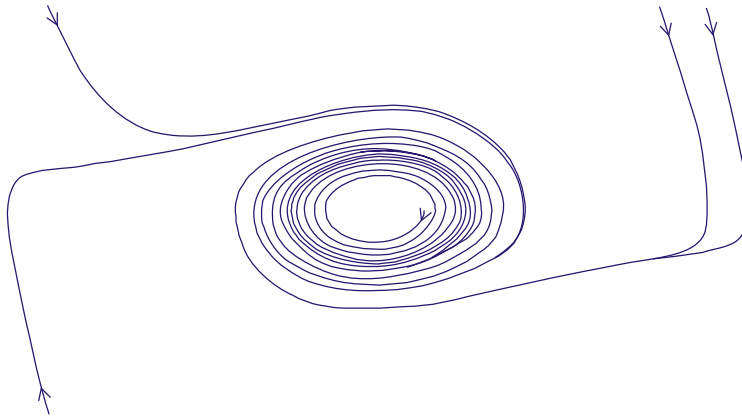
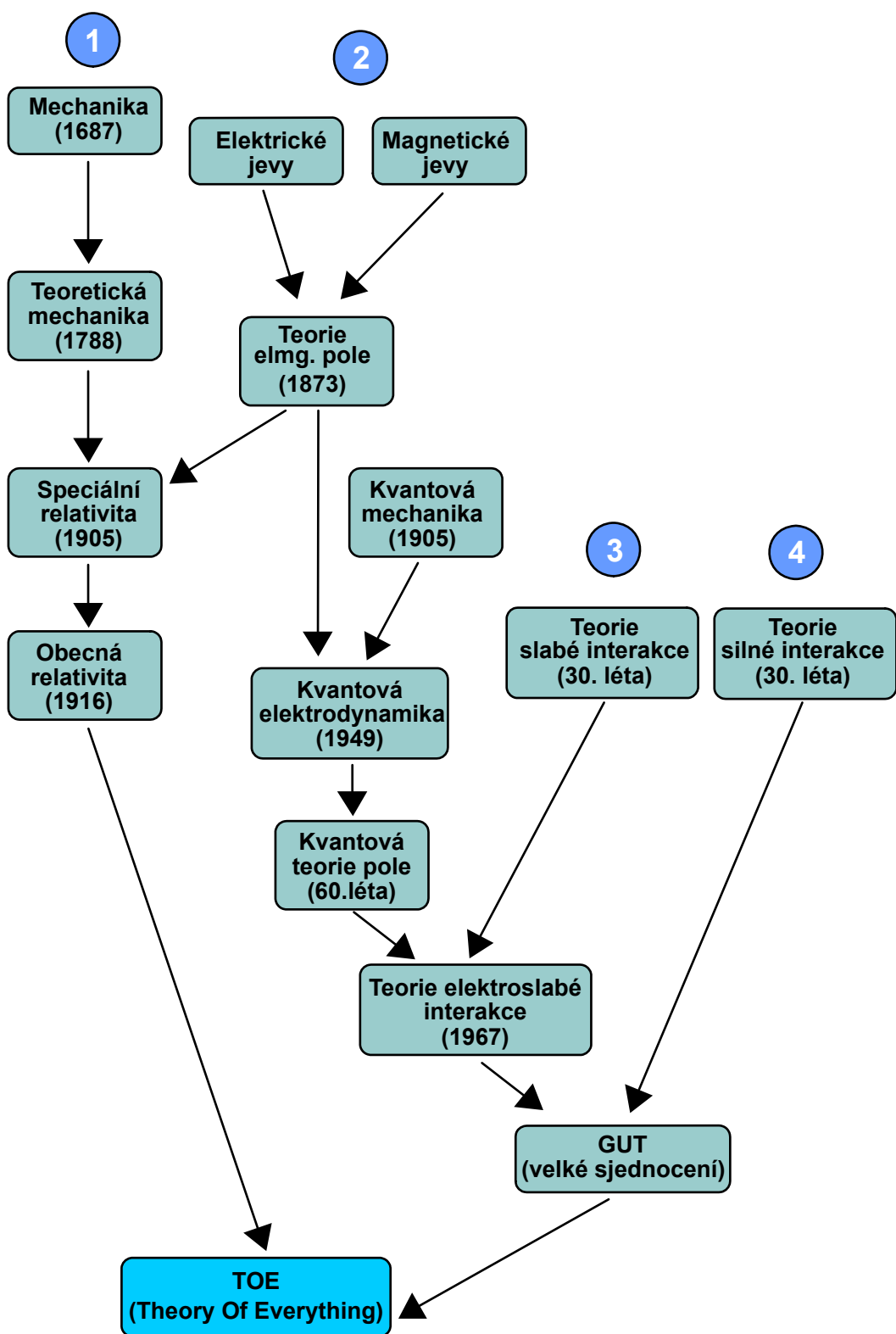


# *TF1: TEORETICKÁ MECHANIKA*



**STUDIJNÍ TEXT PRO DOKTORSKÉ STUDIUM**

**PETR KULHÁNEK**



# OBSAH

<b>1. TEORETICKÁ MECHANIKA</b>	<b>7</b>
<b>1.1 INTEGRÁLNÍ PRINCIPY MECHANIKY</b>	<b>7</b>
1.1.1 ZÁKLADNÍ POJMY Z MECHANIKY	7
1.1.2 INTEGRÁLNÍ PRINCIPY	8
1.1.3 HAMILTONŮV PRINCIP NEJMENŠÍ AKCE	9
1.1.4 LAGRANGEOVY ROVNICE	10
1.1.5 JEDNODUCHÉ PŘÍKLADY	12
1.1.6 DALŠÍ PŘÍKLADY	13
<b>1.2 ZÁKONY ZACHOVÁNÍ V PŘÍRODĚ</b>	<b>16</b>
1.2.1 TEORÉM EMMY NOETHEROVÉ	16
1.2.2 ZÁKON ZACHOVÁNÍ HYBNOSTI	16
1.2.3 ZÁKON ZACHOVÁNÍ ENERGIE	18
<b>1.3 HAMILTONOVY KANONICKÉ ROVNICE</b>	<b>21</b>
1.3.1 HAMILTONOVY ROVNICE	21
1.3.2 HARMONICKÝ OSCILÁTOR	23
1.3.3 POISSONOVA FORMULACE HAMILTONOVÝCH ROVNIC	26
1.3.4 NUMERICKÉ ŘEŠENÍ HAMILTONOVÝCH ROVNIC	27
<b>1.4 VYBRANÉ ÚLOHY Z TEORETICKÉ MECHANIKY</b>	<b>29</b>
1.4.1 POHYB NABITÉ ČÁSTICE V ELEKTROMAGNETICKÉM POLI	29
1.4.2 POHYB V ROTUJÍCÍ SOUSTAVĚ	32
1.4.3 PROBLÉM DVOU TĚLES, KEPLEROVA ÚLOHA	36
1.4.4 LAGRANGEOVY BODY	41
1.4.5 DISIPACE ENERGIE	45
1.4.6 INVERZNÍ ÚLOHA	47
1.4.7 ADIABATICKÉ INVARIANTY	50
1.4.8 KANONICKÉ TRANSFORMACE	53
<b>1.5 NELINEÁRNÍ DYNAMICKÉ SYSTÉMY</b>	<b>56</b>
1.5.1 MATICE STABILITY A FÁZOVÝ PORTRÉT SYSTÉMU	58
1.5.2 METODA POTENCIÁLU	62
1.5.3 BIFURKACE	64
1.5.4 LJAPUNOVSKÁ STABILITA, LIMITNÍ CYKLUS, ATRAKTOR	66
1.5.5 EVOLUČNÍ ROVNICE	73
<b>1.6 LAGRANGEOVY ROVNICE PRO POLNÍ PROBLÉMY</b>	<b>77</b>
1.6.1 LAGRANGEOVY ROVNICE, SKALÁRNÍ POLE	77
1.6.2 KANONICKY SDRUŽENÉ POLE	80
1.6.3 MAXWELLOVY ROVNICE, ELEKTROMAGNETICKÉ POLE	81
<b>DODATEK A – EINSTEINOVA SUMAČNÍ KONVENCE</b>	<b>86</b>
A1 EINSTEINOVA SUMAČNÍ KONVENCE	86
A2 DÉLKOVÝ ELEMENT	88
<b>DODATEK B – LIEOVA ALGEBRA</b>	<b>90</b>
B1 VEKTOROVÝ PROSTOR	90
B2 LIEOVA ALGEBRA	90
B3 STRUKTURNÍ KOEFICIENTY LIEOVY ALGEBRY	91

<b>DODATEK C – TENZORY</b>	<b>93</b>
C1 KOVARIANTNÍ A KONTRAVARIANTNÍ INDEXY	93
C2 SKALÁRNÍ SOUČIN, ZVYŠOVÁNÍ A SNIŽOVÁNÍ INDEXŮ	94
C3 ČTYŘVEKTORY, MINKOWSKÉHO METRIKA	95
<b>DODATEK D – KUŽELOSEČKY</b>	<b>97</b>
D1 ELIPSA	97
D2 HYPERBOLA	98
D3 PARABOLA	98
<b>REJSTŘÍK OSOBNOSTÍ</b>	<b>100</b>
<b>LITERATURA</b>	<b>104</b>

## PŘEDMLUVA

Tento text představuje sylabus přednášky „Teoretická fyzika 1“. Důraz je kladen zejména na pochopení fyzikálních zákonitostí a jejich matematického popisu. Potřebná matematika je přesunuta do dodatků. Tyto kapitoly je třeba chápat jen jako nutný přehled, který si neklade nároky na matematickou přesnost ani úplnost. Text je první částí čtyřdílného sylabu: 1. teoretická mechanika, 2. kvantová teorie, 3. statistická fyzika, 4. teorie plazmatu.

Fyzika 20. století je poznamenána vznikem dvou oddělených fyzikálních směrů – *obecné teorie relativity* a *kvantové teorie*. Každý z těchto směrů popisuje svým způsobem pojem síly ve fyzice. V současné době známe čtyři silové interakce – gravitační, elektromagnetickou, silnou a slabou.

**Obecná teorie relativity** (geometrická teorie gravitace) popisuje gravitační interakci za pomoci zakřivené geometrie prostoru a času:

- *každé těleso svou přítomností zakřivuje prostoročas kolem sebe;*
- *každé těleso se v tomto zakřiveném prostoročase pohybuje po nejrovnějších možných drahách – tzv. geodetikách (reprezentují skutečné trajektorie gravitačně ovládaných těles).*

**Kvantová teorie pole** s úspěchem popisuje interakci elektromagnetickou, silnou a slabou za pomoci intermediálních (výměnných) částic:

*[1] Každá částice kolem sebe vysílá oblak intermediálních částic, které si může vyměňovat s ostatními částicemi a tím mezi nimi dochází k vzájemnému silovému působení.*

Tato výměna nespĺňuje Heisenbergovy relace neurčitosti, proto je nepozorovatelná a příslušné výměnné částice nazýváme při procesu interakce virtuální. Intermediální částice jsou :

elektromagnetická interakce	foton
silná interakce	gluony (8 druhů)
slabá interakce	$W^+$ , $W^-$ , $Z^0$ .

