} = -F_i.$$

Dosadíme-li sem za  $e_{ij}$  ze (6.2.4), dostáváme

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + F_i = 0 \quad (7.1.11)$$

nebo ve vektorovém značení, které je nyní výhodnější vzhledem k obecnější známosti příslušných vztahů z vektorové analýzy

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{2(1+\nu)}{E} \mathbf{F} = 0. \quad (7.1.12)$$

Jestliže můžeme objemové síly zanedbat (což můžeme učinit, jestliže je deformace vyvolávána ne objemovými silami působícími na povrch tělesa, což je v praxi nejdůležitější případ), má rovnice (7.1.12) tvar

$$(1-2\nu)\Delta \mathbf{u} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (7.1.13)$$

nebo

$$2(1-\nu)\nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - (1-2\nu)\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = 0, \quad (7.1.14)$$

kde jsme použili známého vztahu  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u}$ .

Vnější síly vstupují do řešení této rovnice jen prostřednictvím počátečních podmínek. Aplikujeme li nyní operátor divergence na (7.1.14) a přihlédneme k tomu, že  $\nabla \cdot (\nabla \times) \equiv 0$  a  $\nabla \cdot (\nabla \times) \equiv 0$ , dostáváme

$$\Delta (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0. \quad (7.1.15)$$

Je tedy  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  řešením *Laplaceovy rovnice*, tj.  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  je *harmonickou funkcí* (řešení Laplaceovy rovnice nazýváme harmonickými funkcemi).

Aplikujeme-li nyní operátor  $\Delta$  na (7.1.13), bude

$$(1-2\nu)\Delta \Delta \mathbf{u} + \Delta [\nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})] = 0. \quad (7.1.16)$$

Přímým výpočtem se lehce přesvědčíme, že druhý člen v (7.1.16) je vzhledem k (7.1.15) roven nule, takže dostáváme

$$\Delta \Delta \mathbf{u} = 0, \quad (7.1.17)$$

tj. vektor posunutí  $\mathbf{u}$  (též se nazývá vektorem deformace) při rovnováze splňuje *biharmonickou rovnici* (7.1.17). Tato rovnice platí i pro elastická tělesa, na která působí objemové síly, pokud tyto síly v (7.1.12) jsou charakterizovány konstantním vektorem. Všimněme si na závěr této kapitoly některých konkrétních jednoduchých úloh statické teorie pružnosti.

### Jednoduchý tah

Jednoduchý tah nebo tlak byl vlastně už studován a je popsán rovnicemi (7.1.5) a (7.1.6). Přímým důsledkem, jak jsme viděli, je platnost elementárního Hookova zákona  $\tau_{11} = Ee_{11}$ .

### Smyk

(čistý smyk) nastává, jestliže nedochází ke změně délek jednotlivých elementů, ale jen ke změně jejich úhlů. Předpokládejme, že je nenulový jen smykový úhel  $\alpha_{12}$ , takže složky tenzoru deformace jsou  $e_{12} = e_{21} \neq 0$ ,  $e_{11} = e_{22} = e_{33} = e_{23} = e_{31} = 0$ . Z Hookova zákona (7.1.2) plyne  $\tau_{12} = 2\mu e_{12}$ , ostatní složky tenzoru napětí jsou rovněž nulové. Protože  $\alpha_{12} \doteq e_{12}$  platí  $\alpha_{12} = \frac{1}{\mu} \tau_{12} = \frac{1}{\mu} \frac{P}{q}$ , kde  $\mu$  nazýváme také modulem torze (je roven Laméovu koeficientu), a  $\frac{P}{q}$  je tečná síla připadající na jednotku průřezu.

### Torze

Studujme torzi kruhového válce představující vlastně zvláštní případ smykové deformace. Mějme tyč kruhového průřezu, která je na jednom konci upevněna a na druhém konci působí dvojice sil. Délka tyče nechť je  $l$ , poloměr základny  $a$ . Osou tyče válce proložíme osu  $z$ . Předpokládejme, že složky momentu silové dvojice os jsou  $M_x = M_y = 0$ ,  $M_z \neq 0$ .

Při torzi tyče se každý průřez tyče vůči předcházejícímu stáčí; úhel stočení na jednotku délky označíme  $\alpha$ , celkový úhel stočení průřezu ve výšce  $z$  nad upevněnou základnou je  $d\varphi = \alpha z$ . Předpokládejme přitom, že nedochází k deformaci ve směru osy válce, tj.  $u_z \equiv u_3 = 0$ . Při stočení dvou blízkých průřezů o malý úhel  $d\varphi$  je vektor posunutí dán vztahem  $\mathbf{u} = d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$ , kde  $d\boldsymbol{\varphi}$  má směr osy válce, tj.  $d\boldsymbol{\varphi}(0,0,d\varphi)$  a  $\mathbf{r}$  je vektor kolmý na osu válce, jehož velikost je rovna vzdálenosti uvažovaného elementu od osy; jde o analogii rovnice pro rotaci tuhého tělesa (4.1.3), v níž vektor  $\boldsymbol{\omega}$  nahrazujeme  $d\boldsymbol{\varphi}$ . Složky vektoru posunutí jsou odtud

$$u_1 \equiv u_x = -y d\varphi = -y\alpha z, \quad u_2 \equiv u_y = x d\varphi = x\alpha z, \quad u_3 \equiv u_z = 0.$$

Složky tenzoru deformace budou

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, & e_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0, & e_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0, \\ e_{12} = e_{21} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = 0, & e_{13} = e_{31} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) = -\frac{1}{2}\alpha y, \\ e_{23} = e_{32} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) = \frac{1}{2}\alpha x. \end{aligned}$$

Složky tenzoru napětí dostaneme z Hookova zákona (7.1.2)

$$\tau_{13} = -\mu\alpha y, \quad \tau_{23} = \mu\alpha x.$$

Na podstavě  $z = 0$  je válec upevněn, tj. posunutí je zde nulové,  $u_i = 0$ . Na podstavě  $z = l$  působí dvojice sil; její výsledný moment je vyrovnáván silami napětí, takže platí

$$\begin{aligned} M &= M_z = \int_S \epsilon_{3jk} x_j T_k^3 dS = \int_S \epsilon_{3jk} x_j \tau_{3k} dS = \\ &= \int_S (x\tau_{32} - y\tau_{31}) dS = \mu\alpha \int_S (x^2 + y^2) dS \end{aligned}$$

nebo

$$M = \mu\alpha I_p, \tag{7.1.18}$$

kde

$$I_p = \int_S (x^2 + y^2) dS = \int_0^a \int_0^{2\pi} r^3 dr d\varphi = \frac{\pi a^4}{2}$$

je tzv. *polární moment setrvačnosti* kruhového průřezu (moment setrvačnosti kruhu s jednotkovou plošnou hustotou hmotnosti a poloměrem  $a$  vzhledem k ose jdoucí středem kruhu a kolmo na jeho rovinu).

Rovnice (7.1.18) určuje úhel  $\alpha$  stočení na jednotku délky. Často zavádíme tzv. *torzní úhel*  $\varphi$ , což je celkový úhel stočení neupevněné základny proti základně upevněné. Zřejmě platí  $\varphi = \alpha l$ , takže ze (7.1.18)

$$\varphi = \frac{Ml}{\mu I_p} = \frac{2}{\pi} \frac{Ml}{\mu a^4}.$$

Odtud lze určit modul torze, změříme-li torzní úhel. Rovnice (7.1.18) se též dá psát ve tvaru

$$M = D\alpha,$$

kde konstanta  $D$  je tzv. *tuhost v torzi*, definovaná součinem  $D = \mu I_p$ .

### Čistý ohyb tyče

Bude poslední praktickou ukázkou metod statické teorie pružnosti. Předpokládejme, že máme tyč na jednom konci upevněnou (vetknutou), na jejímž druhém konci působí kolmo k podélné ose tyče nenulový silový moment  $\mathbf{M}$ . Budeme studovat tak malé ohyby tyče, že při nich rovinné průřezy tyče zůstávají i po deformaci tyče rovinnými. Myslíme-li si tyč složenou z podélných vláken, jsou v tyči vlákna v horní části prodloužena, v dolní zkrácena, jestliže se tyč ohýbá. Jedno vlákno zůstává stejně dlouhé - to je tzv. neutrální vlákno. Nechť poloměr křivosti tohoto neutrálního vlákna je  $R$  (obr. 7.1).

Je-li  $ds_0$  délkový element neutrálního vlákna,  $ds$  prodloužený element vlákna v horní části tyče, vzdáleného od neutrálního vlákna o  $\xi$ , platí

$$ds = \frac{R + \xi}{R} ds_0,$$

takže relativní prodloužení

$$e = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \frac{\xi}{R}$$

a z Hookova zákona dostáváme

$$\tau = Ee = \frac{E}{R}\xi.$$

Síly příslušející napětím  $\tau$  musejí být v průřezu rozloženy tak, aby jejich výslednice byla rovna nule a nenulový byl jen výsledný moment. Pro výslednici musí platit

$$\int_S \tau dS = \frac{E}{R} \int_S \xi dS = 0,$$

odkud vyplývá, že neutrální vlákno musí procházet těžištěm průřezu. Zavedeme nyní osy souřadnicové soustavy  $x, y, z$  tak, aby osy  $x$  a  $y$  měly směr hlavních os setrvačnosti průřezu, tj. aby platilo  $\int x dS = 0$ ,  $\int y dS = 0$ ,  $\int z dS = 0$ . Jestliže mají působící síly nulovou výslednici a nenulovou složku výsledného momentu do osy  $y$ ,  $M_y = M \neq 0$ , můžeme rozdělení napětí v každém průřezu charakterizovat funkcí

$$\tau_{33} = -\frac{E}{R}x, \quad \tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{12} = \tau_{23} = \tau_{31} = 0,$$

přičemž volíme znaménko záporné, protože  $\xi = -x$ . Výsledný moment vzhledem k ose  $y$  je v každém průřezu roven  $M_y^{pl}$ ,

$$M_y^{pl} = \int_S \epsilon_{2jk} x_j T_k dS = \int_S (z\tau_{31} - x\tau_{33}) dS = \frac{E}{R} \int_S x^2 dS = \frac{E}{R} I_y = M$$

(snadno ověříme přímým výpočtem, že  $M_x^{pl} = M_z^{pl} = 0$ ), takže

$$R = \frac{EI_y}{M}.$$

Je tedy při daném materiálu  $E$  a ohybovém momentu  $M$  poloměr křivosti neutrálního vlákna tím větší, čím větší je moment setrvačnosti průřezu  $I_y$ ; to je významný výsledek, používaný v praxi např. při volbě profilu nosníků (ve tvaru písmene T nebo I).

Jestliže na volném konci nosníku působí síla  $Q$ , její moment je  $M = Q(l - z)$ . Křivost křivky  $x = x(z)$  se, jak známo z matematické analýzy, určí ze vztahu

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2x}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Předpokládáme-li, že  $\frac{dx}{dz}$  je malé, takže je lze zanedbat proti 1, platí přibližně

$$\frac{1}{R} \sim \frac{d^2x}{dz^2}, \quad \frac{d^2x}{dz^2} = \frac{M}{EI_y} = \frac{Q}{EI_y}(l - z).$$

Dvojnásobná integrace dává

$$x = \frac{Q}{2I_y E} \left( lz^2 - \frac{z^3}{3} \right) + C_1 z + C_2.$$

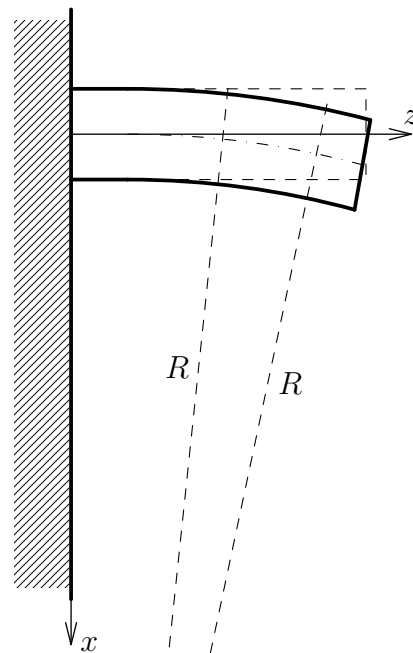
Okrajové podmínky jsou dány tím, že jeden konec nosníku je vetknut, takže  $x = 0$  a  $\frac{dx}{dz} = 0$  pro  $z = 0$ ; lehce pak zjistíme, že  $C_1 = C_2 = 0$ , takže rovnice křivky, kterou vytváří neutrální vlákno, má tvar

$$x = \frac{Q}{2I_y E} \left( lz^2 - \frac{z^3}{3} \right),$$

je to tedy křivka třetího stupně. Můžeme ještě určit výchylku  $x(l)$  nosníku na volném konci dosazením  $z = l$ . Dostáváme

$$x(l) = \frac{l^3}{3I_y E} Q.$$

Tím jsme ukázali řešení některých prakticky významných úloh ze statické teorie pružnosti a můžeme přejít k teorii dynamické.



Obr. 7.1: Ohyb tyče

## 7.2 Dynamické rovnice izotropního kontinua. Dynamická teorie pružnosti

Dosud jsme uvažovali výhradně statické úlohy, při nichž funkce charakterizující kontinuum byly jen funkcemi souřadnic. Studujeme-li dynamické problémy, musíme mít na zřeteli, že funkce  $u_i$  a  $\tau_i$  budou funkcemi nejen souřadnic, ale i času, přičemž budeme předpokládat, že tyto funkce mají spojité derivace potřebného řádu.

Chceme-li formulovat pohybové rovnice kontinua, použijeme s výhodou d'Alembertův princip. Pohybové rovnice dostaneme z rovnic rovnováhy (6.1.5), připojíme-li k objemovým a plošným silám ještě setrvačné síly. Setrvačná síla objemového elementu je rovna záporně vzatému součinu jeho hmotnosti a zrychlení; zrychlení  $\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$  se sice vztahuje na bod, ale můžeme je přiřadit celému objemovému elementu. Hmotnost elementu je  $\rho dV$ , přičemž  $\rho = \rho(x, t)$  je hustota kontinua.

Rovnice (6.1.5) platí pro objemovou jednotku; setrvačná síla na objemovou jednotku bude  $-\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$  takže pohybové rovnice můžeme psát ve tvaru

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (7.2.1)$$

To jsou *základní pohybové rovnice kontinua*; z nich můžeme vycházet při studiu konkrétních dynamických problémů. Při studiu pohybu tekutin budeme dosazovat za tenzor napětí jeho tvar charakteristický pro tekutiny (dynamikou tekutin se budeme zabývat později), při studiu pohybu elastických těles budeme využívat zobecněného Hookova zákona a dosazovat za  $\tau_{ij}$  do (7.2.1) ze (7.1.1), případně, omezíme-li se jen na studium pohybu izotropního kontinua, ze (7.1.2). Pak dostaneme *základní rovnice dynamické teorie pružnosti*.

Dynamická teorie má značný praktický význam. Důležité jsou zejména úlohy, při nichž studujeme periodické procesy, tzv. *elastické kmity a vlny*. Všimneme si těchto problémů podrobněji. Nejprve ukážeme, že v homogenním izotropním elastickém tělese se mechanický rozruch (porucha statické rovnováhy) šíří ve formě postupné vlny.

Předpokládejme homogenní izotropní elastické těleso, pro něž můžeme zanedbat objemové síly, tj.  $F_i = 0$ . Pohybová rovnice (7.2.1) má v tomto případě tvar

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}.$$

Dosadíme-li za  $\tau_{ij}$  ze (7.1.2), dostaneme

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ 2\mu \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (7.2.2)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j},$$

nebo vektorově

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}). \quad (7.2.3)$$

Označme

$$c_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (7.2.4)$$

takže (7.2.3) lze psát

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = c_l^2 \Delta \mathbf{u} + (c_l^2 - c_t^2) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (7.2.5)$$

Nyní využijeme významné tzv. Helmholtzovy věty z vektorové analýzy, podle níž lze libovolný vektor  $\mathbf{u}$  rozložit na součet dvou vektorů

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t,$$

pro které platí

$$\nabla \times \mathbf{u}_l = 0 \quad (7.2.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_t = 0 \quad (7.2.7)$$

Důkaz této věty je proveden v doplňku A.2.

Jestliže takto rozložíme vektor  $\mathbf{u}$ , dostáváme z (7.2.5)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} = c_l^2 \Delta (\mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t) + (c_l^2 - c_t^2) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_l).$$

Aplikujeme-li na tuto rovnici operaci  $\nabla \cdot$ , dostaneme

$$\nabla \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial t^2} = c_l^2 \Delta \operatorname{div} \mathbf{u}_l + (c_l^2 - c_t^2) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_l),$$

neboli

$$\nabla \cdot \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial t^2} - c_l^2 \Delta \mathbf{u}_l \right) = 0.$$

Vzhledem k (7.2.6) je také rotace výrazu v závorce nulová; je-li divergence i rotace nějakého vektoru nulová v celém prostoru, je to nulový vektor. Proto

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial t^2} - c_l^2 \Delta \mathbf{u}_l = 0. \quad (7.2.8)$$

Analogickým způsobem bychom dostali rovnici

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} - c_t^2 \Delta \mathbf{u}_t = 0. \quad (7.2.9)$$

Každá z těchto rovnic je rovnicí vlnovou; popisuje šíření pružné (elastické) vlny rychlostí  $c_l$  resp.  $c_t$ . Jedna z vln není spojena se změnou objemu ( $\nabla \cdot \mathbf{u}_t = 0$ ), druhá je doprovázena objemovým stlačením resp. rozšířením. Vlna šířící se rychlostí  $c_t$  se též nazývá *vlnou transversální*, druhá je pak *vlna longitudiální*. Bývá zvykem vyjádřit rychlosti těchto vln pomocí Youngova modulu  $E$  a Poissonovy konstanty  $\nu$ ; z (7.2.4) pomocí (7.1.7) a (7.1.8) plyne

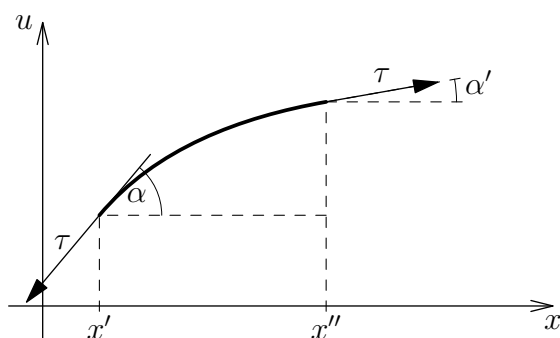
$$c_l = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}.$$

Důležitými konkrétními úlohami dynamické teorie pružnosti jsou úlohy řešící stojaté vlnění (chvění) některých jednoduchých objektů, např. strun, membrán apod. Této problematice věnujeme následující kapitoly.