Pro gravitační interakci předpokládá kvantová teorie existenci zatím hypotetických intermediálních částic: gravitonů.

Elektromagnetická interakce působí jen na částice s elektrickým nábojem, silná interakce působí na hadrony (*hadros* = silný) – hadrony dělíme na mezony složené z kvarku a antikvarku a baryony složené ze tří kvarků. Slabá interakce působí na leptony a hadrony. Gravitační interakce působí na všechny částice bez výjimky.

V průběhu let dochází ve fyzice ke vzniku mnoha nových odvětví, fyzika se diferencuje. Současně však probíhá integrační proces – snaha o jednotný popis fyzikálních jevů. Tak byla v minulém století pochopena společná podstata jevů elektrických a magnetických (Ørsted, Faraday, Maxwell) a vznikla teorie elektromagnetického pole. Po vzniku kvantové teorie se objevila příslušná kvantová analogie – kvantová elektrodynamika a kvantová teorie elektromagnetického pole. V době relativně nedávné se podařilo „spojit“ elektromagnetickou a slabou interakci v teorii elektroslabé interakce (Weinberg, Salam). Nyní probíhají intenzivní pokusy připojit k teorii elektroslabé interakce ještě interakci silnou (tzv. velké sjednocení) a gravitační (teorie všeho). Následuje přehled významných objevů a událostí ve fyzice, které přispěly k tomuto integračnímu procesu.

## INTEGRAČNÍ TENDENCE VE FYZICE

Isaac Newton	(1643–1727)	základní zákony optiky a mechaniky (1676)
Joseph Louis Lagrange	(1736–1813)	analytická mechanika (1788)
Hans Christian Ørsted	(1777–1851)	elektrický proud má magnetické účinky (1820)
Michael Faraday	(1791–1867)	jev elektromagnetické indukce (1831)
James Clerk Maxwell	(1831–1879)	teorie elektromagnetického pole (1873)
Max Planck	(1858–1947)	záření absolutně černého tělesa (1901)
Albert Einstein	(1879–1955)	fotoelektrický jev (1905) speciální teorie relativity (1905) obecná teorie relativity (1916)
Niels Bohr	(1885–1962)	planetární model atomu (1913)
Louis de Broglie	(1892–1987)	dualismus vln a částic
Erwin Schrödinger	(1887–1961)	vlnová kvantová mechanika (1926)
Wolfgang Pauli	(1900–1958)	teorie spinu - Pauliho rovnice 1. teorie slabé interakce (30. léta)
Paul Adrien M. Dirac	(1900–1984)	Diracova rovnice, předpověď pozitronu (1928) kvantová elektrodynamika (1949) spoluautor kvantové teorie pole
Werner Heisenberg	(1901–1976)	maticová kvantová mechanika (1925) relace neurčitosti
Hideki Yukawa	(1907–1981)	1. teorie silné interakce (30. léta)
Richard Philips Feynman	(1918–1988)	spoluautor kvantové teorie pole Feynmanovy diagramy dráhový integrál v kvantové mechanice
Steven Weinberg	(1933)	teorie elektroslabé interakce (1967)
Abdul Salam	(1926)	teorie elektroslabé interakce
Rubbia, Wheeler, Hawking, Thorne, Misner,...		

Sylabus, který se právě chystáte číst je čtvrtým vydáním. V textu přibyla kapitola věnovaná Lagrangeovým rovnicím spojitých systémů, zejména pro elektromagnetické pole. Budu vděčný za všechny připomínky a objevené chyby a nedostatky. Objevíte-li cokoli, co Vám vhání adrenalin do žil, napište mi na adresu: [kulhanek@aldebaran.cz](mailto:kulhanek@aldebaran.cz). Na tuto adresu směřujte i Vaše dotazy a ostatní připomínky. Některé zajímavé informace naleznete na adrese <http://www.aldebaran.cz>. Zde je také možné stáhnout poslední aktuální verzi tohoto sylabu.

Přeji hodně radosti z objevených zákonitostí přírody, pocitu moci, pochopíte-li hloubku úvah Vašich předchůdců a pocitu bezmoci, který Vás bude pohánět kupředu v okamžicích váhání. Těm studentům a pedagogům, kteří zjistí, že na této škole nemají co dělat, blahopřeji k bystrému úsudku a přejí důstojný odchod.

Petr Kulháněk, v Praze 21. 3. 2010

# 1. TEORETICKÁ MECHANIKA

## 1.1 INTEGRÁLNÍ PRINCIPY MECHANIKY

V teoretické mechanice a vlastně v celé teoretické fyzice se používá Einsteinova sumační konvence, pojem diferenciálu a Lagrangeova věta o přírůstku. Pokud s těmito matematickými základy čtenář není seznámen, měl by si nejprve důkladně pročíst Dodatek A.

### 1.1.1 Základní pojmy z mechaniky

*Mechanický systém:* jakákoli soustava částic nebo těles, které se rozhodneme popisovat (elektron, atom, Zeměkoule, planetární systém,...).

*Kartézské souřadnice:* pro souřadnice a síly používáme označení:

$$\mathbf{x} \equiv \mathbf{r} \equiv (x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z), \text{ resp. } \mathbf{F} \equiv (F_1, F_2, F_3) \equiv (F_x, F_y, F_z).$$

Pohybová rovnice hmotného bodu má tvar  $m d^2\mathbf{x}/dt^2 = \mathbf{F}$ .

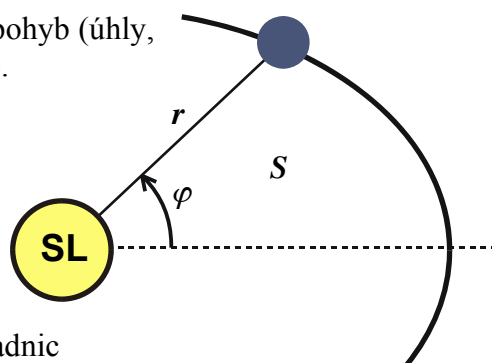
*Zobecněné souřadnice:* jakékoli parametry popisující pohyb (úhly, vzdálenosti, plochy). Označujeme je  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots)$ .

#### Příklad 1: Pohyb planety kolem Slunce

$q_1 = r(t)$  – vzdálenost od Slunce;

$q_2 = \varphi(t)$  – úhel průvodiče a zadané polopřímky;

$q_3 = S(t)$  – plocha opsaná průvodičem.

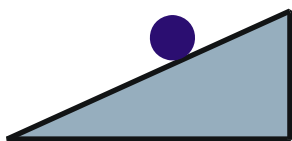


*Zobecněné rychlosti:* časové změny zobecněných souřadnic

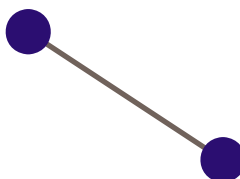
<b>Příklad 2:</b>	$v_r = dr/dt$	radiální rychlost,
	$v_\varphi = d\varphi/dt$	úhlová rychlost,
	$v_S = dS/dt$	plošná rychlost,
	$v_x = dx/dt$	$x$ -ová složka rychlosti.

*Vazby:* těleso nebo některé jeho části se nemusí pohybovat zcela libovolně. Pak říkáme, že v systému jsou vazby. Příklad vazeb je na následujícím obrázku:

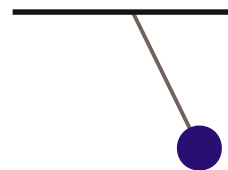
Těleso na nakloněné rovině



Dvě tělesa spojená tyčí



Kyvadlo



*Stupeň volnosti:* počet nezávislých údajů (parametrů), kterými lze zcela popsat pohyb systému (značíme  $f$ ).

<b>Příklad 3:</b>	volný hmotný bod	$f = 3$
	$N$ volných hmotných bodů	$f = 3N$
	hmotný bod na nakloněné rovině	$f = 2$
	2 hmotné body spojené tyčí	$f = 5$
	prostorové kyvadlo	$f = 2$
	rovinné kyvadlo	$f = 1$ .

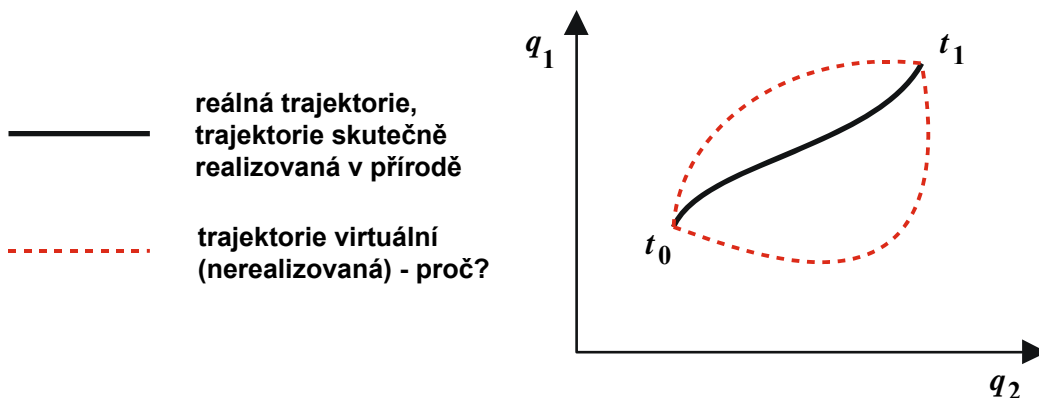
Pro systém  $N$  hmotných bodů s  $R$  vazbami platí  $f = 3N - R$ . Zobecněné souřadnice volíme vždy jako množinu nezávislých parametrů, které zcela popisují systém, tj. je jich právě  $f$ :

$$\mathbf{q} \equiv (q_1, q_2, \dots, q_f).$$

**Konfigurační prostor:**  $f$  – rozměrný prostor, do kterého zobrazujeme hodnoty zobecněných souřadnic. Bod konfiguračního prostoru nazýváme *konfigurací*. Časový vývoj konfigurace systému  $\mathbf{q}(t)$  nazýváme *trajektorie*.

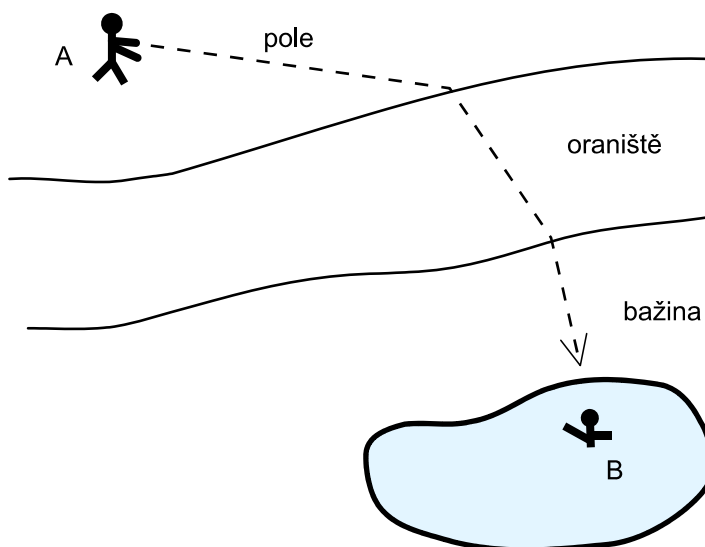
**Stav systému:** v klasické mechanice je v daném čase  $t_0$  stav systému zcela určen konfigurací  $\mathbf{q} \equiv (q_1, q_2, \dots, q_f)$  a tendencí (zobecněnými rychlostmi)  $\mathbf{v} \equiv (v_1, v_2, \dots, v_f)$ .

**Reálná a virtuální trajektorie:**



### 1.1.2 Integrální principy

**Příklad 4:** Představme si, že v rybníku se topí člověk. Mezi zachráncem a rybníkem je bažinatý pás, ve kterém se velmi těžko pohybuje, pás oraniště a pole. Zachránce musí volit optimální cestu, aby se k tonoucímu dostal co nejrychleji (takovou cestou nemusí být nejkratší spojnice mezi tonoucím a zachráncem):



Celkový čas, po který se bude pohybovat zachránce, určíme takto:

$$v = \frac{dl}{dt} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{dl}{v} \quad \Rightarrow$$

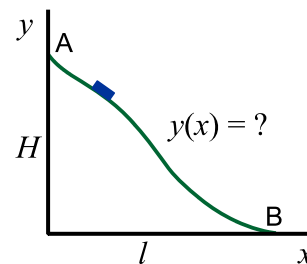
$$T = \int_{t_A}^{t_B} \frac{dl}{v} = \int_{t_A}^{t_B} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{v(x, y)} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(x, y)} dx.$$

Předpokládáme, že známe prostorovou závislost rychlosti  $v(x, y)$ . Ta je dána typem terénu (pole, oraniště, bažina). Nyní hledáme takovou křivku  $y(x)$ , aby předchozí integrál měl minimální hodnotu. Řešením úloh tohoto typu se zabývá variační počet.



**Příklad 5: Brachystochrona**

Řešme následující úlohu. Těleso má klouzat po nakloněné rovině obecného tvaru mezi dvěma body A a B, které jsou v různé výšce. Úkolem je nalézt rovnici tvaru nakloněné roviny tak, aby se těleso do bodu B dostalo za nejkratší čas.



Výpočet je obdobný předchozímu:

$$v = \frac{dl}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dl}{v} \Rightarrow$$

$$T = \int_{t_A}^{t_B} \frac{dl}{v(y)} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{v(y)} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(y)} dx.$$

Rychlost určíme ze zákona zachování energie

$$mgy + \frac{1}{2}mv^2 = mgH$$

Výsledná doba pohybu je

$$T = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(H - y)}} dx. \quad (1.1)$$

Nyní je nutné nalézt křivku  $y(x)$ , pro kterou nabývá integrál (1.1) svého minima – jde opět o typickou úlohu variačního počtu. Dokončení řešení naleznete na konci kapitoly 1.2.3. Variačně lze zformulovat i základní zákony mechaniky, teorie elektromagnetického pole i dalších fyzikálních disciplín. V této kapitole se budeme zabývat jedním z integrálních principů mechaniky – tzv. Hamiltonovým principem.

**1.1.3 Hamiltonův princip nejmenší akce**

Oba dva úvodní příklady vedly na optimalizaci integrálu typu

$$T(x_A, x_B) = \int_{x_A}^{x_B} F(x, y(x), y'(x)) dx. \quad (1.2)$$

Integrand je funkcí nezávislé proměnné  $x$ , hledané funkce  $y(x)$  a její první derivace  $y'(x)$ . Výsledkem optimalizace by měla být hledaná trajektorie či křivka  $y(x)$ . V úvodním příkladu zachránce volil trajektorii tak, aby celkový čas byl nejkratší. Všechny ostatní trajektorie (tzv. virtuální – nerealizované) jsou sice v principu možné, ale zachránce se po nich bude pohybovat delší dobu. Obdobně je tomu v příkladu s klouzajícím tělesem. Integrály výše uvedeného typu se nazývají funkcionály. Funkcionál je zobrazení, při kterém funkci přiřadíme číslo (v našem případě celkový čas).

Základní myšlenka integrálních principů mechaniky je velmi podobná. Ze všech možných trajektorií systému se realizovala jen ta, která je nějakým způsobem výhodnější než ostatní. Hledisko výhodnosti se uvažuje obdobné úvodnímu příkladu, jen je ale nezávislou proměnnou čas, protože hledáme křivku  $\mathbf{q}(t)$ :

*Hamiltonův princip:*

Budeme předpokládat, že existuje funkce času  $t$ , zobecněných souřadnic a jejich prvních derivací (tj. stavu)

$$L(t, q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$$

taková, že ze všech možných závislostí  $q_k(t) = f_k(t)$  se v přírodě realizuje ta, pro kterou má integrál

$$S(t_A, t_B) \equiv \int_{t_A}^{t_B} L(t, q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) dt \quad (1.3)$$

extrém (minimum). Funkci  $L(t, \mathbf{q}, d\mathbf{q}/dt)$  nazýváme *Lagrangeova funkce (lagranžian)* a integrál  $S(t_A, t_B)$  *integrál akce*.

### 1.1.4 Lagrangeovy rovnice

Zavedme *virtuální posunutí*

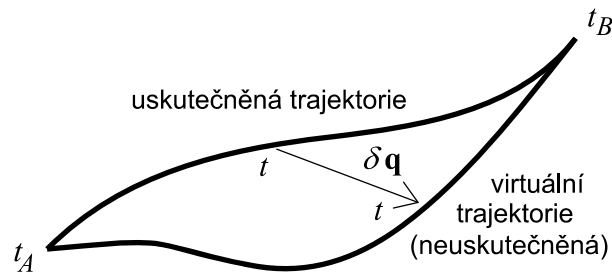
$$\begin{aligned} \delta q_k &= q_{k,\text{virt}}(t) - q_{k,\text{real}}(t), \quad \text{resp.} \\ \delta \mathbf{q} &= \mathbf{q}_{\text{virt}}(t) - \mathbf{q}_{\text{real}}(t) \end{aligned} \quad (1.4)$$

jako infinitezimální rozdíl virtuální (myšlené) trajektorie a reálné (uskutečněné) trajektorie. Body na obou trajektoriích si odpovídají ve stejném čase (tzv. *isochronní variace*). Uvedme základní vlastnosti virtuálních posunutí:

$$1) \quad \delta \mathbf{q}(t_A) = \delta \mathbf{q}(t_B) = 0, \quad (1.5)$$

$$2) \quad \delta \dot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{q}. \quad (1.6)$$

První vlastnost vyjadřuje, že virtuální i reálné trajektorie začínají a končí ve stejném bodě konfiguračního prostoru. Druhá vlastnost vyjadřuje záměnnost operací derivace  $d/dt$  a variace  $\delta$ .



**Poznámka:** Vazby jsou v daném systému zahrnuty volbou zobecněných souřadnic – jejich celkový počet je roven počtu stupňů volnosti. Virtuální posunutí jsou posunutí ve shodě s vazbami v daném čase.

Odvoďme nyní nutné podmínky extrémality integrálu akce:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_A}^{t_B} L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt &= 0 \quad \Rightarrow \\ \int_{t_A}^{t_B} \delta L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt &= 0 \quad \Rightarrow \\ \int_{t_A}^{t_B} \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) dt &= 0, \end{aligned}$$

kde jsme z důvodu isochronnosti vynechali diferenciaci podle času. Druhý člen nyní za pomoci (1.6) integrujeme per partes:

$$\int_{t_A}^{t_B} \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k \right) dt + \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right]_{t_A}^{t_B} = 0.$$

Poslední člen je vzhledem k (1.5) nulový, a proto

$$\int_{t_A}^{t_B} \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt = 0.$$

Tato rovnost musí platit pro každé dva časy  $t_A$ ,  $t_B$  a pro každé virtuální posunutí  $\delta q_k$ . Vzhledem k tomu, že  $\delta q_k$  jsou nezávislá (počet zobecněných souřadnic je roven počtu stupňů volnosti systému), musí být závorka v předchozím vztahu pro každé  $k$  nutně nulová, tj.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad ; \quad k = 1, \dots, f. \quad (1.7)$$

Tyto rovnice představují *nutné podmínky* extrémálnosti integrálu akce a nazývají se *Lagrangeovy rovnice*. Z matematického hlediska jde o obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu pro extrémální trajektorii  $q_k(t)$ ;  $k = 1 \dots f$ , která je realizována v přírodě.

#### Poznámky:

- 1) Lagrangeovy rovnice jsou pohybovými rovnicemi našeho systému v zobecněných souřadnicích. Jejich tvar nezávisí na volbě souřadnicové soustavy. Newtonovy rovnice musí být speciálním případem v kartézském souřadnicovém systému.
- 2) Rovnice je třeba doplnit o počáteční podmínky

$$\begin{aligned} q_k(t_0) &= q_{k0}, \\ \dot{q}_k(t_0) &= \dot{q}_{k0}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

tj. zadat stav v nějakém počátečním čase  $t_0$ .

- 3) Lagrangeova funkce není jednoznačně určitelná, liší-li se například dvě Lagrangeovy funkce o úplnou časovou derivaci libovolné funkce, potom pro obě Lagrangeovy funkce vyjdou stejné rovnice a tedy i stejné fyzikální řešení:

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= L + df/dt; \quad f = f(q, \dot{q}) \quad \Rightarrow \\ \delta \int_{t_A}^{t_B} \tilde{L} dt &= \delta \int_{t_A}^{t_B} L dt + \delta \int_{t_A}^{t_B} \frac{df}{dt} dt = 0 + \delta \int_A^B df = \delta [f(B) - f(A)] = 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Tedy splňuje-li Hamiltonův variační princip původní Lagrangeova funkce, splňuje ho i nová (posunutá o  $df/dt$ ). Toho lze využít při úpravě hledaného  $L$  (viz kapitola 1.4.6)

- 4) Hamiltonův princip v uvedené podobě platí jen pro nedisipativní systémy, tj. systémy ve kterých nedochází k tepelným ztrátám.
- 5) Lagrangeovy rovnice jsou jen nutnými podmínkami extrémálnosti integrálu akce, nikoli postačujícími.
- 6) V případě úvodních dvou příkladů, kdy nejde o hledání časové závislosti trajektorie, ale obecné řešení extrémálnosti funkcionálu (1.2), jsou nutnými podmínkami Eulerovy rovnice

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

7) V matematice se nutné podmínky minima funkcionálu nazývají Eulerovy rovnice, ve fyzice nutné podmínky extrémnosti integrálu akce Lagrangeovy rovnice. Někdy se těmto rovnicím jednoduše říká Eulerovy-Lagrangeovy rovnice.