## 7.2.1 Kmity struny

Pohybovou rovnicí kmitající struny bychom mohli odvodit z obecné rovnice (7.2.1), pro fyzikální názornost však použijeme metody jiné. Předpokládejme, že máme strunu napínanou silou  $\mathbf{P}$ , tj. napětí je  $\tau = P/q$ , kde  $q$  je průřez struny. Struna nechť je napjata ve směru osy  $x$  a má lineární hustotu  $\rho = \text{konst.}$ , je tedy homogenní. Označíme  $u(x,t)$  výchylku struny z rovnovážné polohy. Projekce sil napětí na osu  $u$  bude  $\tau(\sin \alpha'' - \sin \alpha')$  (obr. 7.2); vnější objemové síly zanedbáváme a setrvačná síla působící na element struny mezi  $x'$  a  $x''$  je

$$-\rho \int_{x'}^{x''} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx.$$



Obr. 7.2: Detail části kmitající struny

Podle d'Alembertova principu musí v libovolném okamžiku platit

$$\rho \int_{x'}^{x''} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = \tau(\sin \alpha'' - \sin \alpha').$$

Výraz napravo lze psát

$$\sin \alpha'' - \sin \alpha' = \int_{x'}^{x''} \frac{\partial \sin \alpha}{\partial x} dx$$

Omezíme-li se na malé výchylky struny, je

$$\sin \alpha \approx \text{tg } \alpha \approx \frac{\partial u}{\partial x},$$

takže

$$\int_{x'}^{x''} \left( \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx = 0,$$

což bude splněno při libovolných  $x'$  a  $x''$ , jestliže

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (7.2.10)$$

kde  $a^2 = \tau/\rho$  je kladná konstanta. To je *rovnice struny* – z matematického hlediska jednorozměrná *vlnová rovnice*. Řešení této rovnice je nekonečně mnoho což odpovídá nekonečně mnoha způsobům, jimiž se může kmitání struny realizovat. Vznikne-li však jednou na struně určitý rozruch, musí se pak už dál kmitání dít určitým způsobem – tj. zadáme-li počáteční podmínky, je pak už řešení jediné. Počáteční podmínky musejí být zadány pro výchylku každého bodu struny a pro rychlost každého bodu. Kromě toho musíme provést i určité geometrické omezení pohybu, tj. zadat tzv. okrajové podmínky. Zde budeme řešit dvě základní úlohy, které se budou lišit právě zadáním okrajových podmínek, čili dva základní okrajové problémy. V jednom případě (struna nekonečně dlouhá) bude řešením neomezená příčná vlna postupující po struně, v druhém případě (struna konečné délky) vznikne na struně *stojaté vlnění (chvění)*.

## 7.2.2 Nekonečně dlouhá struna

Nechť jsou počáteční podmínky zadány ve tvaru

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x) \quad (7.2.11)$$

a struna je velmi dlouhá, takže prakticky  $-\infty < x < \infty$  (to jsou vlastně „okrajové podmínky“ v tomto případě).

Každé řešení rovnice (7.2.10) se dá zapsat ve tvaru

$$u(x,t) = \varphi(x-at) + \psi(x+at),$$

kde  $\varphi(p)$ ,  $\psi(q)$  jsou libovolné funkce proměnných  $p$ ,  $q$ . Můžeme se o tom přesvědčit přímým dosazením. Nyní je třeba zvolit funkce  $\varphi$  a  $\psi$  tak, aby byly splněny počáteční podmínky (7.2.11). Proto  $t = 0$  musí

$$\varphi(x) + \psi(x) = f(x) \quad (7.2.12)$$

$$-a\varphi'(x) + a\psi'(x) = F(x) \quad (7.2.13)$$

kde čárkou značíme derivaci podle celého argumentu funkce.

Derivací první rovnice dostaneme

$$\varphi'(x) + \psi'(x) = f'(x)$$

a z posledních dvou rovnic pak najdeme

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{2a}F(x)$$

$$\psi'(x) = \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2a}F(x).$$

Integrace od 0 do  $p$  resp. od 0 do  $q$  dává

$$\varphi(p) - \varphi(0) = \frac{1}{2}[f(p) - f(0)] - \frac{1}{2a} \int_0^p F(x) dx$$

$$\psi(q) - \psi(0) = \frac{1}{2}[f(q) - f(0)] + \frac{1}{2a} \int_0^q F(x) dx.$$

Hodnoty  $\varphi(0)$  a  $\psi(0)$  nemohou být libovolné, neboť položíme-li  $p = q$  a sečteme obě rovnice, dostaneme vztah

$$\varphi(p) + \psi(p) - \varphi(0) - \psi(0) = f(p) - f(0)$$

z něhož, s přihlédnutím k (7.2.12), plyne

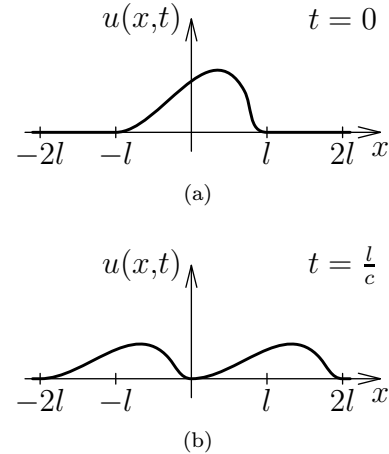
$$\varphi(0) + \psi(0) = f(0). \quad (7.2.14)$$

Nyní už lze zapsat výsledné řešení ve tvaru (klademe  $p = x - at$ ,  $q = x + at$  a použijeme (7.2.14))

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-at) + f(x+at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(\xi) d\xi, \quad (7.2.15)$$

což je hledané řešení rovnice (7.2.10) pro nekonečně dlouhou strunu při počátečních podmínkách (7.2.11).

Řešení (7.2.15) nám umožňuje názorný výklad fyzikálního významu konstanty  $a$ : Nechť  $F(x) \equiv 0$  a  $f(x) \neq 0$  jen v intervalu  $(-l, l)$ ; řešení (7.2.15) nám pak v různých okamžicích  $t$  přechází ve tvar charakteristický pro původní



Obr. 7.3: Rozruch šířící se nekonečnou strunou

rozruch (zmenšený na polovinu) posunutý v obou směrech osy  $x$ . Tak v čase  $t = l/a$  jsou oba rozrušky vedle sebe a za každý další přírůstek času o  $l/a$  se každý rozruch vzdálí o  $l$  (obr. 7.3). Konstanta  $a$  má tedy význam rychlosti šíření obou vlnění, tj. v kladném i záporném směru osy.

### 7.2.3 Struna konečné délky

Má-li struna konečnou délku  $l$  a je položena do osy  $x$  tak, že její počátek je v bodě  $x = 0$  a konec v bodě  $x = l$ , musíme konce upevnit, aby vznikl na struně periodický rozruch, tj. musí platit

$$u \Big|_{x=0} = 0, \quad u \Big|_{x=l} = 0. \quad (7.2.16)$$

To jsou nyní okrajové podmínky pro strunu konečné délky. Počáteční podmínky ponecháme ve stejném tvaru jako v předcházející úloze, tj. ve tvaru (7.2.11), musíme však změnit definiční obor funkcí, tj. klást  $0 < x < l$ .

Řešení rovnice (7.2.10) nyní hledáme metodou separace proměnných (metodou vlastních funkcí), kterou jsme už používali pro parciální diferenciální rovnici Hamiltonovu–Jacobioho (5.5.5). Hledejme řešení ve tvaru

$$u(x,t) = X(x)T(t), \quad (7.2.17)$$

kde každá z obou násobených funkcí je funkcí jen jedné proměnné. Dosazením do (7.2.10) dostáváme

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X}, \quad (7.2.18)$$

kde opět čárkou značíme derivaci podle argumentu funkce.

Levá strana (7.2.18) je funkcí proměnné  $t$ , pravá funkcí proměnné  $x$ ; má-li rovnice být splněna při libovolných  $x, t$ , musí být levá i pravá strana rovna téže konstantě. Vzhledem k tomu, že očekáváme periodické řešení, zvolíme tuto konstantu zápornou

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2, \quad (7.2.19)$$

což je ekvivalentní dvěma rovnicím

$$T'' + \lambda^2 a^2 T = 0, \quad X'' + \lambda^2 X = 0, \quad (7.2.20)$$

které mají řešení

$$\begin{aligned} T(t) &= A \cos \lambda a t + B \sin \lambda a t \\ X(x) &= C \cos \lambda x + D \sin \lambda x \end{aligned}$$

(zde se nám objasňuje nutnost volby záporné konstanty).  $A, B, C, D$  jsou libovolné integrační konstanty.

Použijeme-li okrajových podmínek, dostáváme

$$C = 0, \quad D \sin \lambda l = 0.$$

Ve druhé z těchto podmínek nemůžeme klást  $D = 0$ , neboť bychom dostali triviální řešení a proto musí

$$\sin \lambda l = 0,$$

což je splněno při

$$\lambda l = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Protože hodnoty  $k = 0$  a  $k = -1, -2, \dots$  nám nedávají fyzikálně odlišná řešení, budeme se omezovat jen na  $k$  přirozená.  $\lambda$  tedy může nabývat jen určitých hodnot, které označíme

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{l}, \quad k = 1, 2, \dots$$

a nazýváme *vlastními hodnotami* příslušného okrajového problému. Potom

$$\begin{aligned} T_k(t) &= A_k \cos \left( \frac{k\pi a}{l} t \right) + B_k \sin \left( \frac{k\pi a}{l} t \right) \\ X_k(x) &= D_k \sin \left( \frac{k\pi}{l} x \right), \end{aligned}$$

kde jsme indexem  $k$  vyznačili řešení příslušející vlastní hodnotě  $\lambda_k$  a též konstanty  $A, B, D$  opatřili tímto indexem. Rovněž

$$u_k(x,t) = \left[ \alpha_k \cos \left( \frac{k\pi a}{l} t \right) + \beta_k \sin \left( \frac{k\pi a}{l} t \right) \right] \sin \left( \frac{k\pi}{l} x \right), \quad (7.2.21)$$



kde  $\alpha_k = A_k D_k$ ,  $\beta_k = B_k D_k$ . Funkce  $u_k(x, t)$  je tzv. *vlastní funkce* příslušející vlastní hodnotě  $\lambda_k$ . Frekvence

$$\omega_k = \lambda_k a = \frac{k\pi a}{l}$$

je vlastní frekvence struny; nejmenší vlastní frekvence struny je

$$\omega_1 = \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$$

a odpovídá základnímu tónu struny.

Rovnice (7.2.20) je lineární a homogenní. Pro takové rovnice se dá ukázat, že funkce

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t)$$

je také řešením, pokud řada konverguje. Dosazením dostaneme

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \alpha_k \cos\left(\frac{k\pi a}{l} t\right) + \beta_k \sin\left(\frac{k\pi a}{l} t\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right), \quad (7.2.22)$$

což je řešení rovnice (7.2.21), vyhovující okrajovým podmínkám (7.2.16). Zbývá tedy ještě určit  $\alpha_k, \beta_k$  tak, aby (7.2.22) vyhovovalo také podmínkám počátečním. Dosazením počátečních podmínek zjistíme, že musí platit

$$u \Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right) = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi a}{l} k \beta_k \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right) = F(x),$$

což bude splněno, jestliže  $\alpha_k$  a  $\frac{\pi a}{l} k \beta_k$  budou Fourierovy koeficienty, tj. koeficienty v rozvoji funkce  $f(x)$  a  $F(x)$  ve Fourierovu řadu podle funkcí sinus. Z matematiky je známo, že tyto koeficienty jsou určeny vztahy

$$\alpha_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right) d\xi, \quad \beta_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l F(\xi) \sin\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right) d\xi \quad (7.2.23)$$

(ve všech fyzikálních úlohách jsou splněny podmínky, aby bylo možno funkci  $f(x)$  resp.  $F(x)$  rozvinout ve Fourierovu řadu). Dosazením výrazů (7.2.23) do (7.2.22) dostáváme hledané řešení rovnice struny, vyhovující zadaným počátečním i okrajovým podmínkám.

## 7.2.4 Podélné kmity tyče

Problém kmitání tyče je složitější - můžeme totiž studovat jednak příčné, jednak podélné kmity tyče. Zde se omezíme jen na ukázkou, jak lze z (7.2.1) přímo odvodit vlnovou rovnici pro podélné kmity tyče.

Předpokládejme tyč libovolného průřezu, na jejíž boční plochy nepůsobí vnější síly a pro niž jsou objemové síly zanedbatelné. Podélné kmity v tyči jsou prostým prodlužováním a zkracováním tyče. Leží-li tyč v ose  $x$ , vymizí derivace složek vektoru posunutí podle všech souřadnic kromě  $x$  a z Hookova zákona  $\tau_{11} = E e_{11}$ , což po dosazení do obecné pohybové rovnice dává

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0.$$

To je rovnice podélných kmitů tyče. Tyto kmity se v tyči šíří rychlostí  $a = \sqrt{E/\rho}$ . Řešení této rovnice hledáme podobnými metodami jako v předcházejícím odstavci a nebudeme se jím dále zabývat.

## 7.2.5 Kmity membrán

Membrány jsou desky o zanedbatelné tloušťce, velmi ohebné, takže je můžeme pokládat za jakési dvourozměrné analogie strun. Pohybové rovnice membrán zde odvozovat nebudeme; z analogie se dá očekávat, že budou mít tvar vlnových rovnic, v nichž druhá parciální derivace podle souřadnice bude nahrazena dvourozměrným Laplaceovým operátorem  $\Delta$ .

## Kmity obdélníkové membrány

Nechť membrána má tvar obdélníku o stranách  $a$ ,  $b$ . Okrajové podmínky nechť jsou (předpokládáme membránu na okrajích upevněnou)

$$u(x,0,t) = u(x,b,t) = u(0,y,t) = u(a,y,t) = 0,$$

kde funkce  $u(x,y,t)$  charakterizuje výchylku membrány a počáteční podmínky zavedme ve tvaru

$$u(x,y,0) = f(x,y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x,y).$$

Pohybová rovnice membrány bude

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (7.2.24)$$

Předpokládáme-li řešení ve tvaru

$$u(x,y,t) = \varphi(x,y)T(t),$$

můžeme separovat proměnné podobně jako u rovnice struny a dostaneme dvě rovnice

$$T'' + c^2 \lambda^2 T = 0,$$

odkud

$$T = T^0 \sin(c\lambda t + \psi)$$

a dále

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \lambda^2 \varphi = 0, \quad (7.2.25)$$

kde jsme opět konstantu položili rovnu  $-\lambda^2$ . Pro funkci  $\varphi(x,y)$  platí nyní okrajové podmínky

$$\varphi(x,0) = \varphi(x,b) = \varphi(0,y) = \varphi(a,y) = 0.$$

Řešení rovnice (7.2.25) hledáme znovu separací proměnných, tj. volíme funkci  $\varphi(x,y)$  ve tvaru

$$\varphi(x,y) = X(x)Y(y),$$

což po dosazení dává

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda^2 = 0.$$

Tento vztah bude při libovolných  $x,y$  splněn, položíme-li první člen roven konstantě  $-\alpha^2$ , druhý konstantě  $-\beta^2$ , takže máme dvě rovnice

$$X'' + \alpha^2 X = 0, \quad Y'' + \beta^2 Y = 0,$$

přičemž musí

$$\alpha^2 + \beta^2 = \lambda^2. \quad (7.2.26)$$

Rovnice mají řešení

$$X = A \sin(\alpha x) + B \cos(\alpha x)$$

$$Y = C \sin(\beta y) + D \cos(\beta y).$$

Z okrajových podmínek plyne  $B = D = 0$  a dále musí

$$\sin(\alpha a) = 0, \quad \sin(\beta b) = 0,$$

takže

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

(7.2.26) pak dává

$$\lambda_{m,n} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}},$$

což jsou vlastní (charakteristické) hodnoty. Příslušné vlastní funkce jsou

$$\varphi_{m,n} = C_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right).$$

Dá se ukázat, že funkce  $\varphi_{m,n}$  tvoří úplný ortogonální systém; zvolíme-li konstantu  $C_{mn}$  rovnu

$$C_{mn} = \frac{2}{\sqrt{ab}},$$

budou funkce

$$\varphi_{m,n} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

tvořit ortogonální systém. Celé řešení při vlastních hodnotách  $\lambda_{m,n}$  pak má tvar

$$u_{m,n} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \left[ \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \right] T_{mn}^0 \sin(\omega_{mn}t + \psi_{mn}),$$

kde  $\omega_{mn} = c\lambda_{m,n}$  a obecné řešení volíme ve tvaru

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{m,n}. \quad (7.2.27)$$

Splnění počátečních podmínek bychom pak zaručili porovnáním (7.2.27) při  $t = 0$  s rozvojem funkcí  $f(x,y)$  a  $g(x,y)$  do dvojnásobné Fourierovy řady.

Je-li poměr stran obdélníka  $a:b$  racionální číslo, může být vlastní hodnota  $\lambda_{mn}$  realizována dvěma (nebo více) různými volbami  $m$  a  $n$ , tj. jednomu  $\lambda_{mn}$  přísluší dvě nebo více vlastních funkcí; tyto funkce odpovídají tzv. *degenerovaným stavům*. Pro čtvercovou membránu  $a = b$  např. platí

$$\lambda_{m,n} = \lambda_{n,m} = \frac{\pi}{a} \sqrt{m^2 + n^2},$$

takže pokud  $m \neq n$ , je každý stav nejméně dvojnásobně degenerován, neboť jedné vlastní hodnotě  $\lambda_{m,n}$  přísluší vždy nejméně dvě vzájemně odlišné funkce

$$\begin{aligned} \varphi_{m,n} &= \frac{2}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \\ \varphi_{n,m} &= \frac{2}{a} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right). \end{aligned}$$

### Kmity kruhové membrány

Studujeme nyní kmity kruhové membrány o poloměru  $a$ , upevněné na obvodu. Postup výpočtu už jen naznačíme.