Nejdůležitější úlohou daného vědního oboru je volba správné Lagrangeovy funkce. Zvolíme-li určitý tvar Lagrangeovy funkce, můžeme řešit příslušné Lagrangeovy rovnice a tato řešení porovnat s experimentálním průběhem trajektorií. Nesouhlasí-li, je vybraná Lagrangeova funkce špatná. Volba Lagrangeovy funkce patří mezi základní *axiomy* budované teorie. Zpravidla se za  $L$  vybírá vhodná skalární funkce (její hodnota nezávisí na volbě souřadnic). Pro jednoduché mechanické problémy známe dvě důležité skalární funkce: kinetickou a potenciální energii. V nejjednodušším případě by Lagrangeova funkce mohla být jejich lineární kombinací  $L = \alpha T + \beta V$ . Skutečně lze ukázat, že pro volbu  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -1$  dostáváme správné pohybové rovnice, v kartézském souřadnicovém systému rovnice Newtonovy – viz příklad 6. v následující kapitole. Proto

$$L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(t, \mathbf{q}) \quad . \quad (1.10)$$

Potenciální energie závisí na poloze (potence – poloha). Pro komplikovanější systémy je rozdělení Lagrangeovy funkce na kinetickou a potenciální energii značně obtížné a navíc zbytečné. Jedinou úlohou mechaniky je volba správné Lagrangeovy funkce pro daný systém tak, aby řešení příslušných Lagrangeových rovnic odpovídalo pozorovaným trajektoriím. Naopak, jak uvidíme později, na základě různých symetrií systému lze za pomoci Lagrangeovy funkce definovat takové veličiny, jako je energie, hybnost, moment hybnosti systému, atd.

Vhodnou Lagrangeovu funkci lze nalézt i pro relativistickou mechaniku, pohyby nabitých částic v elektrických a magnetických polích, pro teorii elektromagnetického pole, pro obecnou teorii relativity i pro další fyzikální obory. Vždy z ní potom plynou rovnice popisující daný problém – např. v teorii elektromagnetického pole Maxwellovy rovnice

### 1.1.5 Jednoduché příklady

#### Příklad 6: Hmotný bod v potenciálním poli $V(x, y, z)$

Hmotný bod má tři stupně volnosti, za zobecněné souřadnice zvolíme

$$q_1 = x; \quad q_2 = y; \quad q_3 = z \quad ,$$

potom

$$T(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad ;$$

$$V(x, y, z) \dots \text{ daná funkce } \quad ;$$

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z) \quad .$$

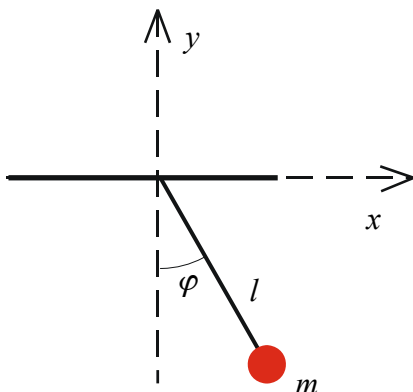
Příslušné Lagrangeovy rovnice mají tvar

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} (m\dot{x}) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad ;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} (m\dot{y}) + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad ;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} (m\dot{z}) + \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad .$$

Všechny tři pohybové rovnice můžeme přepsat do běžného tvaru  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$ ;  $\mathbf{F} \equiv -\vec{\nabla}V$  .

**Příklad 7: Rovinné kyvadlo**

Rovinné kyvadlo má jediný stupeň volnosti. Za zobecněnou souřadnici zvolíme úhel  $\varphi$ . Potom

$$x(t) = l \cdot \sin \varphi(t) \quad ; \quad y(t) = -l \cdot \cos \varphi(t) \quad ,$$

$$\dot{x} = l\dot{\varphi} \cos \varphi \quad ; \quad \dot{y} = l\dot{\varphi} \sin \varphi \quad ,$$

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 \quad ,$$

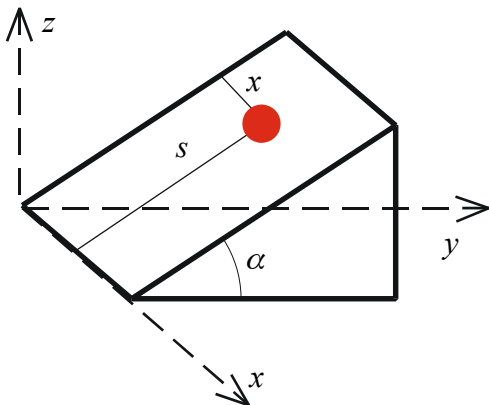
$$V = mgy = -mgl \cos \varphi \quad ,$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi \quad .$$

Odpovídající Lagrangeova rovnice je

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad .$$

Pro malé úhly je  $\sin \varphi \approx \varphi$  a rovnice přechází v běžnou rovnici pro matematické kyvadlo.

**Příklad 8: Pohyb po nakloněné rovině**

Pohyb po nakloněné rovině má dva stupně volnosti. Za zobecněné souřadnice budeme volit vzdálenosti od hran nakloněné roviny  $x(t)$  a  $s(t)$ . Standardním postupem máme:

$$x(t) = x(t) \quad ;$$

$$y(t) = s(t) \cos \alpha \quad ;$$

$$z(t) = s(t) \sin \alpha \quad ;$$

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{s}^2) \quad ;$$

$$V = mgz = mgs \cdot \sin \alpha \quad ,$$

$$L(s, \dot{x}, \dot{s}) = T - V = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{s}^2) - mgs \cdot \sin \alpha \quad ,$$

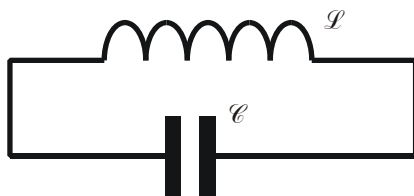
a pohybové rovnice jsou

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = 0 \quad ,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{s} = -g \sin \alpha \quad .$$

**1.1.6 Další příklady****Příklad 9: LC obvod**

Za zobecněnou souřadnici budeme volit náboj  $Q(t)$  odtelký z kondenzátorové baterie. Příslušnou zobecněnou rychlostí je elektrický proud  $I = dQ/dt$ .



Označíme-li indukčnost  $\mathcal{L}$  a kapacitu  $\mathcal{C}$ , potom Lagrangeova funkce

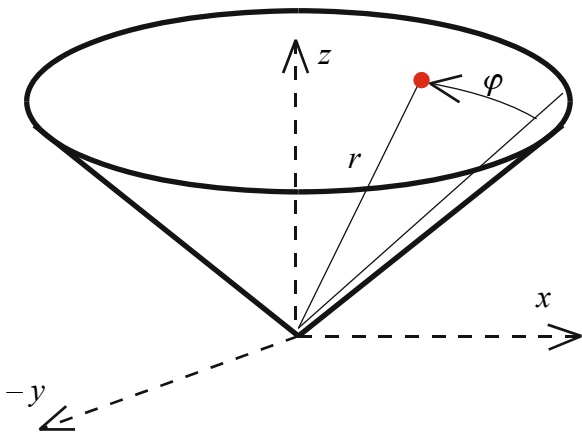
$$L(Q, \dot{Q}) = \frac{1}{2} \mathcal{L} \dot{Q}^2 - \frac{Q^2}{2\mathcal{C}}$$

poskytne správnou rovnici  $\mathcal{L}\mathcal{C}$  obvodu:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} - \frac{\partial L}{\partial Q} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{Q} + \frac{1}{\mathcal{L}\mathcal{C}} Q = 0 .$$

Povšimněte si, že první člen v Lagrangeově funkci je energie vázaná v magnetickém poli cívky a druhý člen energie kondenzátorové baterie.

### Příklad 10: Pohyb hmotného bodu po kuželové ploše v gravitačním poli



Pohyb má dva stupně volnosti. Za zobecněné souřadnice budeme volit vzdálenost částice od vrcholu kužele  $r$  a polární úhel  $\varphi$ . Využijeme tedy dvě ze sférických souřadnic, třetí – odklon  $\theta_0$  od osy  $z$  je na kuželové ploše konstantní. Za použití (A.5) příp. (A.6) snadno odvodíme

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \cos \varphi(t) \sin \theta_0 , \\ y(t) &= r(t) \sin \varphi(t) \sin \theta_0 , \\ z(t) &= r(t) \cos \theta_0 ; \end{aligned}$$

$$T(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta_0 \dot{\varphi}^2) ;$$

$$V(r) = mgz = mgr \cos \theta_0 ;$$

$$L(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta_0 \dot{\varphi}^2) - mgr \cos \theta_0 ;$$

a proto

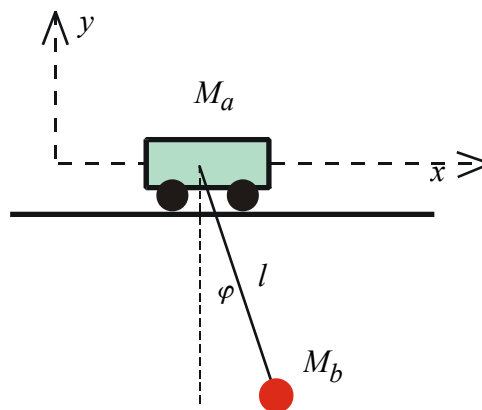
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad m \ddot{r} = mr \sin^2 \theta_0 \dot{\varphi}^2 - mg \cos \theta_0 ,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta_0) = 0 .$$

Povšimněte si, že v rovnici pro  $r$  na pravé straně vystupuje součet síly odstředivé a příslušné komponenty síly gravitační. Rovnice pro úhel  $\varphi$  není nic jiného než zákon zachování momentu hybnosti.

**Příklad 11: Rovinné kyvadlo s vodorovně pohyblivým závěsem**

Vodorovně pohyblivý závěs můžeme realizovat např. vozíčkem na kolejničce. Systém má dva stupně volnosti. Za zobecněné souřadnice zvolíme vodorovnou polohu  $x(t)$  vozíčku a úhel  $\varphi(t)$  kyvadla. Kartézské souřadnice vozíčku budeme značit indexem  $a$  a kartézské souřadnice kyvadla indexem  $b$ . Další postup je již standardní:



$$x_a(t) = x(t) \quad ; \quad x_b(t) = x(t) + l \sin \varphi(t) \quad ,$$

$$y_a(t) = 0 \quad ; \quad y_b(t) = -l \cos \varphi(t) \quad ;$$

$$\begin{aligned} L(\varphi, \dot{x}, \dot{\varphi}) &= \frac{1}{2} M_a (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2) + \frac{1}{2} M_b (\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2) - M_a g y_a - M_b g y_b = \\ &= \frac{1}{2} M_a \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M_b (\dot{x}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi) + M_b g l \cos \varphi \quad . \end{aligned}$$

## 1.2 ZÁKONY ZACHOVÁNÍ V PŘÍRODĚ

### 1.2.1 Teorém Emmy Noetherové

Objev každé veličiny, která se v průběhu časového vývoje systému nemění (zachovává) je pro fyziku velmi důležitý. Tyto veličiny v mechanice nazýváme integrály pohybu. Připomeňme některé zákony zachování: zákon zachování hybnosti, momentu hybnosti, energie; v kvantové teorii zákon zachování elektrického náboje, spinu, isospinu, baryonového čísla, parity, atd.