Problém řešíme v polárních souřadnicích; přepíšeme-li Laplaceův operátor v polárních souřadnicích a separujeme časovou proměnnou, dostaneme pro funkci  $\varphi(r,\vartheta)$  rovnici

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} + \lambda^2 \varphi = 0,$$

kterou máme řešit při okrajové podmínce

$$\varphi(a,\vartheta) = 0.$$

Řešení hledáme ve tvaru

$$\varphi(r,\vartheta) = R(r)\Theta(\vartheta),$$

takže dostaneme dvě rovnice

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Theta}{d\vartheta^2} + m^2 \Theta &= 0 \\ \frac{r^2}{R} \left( \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \lambda^2 R \right) &= m^2. \end{aligned}$$

První má řešení

$$\Theta = A \cos m\vartheta + B \sin m\vartheta$$

druhá pak, zavedeme-li  $\xi = \lambda r$ , přechází na Besselovu diferenciální rovnici

$$\frac{d^2 R}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dR}{d\xi} + \left(1 - \frac{m^2}{\xi^2}\right) R = 0.$$

Jejími řešeními jsou Besselovy funkce 1. druhu  $m$ -tého řádu  $J_m(\xi)$ . Celkem tedy

$$\varphi_m(r,\vartheta) = J_m(\lambda r) [A \cos(m\vartheta) + B \sin(m\vartheta)]. \quad (7.2.28)$$

Okrajová podmínka vede na transcendentní rovnici

$$J_m(\lambda a) = 0.$$

Jsou-li  $\xi_{m1}, \xi_{m2}, \dots$  nuly Besselovy funkce  $J_m(\xi)$ , platí pro vlastní hodnoty

$$\lambda_{m,n} a = \xi_{mn}.$$

Příslušné vlastní funkce jsou v tomto případě funkce

$$J_m(\lambda_{m,n} r) \cos(m\vartheta), \quad J_m(\lambda_{m,n} r) \sin(m\vartheta),$$

kteřé jsou lineárně nezávislé; jedné vlastní hodnotě tedy přísluší dvě nezávislé vlastní funkce - jde opět o degenerované stavy.

Úplné řešení bychom opět dostali superpozicí vlastních funkcí a konstanty bychom určili pomocí normovacích a počátečních podmínek, přičemž bychom funkce charakterizující počáteční polohu a rychlost museli rozkládat v řadu podle vlastních funkcí; těmito otázkami se už dále zabývat nebudeme.

Tím jsme skončili s teorií i některými praktickými příklady z dynamiky elastického tělesa. Přitom jsme však nikde nepracovali s pojmem, který byl nerozlučně spojen s celou mechanikou částic i tuhého tělesa – s energií. Úvahy o energii deformovaného kontinua jsou totiž těsně spjaty s úvahami termodynamickými a proto se jimi zde nezabýváme, i když to má za následek značné omezení komplexnosti pohledu na problematiku kontinua.

V další části se věnujeme studiu statiky i dynamiky tekutin, tj. takového kontinua, v němž jsou jednotlivé částičky vzájemně snadno posunutelné a v němž se proto nediagonální složky tenzoru napětí ve statistických úlohách neprojeví vůbec a v úlohách dynamických se projeví jen u některých typů tekutin.

## Literatura ke kapitole 7

- [1] Brdička M., Samek L., Sopko B.: *Mechanika kontinua*. Academia, Praha 2005.
- [2] Chadwick P.: *Continuum mechanics*. Dover Publications, Inc., Mineola, New York 1999.
- [3] Kolář M.: *Sbírka úloh z mechaniky kontinua*. Diplomová práce, Univerzita Palackého Olomouc 2003. Ke stažení na adrese <http://optics.upol.cz/~richterek/files.html>.
- [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.: *Механика сплошных сред*. Наука, Москва 1954.
- [5] Malvern L.E.: *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice Hall 1969.
- [6] Mase G.E.: *Schaum's outlines: Continuum mechanics*. McGraw-Hill, New York 1970.

# Kapitola 8

## Mechanika tekutin

### 8.1 Statika tekutin

Základní rovnice statiky i dynamiky kontinua platí pro každý typ kontinua, tedy i pro tekutiny. V tekutinách jsou síly vzájemného působení mezi částicemi mnohem menší než v pevných látkách, takže částice tekutin jsou značně pohyblivé. Tekutiny kladou velmi malý odpor při změně tvaru, brání se však změnám objemu, přičemž stlačitelnost je nepatrná pro kapaliny, podstatně větší pro plyny. Vlivem pohyblivosti částic vymizejí v rovnovážném stavu tečné složky (nediagonální) tenzoru napětí. Vektor napětí má v tekutinách vždy směr normály ke studované ploše – charakterizujeme jej zpravidla velikostí, tj. skalární veličinou – *tlakem v tekutině*. Při pohybu tekutin se ovšem uplatňují i tečné složky tenzoru napětí, pokud se tekutiny při pohybu nestačí přizpůsobit vnějším silám. Pak mluvíme o viskozitě (vnitřním tření) tekutin. Při rovnováze tekutin se viskozita neuplatňuje, takže úvahy statistické budou platit jak pro tekutiny ideální, tak pro tekutiny vazké.

Pro rovnováhu tekutin platí stejná podmínka rovnováhy jako pro kontinuum, tj. rovnice

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0, \quad (8.1.1)$$

kde jsme v (6.1.5) už využili symetrie tenzoru napětí  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ . Vyhledem k tomu, vektor napětí má pro tekutiny v klidu vždy směr normály k ploše, musí mít rovnice Cauchyho kvadriky napětí v libovolné soustavě souřadnic stejný tvar jako v soustavě hlavních os, tj. Cauchyho kvadrikou musí být koule. Pak

$$\tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = -p,$$

kde  $p$  je tlak tekutiny a záporné znaménko volíme z toho důvodu, že tlak má opačný směr než vnější normála dané (uzavřené) plochy. Platí proto

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (8.1.2)$$

a dosazením do (8.1.1) dostáváme

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + F_i = 0 \quad (8.1.3)$$

nebo vektorově

$$-\nabla p + \mathbf{F} = 0.$$

Násobme nyní (8.1.3) výrazem  $dx_i$ :

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i = F_i dx_i. \quad (8.1.4)$$

Levá strana je úplný diferenciál. Aby jí byla také pravá strana, musí

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}.$$

Objemové síly tedy musejí být potenciálové, aby byla možná rovnováha tekutin. V mechanice tekutin vztahujeme obvykle objemové síly na jednotku hmotnosti místo na jednotku objemu; pak

$$F_i = \rho G_i,$$

kde  $\rho$  je hustota tekutiny. *Rovnice rovnováhy tekutin* pak je

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + G_i = 0 \quad (8.1.5)$$

a rovnice (8.1.4) nabývá tvaru

$$dp = \rho G_i dx_i. \quad (8.1.6)$$

Je-li hustota  $\rho$  jen funkcí tlaku, mluvíme o *barotropních tekutinách*; pro ně tedy  $\rho = \rho(p)$ . Ukažme si nyní aplikace rovnice rovnováhy tekutin.

### 8.1.1 Tlak v homogenním tíhovém poli

Odvoďme závislost tlaku na hloubce v tekutině v homogenním tíhovém poli. Zvolíme-li osu  $z$  svisle vzhůru, je  $G_x = G_y = 0$ ,  $G_z = -g$ , takže (8.1.5) bude

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

Ve směru os  $x, y$  se tedy tlak nemění – horizontální roviny jsou rovinami stejného tlaku (izobarické plochy); nazývají se hladiny. Rovnice (8.1.6) pak dává

$$dp = -\rho g dz.$$

Nyní budeme rozlišovat dva případy:

a) Nechť je  $\rho = \text{konst.}$  – jde tedy o homogenní nestlačitelnou kapalinu. Pak

$$p = -\rho g z + C.$$

Pro kapalinu v nádobě, jejíž povrch (tzv. volná hladina) je ve výši  $z = h$  a na niž působí barometrický tlak  $p_b$ , plyne

$$p_b + \rho g h = C,$$

takže

$$p = p_b + \rho g(h - z) = p_b + \rho g z',$$

kde  $z'$  je hloubka pod volnou hladinou. Získali jsme tak známý vztah pro *hydrostatický tlak*.

b) Předpokládejme nyní, že studujeme stlačitelnou tekutinu – plyn, řídicí se zákonem *Boyleovým-Mariottovým*

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0}.$$

Pak (8.1.6) dává

$$dp = -\rho_0 \frac{p}{p_0} g dz,$$

odkud

$$p = C e^{-\frac{\rho_0}{p_0} g z}.$$

Nechť pro  $z = 0$  je  $p = p_0$ ; pak

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} g z},$$

což je tzv. *barometrický vzorec*.

### 8.1.2 Pascalův a Archimédův zákon

Předpokládejme, že síly  $G_i$  mají potenciál  $U$

$$G_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}. \quad (8.1.7)$$

Rovnice (8.1.6) pak bude

$$dp = -\rho dU. \quad (8.1.8)$$

Pro barotropní tekutinu  $\rho = \rho(p)$  plyne integrací

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)} = -(U - U_0),$$

kde  $p$ ,  $p_0$ ,  $U$ ,  $U_0$  jsou hodnoty tlaku a potenciálu ve dvou různých místech tekutiny. Změníme-li poněkud hodnoty tlaku  $p_0$  na  $p_0 + \delta p_0$  a  $p$  na  $p + \delta p$  při nezměněných vnějších silách, bude platit

$$\int_{p_0 + \delta p_0}^{p + \delta p} \frac{dp}{\rho(p)} = -(U - U_0).$$

Odečtením posledních rovnic

$$\int_{p_0 + \delta p_0}^{p + \delta p} \frac{dp}{\rho(p)} - \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)} = 0,$$

což lze psát

$$\int_{p_0+\delta p_0}^p \frac{dp}{\varrho(p)} + \int_p^{p+\delta p} \frac{dp}{\varrho(p)} + \int_p^{p_0} \frac{dp}{\varrho(p)} = 0$$

a konečně

$$\int_p^{p+\delta p} \frac{dp}{\varrho(p)} = \int_{p_0}^{p_0+\delta p_0} \frac{dp}{\varrho(p)}. \quad (8.1.9)$$

To je *zobecněný Pascalův zákon* pro barotropní tekutinu. Pro nestlačitelnou tekutinu (kapalinu) se redukuje na obvyklý vztah

$$\delta p = \delta p_0 \quad (8.1.10)$$

což znamená, že se tlak ve všech místech v nestlačitelné kapalině mění o stejnou hodnotu.

Uvažujme nyní, jakou silou působí tekutina na pevnou plochu  $S$ . Na element plochy  $dS$  působí kolmo tlak  $p dS$ , takže je-li  $\mathbf{n}$  vnější normála plochy  $S$ , bude výslednice tlakových sil

$$P_i = - \int_S p n_i dS.$$

Předpokládejme, že  $S$  je uzavřená plocha (ohraničující těleso ponořené do tekutiny), která uzavírá objem  $V$ . Za předpokladu, že vně i uvnitř plochy  $S$  je stejná tekutina, můžeme použít Gaussovu větu a psát

$$P_i = - \int_V \frac{\partial p}{\partial x_i} dV.$$

Uvedený předpoklad ovšem nemění poměry v tekutině vně uvažované plochy. Pro tekutinu v homogenním tíhovém poli s osou souřadnic  $z$  vertikálně vzhůru platí opět

$$G_x = G_y = 0, \quad G_z = -g, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\varrho g,$$

takže

$$P_x = P_y = 0, \quad P_z = g \int_V \varrho dV. \quad (8.1.11)$$

Síly hydrostatických tlaků v homogenním tíhovém poli lze nahradit jedinou kladnou silou (vztlakovou) o velikosti rovné tíze vytlačené tekutiny – *Archimédův zákon*. Připomeňme, že nejjednodušší způsob, jímž můžeme dokázat platnost Archimédova zákona pro tělesa libovolného tvaru a v libovolné poloze bez vyšší matematiky je *myslenkový pokus Stevinův* (1608). Představme si, že určitá část tekutiny, která je s ostatní tekutinou v rovnováze, je v tekutině ohraničená. Aby se rovnováha udržela, musí na stěny této myšlené části tekutiny působit takové hydrostatické tlakové síly ostatní tekutiny, aby toto myšlené těleso nepadlo; to znamená, že výslednice těchto tlakových sil se musí rovnat tíze myšlené části tekutiny a musí směřovat svisle vzhůru. Není důvodu, aby se působení okolní tekutiny změnilo, když myšlenou vymezenou část tekutiny nahradíme tělesem stejného tvaru a objemu.

Obecná teorie poskytuje možnost uvažovat i o výsledném momentu sil působících na plochu v tekutině. Takové úvahy jsou důležité zejména z hlediska studia stability plovoucích těles (lodí), zde se jimi však už zabývat nebudeme.

## 8.2 Kinematika tekutin

Pohyb tekutin lze studovat

- tak, že zvolíme libovolnou částici tekutiny a sledujeme ji po celou dobu – *Lagrangeova metoda*,
- tak, že sledujeme změny veličin charakterizujících vlastnosti pohybuující se tekutiny v libovolném bodě prostoru zaplněného tekutinou – *Eulerova metoda*.

Lagrangeova metoda, která studuje individuální částice tekutiny, je vlastně jen rozšířením metody používané při studiu soustavy částic. Při většině aplikací je méně výhodná a proto v dalších úvahách budeme používat výhradně metody Eulerovy. Při ní tedy vyšetřujeme stav proudění tekutiny v jistém místě prostoru.

Bude-li částice tekutiny v okamžiku  $t$  v bodě  $x_1, x_2, x_3$ , bude mít rychlost

$$v_i(x_1, x_2, x_3, t) \equiv v_i(x, t). \quad (8.2.1)$$

Pro  $x_j$  konstantní a proměnné  $t$  nám tato rovnice vyjadřuje rychlost různých částic tekutiny, procházejících zvoleným bodem. Pro  $x_j$  proměnné a konstantní  $t$  popisuje vztah (8.2.1) rozdělení rychlosti v tekutině v určitém okamžiku. Veličiny  $x_1, x_2, x_3, t$  nazýváme Eulerovými proměnnými.

Z (8.2.1) můžeme určit jednak zrychlení v určitém bodě při pevných  $x_j$ , tzv. *lokální zrychlení*, jednak zrychlení určité částice tekutiny, tzv. *individuální zrychlení*.

Lokální zrychlení je zřejmě dáno derivací  $\partial v_i / \partial t$ . Individuální zrychlení najdeme takto: Za dobu  $dt$  přejde částice v poli vektoru rychlosti definovaném vztahem (8.2.1) z bodu  $x_j$  do bodu  $x_j + dx_j$ . Její rychlost v tomto bodě je

$$v_i + dv_i = v_i(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3, t + dt) \doteq v_i(x, t) + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial v_i}{\partial t} dt,$$

takže

$$a_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j + \frac{\partial v_i}{\partial t}. \quad (8.2.2)$$

Na levé straně je tedy zrychlení částice – individuální zrychlení, první člen napravo se také nazývá konvektivní zrychlení a poslední je zrychlení lokální.

S pohybem konkrétní částice je spojen pojem trajektorie. V našem případě bychom mohli mluvit o trajektoriích částic tekutiny, kdybychom používali Lagrangeovy metody popisu pohybujících se tekutin. V Eulerově metodě zavádíme pojem *proudnic*: Je to křivka (myšlená) mající tu vlastnost, že rychlosti částic na ní ležících jsou jejími tečnami, čili

$$dx_1 : dx_2 : dx_3 = v_1 : v_2 : v_3. \quad (8.2.3)$$

V případě ustáleného (stacionárního) pohybu tekutiny nám proudnice splývají s trajektoriemi částic.

Představme si proudění, při němž každým bodem uvnitř tekutiny prochází jedna proudnice. Zvolíme-li v tekutině uzavřenou křivku tak, aby ji každá proudnice protínala jen jednou, vytvoří nám všechny proudnice, které procházejí body této křivky *proudovou trubici*; tekutému obsahu proudové trubice říkáme *proudové vlákno*.

Vyšetřeme nyní chování dvou blízkých elementů tekutiny. Nechť  $v_i(x, t)$  a  $v_i(x + dx, t)$  jsou složky rychlosti ve dvou blízkých bodech v čase  $t$ . Pak lze psát

$$v_i(x + dx, t) = v_i(x, t) + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j = v_i(x, t) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dx_j + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dx_j. \quad (8.2.4)$$

Analogicky s tenzorem deformace a rotace definujeme *tenzor rychlosti deformace*

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (8.2.5)$$

a *tenzor rychlosti rotace*

$$\dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (8.2.6)$$

Antisymetrickému tenzoru  $\dot{\omega}_{ij}$  lze přiřadit axiální vektor o složkách

$$\omega_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}.$$

$\omega_i$  jsou složky *vektoru rychlosti rotace*. (8.2.4) pak lze zapsat ve tvaru

$$v_i(x + dx, t) = v_i(x, t) + \epsilon_{ijk} \omega_j dx_k + e_{ij} dx_j.$$

První člen napravo je rychlost translace, druhý rychlost rotace a třetí rychlost deformace; každý pohyb tekutiny v okolí určitého bodu můžeme rozložit na pohyb translační, pohyb rotační a pohyb deformační.

Vektor  $\boldsymbol{\Omega} = 2\boldsymbol{\omega}$  nazýváme *vírem rychlosti*. Je-li v určité oblasti prostoru  $\boldsymbol{\Omega} \neq 0$ , mluvíme o *vířivém pohybu tekutiny* v této oblasti. Je-li  $\boldsymbol{\Omega} = 0$  v určité oblasti, je zde *pohyb tekutiny nevířivý*.

Vektor víru rychlosti můžeme také zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{\Omega} = 2\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} \equiv \text{rot } \mathbf{v}. \quad (8.2.7)$$

Při nevířivém proudění tedy platí

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0,$$

což lze splnit, zvolíme-li

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi,$$

neboť

$$\nabla \times (\nabla \varphi) \equiv \text{rot grad } \varphi = 0.$$

Při nevířivém proudění vždy existuje taková funkce  $\varphi$ ; říkáme jí *rychlostní potenciál* a složky rychlosti pak vyjadřujeme

$$v_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}. \quad (8.2.8)$$



Vyplňují-li body, v nichž  $\boldsymbol{\Omega} \neq 0$  spojitě určitou oblast prostoru, máme v této oblasti *pole vírové* (přesněji pole vírů rychlosti), v němž lze opět definovat křivky analogické proudnicím – *vírové čáry* a též *vírové trubice*. Dále definujeme *intenzitu vírové trubice* neboli *intenzitu víru*  $\mu$  jako tok vektoru  $\boldsymbol{\Omega}$  průřezem vírové trubice. Je tedy

$$\mu = \int_S \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (8.2.9)$$

Zvolme si nyní v tekutině oblouk s koncovými body  $A$  a  $B$ ; ptejme se, zda může uvažované rychlostní pole způsobit pohyb částic tekutiny podél tohoto oblouku. O tom můžeme rozhodnout podle toho, zda je průmět rychlosti do směru oblouku  $d\mathbf{s}$  roven nule nebo od nuly různý. V každém bodě oblouku  $\widehat{AB}$  musíme proto najít veličinu  $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$ , takže pro celý oblouk bude hledaným kritériem veličina

$$\Gamma(A,B) = \int_{\widehat{AB}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\widehat{AB}} v_i dx_i, \quad (8.2.10)$$

kde  $\Gamma(A,B)$  je tok vektoru rychlosti podél oblouku  $\widehat{AB}$ . Je-li oblouk uzavřený, nazýváme tento integrál *cirkulací rychlosti*

$$\Gamma(A,B) = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \oint v_i dx_i. \quad (8.2.11)$$

Podle Stokesovy věty platí

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \nabla_n \mathbf{v} \, dS = \int_S \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} \, dS = \mu,$$

tedy cirkulace rychlosti je rovna intenzitě víru. Pro nevířivé proudění

$$\Gamma = \oint v_i dx_i = \oint \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i = \oint d\varphi = 0. \quad (8.2.12)$$

Proudnice při nevířivém proudění tedy nemohou být uzavřené křivky.