Je třeba vyjasnit jaká je podstata těchto zákonů zachování a za jakých podmínek jsou splněny. To se teoreticky podařilo Emmě Noetherové v roce 1916:

*S každou symetrií v přírodě souvisí nějaká zachovávající se fyzikální veličina. Tato veličina je danou symetrií definována a zachovává se jen tehdy, dokud výchozí symetrie platí.*

Při pozorování jevů kolem nás je tedy velmi důležité vyhledávat nejrůznější symetrie. Uvedme nyní příklady některých symetrií:

- 1) Na pracovním stole jsme zkonstruovali nějaký mechanický stroj. Stroj spustíme a budeme sledovat jeho chování. Jestliže stejný experiment provedeme na stejném psacím stole v sousední místnosti, výsledek bude stejný. Provedeme-li ale tentýž experiment na stole v místnosti o patro výše, může dopadnout jinak, protože gravitační pole Země má na tomto stole jinou hodnotu. Tato fyzikální situace je *symetrická vzhledem k vodorovnému posunutí*, ale není symetrická vzhledem k svislému posunutí.
- 2) Vodičem teče konstantní proud. Kolem vodiče se vytvořilo časově neproměnné (stacionární) magnetické pole. Do tohoto pole vypustíme elektron a budeme sledovat jeho trajektorii. Vypustíme-li elektron o minutu později (počáteční rychlost a poloha elektronu musí být stejná), bude výsledná trajektorie totožná. Zde hovoříme o *symetrii vzhledem k časovému posunutí*. Kdyby proud nebyl konstantní, tato symetrie bude porušena, magnetické pole v různých časech různé a trajektorie elektronů odlišné.
- 3) Při silné interakci (drží pohromadě atomové jádro) se neutron i proton chovají stejně, při elektromagnetické interakci různě (proton je nabitý). *Výměna neutronu za proton nebo protonu za neutron je symetrickou operací při silné interakci, nesymetrickou při elektromagnetické.*
- 4) *Příklady dalších symetrií:* rotační symetrie; zrcadlová symetrie (záměna levého a pravého); výsledek experimentů je stejný ve všech souřadnicových systémech pohybujících se vůči sobě rovnoměrně přímočaře (Lorentzova symetrie).

V teoretické mechanice se seznámíme se zákonem zachování hybnosti, momentu hybnosti a energie a se symetriemi, které těmto zákonům zachování odpovídají. V kvantové teorii se seznámíme s celou řadou dalších důležitých symetrií, které vedou k zachování elektrického náboje, spinu, izospinu, parity, barvy a vůně kvarků a dalších kvantových čísel.

### 1.2.2 Zákon zachování hybnosti

Představme si, že Lagrangeova funkce nezávisí na některé zobecněné souřadnici, konkrétně  $q_k$ :

$$L = L(t, q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad . \quad (1.11)$$

Zobecněnou souřadnici, která se nevyskytuje v Lagrangeově funkci, nazýváme *cyklickou*. Na  $q_k$  potom nezávisí ani pohybové rovnice a tím ani výsledek experimentu. *Situace je*



symetrická vůči prostorovému posunutí v zobecněné souřadnici  $q_k$  (viz první příklad symetrií).

Z pohybové rovnice pro tuto souřadnici  $q_k$  máme

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \text{const} .$$

Nalezli jsme tedy příslušnou zachovávající se veličinu.

**Definice:** Zobecněnou hybností odpovídající zobecněné souřadnici  $q_k$  nazveme

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} , \quad k = 1, \dots, f. \quad (1.12)$$

Tato veličina se zachovává, je-li zobecněná souřadnice  $q_k$  cyklická (nevyskytuje se v  $L$ ), tj. fyzikální situace je symetrická vzhledem k prostorovému posunutí v zobecněné souřadnici  $q_k$ .

Určeme nyní zobecněné hybnosti k příkladům 6 až 11 z kapitol 1.1.5 a 1.1.6.

**Příklad 6 (dokončení):**

$$p_x \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad ; \quad p_y \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad ; \quad p_z \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} .$$

Zachování či nezachování těchto veličin bude záviset na tvaru potenciální energie  $V(x, y, z)$ .

**Příklad 7 (dokončení):**

$$p_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} .$$

Fyzikální situace není symetrická vzhledem k pootočení o úhel  $\delta\varphi$  (změní se gravitační pole), proto se souřadnice  $\varphi$  vyskytuje v  $L$  a tato zobecněná hybnost se nezachovává.

Zobecněná hybnost k úhlové proměnné se někdy nazývá **moment hybnosti**.

**Příklad 8 (dokončení):**

$$p_x \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad ; \quad p_s \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m\dot{s} .$$

Situace je symetrická vzhledem k posunutí v souřadnici  $x$ , souřadnice  $x$  je cyklická a hybnost  $p_x$  se zachovává. Při posunutí v souřadnici  $s$  se mění gravitační pole,  $L$  závisí na  $s$  a hybnost  $p_s$  se nezachovává.

**Příklad 9 (dokončení):**

$$p_Q \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = \mathcal{L}\dot{Q} .$$

Zobecněná hybnost  $p_Q$  (magnetický indukční tok) se nezachovává,  $Q$  není cyklická souřadnice.

**Příklad 10 (dokončení):**

$$p_r \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}; \quad p_\phi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \sin^2 \theta_0 \dot{\phi}.$$

Radiální hybnost  $p_r$  se nezachovává (při posunutí v  $r$  se mění gravitační pole), moment hybnosti  $p_\phi$  se zachovává – situace je symetrická vzhledem k pootočení v úhlu  $\varphi$ ,  $\varphi$  je cyklická souřadnice.

**Příklad 11 (dokončení):**

$$p_x \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M_a + M_b) \dot{x} + M_b l \dot{\phi} \cos \varphi; \quad p_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = M_b l^2 \dot{\varphi} + M_b \dot{x} l \cos \varphi.$$

Zachovává se hybnost soustavy  $p_x$ , nezachovává se moment hybnosti  $p_\varphi$ . Proč?

**1.2.3 Zákon zachování energie**

Necht' Lagrangeova funkce nezávisí explicitně na čase (postačí, aby některé z nekonečně mnoha ekvivalentních vyjádření Lagrangeovy funkce nezáviselo na čase), tj.

$$L = L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad . \quad (1.13)$$

To odpovídá situaci symetrické vůči časovému posunutí. Najdeme úplnou časovou derivaci Lagrangeovy funkce:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q_k} \cdot \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \cdot \frac{d}{dt}(\dot{q}_k) \quad .$$

Vzhledem k předpokladu je první člen na pravé straně nulový,  $\partial L / \partial q_k$  vyjádříme z Lagrangeovy rovnice (1.7) a máme

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \cdot \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \cdot \frac{d}{dt}(\dot{q}_k) \quad .$$

Členy napravo upravíme za pomoci vztahu pro derivaci součinu dvou funkcí

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right)$$

a po převedení na jednu stranu rovnosti zjistíme, že

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = \text{const} \quad .$$

Opět jsme tedy našli zachovávanou veličinu.

**Definice:** *Zobecněnou energii nazveme*

$$E \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \quad . \quad (1.14)$$

*Tato veličina se zachovává, nezávisí-li Lagrangeova funkce explicitně na čase, tj. je-li fyzikální situace symetrická vzhledem k časovému posunutí.*

V příkladech 6 až 11 se energie zachovává, Lagrangeovy funkce nezávisí explicitně na čase, všechny situace jsou symetrické vůči časovému posunutí. Postupně máme:

$$E_6 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \dot{y} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \dot{z} - L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z),$$

$$E_7 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 - m g l \cos \varphi,$$

$$E_8 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \dot{s} - L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{s}^2) + m g s \sin \alpha,$$

$$E_9 = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} \dot{Q} - L = \frac{1}{2} \mathcal{L} \dot{Q}^2 + \frac{Q^2}{2\mathcal{C}},$$

$$E_{10} = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \dot{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta_0 \dot{\varphi}^2) + m g r \cos \theta_0,$$

$$E_{11} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - L = \frac{1}{2} M_a \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M_b (\dot{x}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi) - M_b g l \cos \varphi.$$

Povšimněte si, že ve všech těchto jednoduchých příkladech je

$$E = T + V. \quad (1.15)$$

Tato relace ale platí jen pro speciální tvary Lagrangeovy funkce. V obecném případě nelze Lagrangeovu funkci ani energii rozdělit na kinetickou a potenciální část. Energie je však i nadále vždy definována vztahem (1.14).

Uvedme na závěr příklad, kdy se energie nezachovává. Uvažujme kyvadlo, jehož závěs je velmi pomalu namotáván pomocným motorkem v místě úchyty (jeřáb se zavěšeným břemenem). Délka závěsu se s časem zkracuje

$$l = l_0 - ct,$$

$c$  je rychlost navíjení. Lagrangeova funkce kyvadla

$$L = \frac{1}{2} m (l_0 - ct)^2 \dot{\varphi}^2 + mg (l_0 - ct) \cos \varphi$$

yní explicitně závisí na čase a energie se nezachovává. Rozhoupejme kyvadlo a sledujme jeho kmity. Udělejme totéž o minutu později. Experiment dopadne jinak, protože závěs se mezitím poněkud zkrátil. Fyzikální situace není symetrická vzhledem k časovému posunutí. Důvod nezachování energie je zde zřejmý – přídavný motorek, který není započten do našeho systému.