Tak jsme získali nejdůležitější výsledky kinematiky tekutin. V další kapitole budeme hledat dynamické pohybové rovnice, přičemž se nejprve budeme zabývat pohybem ideálních tekutin (dokonalých tekutin), tj. takových tekutin, jejichž vnitřní tření je zanedbatelné.

### 8.3 Pohybové rovnice ideálních tekutin

Pro ideální tekutiny, pro něž má tenzor napětí i při pohybu tvar (8.1.2), získáme pohybové rovnice přímo z rovnice rovnováhy (8.1.5), přidáme-li k působícím silám ještě síly setrvačné. Protože je rovnice (8.1.5) vztažena na jednotku hmotnosti, musíme i setrvačnou sílu vztáhnout na jednotku hmotnosti, takže je pak přímo rovna záporně vzatému zrychlení studovaného elementu tekutiny. Platí pak

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + G_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j, \quad (8.3.1)$$

kde jsme použili vyjádření individuálního zrychlení elementu tekutiny ve tvaru (8.2.2). To jsou *Eulerovy hydrodynamické rovnice* pro ideální tekutinu. V těchto rovnicích nám kromě tří složek rychlosti vystupují ještě dvě funkce popisující stav tekutiny – tlak  $p(x,t)$  a hustota  $\rho(x,t)$ . Musíme tedy získat ještě další dvě rovnice, aby soustava byla úplná. První z nich bude *rovnice kontinuity*, která vlastně vyjadřuje zákon zachování hmotnosti.

Mysleme si v proudící tekutině uzavřenou plochu  $S$ . Tok tekutiny plošným elementem  $dS$  této plochy za jednotku času je roven  $\rho v_n dS$ , kde  $v_n = v_i n_i$  je kladné pro tekutinu vytékající z plochy  $S$ , záporné pro tekutinu vtékající do plochy. Integrál

$$\int_S \rho v_i n_i dS$$

pak představuje celkové množství tekutiny, která vyteče z objemu  $V$  uzavřeného plochou  $S$  za jednotku času. Není-li uvnitř tekutiny žádné zřídlo, je toto množství rovno úbytku hmotnosti tekutiny v objemu  $V$  za jednotku času, čili platí

$$\int_S \rho v_i n_i dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV. \quad (8.3.2)$$

Integrál vlevo převedeme podle Gaussovy věty na objemový a z (8.3.2) pak obvyklou úvahou vyplývá rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (8.3.3)$$

nebo vektorově

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{v}) = 0. \quad (8.3.4)$$

Pro nestlačitelnou tekutinu je  $\varrho = \text{konst.}$ , takže platí

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (8.3.5)$$

Podmínka  $\varrho = \text{konst.}$  platná pro nestlačitelnou tekutinu představuje současně pátou požadovanou rovnicí, která je třeba k úplnému řešení problému. Není-li tekutina nestlačitelná, může být poslední rovnice ve tvaru  $\varrho = \varrho(p)$  pro tzv. *barotropní tekutiny*. Pro  $\varrho$  závislé i na jiných faktorech (*baroklinní tekutiny*) se problém značně komplikuje.

Pro nestlačitelnou i pro barotropní tekutinu musíme tedy v podstatě řešit 4 parciální diferenciální rovnice (8.3.1) a (8.3.3) nebo (8.3.5). Řešení má pak tvar

$$p = p(x_1, x_2, x_3, t), \quad v_i = v_i(x_1, x_2, x_3, t).$$

Pro konkrétní řešení daného problému musíme ovšem znát počáteční a okrajové podmínky, tj. rozdělení rychlosti a tlaku pro určitý okamžik, např.  $t = 0$  (podmínky počáteční) a geometrická omezení proudící tekutiny (podmínky okrajové). Okrajové podmínky mohou být kinematické (hraničí-li proudící tekutina s tuhou stěnou) nebo dynamické (tvořené např. rozhraním dvou nemísících se tekutin). Blíže se touto problematikou zabývat nebudeme.

Při praktických aplikacích má kromě uvedených pohybových rovnic velký význam ještě *věta o hybnosti*, která se uplatňuje zejména při stacionárním proudění tekutiny, kdy  $v_i$  nezávisí explicitně na čase.

Uvažme určitý objem  $V$  stacionárně proudící tekutiny; během pohybu se objem, který zaujímají stejné částice, mění (nazýváme jej tekutým objemem); plocha v tekutině pevná je tzv. kontrolní plocha. Na tekutý objem můžeme aplikovat větu o hybnosti: Platí, že časová změna celkové hybnosti částic v tekutém objemu je rovna výslednici vnějších sil na tento objem působících (opět předpokládáme, že síly vnitřní se v součtu anulují). Je proto

$$\frac{d}{dt} \int_V \varrho v_i dV = \sum P_i.$$

Upravme nejprve levou stranu:

$$\frac{d}{dt} \int_V \varrho v_i dV = \int_V \frac{dv_i}{dt} \varrho dV + \int_V v_i \frac{d}{dt} (\varrho dV).$$

Pro stacionární proudění je poslední výraz nulový a z rovnice kontinuity také

$$\frac{\partial(\varrho v_i)}{\partial x_i} = 0,$$

takže první výraz napravo dává

$$\int_V \frac{dv_i}{dt} \varrho dV = \int_V \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \varrho dV = \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\varrho v_i v_j) - v_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\varrho v_j) \right] dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\varrho v_i v_j) dV.$$

Celkem se levá strana věty o hybnosti dá psát

$$\int_V \frac{dv_i}{dt} \varrho dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\varrho v_i v_j) dV$$

a podle Gaussovy věty

$$\int_V \frac{dv_i}{dt} \varrho dV = \int_S \varrho v_i v_j n_j dS.$$

Zbývá provést úpravu pravé strany. Výslednici všech vnějších sil vytvářejí:

- vnější objemové síly  $\int_V \varrho G_i dV$
- tlakové síly působící na hranici objemu  $V$ , tj. na ploše  $S$  ve směru vnitřní normály  $-\int_S p n_i dS$
- síly působící z vnějšku na tělesa uvnitř objemu  $V$  a udržující je v rovnovážných polohách (lopatky, profily apod.); jejich výslednici označíme  $\sum_i R_i$ .

Celkem zapisujeme tedy větu o hybnosti ve tvaru

$$\int_S \varrho v_i v_j n_j dS = \int_V \varrho G_i dV - \int_S p n_i dS + \sum_i R_i. \quad (8.3.6)$$

Tím máme uvedeny všechny nejdůležitější rovnice, s nimiž pracujeme při studiu pohybu tekutin se zanedbatelnou viskozitou (ideálních). Pro praktické použití bývá ještě výhodné upravovat Eulerovy rovnice tak, aby jejich integrace byla alespoň v některých případech snadná. Touto úpravou a některými integrály Eulerových rovnic se nyní budeme zabývat.

Nejprve upravíme v rovnici (8.3.1) poslední člen napravo:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = \delta_{ik} \delta_{jn} \frac{\partial v_k}{\partial x_n} v_j = (\delta_{ik} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jk}) v_j \frac{\partial v_k}{\partial x_n} + \delta_{in} \delta_{jk} v_j \frac{\partial v_k}{\partial x_n} = \epsilon_{ijm} \epsilon_{knm} v_j \frac{\partial v_k}{\partial x_n} + v_k \frac{\partial v_k}{\partial x_i}.$$

Poslední výraz ještě přepíšeme

$$v_k \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} v_k v_k \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} v^2 \right),$$

takže celkem můžeme (8.3.1) psát ve tvaru

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) + \epsilon_{ijm} \epsilon_{knm} v_j \frac{\partial v_k}{\partial x_n} = G_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (8.3.7a)$$

nebo vektorově

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} v^2 \right) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \mathbf{G} - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (8.3.7b)$$

To je *Gromkeho-Lambova úprava Eulerových rovnic*. I když tyto rovnice nyní vypadají složitěji než původní Eulerovy rovnice, mají ve skutečnosti řadu výhod, které zjistíme při konkrétním řešení. Předpokládejme, že objemové síly mají potenciál

$$G_i = - \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

a že se jedná o barotropní tekutinu  $\rho = \rho(p)$ . V následujících částech se budeme zabývat speciálními případy, v nichž můžeme rovnice (8.3.7) resp. (8.3.1) dále zjednodušit.

### 8.3.1 Integrál podél proudnice

Znásobme rovnici (8.3.7) elementem proudnice  $dx_i$ . Podle definice proudnice je element proudnice úměrný rychlosti, takže

$$dx_i = \lambda v_i,$$

kde  $\lambda$  je konstantní parametr. V rovnici (8.3.7) dostáváme výraz

$$\epsilon_{ijm} \epsilon_{knm} v_j \frac{\partial v_k}{\partial x_n} dx_i = (\epsilon_{ijm} \lambda v_i v_j) \epsilon_{knm} \frac{\partial v_k}{\partial x_n} = -(\lambda \mathbf{v} \times \mathbf{v}) \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0,$$

Celou rovnici (8.3.7) můžeme pak zapsat jako skalární rovnici (neboť násobení  $dx_i$  představuje vlastně skalární součin)

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} dx_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) dx_i = - \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i.$$

Rozepíšeme tento vztah pomocí úplných diferenciálů

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} dx_i + d \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = -dU - \frac{dp}{\rho(p)}$$

a integrací podél proudnice dostaneme

$$\int \frac{\partial v_i}{\partial t} dx_i + \frac{1}{2} v^2 + U + P = \text{konst.}, \quad (8.3.8)$$

kde

$$P = \int \frac{dp}{\rho(p)} \quad (8.3.9)$$

je tzv. *tlaková funkce*. Konstanta napravo je charakteristická pro danou proudnici podél níž integrujeme.

Pro stacionární proudění se (8.3.8) redukuje na *Bernoulliho rovnici*

$$\frac{1}{2} v^2 + U + P = C. \quad (8.3.10)$$

Pro nestlačitelnou tekutinu  $\rho = \text{konst.}$  je  $P = p/\rho$  a studujeme-li tekutinu v homogenním tíhovém poli při svislé orientaci osy  $z$ , kdy  $U = gz$ , dostáváme

$$z + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} = \text{konst.}$$

První člen je geometrická výška, druhý bývá někdy nazýván rychlostní výškou, třetí je piezometrická neboli tlaková výška (výška sloupce tekutiny o konstantní hustotě  $\rho$ , který svou tíhou vyvolává tlak  $p$ ); součet těchto tří výšek je tedy konstantní.

### 8.3.2 Nevířivé proudění

Druhá možnost integrace rovnice (8.3.7) nastane, jestliže se v této rovnici anuluje člen

$$\epsilon_{ijm} v_j \left( \epsilon_{knm} \frac{\partial v_k}{\partial x_n} \right).$$

Výraz v závorce však představuje  $m$ -tou složku rotace rychlosti

$$(\nabla \times \mathbf{v})_m = \Omega_m$$

a anuluje se tedy, předpokládáme-li, že proudění je nevířivé. Pro nevířivé proudění můžeme zavést potenciál rychlosti  $\varphi$ , takže

$$v_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Všimněme si dále tlakové funkce (8.3.9). Diferencováním dostaneme

$$dP = \frac{1}{\rho} dp.$$

Rozepíšeme-li výrazy pro úplné diferenciály nalevo i napravo za předpokladu  $P = P(x,t)$ ,  $p = p(x,t)$  a porovnáme koeficienty, dostáváme

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}.$$

První z těchto výrazů nyní dosadíme do (8.3.7); pro nevířivé proudění pak

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = - \frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{\partial P}{\partial x_i},$$

nebo

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + U + P \right) = 0.$$

Výraz v závorce je konstantní při změně  $x_i$ , nezávisí na  $x_i$ , ale může záviset na čase. Proto píšeme

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + U + P = f(t), \quad (8.3.11)$$

což je *Bernoulliho časová rovnice*. Je-li pohyb tekutiny nevířivý a současně stacionární, je  $\partial \varphi / \partial t = 0$  a také na pravé straně musí být konstanta, takže

$$\frac{1}{2} v^2 + U + P = C.$$

V rovnici (8.3.11) máme dvě neznámé funkce,  $\varphi$  a  $P$ . Potřebujeme proto ještě další rovnici – rovnici kontinuity – přepsat pomocí funkcí  $\varphi$  a  $P$ . Platí

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_j} v_j + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j}. \quad (8.3.12)$$

Můžeme však psát

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t} \frac{d\rho}{dp}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} &= \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \frac{\partial p}{\partial x_j} = \frac{\partial P}{\partial x_j} \frac{d\rho}{dp}. \end{aligned}$$

Označíme-li

$$\frac{dp}{d\rho} = c^2 \quad (8.3.13)$$

kde  $c$ , jak lze ukázat, má význam *rychlosti zvuku* v tekutině, je

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \Delta \varphi = 0. \quad (8.3.14)$$

Rovnice (8.3.11) a (8.3.14) zcela popisují nevířivý pohyb tekutiny. Pro nestlačitelnou tekutinu dostáváme z (8.3.12) rovnici kontinuity zjednodušenou na

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \equiv \Delta \varphi = 0, \quad (8.3.15)$$

což je *Laplaceova rovnice*. Při nevířivém proudění ideální nestlačitelné tekutiny je tedy rychlostní potenciál harmonickou funkcí souřadnic. Nevířivé proudění je velmi významné v praxi a jeho studium přináší řadu důležitých výsledků, proto mu věnujeme ještě zvláštní kapitolu. Nyní však ukážeme ještě další případ, kdy lze Eulerovy rovnice integrovat.

### 8.3.3 Šíření zvuku v tekutinách

Třetí možnost integrace Eulerových rovnic nastává, můžeme-li zavést takové předpoklady, že lze v rovnicích (8.3.1) zanedbat nelineární člen  $v_j \partial v_i / \partial x_j$  (v tomto případě nevyužíváme úpravy (8.3.7)). Předpokládejme, že  $v_i$  jsou malé veličiny a že též  $\partial v_i / \partial x_j$ ,  $\partial v_i / \partial t$  jsou malé. Pak výraz  $v_j \partial v_i / \partial x_j$  je malá veličina 2. řádu a můžeme ji proti  $\partial v_i / \partial t$  zanedbat. Tento předpoklad je oprávněný v akustice, v níž studujeme *malé kmity stlačitelné tekutiny*. Pak můžeme předpokládat, že relativní změny hustoty a tlaku jsou rovněž malé, takže lze psát

$$\begin{aligned}\varrho &= \varrho_0 + \varrho'(x,t), \\ p &= p_0 + p'(x,t),\end{aligned}$$

kde  $\varrho_0, p_0$  jsou rovnovážné hodnoty hustoty a tlaku a platí  $\varrho' \ll \varrho_0, p' \ll p_0$ . Pro barotropní tekutinu  $p = p(\varrho)$  lze psát

$$p_0 + p' = p(\varrho_0 + \varrho') = p(\varrho_0) + \left(\frac{dp}{d\varrho}\right)_0 \varrho' + \dots$$

neboli

$$p' \approx \left(\frac{dp}{d\varrho}\right)_0 \varrho'. \quad (8.3.16)$$

Zanedbáme-li objemové síly, lze (8.3.1) při studovaném přiblížení psát

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

Dosazením za  $\varrho, p$  máme z předcházející rovnice a rovnice kontinuity

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho_0 + \varrho'} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ p_0 + \left(\frac{dp}{d\varrho}\right)_0 \varrho' \right] \approx -\frac{1}{\varrho_0} \left(\frac{dp}{d\varrho}\right)_0 \frac{\partial \varrho'}{\partial x_i} \frac{\partial \varrho'}{\partial t} + \varrho_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (8.3.17)$$

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} + \varrho_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0.$$

První rovnici derivujeme podle  $x_i$  a sečteme přes  $i$ , druhou derivujeme podle  $t$  a odečteme je; dostaneme

$$\frac{\partial^2 \varrho'}{\partial t^2} - \left(\frac{dp}{d\varrho}\right)_0 \frac{\partial^2 \varrho'}{\partial x_i \partial x_i} = 0$$

nebo

$$\Delta \varrho' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varrho'}{\partial t^2} = 0,$$

kde

$$c^2 = \left(\frac{dp}{d\varrho}\right)_0$$

je rychlost šíření změn hustoty v tekutině (tj. rychlost šíření zvuku, jak jsme uvedli v předchozím odstavci). Dá se ukázat, že obdobná rovnice platí i pro  $p'$  a pro pole rychlostí, tj. pro složky  $v_i$ .

Z (8.3.17) je vidět, že vlnění je *longitudinální* (podélné):  $\partial v_i / \partial t$  a tedy také složka rychlosti je úměrná příslušné složce gradientu  $\varrho'$ , takže směr pohybu částice splývá se směrem šíření zvukové vlny.

Vzorec pro rychlost šíření zvuku lze vyhodnotit na základě konkrétní znalosti závislosti  $\varrho = \varrho(p)$ . Prakticky to znamená zavést předpoklad o šíření zvukových vln jako o určitém ději z termodynamického hlediska. Kdybychom pokládali tento děj za izotermický (Newtonův předpoklad), dostali bychom pro  $c$  ve vzduchu příliš nízkou hodnotu (asi  $280 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ). Správnější je předpoklad Laplaceův, že šíření zvukových vln je děj adiabatický; z tohoto předpokladu vychází  $c \approx 332 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

## 8.4 Vybrané úlohy z teorie nevířivého proudění

Jak jsme se již zmínili, bude tato kapitola věnována některým důležitým konkrétním problémům z teorie nevířivého proudění.