Vidíme tedy, že základní zákony zachování v mechanice jsou přímým důsledkem vlastností prostoru a času kolem nás. Je-li prostor homogenní (stejný ve všech svých bodech), zachovává se hybnost; je-li prostor isotropní (stejný ve všech směrech), zachovává se moment hybnosti; je-li prostor neměnný v čase, zachovává se energie.

homogenita prostoru	→	zachování hybnosti
isotropie prostoru	→	zachování momentu hybnosti
neměnnost v čase	→	zachování energie

**Příklad 5 (dokončení): Brachystochrona**

Nyní máme dostatečné matematické znalosti na vyřešení příkladu na brachystochronu z úvodu kapitoly 1.1.2. Úkolem bylo nalézt křivku mezi dvěma body, po které se těleso dostane za nejkratší dobu samovolným klouzáním z bodu A do bodu B, jejichž výškový rozdíl je  $H$ . Úloha vedla na hledání minima funkcionálu (1.1)

$$T = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(H-y)}} dx.$$

Nezávislou proměnnou v této úloze není čas, ale prostorová souřadnice  $x$ . Eulerovy-Lagrangeovy rovnice proto budou mít tvar:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0; \quad F = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(H-y)}}.$$

Přímé řešení by bylo značně nevýhodné. Pokud si povšimneme, že nezávislá proměnná  $x$  není ve funkcionálu zastoupena, musí se zachovávat „energie“

$$E \equiv \frac{\partial F}{\partial y'} y' - F \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{2g(H-y)}} \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} y' - \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(H-y)}} = E_0.$$

Jde o první integrál Eulerových-Lagrangeových rovnic a tedy o diferenciální rovnici prvního řádu. Povšimněte si, že „energie“ není v tomto případě rozdělitelná na „kinetickou“ část s derivacemi hledané funkce a „potenciální“ bez derivací. Po jednoduché úpravě máme

$$E_0 \sqrt{2g(H-y)} \sqrt{1+y'^2} = -1.$$

Výraz umocníme na druhou

$$2E_0^2 g(H-y)(1+y'^2) = 1 \Rightarrow \\ H-y = \frac{K}{1+y'^2}; \quad K \equiv \frac{1}{2E_0^2 g}.$$

Nejjednodušší integrace je parametrická, tj. substituce  $y' = \operatorname{tg} \varphi$ . Parametrické řešení pro  $y$  potom je

$$H-y = \frac{K}{1+\operatorname{tg}^2 \varphi} \Rightarrow y = H - K \cos^2 \varphi. \quad (1.16)$$

Zbývá nalézt řešení pro  $x$  z definičního vztahu pro substituci,  $dy/d\varphi$  vyjádříme z (1.16):

$$y' = \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow \frac{dy}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \Rightarrow 2K \sin \varphi \cos \varphi \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}.$$

Separaci máme

$$dx = 2K \cos^2 \varphi d\varphi,$$

po integraci

$$x = K\varphi + K(\sin 2\varphi)/2 + L \quad (1.17)$$

Integrační konstanty  $K$  a  $L$  ve vztazích (1.16), (1.17) lze určit z toho, že řešení musí procházet body  $(0, H)$  a  $(l, 0)$ . Pro naše účely postačí jen obecné řešení, které je částí cykloidy:

$$x = K\varphi + K(\sin 2\varphi)/2 + L; \\ y = H - K \cos^2 \varphi.$$

### 1.3 HAMILTONOVY KANONICKÉ ROVNICE

V této kapitole se seznámíme s jiným tvarem pohybových rovnic – Hamiltonovými rovnicemi. Na rozdíl od Lagrangeových rovnic (diferenciální rovnice 2. řádu) jsou Hamiltonovy rovnice diferenciální rovnice 1. řádu, ale je jich dvojnásobné množství.

- 1) Pro řešení diferenciálních rovnic prvního řádu je vypracováno velké množství numerických metod a tak Hamiltonovy rovnice bývají většinou pro numerické řešení vhodnější než rovnice Lagrangeovy.
- 2) Za pomoci Hamiltonových rovnic lze snadno zapsat časový vývoj libovolné dynamické proměnné, tj. nejenom zvolených zobecněných souřadnic.
- 3) Hamiltonovy rovnice lze přepsat do velmi jednoduchého tvaru s pomocí tzv. Poissonových závorek, které z matematického hlediska představují Lieovu algebru. Vlastnosti Lieovy algebry jsou určeny nezávisle na objektech, které ji tvoří. Proto bude možné tuto strukturu snadno přenést do kvantové mechaniky.

#### 1.3.1 Hamiltonovy rovnice

S pomocí definice zobecněné hybnosti (1.12) můžeme Lagrangeovy rovnice (1.7) přepsat do tvaru

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad ; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_k \equiv \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad , \quad (1.18)$$

který silně připomíná Newtonovy rovnice v kartézských souřadnicích. Najděme nyní diferenciál energie za pomoci jejího definičního vztahu (1.14)

$$E = p_k \dot{q}_k - L(t, q, \dot{q}) \quad \Rightarrow$$

$$dE = \dot{q}_k dp_k + p_k d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt - \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k \quad .$$

V předposledním členu vyjádříme  $\partial L / \partial q_k$  z pohybové rovnice (1.18), v posledním členu využijeme definici zobecněné hybnosti:

$$dE = \dot{q}_k dp_k + p_k d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt - \dot{p}_k dq_k - p_k d\dot{q}_k \quad .$$

Členy s diferenciály zobecněných rychlostí se odečtou a zbývá

$$dE = - \frac{\partial L}{\partial t} dt - \dot{p}_k dq_k + \dot{q}_k dp_k \quad . \quad (1.19)$$

Funkci, jejíž diferenciál jsme právě našli označíme

$$E = H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad . \quad (1.20)$$

Koeficienty v diferenciálu (1.19) musí být příslušné parciální derivace funkce  $H$ :

$$- \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad ; \quad - \dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k} \quad ; \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad . \quad (1.21)$$

Funkce  $H$  se nazývá *Hamiltonova funkce*. Hamiltonova funkce je energie přepsaná do proměnných  $t, q_k, p_k$ . V (1.19) se odečetly diferenciály rychlostí, proto lze vždy nalézt takovou transformaci

$$t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \quad \rightarrow \quad t, \mathbf{q}, \mathbf{p} \quad , \quad (1.22)$$

aby energie byla funkcí zobecněných souřadnic a zobecněných hybností. Tato transformace se nazývá *Legendreova duální transformace*. Poslední dvě rovnice z relace (1.21) jsou *Hamiltonovy kanonické rovnice* (kanos – zákon, souhrn pravidel):

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad ; \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad . \quad (1.23)$$

Při řešení problému Hamiltonovými rovnicemi

- určíme z Lagrangeovy funkce zobecněné hybnosti a zobecněnou energii,
- ze zobecněné energie vyloučíme zobecněné rychlosti – vyjádříme je za pomoci zobecněných hybností, tj. provedeme Legendreovu duální transformaci,
- napišeme Hamiltonovy rovnice,
- řešíme je.

Hamiltonovy rovnice jsou rovnice pro určení časového vývoje proměnných  $q_k(t)$ ,  $p_k(t)$ . Jsou diferenciálními rovnicemi prvního řádu, je jich ale dvojnásobné množství než Lagrangeových rovnic 2. řádu. Soustavu Hamiltonových rovnic musíme doplnit počátečními podmínkami

$$q_k(t_0) = q_{k0} \quad ; \quad p_k(t_0) = p_{k0} \quad . \quad (1.24)$$

### Příklad 12: Rovinný pohyb planety (hmotnost $m$ ) kolem Slunce (hmotnost $M$ ).

Předpokládáme  $M \gg m$  ; tj. Slunce se nepohybuje. Pohyb má dva stupně volnosti, za zobecněné souřadnice zvolíme polární souřadnice  $q_1 = r(t)$  ;  $q_2 = \varphi(t)$  – vzdálenost planety od Slunce a úhel spojnice planeta – Slunce od zvolené polopřímky. Z (A.6) a z gravitačního zákona víme, že

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) \quad , \quad V = -G \frac{mM}{r} \quad , \quad \text{tj.}$$

$$L(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + G \frac{mM}{r} \quad . \quad (1.25)$$

Kdybychom řešili úlohu z Lagrangeových rovnic, měli bychom

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 + G \frac{M}{r^2} = 0 \quad ,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 \ddot{\varphi} + 2r \dot{r} \dot{\varphi} = 0 \quad .$$

Povšimněme si, že pohybové rovnice nezávisí na hmotnosti sledované planety  $m$ . To je pro gravitaci typické, tělesa se v daném gravitačním poli pohybují po stejných trajektoriích. Proto je možné gravitaci popisovat za pomoci zakřivených prostorů. Určeme nyní zobecněné hybnosti a zobecněnou energii systému:

$$p_r \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad ; \quad p_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} \quad ,$$

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \dot{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 - G \frac{mM}{r} = T_r + T_\varphi + V \quad .$$

Zachovává se moment hybnosti  $p_\varphi$  ( $\varphi$  je cyklická souřadnice) a zobecněná energie  $E$ . Energie se rozpadá na tři členy – radiální kinetickou energii, úhlovou energii (souvisící s oběhem planety) a potenciální energii. Zobecněné rychlosti vyjádříme ze zobecněných hybností

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} \quad ; \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$$

a dosadíme do zobecněné energie (provedeme Legendreovu duální transformaci). Tím získáme Hamiltonovu funkci

$$H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - G \frac{mM}{r} \quad .$$

Hamiltonovy kanonické rovnice jsou

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \quad , & \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = +\frac{p_\varphi^2}{mr^3} - G \frac{mM}{r^2} \quad , \\ \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \quad , & \dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \quad . \end{aligned}$$

Tyto rovnice je třeba doplnit počátečními podmínkami  $r(t_0)$ ,  $\varphi(t_0)$ ,  $p_r(t_0)$ ,  $p_\varphi(t_0)$ . Jde o soustavu čtyř diferenciálních rovnic pro funkce  $r(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $p_r(t)$ ,  $p_\varphi(t)$ .

**Definice:** *Fázový prostor* – 2frozměrný prostor, do kterého zobrazujeme hodnoty zobecněných souřadnic a zobecněných hybností. Bod fázového prostoru nám reprezentuje stav systému. Časový vývoj  $\mathbf{q}(t)$ ,  $\mathbf{p}(t)$  stavu systému se ve fázovém prostoru zobrazí jako *fázová trajektorie*. Konfigurační prostor je podprostorem fázového prostoru. V dalším paragrafu si ukážeme fázovou trajektorii harmonického oscilátoru.

### 1.3.2 Harmonický oscilátor

Harmonický oscilátor je jedním z nejdůležitějších fyzikálních systémů. Lze jím v prvním přiblížení nahradit chování částice v potenciálním poli s minimem, setkáme se s ním v kvantové teorii i v kvantové teorii pole. Jak uvidíme později, lze si jakékoli pole (například elektromagnetické) představit jako soustavu harmonických oscilátorů. Proto se budeme harmonickým oscilátorem zabývat podrobněji.