### 8.4.1 Prostorové sféricky symetrické proudění ideální nestlačitelné tekutiny

Je-li proudění sféricky symetrické, je rychlostní potenciál  $\varphi$  funkcí jen  $r$  a rovnice kontinuity (8.3.15) má ve sférických souřadnicích tvar

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} = 0.$$

Řešení této rovnice je

$$\varphi = \frac{a}{r} + b, \quad (8.4.1)$$

kde  $a, b$  jsou konstanty (pro stacionární proudění). Konstantu  $b$  musíme zvolit tak, aby potenciál v nekonečnu byl nulový, tj. musí být  $b = 0$ . Určíme nyní konstantu  $a$ . Rychlost proudění je

$$v_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\frac{a}{r^2} \frac{x_i}{r}, \quad \mathbf{v} = \nabla\varphi = -\frac{a}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (8.4.2)$$

Tekutina proudí radiálním směrem, velikost rychlosti je  $a/r^2$ . Rovnice (8.4.1) resp. (8.4.2) popisují proudění všude vyjma počátku souřadnic, kde  $\mathbf{v}$  roste nade všechny meze. Takový bod v proudící tekutině nazýváme *zdrojem*. Při  $a > 0$  tekutina proudí směrem k tomuto zdroji a mluvíme o *propadu* (noře), při  $a < 0$  proudí tekutina od zdroje, který pak označujeme za *zřídlo*.

Vydatnost zdroje definujeme jako objem tekutiny, který proteče za jednotku času libovolnou uzavřenou plochou obklopující zdroj. Označíme-li vydatnost zdroje  $Q$ , lze psát

$$Q = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Pro uvažované sféricky symetrické proudění můžeme dosadit za  $\mathbf{v}$  z (8.4.2) takže

$$Q = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = -a \int_S \frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Zvolíme-li uzavřenou plochu (která je libovolná) ve tvaru koule o poloměru  $R$ , je jednotkový vektor vnější normály dán výrazem  $\mathbf{r}/r$ , takže

$$\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r^2} = 1$$

a pro vydatnost zdroje dostáváme

$$Q = -\frac{a}{R^2} \int_S dS = -\frac{a}{R^2} 4\pi R^2 = -4\pi a. \quad (8.4.3)$$

Odtud už můžeme určit konstantu  $a$  pomocí vydatnosti zdroje  $Q$ , takže

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi} \frac{1}{r}. \quad (8.4.4)$$

### 8.4.2 Rovinné nevířivé proudění ideální nestlačitelné tekutiny

Předpokládejme nyní, že proudění lze díky určitým symetriím studovat jen v nějakém rovinném řezu, který nám pak podává dostatečnou informaci o celém proudění. Pro rychlostní potenciál  $\varphi$  pak platí dvourozměrná Laplaceova rovnice

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (8.4.5)$$

Srovnáme tuto rovnici s rovnicí struny

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Vidíme, že rovnice jsou podobné, jestliže položíme  $t \rightarrow y$ ,  $c^2 = -1$ . Vzhledem k d'Alembertovu řešení  $u = f(x + ct) + \bar{f}(x - ct)$  můžeme zapsat též obecné řešení (8.4.5) ve tvaru

$$\varphi = \frac{1}{2} [f(x + iy) + f^*(x - iy)]. \quad (8.4.6)$$

Obě libovolné funkce musíme zde brát jako funkce komplexně sdružené, aby výsledné řešení  $\varphi$  bylo reálné. Faktor  $1/2$  zde zavádíme proto, aby funkce  $\varphi$  byla přímo rovna reálné části  $f(x + iy)$ . Obecné řešení (8.4.5) je tedy dáno reálnou částí libovolné analytické funkce komplexní proměnné. Celou tuto funkci můžeme psát

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (8.4.7)$$

kde  $\psi$  nazýváme konjugovaným potenciálem nebo *proudovou funkcí*. Funkce  $f(z)$  se nazývá *komplexní potenciál* a derivace  $f' = df/dz$  určuje tzv. komplexní rychlost.

Vztah mezi funkcemi  $\varphi$  a  $\psi$  můžeme najít derivací (8.4.7) podle  $x$  a  $y$ . Značíme-li čárkou derivaci podle komplexního argumentu  $z = x + iy$ , je

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}f(z) &= f'(z)\frac{\partial z}{\partial x} = f'(z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial y}f(z) &= f'(z)\frac{\partial z}{\partial y} = if'(z) = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + i\frac{\partial\psi}{\partial y}.\end{aligned}$$

Vyloučením  $f'(z)$  získáme

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y} + i\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 0.$$

Protože  $\varphi$ ,  $\psi$  jsou reálné, je tato rovnice ekvivalentní rovnicím

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad (8.4.8)$$

což jsou známé *Cauchyho-Riemannovy rovnice*, zaručující analytičnost funkce  $f(z)$ . Křížovým znásobením rovnice (8.4.8) dostáváme

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0,$$

neboli

$$\nabla\varphi \cdot \nabla\psi = 0. \quad (8.4.9)$$

Křivky  $\varphi = \text{konst.}$  a  $\psi = \text{konst.}$  jsou vzájemně ortogonální. Protože  $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ , jsou vztahy  $\psi = \text{konst.}$  skutečně rovnicemi proudnic; odtud pochází název proudová funkce pro  $\psi$ .

Všimněme si ještě speciálně zvoleného komplexního potenciálu

$$f(z) = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0),$$

kde  $Q$ ,  $\Gamma$  jsou konstanty a podívejme se, jaký hydrodynamický problém je tímto potenciálem popsán. Zavedeme-li polární souřadnice se středem v bodě  $z_0$ , lze psát

$$z - z_0 = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = re^{i\vartheta},$$

odkud

$$f = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} (\ln r + i\vartheta).$$

Jestliže je  $\Gamma = 0$ , platí

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r, \quad \psi = \frac{Q}{2\pi} \vartheta.$$

Vzhledem k (1.1) lze psát pro gradient skalární funkce v křivočarých souřadnicích

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial s_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial s_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial s_3}\mathbf{e}_3 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\mathbf{e}_3,$$

takže v polárních souřadnicích pro náš případ

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{r}, \quad v_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = 0.$$

Pro  $\Gamma = 0$  popisuje tedy zvolený komplexní potenciál centrálně symetrické proudění v rovině, analogické proudění vyšetřovanému v části 8.4.1, neboť proudové čáry  $\psi = \text{konst.}$  jsou přímky procházející bodem  $z = z_0$ ; rychlost má jen složku radiální. Bod  $z_0$  je zde zdrojem,  $Q$  je vydatnost zdroje.

Jestliže bude  $Q = 0$  platí

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \vartheta, \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (8.4.10)$$

a složky rychlosti jsou

$$v_r = 0, \quad v_\vartheta = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r}.$$

Proudové čáry  $\psi = \text{konst.}$  jsou v tomto případě kružnice  $r = \text{konst.}$  a proudění se děje podél těchto čar proti chodu hodinových ručiček. Veličina  $\Gamma$  je podle (8.2.11) cirkulací rychlosti.

### 8.4.3 Obtékání překážky (kruhového válce)

Poslední úlohou, kterou budeme v této kapitole řešit, bude obtékání kruhového válce. Uvažme nevířivé stacionární proudění ideální nestlačitelné tekutiny; do tekutiny nechť je umístěna překážka ve tvaru kruhového válce s osou  $z$  tak, že lze očekávat, že nám dostatečnou informaci podá studium celého problému v řezu kolmém na osu válce, v rovině  $xy$  (obr. 8.1). Označíme-li  $v_\infty$  rychlost tekutiny v bodě dostatečně vzdáleném od válce a  $\varphi_\infty$  příslušný rychlostní potenciál v tomto bodě, můžeme problém řešit tím, že vyřešíme Laplaceovu rovnici pro rychlostní potenciál (8.3.15) v polárních souřadnicích

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} = 0 \quad (8.4.11)$$

při okrajových podmínkách

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = 0$$

$$\varphi_\infty = v_\infty x = v_\infty r \cos \vartheta,$$

kde  $a$  je poloměr válce.

Řešení (8.4.11) budeme hledat ve tvaru

$$\varphi = R(r)\Theta(\vartheta)$$

což po dosazení dává (čárkou jsou opět označeny derivace podle příslušných argumentů funkcí)

$$-\frac{r}{R} \frac{d}{dr} (rR') = \frac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda^2,$$

kde  $\lambda$  je konstanta. Dostáváme tedy dvě rovnice

$$\Theta'' + \lambda^2 \Theta = 0 \quad (8.4.12)$$

$$\frac{d}{dr} (rR') - \lambda^2 \frac{R}{r} = 0, \quad (8.4.13)$$

z nichž první má řešení

$$\Theta = \alpha \cos \lambda \vartheta + \beta \sin \lambda \vartheta,$$

kteří vzhledem k periodicitě funkce  $\Theta$ , tj. vzhledem k  $\Theta(\vartheta) = \Theta(\vartheta + 2\pi)$  vede k podmínce  $\lambda = m$ , kde  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  takže

$$\Theta = \alpha_m \cos m\vartheta + \beta \sin m\vartheta.$$

Řešení (8.4.13) pro  $\lambda = m = 0$  označíme  $R_0$  a najdeme ze vztahu

$$r \frac{dR_0}{dr} = A_0,$$

odkud

$$R_0 = A_0 \ln r + B_0.$$

Pro  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$  budeme hledat řešení (8.4.13) ve tvaru  $R = r^\kappa$ , takže

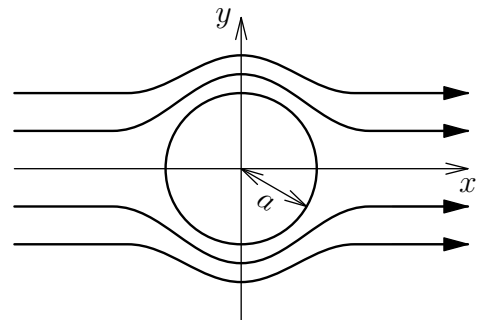
$$\kappa \frac{d}{dr} (r \cdot r^{\kappa-1}) - m^2 r^{\kappa-1} = 0,$$

odkud  $\kappa_{1,2} = \pm m$ , takže máme

$$R_m = A_m r^m + B_m r^{-m}.$$

Obecné řešení tedy bude

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{m=0}^{\infty} R_m (\alpha_m \cos m\vartheta + \beta_m \sin m\vartheta) = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (A_m r^m + B_m r^{-m}) (\alpha_m \cos m\vartheta + \beta_m \sin m\vartheta) + \\ &+ (A_0 \ln r + B_0) \alpha_0. \end{aligned}$$



Obr. 8.1: Obtékání válcové překážky



Druhá okrajová podmínka  $\varphi_\infty = v_\infty r \cos \vartheta$  nám dává  $A_0 = 0$ ,  $B_0 = 0$ ,  $A_m = 0$  pro  $m \neq 1$ ,  $\beta_m = 0$  a konečně  $A_1 r \alpha_1 \cos \vartheta = v_\infty r \cos \vartheta$ , takže  $A_1 = v_\infty$ ,  $\alpha_1 = 1$ . První okrajová podmínka je

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = 0.$$

Po dosazení do obecného řešení dostáváme

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = \sum_{m=1}^{\infty} (mA_m a^{m-1} - mB_m a^{-m-1}) (\alpha_m \cos m\vartheta + \beta_m \sin m\vartheta) = 0,$$

což bude splněno při

$$A_m a^{m-1} = B_m a^{-m-1},$$

tedy

$$B_m = A_m a^{2m}, \quad \text{resp. } B_1 = A_1 a^2.$$

Řešení vyhovující daným okrajovým podmínkám je

$$\varphi = v_\infty \left( r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \vartheta. \quad (8.4.14)$$

Složky rychlosti v libovolném bodě dostaneme v polárních souřadnicích

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_\infty \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \vartheta \\ v_\vartheta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = -v_\infty \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \vartheta, \end{aligned}$$

odkud vyplývá, že na povrchu válce

$$\begin{aligned} v_r|_{r=a} &= 0 \\ v_\vartheta|_{r=a} &= -2v_\infty \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Integrál nevířivého proudění ideální nestlačitelné tekutiny (8.3.11) v horizontálním směru a při stacionárním proudění lze psát

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_\infty + \frac{1}{2} \rho v_\infty^2$$

a protože  $p_\infty$  lze položit rovno nule, bude

$$p = \frac{1}{2} \rho (v_\infty^2 - v^2).$$

Sílu, kterou působí tekutina na válec, vypočítáme podobně jako ve (8.3.6); v rovinné úloze integrujeme přes kružnici a dostáváme sílu, kterou tekutina působí na jednotku délky válce ve tvaru

$$\mathbf{F}_R = - \int_0^{2\pi} [p]_{r=a} \mathbf{n} a d\vartheta.$$

Normála  $\mathbf{n}$  má složky  $(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$ , takže pro  $x$ -ovou složku této síly dostáváme

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= - \int_0^{2\pi} [p]_{r=a} a \cos \vartheta d\vartheta = - \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \rho (v_\infty^2 - v^2) \right]_{r=a} a \cos \vartheta d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_0^{2\pi} [v^2]_{r=a} a \cos \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2} \rho \int_0^{2\pi} 4av_\infty^2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = 0 \end{aligned}$$

a podobným výpočtem pro  $y$ -ovou složku také  $F_{Ry} = 0$ . Mělo by tedy platit

$$\mathbf{F}_R = 0, \quad (8.4.15)$$

což je tzv. *d'Alembertovo paradoxon* (hydrodynamické paradoxon): Při nevířivém proudění kolem válce by síla, kterou působí proudící kapalina na válec, měla být nulová (platí to i pro překážku libovolného tvaru). Ze zkušenosti je známo,

že tomu tak není. I pro tekutinu zanedbatelné viskozity vznikají vždy *v mezní vrstvě* v blízkosti překážky pohyby částic tekutiny – víry – které mají za následek, že proudění není nevířivé, cirkulace rychlosti  $\Gamma$  není rovna nule.

Předpokládejme, že v reálném případě je proudění popsáno rychlostním potenciálem (8.4.14), k němuž přidáme potenciál (8.4.10) popisující jednoduché vířivé proudění, takže celý potenciál rychlosti bude

$$\varphi = v_\infty \left( r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \vartheta + \frac{\Gamma}{2\pi} \vartheta.$$

Nyní platí

$$\begin{aligned} v_r &= v_\infty \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \vartheta \\ v_\vartheta &= -v_\infty \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \vartheta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{aligned}$$

a pro  $r = a$  je

$$\begin{aligned} v_r|_{r=a} &= 0, \\ v_\vartheta|_{r=a} &= \frac{\Gamma}{2\pi a} - 2v_\infty \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Sílu, kterou působí tekutina na válec, vypočítáme podobně jako v předcházejícím případě. Pro sílu na jednotku délky válce dostaneme

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= 0 \\ F_{Ry} &= \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{\Gamma}{2\pi a} - 2v_\infty \sin \vartheta \right)^2 \right]_{r=a} a \sin \vartheta d\vartheta = -\rho a \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma}{\pi a} v_\infty \sin^2 \vartheta d\vartheta = \\ &= -\frac{\rho \Gamma}{\pi} v_\infty \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta = -\rho \Gamma v_\infty. \end{aligned}$$

Vidíme, že tato síla působí ve směru kolmém na rychlost  $v_\infty$  a její orientace závisí na znaménku cirkulace rychlosti  $\Gamma$  podél překážky. Při vhodné volbě překážky (profilu) vzniká cirkulace ve směru hodinových ručiček, což má za následek, že síla  $\mathbf{F}_R$  je namířena vertikálně vzhůru, takže těleso nadlehčuje. Říká se jí pak *vztlak* (hydrodynamický vztlak, též Žukovského síla).

Vztah pro Žukovského sílu se zvláště výhodně odvozuje s použitím teorie funkce komplexní proměnné; pomocí tzv. konformního zobrazení lze najít výhodný tvar profilu překážky (křídla), při němž je vztlak optimální, tzv. *Žukovského profil*. Tento postup představuje vlastně teoretické základy letectví.

## 8.5 Dynamika vazkých tekutin

V části 7.1 jsme zavedli označení „elastické těleso“ pro takové kontinuum, pro něž byl tenzor napětí funkcí (lineární) složek tenzoru deformace. Nyní zavedeme podobným způsobem pojem *vazké tekutiny*. Budeme tak nazývat takové kontinuum, pro které tenzor napětí bude funkcí (opět lineární) složek tenzoru rychlosti deformace  $\dot{\epsilon}_{ij}$ . V této závislosti zpravidla vydělujeme zvláště závislost typu (8.1.2) platnou pro ideální tekutiny, takže píšeme

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau'_{ij}, \quad (8.5.1)$$

kde  $\tau'_{ij}$  je funkcí tenzoru rychlosti deformace a bývá nazýván *tenzorem třecích napětí*. Vztah (8.5.1) se někdy označuje za *Navierův-Stokesův zákon*.

Chceme-li najít konkrétní závislost tenzoru  $\tau'_{ij}$  na tenzoru rychlosti deformace, můžeme použít formální analogie s odvozením Hookova zákona pro izotropní tělesa. Tekutina je izotropní, takže můžeme vztah mezi  $\tau'_{ij}$  a  $\dot{\epsilon}_{ij}$  zapsat ve tvaru analogickém (7.1.2)

$$\tau'_{ij} = \bar{\lambda} \delta_{ij} \dot{\vartheta} + 2\bar{\mu} \dot{\epsilon}_{ij}, \quad (8.5.2)$$

kde  $\dot{\vartheta} = \sum_{k=1}^3 \dot{\epsilon}_{kk}$ ,  $\bar{\lambda}$ ,  $\bar{\mu}$  se nazývají koeficienty vazkosti. Vztah (8.5.1) pak bude

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \bar{\lambda} \delta_{ij} \dot{\vartheta} + 2\bar{\mu} \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (8.5.3)$$

Obecné pohybové rovnice tekutin vztažené na jednotku hmotnosti jsou

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + G_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \quad (8.5.4)$$

a zavedeme-li do nich (8.5.3), dostáváme

$$\frac{1}{\rho} \left\{ -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{\lambda} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{\mu} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \right\} + G_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j. \quad (8.5.5)$$

To jsou *pohybové rovnice vazkých tekutin*.

Pro  $\bar{\lambda}$ ,  $\bar{\mu}$  konstantní (homogenní tekutina) se (8.5.5) redukuje na

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = G_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\bar{\lambda} + \bar{\mu}}{\rho} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\bar{\mu}}{\rho} \Delta v_i. \quad (8.5.6)$$

Pro nestlačitelnou tekutinu plyne z rovnice kontinuity  $\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$ ; rovnice (8.5.6) se pak redukuje na *Navierovu-Stokesovu rovnici* pro vazkou nestlačitelnou tekutinu

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = G_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta v_i, \quad (8.5.7)$$

kde  $\nu = \frac{\bar{\mu}}{\rho}$  se nazývá *kinematická vazkost*,  $\bar{\mu}$  je *dynamická vazkost*. Pro nestlačitelnou tekutinu nám tedy stačí udát jen kinematickou vazkost, tj. jednu veličinu charakterizující tekutinu. Studujeme-li pohyb tekutin stlačitelných, je třeba brát v úvahu i veličinu  $\bar{\lambda}$ , což je tzv. *druhá vazkost*.

Významnou praktickou aplikací rovnice (8.5.7) je studium stacionárního proudění vazké nestlačitelné tekutiny trubici s kruhovým průřezem:

Nechť tekutina proudí ve směru osy  $x$ ,  $v_x \neq 0$ ,  $v_y = v_z = 0$ . Protože  $\rho = \text{konst.}$ , plyne z rovnice kontinuity  $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$ , takže musí  $v_x$  být funkcí jen  $y$  a  $z$ , tj.  $v_x = v_x(y, z)$ . Objemové síly zanedbáváme. Rovnice (8.5.7) pak dává

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\bar{\mu}}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}$$

Z posledních dvou rovnic vyplývá, že tlak není funkcí  $y$  a  $z$ , takže  $p = p(x)$ . Proto v první rovnici můžeme místo parciální derivace tlaku psát úplnou derivaci; kromě toho budeme značit  $v_x \equiv v$  a dostáváme

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\bar{\mu}} \frac{dp}{dx}. \quad (8.5.8)$$

Předpokládejme nyní, že na stěně trubice je  $v = 0$ ; zavedeme-li polární souřadnice v rovině  $yz$  a předpokládáme, že proudění je symetrické k ose válce, tj.  $v \neq v(\varphi)$ ,  $v = v(r)$ , bude mít transformovaný Laplaceův operátor tvar

$$\Delta v = \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr}$$

a rovnice (8.5.8) pak je

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} \equiv \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{1}{\bar{\mu}} \frac{dp}{dx}. \quad (8.5.9)$$

Nalevo je funkce proměnné  $r$ , napravo funkce  $x$ , takže obě strany této rovnice musejí být konstantní. Položme

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= a, \\ p &= ax + b. \end{aligned}$$

Určíme-li tlaky  $p_1$  a  $p_2$  ve dvou místech na ose  $x$  vzdálených o  $l$ , bude  $a = -\frac{p_1 - p_2}{l}$ , takže (8.5.9) nám dá

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{1}{\bar{\mu}} a = -\frac{p_1 - p_2}{\bar{\mu} l}.$$

Odtud integrací

$$r \frac{dv}{dr} = \frac{1}{\bar{\mu}} a \frac{r^2}{2} + c_1$$

a další separací proměnných a integrací

$$v = \frac{1}{\bar{\mu}} a \frac{r^2}{4} + c_1 \ln r + c_2.$$

V tomto řešení máme konstanty  $c_1, c_2$ , ale jen jednu okrajovou podmínku  $v = 0$  pro  $r = R$ . Druhou podmínku udává přirozený požadavek, aby  $v$  byla konečná v celém průřezu. Při  $r = 0$  diverguje logaritmus a proto je třeba položit  $c_1 = 0$ . Okrajová podmínka pak dává

$$c_2 = -\frac{1}{\mu} a \frac{R^2}{4},$$

takže

$$v = \frac{1}{\mu} a \frac{1}{4} (r^2 - R^2) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (R^2 - r^2).$$

Rychlost je v průřezu rozdělena parabolicky.

Objem tekutiny, který proteče průřezem za sekundu, je

$$V = \int_0^R v 2\pi r dr = \frac{\pi (p_1 - p_2)}{8\mu l} R^4, \quad (8.5.10)$$

což je známý *Poiseuilleův zákon* (někdy zvaný také *Hagenův-Poiseuilleův zákon*): Množství tekutiny prošlé kruhovým průřezem trubice za jednotku času je přímo úměrné tlakovému spádu a čtvrté mocnině poloměru, nepřímo úměrné dynamickému koeficientu vazkosti.

Kdybychom srovnávali výsledky získané teoreticky ze vztahu (8.5.10) s výsledky konkrétních měření, dostali bychom většinou značné rozdíly mezi teorií a praxí – kromě případů, kdy bychom měřili průtok kapilárami. Důvodem je to, že při odvození Poiseuilleova vzorce jsme předpokládali, že rychlost proudění tekutiny má v každém bodě směr osy trubice. Takovému typu proudění říkáme *proudění laminární*.

Ukazuje se však, že při většině typů proudění, která se vyskytují v technické praxi (až na zmíněné proudění kapilárami) není proudění laminární, nýbrž *turbulentní*. Při turbulentním proudění ztrácí pole rozdělení rychlostí svůj spojitý charakter. Studujeme-li časovou závislost vektoru rychlosti v určitém bodě turbulentně proudící tekutiny, zjistíme nepravidelné chaotické kmity (pulzace) rychlosti kolem určité střední rychlosti.

Zatímco při laminárním proudění jsme zjistili parabolické rozdělení rychlostí tekutiny od stěny trubice k ose, při turbulentním proudění je tato střední rychlost prakticky neměnná v celém průřezu, vyjma tenké vrstvičky v blízkosti stěny trubice. Rovněž závislost na viskozitě se u turbulentního proudění téměř neprojevuje.

Studiem turbulentního proudění se nebudeme zabývat, neboť představuje velmi komplikovanou část teorie. Významná je však otázka vzniku turbulentního proudění, přechodu od proudění laminárního k proudění turbulentnímu. Ukazuje se, že kritériem pro tento přechod je tzv. *kritické Reynoldsovo číslo*, veličina, která se zavádí při studiu podobnosti dvou proudění. Tohoto problému si všimneme blíže.

V technické praxi je často třeba řešit některé úkoly, jejichž teoretické zvládnutí je velmi náročné a naráží na značné matematické komplikace. Proto se volí modelové situace a výsledky získané na modelech se pak aplikují na problém reálný. Přitom je třeba zajistit, aby situace na modelu odpovídala skutečnosti, nebo, řečeno v terminologii mechaniky tekutin, aby proudění studované na modelu bylo podobné proudění v reálném problému.

Abyste došlo k podobnosti dvou proudění, musí být všechny veličiny charakterizující každé z uvažovaných proudění odlišné jen měřítkem. Proudění nestlačitelné vazké tekutiny je plně charakterizováno veličinami  $x_i, v_i, G_i, t, \varrho, p, \nu$ . Označíme-li veličiny charakteristické pro jedno proudění indexem 1 (u vektorových veličin jej přepisujeme nahoru v závorce), pro druhé indexem 2, musí platit

$$x_i^{(2)} = \alpha x_i^{(1)} \quad (8.5.11)$$

$$v_i^{(2)} = \beta v_i^{(1)} \quad (8.5.12)$$

$$t_2 = \gamma t_1 \quad (8.5.13)$$

$$G_i^{(2)} = \delta G_i^{(1)} \quad (8.5.14)$$

$$\varrho_2 = \varepsilon \varrho_1$$

$$p_2 = \eta p_1$$

$$\nu_2 = \kappa \nu_1$$

kde  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta, \kappa$  jsou konstanty úměrnosti. Tyto konstanty však nejsou nezávislé - vzhledem k definici rychlosti musí platit  $\gamma = \alpha/\beta$ .

Zapišme nyní Navierovu – Stokesovu rovnici pro proudění s indexem 2:

$$\frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial t_2} + \frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial x_j^{(2)}} v_j^{(2)} = G_i^{(2)} - \frac{1}{\varrho_2} \frac{\partial p_2}{\partial x_i^{(2)}} + \nu_2 \frac{\partial^2 v_i^{(2)}}{\partial x_j^{(2)} \partial x_j^{(2)}}. \quad (8.5.15)$$

Dosadíme-li sem z (8.5.11, 8.5.12, 8.5.13 a 8.5.14), dostaneme

$$\frac{\beta^2}{\alpha} \left( \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial t_1} + \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial x_j^{(1)}} v_j^{(1)} \right) = \delta G_i^{(1)} - \frac{\eta}{\varepsilon \alpha} \left( \frac{1}{\varrho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_i^{(1)}} \right) + \frac{\kappa \beta}{\alpha^2} \left( \nu_1 \frac{\partial^2 v_i^{(1)}}{\partial x_j^{(1)} \partial x_j^{(1)}} \right). \quad (8.5.16)$$

Protože i pro proudění s indexem 1 platí Navierova – Stokesova rovnice, musí

$$\frac{\beta^2}{\alpha} : \delta : \frac{\eta}{\varepsilon\alpha} : \frac{\kappa\beta}{\alpha^2} = 1 : 1 : 1 : 1.$$

Odtud plynou tři nezávislé rovnice, které volíme takto:

$$\frac{\beta^2}{\alpha\delta} = 1, \quad \frac{\eta}{\varepsilon\beta^2} = 1, \quad \frac{\alpha\beta}{\kappa} = 1. \quad (8.5.17)$$

Konstanty  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  byly zavedeny jako konstanty úměrnosti pro složky vektorů; protože se však nechceme omezovat na souřadnicovou soustavu, zavádíme tzv. charakteristické veličiny – charakteristickou délku  $a$ , rychlost  $v$  a objemovou sílu  $G$ . Pak bude

$$a_2 = \alpha a_1, \quad v_2 = \beta v_1, \quad G_2 = \delta G_1$$

přičemž číslování se už vztahuje na tyto charakteristické hodnoty, nikoliv na složky vektorů. Ze vztahů (8.5.17) dostáváme podmínky podobnosti proudění dvou nestlačitelných tekutin

$$\begin{aligned} \frac{v_2^2}{a_2 G_2} &= \frac{v_1^2}{a_1 G_1}, \\ \frac{p_2}{\rho_2 v_2^2} &= \frac{p_1}{\rho_1 v_1^2}, \\ \frac{v_2 a_2}{\nu_2} &= \frac{v_1 a_1}{\nu_1}. \end{aligned}$$

Je-li objemová síla silou tíhovou, je  $G_1 = G_2 = g$ . Charakteristickou veličinu pro tlak zvolíme rovnu  $p = \rho v^2$  a prostřední rovnice je při této volbě splněna automaticky. V tomto případě nám za kritérium podobnosti slouží rovnosti zbývající. Obvykle zavádíme

$$\begin{aligned} F &= \frac{v^2}{ag} && \text{Froudeovo číslo} \\ R &= \frac{va}{\nu} && \text{Reynoldsovo číslo.} \end{aligned}$$

Jestliže mají dvě proudění stejná Froudeova čísla i čísla Reynoldsova, jsou tato proudění podobná. Zanedbáváme-li objemovou sílu (tíhovou), je kritériem podobnosti dvou proudění rovnost jejich Reynoldsových čísel.

Získané výsledky platí pro nestlačitelné tekutiny a zpravidla si pod tímto pojmem představujeme výhradně kapaliny. Ve skutečnosti se však i plyny chovají prakticky jako nestlačitelné, neboť změny tlaku, které vznikají při jejich pohybech, nejsou obvykle provázeny podstatnými změnami hustoty. Plyn se přestává chovat jako nestlačitelné prostředí teprve při rychlostech proudění srovnatelných s rychlostí zvuku.

Vraťme se na závěr stručně k problematice turbuletního a laminárního proudění. Jsou-li dvě proudění podobná, tj. mají stejné Reynoldsovo číslo, jsou buď obě laminární, nebo obě turbuletní. Při nízkých  $R$  jsou proudění laminární, při vysokých  $R$  jsou turbuletní. Hodnota  $R_K$ , při které přechází proudění laminární v turbuletní, je kritické Reynoldsovo číslo. Tato hodnota silně závisí na experimentálním uspořádání. Protože se předpokládá, že turbuletnost je výsledkem určitých poruch laminárnosti proudění (vznikajících např. při vstupu tekutiny do trubice), které se pak přenášejí při  $R > R_K$  do celé proudící tekutiny (zatímco při  $R < R_K$  se stačí utlumit), závisí  $R_K$  na řadě faktorů, např. na tom, zda okraj trubice je oblý nebo ostrý. Zpravidla se uvádí, že pro proudění v trubici kruhového průřezu je  $R_K \sim 1\,700$ , přitom však bylo při vhodných podmínkách dosaženo laminárnosti proudění až při  $R_K \sim 20\,000$  a naopak jindy může vznikat turbulence už při  $R_K \sim 1\,000$ .

Kromě výše zmíněných charakteristik proudění, tj. Froudeova a Reynoldsova čísla, se při nestacionárním proudění zavádí ještě Strouhalovo číslo (nazvané podle významného českého fyzika prof. Č. Strouhala); při pohybu plynů velkými rychlostmi se pak zavádí ještě Prandtlovo a Machovo číslo. Těmito otázkami se však už zabývat nebudeme.

## Literatura ke kapitole 8

- [1] Brdička M., Samek L., Sopko B.: *Mechanika kontinua*. Academia, Praha 2005.
- [2] Chadwick P.: *Continuum mechanics*. Dover Publications, Inc., Mineola, New York 1999.
- [3] Evett J., Liu C.: *2,500 Solved Problems In Fluid Mechanics and Hydraulics*. McGraw-Hill 1989.
- [4] Hlavička A., Bělař A., Krmešský J. a kol.: *Fyzika pro pedagogické fakulty*. SPN, Praha 1971.
- [5] Kolář M.: *Sbírka úloh z mechaniky kontinua*. Diplomová práce, Univerzita Palackého Olomouc 2003. Ke stažení na adrese <http://optics.upol.cz/~richterek/files.html>.
- [6] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.: *Механика сплошных сред*. Наука, Москва 1954.
- [7] Malvern L.E.: *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice Hall 1969.

- [8] Mase G.E.: *Schaum's outlines: Continuum mechanics*. McGraw-Hill, New York 1970.
- [9] Spurk J.H.: *Fluid mechanics. Problems and Solutions*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg 1997.
- [10] Vybíral B.: *Mechanika ideálních kapalin*. Knihovnička FO č.62, MAFY, Hradec Králové 2003. Ke stažení na adrese <http://fo.cuni.cz/texty/kapaliny.pdf>.
- [11] Vybíral B.: *Mechanika ideálních plynů*. Knihovnička FO č. 67, MAFY, Hradec Králové 2004. Ke stažení na adrese <http://fo.cuni.cz/texty/plyny.pdf>.
- [12] Vybíral B.: *Aplikovaná mechanika tekutin*. Knihovnička FO č. 69, MAFY, Hradec Králové 2005. Ke stažení na adrese <http://fo.cuni.cz/texty/aplikace.pdf>.

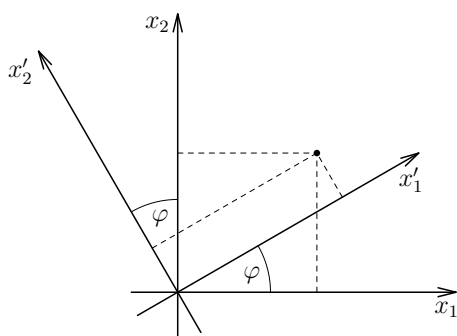
# **Dodatky**

# Příloha A

## Matematický doplněk

### A.1 Kartézské tenzory

#### A.1.1 Definice a základní vlastnosti



Obr. A.1: Souřadnice bodu v rovině ve vzájemně otočených soustavách

Při transformaci kartézských ortogonálních souřadnic  $x_1, x_2$  v rovině  $x_1x_2$  otočením o úhel  $\varphi$  se souřadnice bodu transformují podle vztahů (viz obr. A.1)

$$\begin{aligned}x'_1 &= \cos \varphi x_1 + \sin \varphi x_2 \\x'_2 &= -\sin \varphi x_1 + \cos \varphi x_2.\end{aligned}$$

Tyto vztahy se dají také zapsat

$$\begin{aligned}x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2,\end{aligned}$$

přičemž  $a_{ij}$  mají význam tzv. směrových kosinů nových os, tj. jsou rovny kosinu úhlu, který svírá  $i$ -tá čárkovaná osa s  $j$ -tou osou nečárkovanou.

Podobné vztahy můžeme najít i při transformaci otočením souřadnicové soustavy v prostoru; pak lze psát

$$\begin{aligned}x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3,\end{aligned}$$

nebo krátce

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j \equiv a_{ij}x_j, \quad (\text{A.1.1})$$

kde jsme využili *Einsteinova sumačního pravidla*: Podle indexu, který se v součinu vyskytuje dvakrát, sčítáme přes všechny jeho hodnoty.

Podobným způsobem bychom mohli najít inverzní transformaci

$$x_j = a_{ij}x'_i. \quad (\text{A.1.2})$$

Směrové kosiny  $a_{ij}$  jsou vázány tzv. *relacemi ortogonálnosti*, které můžeme dostat takto: Dosadíme-li z (A.1.2) do (A.1.1), musí vzniknout identita, neboť obě transformace jsou inverzní. Proto musí platit

$$x'_i \equiv a_{ij}a_{kj}x'_k,$$

což je splněno, jestliže

$$a_{ij}a_{kj} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

Naopak dosazením (A.1.1) do (A.1.2) dostaneme podmínku

$$a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}.$$



Lze tedy psát

$$a_{ik}a_{jk} = a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}, \quad (\text{A.1.3})$$

což jsou hledané relace ortogonálnosti.

Determinant transformace  $D$  je definován

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (\text{A.1.4})$$

Výpočtem s použitím (A.1.3) se lehce přesvědčíme, že platí  $D^2 = 1$ , takže  $D = \pm 1$ .

Hodnota  $D = +1$  charakterizuje *transformace vlastní (otočení)* a hodnota  $D = -1$  charakterizuje *transformace nevlastní (zrcadlení)*.

Zadáním souřadnic bodu v prostoru máme z geometrického hlediska současně určeny složky vektoru vedeného z počátku souřadnic k tomuto bodu; tyto složky vektoru se tedy budou transformovat rovněž podle zákona (A.1.1) resp. (A.1.2). Celou situaci nyní obrátíme a budeme naopak vektor *definovat* na základě transformačních vlastností, aniž bychom přihlíželi k jeho geometrickému znázornění.