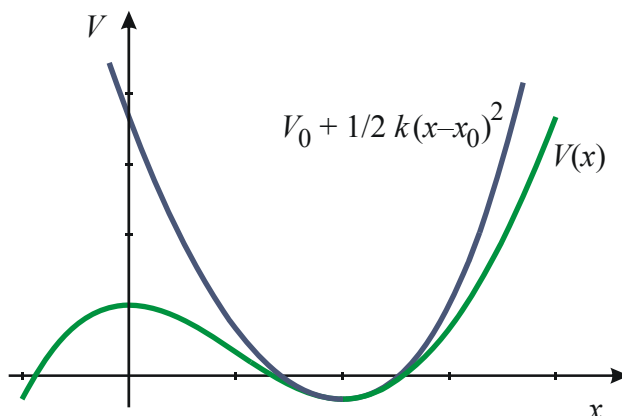
Představme si částici v poli potenciální energie s minimem v bodě  $x_0$  a hodnotou minima  $V_0 = V(x_0)$ . Provedme Taylorův rozvoj funkce  $V(x)$  v okolí minima do druhého řádu:

$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} V''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + \dots \quad .$$

V minimu je  $V'(x_0) = 0$  a proto

$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2} V''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 = V_0 + \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 \quad , \quad \text{kde } k \equiv V''(x_0) \quad . \quad (1.26)$$

Potenciální energii jsme tedy nahradili parabolickou závislostí – viz obrázek.



*Harmonickým oscilátorem* nazýváme systém s parabolickou závislostí potenciální energie (1.26). Dostí přesně tuto závislost splňuje například těleso zavěšené na pružině v gravitačním poli. Veličina  $k \equiv V''(x_0)$  se nazývá *tuhost oscilátoru*.

Volme pro jednoduchost souřadnicový systém tak, aby minimum potenciální energie bylo v počátku ( $x_0 = 0$ ) a zvolme  $V(x_0) = 0$  (potenciální energii můžeme změnit o aditivní konstantu, síla  $F = -dV/dx$  se nezmění), průběh potenciální energie je potom  $V(x) = 1/2 kx^2$ . Řešme nejprve harmonický oscilátor za pomoci Lagrangeových rovnic:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \quad . \quad (1.27)$$

Obecné řešení této rovnice je

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t, \quad \text{kde } \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.28)$$

Pro následující počáteční podmínky plyne řešení:

$$x(0) = A \quad ; \quad \dot{x}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = A \cos \omega t \quad . \quad (1.29)$$

V okolí minima potenciální energie koná částice kmitavý pohyb úhlovou frekvencí  $\omega = (k/m)^{1/2}$ . Jako parametr oscilátoru se častěji používá úhlová frekvence  $\omega$  než jeho tuhost  $k$ . Lagrangeova funkce potom je

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad . \quad (1.30)$$

Řešme nyní úlohu za pomoci Hamiltonových rovnic:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{p}{m} \quad ,$$

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad .$$

Po vyloučení rychlosti z  $E$  dostáváme Hamiltonovu funkci

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (1.31)$$

a Hamiltonovy rovnice

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad , \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -m \omega^2 x \quad .$$

Řešení této soustavy se stejnými počátečními podmínkami vede k

$$x(t) = A \cos \omega t \quad ,$$

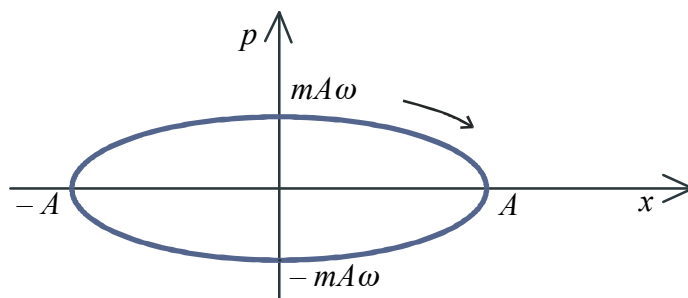
$$p(t) = -m A \omega \sin \omega t = m \dot{x} \quad . \quad (1.32)$$

Vyloučíme-li z (1.32) čas (na pravých stranách ponecháme jen trigonometrické funkce, rovnice umocníme na druhou a sečteme), získáme rovnici trajektorie ve fázových proměnných  $x, p$ :

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{p}{mA\omega}\right)^2 = 1 \quad . \quad (1.33)$$

*Fázovou trajektorii harmonického oscilátoru je elipsa.*





Na závěr určíme klasickou hustotu pravděpodobnosti  $w(x)$  výskytu částice mezi krajními polohami  $-A$ ,  $A$ . Pro pravděpodobnost, že se částice nachází v okolí  $\Delta x$  bodu  $x$  platí:



$$\Delta P \cong \frac{2\Delta t}{T} = \frac{2\Delta x/v(x)}{2\pi/\omega} = \frac{\omega}{\pi v(x)} \Delta x, \quad (1.32)$$

kde  $T$  je perioda pohybu a  $2\Delta t$  je doba, po kterou částice pobývá v okolí bodu  $x$ . Okolím prolétá za periodu  $T$  částice dvakrát (tam a zpět), proto je v čitateli  $2\Delta t$ .

Hustota pravděpodobnosti je

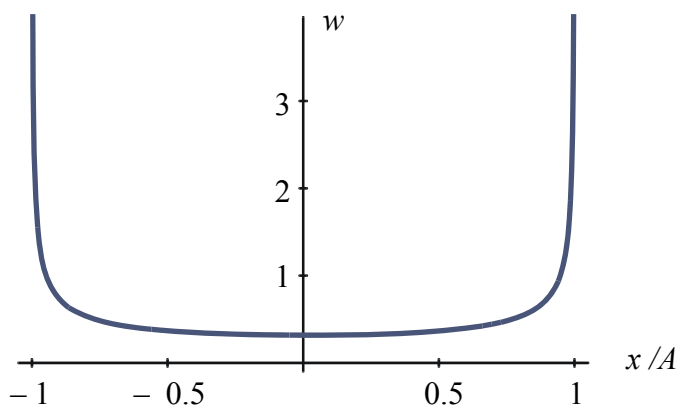
$$w(x) = \frac{dP}{dx} = \frac{\omega}{\pi v(x)}. \quad (1.34)$$

Závislost  $v(x)$  určíme ze zákona zachování energie

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad \Rightarrow \quad v(x) = \omega\sqrt{A^2 - x^2}. \quad (1.35)$$

Konečný vztah má tvar

$$w(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}. \quad (1.36)$$



Hustota pravděpodobnosti výskytu částice je nejvyšší v bodech obratu  $-A$ ,  $A$  a nejnižší v místě minima potenciální energie. V kvantové teorii poznáme modifikaci tohoto průběhu pro částice mikrosvěta. Poznamenejme ještě, že

Celková pravděpodobnost výskytu částice v oblasti  $(-A, A)$  je rovna jedné.

$$\int_{-A}^{+A} w(x) dx = \int_{-A}^{+A} \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}} dx = \frac{1}{\pi} \left[ \arcsin\left(\frac{x}{A}\right) \right]_{-A}^{+A} = 1. \quad (1.37)$$

### 1.3.3 Poissonova formulace Hamiltonových rovnic

Uvažujme obecnou dynamickou proměnnou  $A(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , která je funkcí zobecněných souřadnic a zobecněných hybností (souřadnice, hybnost, potenciální energie, součin potenciální a kinetické energie...). Její časový vývoj je dán vztahem

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial A}{\partial p_k} \dot{p}_k = \frac{\partial A}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad (1.38)$$

kde jsme časové derivace fázových proměnných  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$  vyjádřili z Hamiltonových rovnic.

**Definice:** Necht'  $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ ,  $g(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  jsou dvě funkce fázových proměnných  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ . Funkci

$$\{f, g\} \equiv \frac{\partial f}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial g}{\partial q_k} \quad (1.39)$$

nazýváme Poissonovou závorkou funkcí  $f, g$ .

Časový vývoj (1.38) obecné dynamické proměnné je vzhledem k definici (1.39) dán jako Poissonova závorka příslušné dynamické proměnné a Hamiltonovy funkce:

$$\dot{A} = \{A, H\} \quad (1.40)$$

**Poznámka:** Pro  $A = A(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$  bude  $dA/dt = \partial A/\partial t + \{A, H\}$ , tento případ je však vzácný.

*Vlastnosti Poissonových závorek:*

$$\begin{aligned} 1) \quad & \{f, g\} = -\{g, f\} \\ 2) \quad & \{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\}; \quad \{\alpha f, h\} = \alpha \{f, h\} \\ 3) \quad & \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \\ 4) \quad & \{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g \\ 5) \quad & \{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Důkaz všech těchto vztahů je triviální a plyne přímo z definice Poissonovy závorky (1.39). *Poissonovy závorky tvoří Lieovu algebru na prostoru funkcí.* Velmi důležité je znát Poissonovy závorky mezi zobecněnými souřadnicemi a hybnostmi

$$\begin{aligned} \{q_i, q_j\} &= \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial q_k} = \delta_{ik} \cdot 0 - 0 \cdot \delta_{jk} = 0, \\ \{p_i, p_j\} &= \frac{\partial p_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial q_k} = 0 \cdot \delta_{jk} - \delta_{ik} \cdot 0 = 0, \\ \{q_i, p_j\} &= \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial q_k} = \delta_{ik} \cdot \delta_{jk} = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Poissonova závorka je nenulová jedině pro zobecněnou souřadnici a jí odpovídající hybnost, potom je rovna jedné.

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \quad ; \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (1.42)$$

Těmito relacemi je určena celá Lieova algebra Poissonových závorek. Známe-li jejich vlastnosti (1.41) a relace (1.42), můžeme řešit problémy mechaniky, aniž bychom potřebovali definici (1.39).

**Příklad 13: Harmonický oscilátor**

$$T = \frac{p^2}{2m} \quad , \quad V = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad ; \quad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 ;$$

$$\dot{x} = \{x, H\} = \frac{\partial x}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial x}{\partial p} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} ,$$

$$\dot{p} = \{p, H\} = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial p}{\partial p} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = - \frac{\partial H}{\partial x} = - m \omega^2 x .$$

Snadno určíme i časový vývoj jakékoli dynamické proměnné, například potenciální energie:

$$\dot{V} = \{V, H\} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial V}{\partial p} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = \omega^2 x p .$$

Časový vývoj můžeme ale určit i z vlastností Lieovy algebry Poissonových závorek (1.41) a (1.42) bez znalosti jejich definice. Ukažme to na příkladu zobecněné hybnosti:

$$\dot{x} = \{x, H\} = \frac{\partial x}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial x}{\partial p} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} ,$$

$$\dot{p} = \{p, H\} = \left\{ p, \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right\} \stackrel{(1.39.2)}{=} \frac{1}{2m} \{p, p^2\} + \frac{1}{2} m \omega^2 \{p, x^2\} =$$

$$\stackrel{(4)}{=} \frac{1}{2m} (p \{p, p\} + \{p, p\} p) + \frac{1}{2} m \omega^2 (x \{p, x\} + \{p, x\} x) =$$

$$= \frac{p}{m} \{p, p\} + m \omega^2 x \{p, x\} \stackrel{(1.39.1)}{=} \frac{p}{m} \{p, p\} - m \omega^2 x \{x, p\} \stackrel{(1.40)}{=} - m \omega^2 x .$$

Analogicky bychom postupovali u dalších dynamických proměnných. V kvantové teorii zůstane tato struktura zachována, jen objekty, se kterými budeme pracovat, budou jiné.