Tři veličiny  $A_i$  nazýváme *složkami vektoru*, platí-li pro ně transformační vztah

$$A'_i = a_{ij}A_j. \quad (\text{A.1.5})$$

Znásobením dvou vektorů dostaneme

$$A'_i B'_k = T'_{ik} = a_{ij}a_{kl}A_j B_l = a_{ij}a_{kl}T_{jl}$$

a můžeme definovat:

Devět veličin  $T_{ik}$ , které se transformují podle zákona

$$T'_{ik} = a_{ij}a_{kl}T_{jl} \quad (\text{A.1.6})$$

nazýváme *složkami tenzoru druhého řádu* (mluvíme-li o transformacích, máme vždy na mysli ortogonální transformace kartézských souřadnicových soustav). Vidíme, že pro definici je rozhodující počet směrových kosinů, jež v transformačním zákoně vystupují. Můžeme tak definovat tenzor  $n$ -tého řádu jako  $3^n$  složek transformujících se podle zákona

$$T'_{ij \dots l} = \underbrace{a_{ir}a_{js} \dots a_{lt}}_n \underbrace{T_{rst \dots t}}_n. \quad (\text{A.1.7})$$

Pro  $n = 1$  dostáváme transformační zákon pro složky vektoru, které tedy můžeme pokládat za tenzory 1. řádu, pro  $n = 0$  máme definovány veličiny známé jako skaláry (tenzory nultého řádu).

Důležité jsou tenzory, pro které platí

$$T_{ij \dots l} = T_{ji \dots l};$$

takové tenzory nazýváme *symetrickými* v indexech  $i$  a  $j$ ; u tenzorů druhého řádu, kdy platí  $T_{ij} = T_{ji}$  mluvíme pouze o *symetrickém tenzoru*.

Platí-li

$$T_{ij \dots l} = -T_{ji \dots l},$$

nazýváme takový tenzor *antisymetrickým* v indexech  $i$  a  $j$ ; u tenzorů druhého řádu opět mluvíme jen o *antisymetrickém tenzoru*.

Libovolný tenzor druhého řádu se dá rozložit na součet tenzoru symetrického a antisymetrického

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}). \quad (\text{A.1.8})$$

## A.1.2 Početní operace s tenzory

*Slučovat* můžeme jen tenzory stejného řádu; řád tenzoru se přitom nemění (použili jsme tohoto pravidla už při formulaci (A.1.8)).

*Násobením tenzorů* vzniká tenzor, jehož řád je roven součtu řádů obou násobených tenzorů. Přesvědčit se o tom můžeme např. znásobením dvou vektorů, jak jsme učinili při odvození definiční rovnice pro tenzor 2. řádu.

*Úžením* nazýváme takovou operaci, při níž dva indexy tenzoru klademe sobě rovny a přes všechny jejich hodnoty sčítáme. Při úženi se řád tenzoru snižuje o dvě jednotky. Např.:

$$\sum_{j=1}^3 T'_{ijj} = a_{ir}a_{js}a_{jt}T_{rst} = \sum_{s=1}^3 a_{ir}T_{rss}$$

Index  $j, s$  nazýváme často němým indexem. Speciálním případem úžení je vytvoření skalárního součinu dvou vektorů

$$A'_i B'_i = a_{ir} a_{is} A_r B_s = A_r B_r.$$

Ve fyzice je často důležité srovnávat hodnoty vektorů a tenzorů v různých místech a porovnávat případné změny. Potom vyžadujeme, aby hodnoty skalární veličiny, vektoru či tenzoru byly definovány nejen v jednom bodě a předpis, který zadává v každém bodě nějaké oblasti (podprostoru, ploše apod.) skalár, vektor resp. tenzor nazýváme *skalárním vektorovým* resp. *tenzorovým polem*.

*Derivací tenzoru (tenzorového pole)* podle invariantu (času) se řád tenzoru nemění. Derivací podle souřadnice se řád tenzoru zvyšuje o jedničku: Máme-li např. skalární funkci polohy

$$\varphi(x_i) = \varphi'(x'_i),$$

můžeme psát

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x'_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j},$$

derivace se tedy transformuje jako vektor.

Počítání s tenzory významně zjednodušuje zavedení *Levi-Civitova tenzoru*, jehož složky jsou rovny

- 0 jestliže jsou některé indexy stejné
- +1 tvoří-li indexy  $i, j, k$  sudou permutaci
- -1 tvoří-li indexy  $i, j, k$  lichou permutaci.

Levi-Civitův tenzor značíme  $\epsilon_{ijk}$ ; je tedy

$$\begin{aligned} \epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} &= 1 \\ \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = \epsilon_{132} &= -1 \\ \epsilon_{112} = \epsilon_{113} = \dots &= 0 \end{aligned}$$

Pomocí  $\epsilon_{ijk}$  můžeme zapsat *vektorový součin* dvou vektorů ve tvaru

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k. \quad (\text{A.1.9})$$

Důležitý je též symbolický vektor  $\nabla$  o složkách  $\partial/\partial x_i$ . Aplikujeme-li jej na skalární funkci, dostáváme složky *gradientu skalárního pole (skalární funkce)*

$$\nabla \varphi \equiv (\text{grad } \varphi)_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}. \quad (\text{A.1.10})$$

Aplikujeme-li jej na vektorovou funkci a zúžíme v obou indexech, dostáváme skalár zvaný *divergence vektorového pole*

$$\nabla \cdot \mathbf{u} \equiv \text{div } \mathbf{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (\text{A.1.11})$$

Součin

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = (\nabla \cdot \mathbf{u})_i \equiv (\text{rot } \mathbf{u})_i \quad (\text{A.1.12})$$

definuje  $i$ -tou složku *rotace vektorového pole*  $\mathbf{u}$ .

Přepišme ještě v tenzorové symbolice Gaussovu a Stokesovu větu.

*Gaussova věta*

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV = \int_V \text{div } \mathbf{A} \, dV = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

se dá zapsat

$$\int_V \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \, dV = \int_S A_i n_i \, dS \quad (\text{A.1.13})$$

a je možné ji zobecnit např. pro tenzory 2. řádu, takže lze psát také

$$\int_V \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \, dV = \int_S T_{ij} n_j \, dS; \quad (\text{A.1.14})$$

zde  $\mathbf{n}$  značí, jak je obvyklé, vektor vnější normály plochy  $dS$ .

Stokesovu větu

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS$$

můžeme v naší symbolice přepsat ve tvaru

$$\oint A_i dx_i = \int_S \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} n_i dS. \quad (\text{A.1.15})$$

### A.1.3 Tenzory druhého řádu

*Antisymetrický tenzor* druhého řádu  $\mathbf{L}$  splňuje podmínku  $L_{ij} = -L_{ji}$ . Rozepíšeme nyní transformační rovnici (A.1.6) např. pro  $i = 2, j = 3$ . Dostaneme

$$\begin{aligned} L'_{23} &= a_{2k} a_{3l} L_{kl} = \\ &= a_{21} a_{32} L_{12} - a_{22} a_{31} L_{12} + a_{22} a_{33} L_{23} - a_{23} a_{32} L_{23} + a_{23} a_{31} L_{31} - a_{21} a_{33} L_{31} = \\ &= L_{12} (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}) + L_{23} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) + L_{31} (a_{23} a_{31} - a_{21} a_{33}). \end{aligned}$$

Výrazy v závorkách jsou algebraické doplňky prvků determinantu transformace  $A_{ij}$ , pro něž však platí následující vztah: Rozepíšeme-li relace ortogonálnosti  $a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}$  např. pro  $j = 2$ , dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} + a_{31} a_{32} &= 0 \\ a_{12} a_{12} + a_{22} a_{22} + a_{32} a_{32} &= 1 \\ a_{13} a_{12} + a_{23} a_{22} + a_{33} a_{32} &= 0 \end{aligned}$$

jejichž řešením pro  $a_{12}, a_{22}, a_{32}$  dostáváme

$$\begin{aligned} a_{12} &= \frac{A_{12}}{D} = \frac{a_{31} a_{23} - a_{21} a_{33}}{D}, \\ a_{22} &= \frac{A_{22}}{D}, \\ a_{32} &= \frac{A_{32}}{D}. \end{aligned}$$

Platí obecně

$$a_{ij} D = A_{ij}.$$

Vrátíme-li se k transformaci pro  $L'_{23}$ , zjistíme, že můžeme psát

$$L'_{23} = D (a_{13} L_{12} + a_{11} L_{23} + a_{12} L_{31})$$

nebo, položíme-li  $L_{23} = P_1, L_{31} = P_2, L_{12} = P_3$ ,

$$L'_{23} \equiv P'_1 = D (a_{11} P_1 + a_{12} P_2 + a_{13} P_3) = D a_{1j} P_j. \quad (\text{A.1.16})$$

$L_{ij}$  se tedy transformuje při vlastních transformacích ( $D = +1$ ) jako vektor, při nevlastních transformacích s opačným znaménkem než složky vektoru. Můžeme jej proto reprezentovat vektorem  $\mathbf{P}$  přiřazeným jeho třem složkám, budeme-li mít na paměti toto jeho chování při transformacích zrcadlením (nevlastních). Vektor takto přiřazený antisymetrickému tenzoru 2. řádu nazýváme *axiálním vektorem* (pseudovektorem), jeho složky získáme ze složek antisymetrického tenzoru obecně podle vztahu

$$P_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} L_{jk}. \quad (\text{A.1.17})$$

*Symetrický tenzor* druhého řádu splňuje podmínku  $S_{ij} = S_{ji}$ . Máme-li v určitém bodě prostoru definován symetrický tenzor, můžeme do tohoto bodu přenést počátek souřadnicové soustavy  $x_1, x_2, x_3$  a vytvořit součin  $S_{ij} x_i x_j$ , který je invariantní (skalár); jeho hodnota může být kladná nebo záporná a vhodnou normalizací můžeme vždy dosáhnout, aby byla rovna  $\pm 1$ . Pak platí

$$S_{ij} x_i x_j = \pm 1, \quad (\text{A.1.18})$$

což je rovnice kvadratické plochy se středem v počátku souřadnic. Rovnici každé kvadratické plochy můžeme převést do souřadnicové soustavy hlavních os, což jsou takové osy, které mají tu vlastnost, že jejich směr je paralelní s normálou kvadratické plochy v bodě, v němž hlavní osa tuto kvadratickou plochu protíná. Je-li obecně plocha dána rovnicí  $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ , jsou směrové kosiny normály dány  $\partial F / \partial x_i$ . V našem případě

$$F \equiv S_{ij} x_i x_j \mp 1 = 0$$

a směrové kosiny normály jsou

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (S_{ij}x_i x_j \mp 1) = S_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} x_j + S_{ij} x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_k} = S_{ij} \delta_{ik} x_j + S_{ij} x_i \delta_{jk} = 2S_{kj} x_j,$$

protože  $S_{ij}$  jsou složky tenzoru v daném bodě a při derivování se tedy chovají jako konstanty. Zavedeme-li souřadnice průsečíku hlavní osy s plochou vztahem

$$x_j = Ra_j$$

kde  $R$  je délka příslušné tzv. hlavní poloosy, dostaneme dosazením do vztahu pro  $k$ -tou složku normály směrové kosiny normály v tomto průsečíku

$$2RS_{kj}a_j$$

a podle definice musí tento výraz být úměrný  $k$ -tému směrovému kosinu tohoto hlavního směru, tj. musí

$$S_{kj}a_j = \lambda a_k$$

kde  $\lambda$  je faktor úměrnosti, do něhož jsme zahrnuli i konstantní výraz  $1/2R$ . Tuto rovnici můžeme přepsat ve tvaru

$$(S_{kj} - \delta_{kj}\lambda) a_j = 0. \quad (\text{A.1.19})$$

To je soustava rovnic pro určení hlavních směrů kvadratické plochy dané rovnicí (A.1.18). Podmínka existence řešení je

$$\begin{vmatrix} S_{11} - \lambda & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} - \lambda & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{A.1.20})$$

což je kubická tzv. *sekulární rovnice* pro  $\lambda$ . Jsou-li  $S_{kj}$  reálné, jsou všechny tři kořeny reálné; příslušné směry jsou vzájemně kolmé. Označme kořeny  $\lambda_1 = S_1$ ,  $\lambda_2 = S_2$ ,  $\lambda_3 = S_3$ . Položíme-li do směrů hlavních os nové souřadnicové osy, budou směrové kosiny těchto os

$$\begin{array}{lll} a_1^{(1)} = 1 & a_2^{(1)} = 0 & a_3^{(1)} = 0 \\ a_1^{(2)} = 0 & a_2^{(2)} = 1 & a_3^{(2)} = 0 \\ a_1^{(3)} = 0 & a_2^{(3)} = 0 & a_3^{(3)} = 1 \end{array}$$

a složky tenzoru

$$S_{11} = S_1, \quad S_{22} = S_2, \quad S_{33} = S_3, \quad S_{12} = S_{23} = S_{31} = 0$$

jsou tzv. *hlavní (charakteristické) složky* tenzoru  $S_{kj}$ . Z matematického hlediska jde o *vlastní hodnoty* matice  $S_{kj}$  nazývané někdy také jejími *vlastními čísly*.

Protože nalevo v (A.1.18) je invariant, musí být sekulární rovnice (A.1.20) stejná v každé soustavě, speciálně musí být (A.1.20) identická s rovnicí

$$\begin{vmatrix} S_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & S_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & S_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Rozepsáním najdeme

$$-\lambda^3 + \Lambda_1 \lambda^2 - \Lambda_2 \lambda + \Lambda_3 = 0,$$

kde

$$\Lambda_1 = S_1 + S_2 + S_3 = S_{11} + S_{12} + S_{13} \quad (\text{A.1.21a})$$

$$\Lambda_2 = S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1 = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{22} & S_{23} \\ S_{23} & S_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{11} & S_{13} \\ S_{13} & S_{33} \end{vmatrix} \quad (\text{A.1.21b})$$

$$\Lambda_3 = S_1 S_2 S_3 = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} \quad (\text{A.1.21c})$$

jsou základní invarianty symetrického tenzoru  $S_{jk}$ .

### A.1.4 Izotropní tenzory

nazýváme takové tenzory, které se při transformaci reprodukují, tj. jejich složky jsou stejné před i po transformaci. Izotropním tenzorem 2. řádu je *Kroneckerovo delta*  $\delta_{ij}$  (*Kroneckerův tenzor*); platí

$$\delta'_{ij} = a_{ik}a_{jl}\delta_{kl} = a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}.$$

Levi-Civitův tenzor  $\epsilon_{ijk}$  se transformuje podle zákona

$$\begin{aligned} \epsilon'_{ijk} &= a_{il}a_{jm}a_{kn}\epsilon_{lmn} = \\ &= a_{i1}(a_{j2}a_{k3} - a_{j3}a_{k2}) + a_{i2}(a_{j3}a_{k1} - a_{j1}a_{k3}) + a_{i3}(a_{j1}a_{k2} - a_{j2}a_{k1}) = \\ &= \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Determinant napravo se chová při vlastních transformacích jako  $\epsilon_{ijk}$ , při nevlastních jako  $-\epsilon_{ijk}$ , takže lze psát

$$\epsilon'_{ijk} = D\epsilon_{ijk}. \quad (\text{A.1.22})$$

Levi-Civitův tenzor se tedy chová při vlastních transformacích jako izotropní tenzor, při nevlastních se reprodukuje s opačným znaménkem. Izotropní tenzor 4. řádu získáme lineární kombinací tří možných typů součinů Kroneckerových tenzorů; píšeme

$$\zeta_{ijkl} = A\delta_{ij}\delta_{kl} + B\delta_{ik}\delta_{jl} + C\delta_{il}\delta_{jk}, \quad (\text{A.1.23})$$

kde  $A, B, C$  jsou skaláry.

Izotropní tenzor 6. řádu je tenzor  $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}$ . Přepíšeme jej pomocí (A.1.22). Dostaneme

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} &= \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{l1} & a_{l2} & a_{l3} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \\ &= \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km}. \end{aligned}$$

Zúžením tohoto tenzoru v indexech  $k, n$  dostaneme významný vzorec

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}, \quad (\text{A.1.24a})$$

který je často používán. Díky symetriím Levi-Civitova tenzoru jej lze přepsat i v jiném užitečném tvaru tvaru

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}. \quad (\text{A.1.24b})$$

Dalším úžněním (A.1.24a) pak získáme vztahy

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk} \equiv \epsilon_{ijk}\epsilon_{klj} = 2\delta_{il}, \quad (\text{A.1.25})$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6, \quad (\text{A.1.26})$$

neboť v trojrozměrném případě platí

$$\delta_{ii} = \sum_{i=1}^3 \delta_{ii} = 1 + 1 + 1 = 3. \quad (\text{A.1.27})$$

## A.2 Helmholtzova věta

Uvažujme vektorové pole  $\mathbf{F}$ ; nechť

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \equiv \text{div } \mathbf{F} = \varrho(x_1, x_2, x_3) \quad (\text{A.2.1})$$

$$\nabla \times \mathbf{F} \equiv \text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{b}(x_1, x_2, x_3). \quad (\text{A.2.2})$$

Helmholtzova věta tvrdí, že  $\mathbf{F}$  lze vyjádřit jako součet dvou vektorových polí

$$\mathbf{F} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$$

pro něž platí

$$\nabla \cdot \mathbf{X} \equiv \text{div } \mathbf{X} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{Y} \equiv \text{rot } \mathbf{Y} = 0.$$

Pole  $\mathbf{X}$  nazýváme *nezřídlové*, pole  $\mathbf{Y}$  *nevírové*.

*Důkaz:*  
 Položme

$$\mathbf{X} = \nabla \times \mathbf{A} \equiv \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{Y} = -\nabla \varphi \equiv -\text{grad } \varphi;$$

vektorové pole  $\mathbf{A}$  není určeno jednoznačně. Pak

$$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \varphi \equiv \text{rot } \mathbf{A} - \text{grad } \varphi. \quad (\text{A.2.3})$$

Věta bude dokázána, jestliže se nám podaří určit  $\mathbf{A}$  a  $\varphi$ . Aplikace operace divergence na (A.2.3) dává s použitím (A.2.1)

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -\nabla \cdot (\nabla \varphi) \equiv -\text{div grad } \varphi = -\Delta \varphi = \varrho(x_1, x_2, x_3); \quad (\text{A.2.4})$$

aplikací rotace na (A.2.3) s přihlédnutím k (A.2.2) dostaneme

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv \text{rot rot } \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = \mathbf{b}(x_1, x_2, x_3). \quad (\text{A.2.5})$$

Protože  $\mathbf{A}$  nebylo určeno jednoznačně můžeme zavést další podmínku  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  takže

$$-\Delta \mathbf{A} = \mathbf{b}(x_1, x_2, x_3). \quad (\text{A.2.6})$$

Pole  $\varphi$  a  $\mathbf{A}$  tedy můžeme určit z Poissonovy rovnice (A.2.4) resp. (A.2.6). V teorii diferenciálních rovnic se dokazuje, že tyto rovnice mají řešení, takže též  $\varphi$  a  $\mathbf{A}$  existují a věta je dokázána.

## Literatura k příloze A

- [1] Arnold V.I.: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, New York–Berlin–Heidelberg 1997.
- [2] Bajer J.: *Mechanika 1*. PřF UP Olomouc 2004.
- [3] Bajer J.: *Mechanika 2*. PřF UP Olomouc 2004.
- [4] Bajer J.: *Mechanika 3*. PřF UP Olomouc 2006.
- [5] Bartsch H.J.: *Matematické vzorce*. SNTL, Praha 1984.
- [6] Brdička M., Hladík A.: *Teoretická mechanika*. Academia, Praha 1987.
- [7] Brdička M., Samek L., Sopko B.: *Mechanika kontinua*. Academia, Praha 2005.
- [8] Čechová M., Marková L.: *Proseminář z matematiky*. UP Olomouc 1990.
- [9] Čechová M., Vyšín I.: *Teorie elektromagnetického pole*. UP Olomouc 1998.
- [10] Elsgolc L.E.: *Variační počet*. SNTL, Praha 1965.
- [11] Fecko M.: *Diferenciální geometria a Lieove grupy pre fyzikov*. Iris, Bratislava 2004.
- [12] Horský J., Novotný J., Štefaník M.: *Mechanika ve fyzice*. Academia, Praha 2001.
- [13] Kay D.C.: *Schaum's outlines: Tensor calculus*. McGraw-Hill, New York 1988.
- [14] Kvasnica J.: *Matematický aparát fyziky*. Academia, Praha 1989.
- [15] Podolský J.: „Teoretická mechanika v jazyce diferenciální geometrie“, 2006. Ke stažení na adrese <http://utf.mff.cuni.cz/vyuka/TMF069/>.
- [16] Rektorys K. a kol.: *Přehled užití matematiky I, II*. SNTL, Praha 1988.

## Příloha B

### Anglicko-český slovníček vybraných pojmů

Připojujeme malý slovníček často užívaných výrazů, s nimiž se čtenář setká v anglicky psané literatuře a na internetu. Výslovnost je uvedena podle slovníku [1].

<i>anglický termín</i>	<i>výslovnost</i>	<i>český překlad</i>
acceleration	ək,selə'reiʃən	zryhlení
action	'æksən	akce, působení
body	bodi	těleso
bracket	'brækɪt	závorka
buoyancy	boiənsi	vztlak
classical	klæsikəl	klasický
continuous	kən'tinjuəs	spojitý
continuum (mn. č. continua)	kən'tinjuəm (kən'tinjuə)	kontinuum
constraint	kən'streɪnt	vazba, omezení
curl	kə:l	rotace (vektorového pole)
curve	kə:v	křivka
derivation	ˌderi'veiʃən	derivace
derivative	di'rivətɪv	derivace, derivovaná funkce
divergence	daɪ'və:dʒəns	divergence
dynamics	daɪ'næmɪk	dynamika
energy	'enədʒi	energie
equation	i'kweiʃən	rovnice
equation of motion	i'kweiʃən of mouʃən	pohybová rovnice
fluid	'flu:ɪd	tekutina
force	fɔ:rs	síla
formula (mn. č. formulae)	'fo:mju:lə	vzorec, vztah, předpis
friction	friksən	tření
gyroscope	dʒaɪrəskəʊp	setrvačnick
identity	aɪ'dentɪti	totožnost, identita
integral	ɪntɪgrəl	integrál
law	lo:	zákon
liquid	likwɪd	kapalina
loop	lu:p	smyčka
map	mæp	zobrazení, mapa
matrix (mn. č. matrices)	meɪtrɪks (meɪtrɪsɪ:z)	matice
motion	mouʃən	pohyb
orbit	o:ɪt	dráha (oběžná)
particle	pɑ:tɪkl	částice
path	pɑ:θ	cesta, dráha
point	poɪnt	bod
power	'paʊə	výkon, mocnina
rigid	rɪdʒɪd	tuhý
rigid body	rɪdʒɪd bodi	tuhé těleso
root	ru:t	kořen (rovnice), odmocnina

<i>anglický termín</i>	<i>výslovnost</i>	<i>český překlad</i>
rule	ru:l	pravidlo
sum	sam	součet, suma
summation	sameišən	sčítání
summation rule	sameišən ru:l	sčítací pravidlo
solution	sə'lu:šən	řešení
stream	stri:m	proud
stream line	stri:m lain	proudová čára, proudnice
tangent	tænžənt	tečna
tangential	tænženžəl	tečný
tension	tenšən	napětí
theorem	θiərəm	teorém, věta (mat., fyz. apod.)
theoretical	θiə'rətikəl	teoretický
top	top	káča, vlček
trajectory	trædžiktəri	trajektorie, dráha
transformation	trænsfə'meišən	tranasformace
velocity	vəlosity	rychlost
vortex	vo:teks	vír
vorticity	vo:tisity	víření, vířivost

## Literatura k příloze B

- [1] Hais K., Hodek B.: *Velký anglicko-český slovník I.–IV.* Academia, Praha 1991-1993.



# Rejstřík

---

- akce
  - Hamiltonova 87
  - zkrácená 89
- apex 77
- apsidální vzdálenosti 20
- axiom
  - nezávislosti silového působení 7
- axiomy
  - mechaniky (základní) 6
- bod
  - obratu 14, 20
- Cauchyho kvadratika napětí 109
- circulace
  - rychlosti 131
- Clausiusův viriál 46
- čáry
  - souřadnicové 3
  - vírové 131
- číslo
  - Ciolkovského 48
  - Froudeovo 143
  - Reynoldsovo 142, 143
- deformace
  - malé 111
- degenerovaný stav *viz* stav degenerovaný
- derivace tenzoru 148
- dilatace
  - kubická *viz* dilatace objemová
  - objemová 112
- divergence (vektorového pole) 148
- Einsteinovo sumační pravidlo 146
- elastické kmity a vlny 119
- elipsoid
  - deformace 111, 112
- elipsoid setrvačnosti 72
- energie
  - kinetická 10
    - – soustavy částic 45
  - mechanická
    - – celková 11
  - potenciální 10
    - – celková soustavy 45
    - – částice 10
    - – soustavy ve vnějších polích 45
    - – vnitřních sil 45
- excentricita *viz* výstřednost
- fázový prostor *viz* prostor fázový
- funkce
  - Eulerovsky homogenní 47
  - Hamiltonova 84
  - harmonická 116
  - hlavní Hamiltonova 93
  - charakteristická Hamiltonova *viz* akce zkrácená, 94
  - Lagrangeova 57
  - proudová 137
  - Rayleighova dissipativní 64
  - Routhova 86
  - tlaková 133
  - vlastní 123
  - vytvářející kanonické transformace 91
- gradient (skalárního pole) 148
- hamiltonián *viz* funkce Hamiltonova
- hlavní osy setrvačnosti 72
- hlavní složky tenzoru 150
- hlavní směry
  - deformace 112
- hlavní směry deformace 111
- hlavní směry napětí 109
- hmotnost
  - redukovaná 61
- hmotný střed 43
- hodnota
  - vlastní 122
- hodograf 2
- hybnost
  - částice 9
  - soustavy částic 44
  - zobeněná 60
- charakteristické složky tenzoru *viz* hlavní složky tenzoru
- chvění *viz* vlnění stojaté
- integrál
  - akce 87
  - energie 59
  - Poincarého 98
- integrál pohybu
  - klasický 46
  - první 8
- intenzita
  - vírové trubice *viz* intenzita víru
- intenzita víru 131
- Izotropními 151
- jakobián 3

- jednoduchý tah 116
- jednoduchý tlak 116
- kmity
  - malé
    - – stlačitelné tekutiny 135
  - torzní 74
- koeficienty
  - Laméovy 114
- konfigurace soustavy 81
- konfigurační prostor 81
- konfigurační trajektorie 81
- konstanta
  - Gaussova 21
  - gravitační 21
  - Poissonova 115
- kontinuum 107
- Kroneckerovo delta 151
- křivka
  - balistická 34
- Lagrangeovu funkci 57
- Lagrangeovými souřadnicemi 55
- lagranžian *viz* funkce Lagrangeova
- Laméovy koeficienty 4
- metoda
  - Eulerova 129
  - Lagrangeova 129
- modul
  - Youngův 115
- moment
  - deviační 72
  - hybnosti 9
    - – orbitální 47
    - – soustavy částic 44
    - – spinový 47
  - impulsu *viz* moment hybnosti
  - kinetický *viz* moment hybnosti
  - setrvačnosti 72
    - – hlavní 72
  - síly 9
- moment setrvačnosti
  - polární 117
- napětí
  - normálová 108
  - tečná 108
- násobení tenzorů 147
- nevířivý pohyb 130
- nora *viz* propad
- nutace 78
- ohnisko kuželosečky 19
- paradoxon
  - d'Alembertovo 139
- parametr
  - kuželosečky 19
- plochy
  - souřadnicové 3
- podmínka
  - rovnováhy kontinua 108
- podmínky
  - kompatibility deformací 113
- pohyb
  - librační 14
  - limitační 14
  - nutační *viz* nutace
  - periodický 14
  - precesní *viz* precese
  - vázaný 20
- Poincarého integrál *viz* integrál Poincarého
- pokus
  - myšlenkový Stevinův 129
- pole
  - konzervativní 12
  - nevírové 151
  - nezřídlové 151
  - silové 10
    - – potenciálové 10
  - skalární 148
  - tenzorové 148
  - vektorové 148
  - vírové 131
- poloosa
  - hlavní 19
  - vedlejší 19
- potenciál
  - efektivní 20
  - kinetický *viz* funkce Lagrangeova
  - komplexní 137
  - rychlostní 130
  - zobecněný 66
- práce
  - síly 10
- pravidlo
  - sumační Einsteinovo *viz* Einsteinovo sumační pravidlo
- precese 78
  - regulární 75
- princip
  - d'Alembertův 43
  - d'Alembertův-Lagrangeův 54
  - diferenciální 81
  - Gaussův 58
  - Gibbsův *viz* princip Gaussův
  - Hamiltonův 81
  - integrální 81
  - Jacobiho 89
  - Jourdainův 58
  - Maupertuisův 89
  - relativity 105
  - superpozice 7
  - virtuální práce 57
  - virtuální práce 54
- princip d'Alembertův 54
- princip virtuální práce 54
- profil
  - Žukovského 140
- proměnné akce – úhel 97
- propad 136

- prostor
  - fázový 83
  - konfigurační *viz* konfigurační prostor
- proudění
  - laminární 142
  - nevířivé 134
  - turbulentní 142
- proudnice 130
- proudová trubice *viz* trubice proudová
- proudové vlákno *viz* vlákno proudové
- přímka
  - řídicí 19
  - uzlová 75
- pseudovektor *viz* vektor axiální
  
- rázy 65
- reakce vazby 53
- relace ortogonálnosti 146
- relativní prodloužení 111
- rotace (vektorového pole) 148
- rovnice
  - Bernoulliho 133
    - – časová 134
  - biharmonická 116
  - Cauchyho-Riemannovy 137
  - Ciolkovského *viz* Ciolkovského vzorec
  - Eulerovy
    - – Gromkeho-Lambova úprava 133
    - – hydrodynamické 131
    - – kinematické 76
  - Eulerovy dynamické 73
  - Eulerovy-Lagrangeovy 83
  - Hamilton-Jacobiho 93
  - Hamiltonova-Jacobiho 89
  - Hamiltonovy kanonické 84
  - kontinuity 131
  - Lagrangeovy
    - – 1. druhu 55
    - – 2. druhu 56
  - Laplaceova 116, 134
  - Mešcherského 48
  - Navierova-Stokesova 141
  - pohybová
    - – vazkých tekutin 141
  - pohybové
    - – kinematické 2
  - Poissonova 152
  - rovnováhy tekutin 127
  - Saint-Venantovy 113
  - sekulární 150
  - struny 121
  - vazby 52
  - vlnová 121
- rychlost
  - absolutní 79
  - částice 3
  - plošná 4
  - relativní 79
  - sektoriální 4
  - úhlová 71
  - unášivá 79
  - zvuku 134
- rychlostní potenciál *viz* potenciál rychlostní
  
- setrvačnick
  - spící 78
- síla
  - centrální 9, 17–24
  - d'Alembertova 43
  - disipativní 11
  - externí *viz* síla vnější
  - gyroskopická 11
  - interní *viz* síla vnitřní
  - nepravá 43
  - potenciálová 10
    - – nestacionární 11
  - pravá 43
  - reaktivní 48
  - setrvačná 43
  - vnější 42
  - vnitřní 42
  - Žukovského *viz* vztlak
- síly
  - objemové 107
  - plošné 107
- slučování tenzorů 147
- smyk 116
- smykový úhel *viz* úhel smykový
- součín
  - vektorový *viz* vektorový součín
- souřadnice
  - cyklická 60
  - Lagrangeovy *viz* souřadnice zobecněné
  - zobecněné 55
- souřadnice:normální 63
- soustava
  - holonomní 52
  - izolovaná 46
  - souřadnic 1
    - – ortogonální 3
  - vztažná *viz* vztažná soustava
- stav
  - degenerovaný 125
- stupeň volnosti 55
  
- tah
  - jednoduchý 110
- tekutina
  - nestlačitelná 128, 132
  - vazká 140
- tekutiny
  - baroklinní 132
  - barotropní 127, 132
- těleso:elastické 114
- tenzor 147
  - antisymetrický 147, 149
  - elastických modulů 114
  - izotropní 151
  - konečné deformace 111
  - Kroneckerův *viz* Kroneckerovo delta
  - Levi-Civitův 148, 151

- malé deformace 111
- napětí 108
- rotace 113
- rychlosti deformace 130
- rychlosti rotace 130
- setrvačnosti 71
- symetrický 147, 149
- třecích napětí 140
- teorém
  - viriálový *viz* věta viriálová
- teorie pružnosti
  - lineární 114
- tlak
  - homogenní 110
  - hydrostatický 128
  - jednoduchý 110
  - v tekutině 127
- torze 116
- trajektorie
  - konfigurační *viz* konfigurační trajektorie
- trajektorie částice 2
- transfoemace
  - identická 92
- transformace
  - kanonické 90
  - kanonické infinitezimální 101
  - Legendrova 83
  - otočení 147
  - vlastní 147
  - zrcadlení 147
- trubice
  - proudová 130
  - vírová 131
- tuhost v torzi 74, 117
- účinný průřez 23
- úhel
  - smykový 112
  - torzní 117
- úloha
  - Ciolkovského 48
  - Keplerova 21
  - variační 83
- úžení tenzorů 147
- variace 81
  - úplná 88
- vazba
  - diferenciální *viz* vazba kinematická
  - geometrická 52
  - holonomní 52
  - ideální 54
  - kinematická 52
  - konečná *viz* vazba geometrická
  - nestacionární 52
  - rheonomní *viz* vazba nestacionární
  - skleronomní *viz* vazba stacionární
  - stacionární 52
- vazby
  - jednostranné 52
  - neudržující *viz* vazby jednostranné
  - udržující 52, *viz* vazby dvoustranné
- vazká
  - tekutina *viz* tekutina vazká
- vazkost
  - druhá 141
  - dynamická 141
  - kinematická 141
- vektor 147
  - axiální 149
  - Laplaceův-Rungeův-Lenzův 22
  - napětí 107
  - polohový 1
  - rychlosti rotace 130
  - úhlové rychlosti *viz* rychlost úhlová
- vektorový součin 148
- věta
  - Gaussova 148
  - Helmholtzova 151
  - Lagrangeova-Dirichletova 62
  - Liouvilleova 99
  - o hybnosti 9, 132
    - – soustavy částic 44
  - o kinetickém momentu *viz* v. o momentu hybnosti soustavy částic
  - o momentu hybnosti
    - – soustavy částic 44
  - Steinerova 73
  - Stokesova 149
  - viriálová 46
- vír
  - rychlosti 130
- vírová
  - trubice *viz* trubice vírové
- vírové
  - čáry *viz* čáry vírové
  - pole *viz* pole vírové
- virtuální posunutí 53
- viskozita *viz* vazkost
- vlákno
  - proudové 130
- vlastní čísla *viz* vlastní hodnoty
- vlastní hodnoty 150
- vlna
  - longitudinální 120
  - podélná *viz* longitudinální
  - příčná *viz* vlna transverzální
  - transverzální 120
- vlnění
  - longitudinální 135
  - podélné *viz* vlnění longitudinální
  - stojaté 121
- vrh
  - svislý 28–30
    - – v odporujícím prostředí 30–31
  - šikmý
    - – v neodporujícím prostředí 15–16
    - – v odporujícím prostředí 16–34
- vrstva
  - mezní 140
- výkon

- okamžitý 10
- výstřednost 19
  - číselná 19
- vzorec
  - barometrický 128
  - Binetův 18
  - Ciolkovského 48
  - Königův 47–48
  - Rutherfordův 23
- vztažná soustava 1
  - hmotného středu 47
  - inerciální 1
- vztlak 140
  - hydrodynamický *viz* vztlak
  
- základní úloha dynamiky
  - druhá 7
  - první 7
- zákon
  - akce a reakce 6
  - Archimédův 129
  - Boyleův-Mariottův 128
  - Hagenův-Poiseuilleův *viz* zákon Poiseuilleův
  - Hookův
    - – elementární 115
    - – pro isotropní těleso 114
    - – zobecněný 114
  - Navierův-Stokesův 140
  - Newtonův gravitační 21
  - Pascalův 129
  - Poiseuilleův 142
  - setrvačnosti 6
  - síly 6
  - zachování
    - – energie 104
    - – hybnosti 9, 46, 104
    - – mechanické energie 12
    - – momentu hybnosti 9, 46, 104
  - změny
    - – celkové mechanické energie 45
    - – hybnosti 9
- zákony Keplerovy 21
- závorky
  - Lagrangeovy
    - – fundamentální 100
  - Poissonovy 100
- závorky:Lagrangeovy 100
- zdroj
  - v proudící tekutině 136
- zobecněná hybnost 60
- zrychlení
  - absolutní 79
  - Coriolisovo 79
  - částice 5
  - individuální 130
  - lokální 130
  - normálové 5
  - přirozené složky 5
  - relativní 79
  - tečné 5
- unášíé 79
- zřídlo 136