**1.3.4 Numerické řešení Hamiltonových rovnic**

Jen ve výjimečných případech lze nalézt explicitní řešení. Zpravidla jsme odkázáni na numerické řešení problému. V dosavadním textu jsme se naučili problém zformulovat za pomoci soustavy diferenciálních rovnic doplněných vhodnými počátečními podmínkami. Většina matematických programů (např. „Mathematica“, „Reduce“, „Maple“,...) dokáže takto zformulovanou úlohu numericky a někdy i analyticky vyřešit. Uvedme zde přesto alespoň jednu numerickou metodu (Runge-Kutta 4. řádu) vhodnou pro numerické vyhledání řešení.

Označme  $\xi = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$  množinu zobecněných souřadnic a hybností. Necht' množina hledaných funkcí  $\xi_k(t)$ ;  $k = 1, \dots, 2f$  splňuje soustavu rovnic

$$\dot{\xi}_k = f_k(t, \xi) .$$

Časovou osu rozdělíme na dílky s intervalem  $\Delta t$ . Předpokládejme, že známe řešení v nějakém čase  $t$  (například v  $t_0$  – počáteční podmínka). Potom určíme

$$K_{1,k} = f_k(t, \xi_1, \dots, \xi_{2f}) ,$$

$$K_{2,k} = f_k \left( t + \frac{1}{2} \Delta t, \xi_1(t) + \frac{1}{2} K_{1,1} \Delta t, \dots, \xi_{2f}(t) + \frac{1}{2} K_{1,2f} \Delta t \right) ,$$

$$K_{3,k} = f_k \left( t + \frac{1}{2} \Delta t, \xi_1(t) + \frac{1}{2} K_{2,1} \Delta t, \dots, \xi_{2f}(t) + \frac{1}{2} K_{2,2f} \Delta t \right),$$

$$K_{4,k} = f_k \left( t + \Delta t, \xi_1(t) + K_{3,1} \Delta t, \dots, \xi_{2f}(t) + K_{3,2f} \Delta t \right)$$

a přibližné řešení v čase  $t + \Delta t$  dostaneme ze vztahů

$$\xi_k(t + \Delta t) \cong \xi_k(t) + \frac{1}{6} (K_{1,k} + 2K_{2,k} + 2K_{3,k} + K_{4,k}) \cdot \Delta t \quad ; \quad k = 1, \dots, 2f \quad .$$

Tím známe řešení v čase  $t + \Delta t$  a postup můžeme opakovat. Otázky přesnosti výpočtu, konvergence a případně další metody lze nalézt v literatuře. Další metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic jsou uvedeny ve volně navazující učebnici [1].

## 1.4 VYBRANÉ ÚLOHY Z TEORETICKÉ MECHANIKY

### 1.4.1 Pohyb nabité částice v elektromagnetickém poli

Pohyb částic v elektromagnetickém poli je podrobně probrán v učebnici [1], která volně navazuje na tento učební text. Nyní jen pro úplnost uvedeme základní vztahy v nerelativistickém případě. Lagrangeova funkce popisující interakci elektromagnetického pole s nabitou částicí je odvozena v kapitole 1.5. Omezíme na pohyb nerelativistické částice v předem daném elektromagnetickém poli. Elektrická a magnetická pole můžeme popsat buď elektrickou intenzitou  $\mathbf{E}$  a magnetickou indukcí  $\mathbf{B}$  nebo za pomoci čtyřpotenciálu  $(\phi, \mathbf{A})$ . Převodní vztahy jsou

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}, \quad (1.43)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (1.44)$$

Předpokládáme, že  $\phi(t, \mathbf{x})$  a  $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$  jsou předem dané funkce. Problém pohybu nabitě částice v konzervativním elektrostatickém poli je dán Lagrangeovou funkcí ve tvaru  $L = T - V$ , tj.

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - Q\phi. \quad (1.45)$$

Pokud je přítomno magnetické pole, systém již není konzervativní (neexistuje potenciální energie) a Lagrangeova funkce má tvar

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - Q\phi + Q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \quad (1.46)$$

První člen je kinetická energie volné částice, zbylé dva členy reprezentují interakci částice s elektrickým a magnetickým polem. Odvození naleznete v kapitole 1.5. Zde budeme předpokládat, že jsme správnou Lagrangeovu funkci „uhodli“. Pak ale musíme dokázat, že z ní plynoucí pohybové rovnice jsou ve shodě s přírodou. Ukážeme, že příslušné Lagrangeovy rovnice jsou totožné s dobře známou Lorentzovou pohybovou rovnicí. Ve složkách máme

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m v_j v_j - Q\phi(t, \mathbf{x}) + Q A_j(t, \mathbf{x}) v_j; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{d}{dt} (m v_i + Q A_i) + Q \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - Q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} v_j &= 0, \\ \frac{d}{dt} (m v_i) + Q \frac{\partial A_i}{\partial t} + Q \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} + Q \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - Q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} v_j &= 0, \\ \frac{d}{dt} (m v_i) &= Q \left[ -\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + v_j \left( \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) \right], \\ \frac{d}{dt} (m \mathbf{v}) &= Q \left[ -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{A} \right], \\ \frac{d}{dt} (m \mathbf{v}) &= Q [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}], \end{aligned} \quad (1.47)$$

což je známá Lorentzova pohybová rovnice. Nyní standardním postupem odvodíme hybnost, energii a Hamiltonovu funkci částice:

$$\mathbf{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m \mathbf{v} + Q \mathbf{A} \quad (1.48)$$

$$\mathcal{E} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{1}{2} m v^2 + Q \phi \quad (1.49)$$

$$H = \frac{(\mathbf{p} - Q \mathbf{A})^2}{2m} + Q \phi \quad (1.50)$$

**Pozn. 1:** Energii v této kapitole značíme  $\mathcal{E}$ , abychom ji odlišili od intenzity elektrického pole  $\mathbf{E}$ .

**Pozn. 2:** Povšimněte si, že  $\mathcal{E} \neq T + V$ . Energie nezávisí na vektorovém potenciálu  $\mathbf{A}$ . To je důsledkem toho, že magnetické pole nemění energii, ale pouze směr rychlosti. Hybnost již také není rovna svému mechanickému protějšku,  $\mathbf{p} \neq m\mathbf{v}$ .

#### Příklad 14: Konstantní homogenní elektrické pole

Předpokládejme, že na částici působí konstantní homogenní elektrické pole  $\mathbf{E}$ . Pohybovou rovnici částice můžeme zapsat ve tvaru

$$m\ddot{\mathbf{r}} = Q\mathbf{E}. \quad (1.51)$$

Přímou integrací postupně dostaneme

$$\mathbf{v}(t) = \frac{Q}{m} t \mathbf{E} + \mathbf{v}_0; \quad (1.52)$$

$$\mathbf{r}(t) = \frac{Q}{2m} t^2 \mathbf{E} + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0. \quad (1.53)$$

Na první pohled je patrné, že se rychlost s rostoucím časem zvětšuje nade všechny meze. Pro vyšší rychlosti je nutné použít relativistickou Lagrangeovu funkci. Výpočet je v [1]. Urychlování probíhá jen ve směru pole, napříč pole se částice pohybuje volně. Pokud pole míří v ose  $x$ , tj.  $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$  a částice je v počátku souřadnic s počáteční rychlostí  $\mathbf{v}_0 = (0, v_0, 0)$ , tj. kolmou na pole, má nalezené řešení tvar

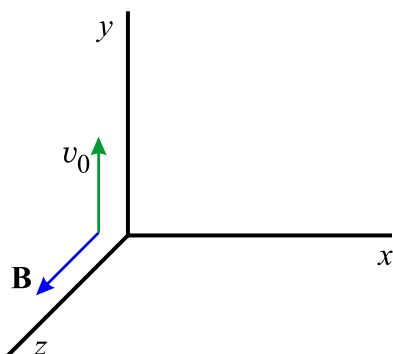
$$\boxed{x = \frac{QE}{2m} t^2, \quad y = v_0 t, \quad z = 0}. \quad (1.54)$$

Vyloučíme-li z řešení čas, získáme rovnici paraboly:

$$\boxed{x = \frac{QE}{2m v_0^2} y^2}. \quad (1.55)$$

Nabitá částice se v přítomnosti homogenního elektrického pole pohybuje po parabole. Ve směru pole je pohyb rovnoměrně zrychlený. Pokud bychom provedli relativistický výpočet (viz [1]), bude skutečnou křivkou hyperbolický kosinus.

#### Příklad 15: Konstantní homogenní magnetické pole



$$\mathbf{E} = (0, 0, 0),$$

$$\mathbf{B} = (0, 0, B).$$

počáteční podmínky:

$$\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0),$$

$$\mathbf{v}(0) = (0, v_0, 0).$$

Uvažujme nyní druhou nejjednodušší situaci – pohyb nabitě částice v homogenním magnetickém poli. Pro určitost budeme předpokládat, že pole míří v ose  $z$  a částice má počáteční rychlost ve směru osy  $y$  (viz obrázek). Pohybovou rovnici  $m d\mathbf{v}/dt = Q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  rozepíšeme do složek:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= QB \dot{y}, \\ m\ddot{y} &= -QB \dot{x}, \\ m\ddot{z} &= 0. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Řešení třetí rovnice je jednoduché, v případě našich počátečních podmínek nulové, tj. pohyb se bude dít jen v rovině  $(x, y)$ . Soustavu prvních dvou rovnic budeme řešit v komplexním oboru. První rovnici budeme chápat jako reálnou část, druhou jako imaginární:

$$m\ddot{x} + i m\ddot{y} = QB \dot{y} - i QB \dot{x}.$$

Tato operace je vratná, kdykoli můžeme oddělit reálnou a imaginární část a dostat zpět původní rovnice. Po jednoduché úpravě a označení kombinace  $QB/m$  jako  $\omega_c$  (později zjistíme význam této veličiny) dostaneme

$$\ddot{x} + i \dot{y} = -i \omega_c (\dot{x} + i \dot{y}); \quad \omega_c \equiv \frac{QB}{m}. \quad (1.57)$$

Nyní zavedeme komplexní polohu  $\zeta \equiv x + i y$ , pro kterou má rovnice jednoduchý tvar

$$\ddot{\zeta} + i \omega_c \dot{\zeta} = 0; \quad \zeta \equiv x + i y. \quad (1.58)$$

Samozřejmě bude kdykoli možné se vrátit k původním proměnným  $x$  a  $y$ . Řešení této lineární rovnice bez pravé strany budeme hledat v exponenciálním tvaru  $\exp(\lambda t)$ . Po dosazení získáme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + i \omega_c \lambda = 0; \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = -i \omega_c. \quad (1.59)$$

Obecné řešení je lineární kombinací obou nalezených modů:

$$\begin{aligned} \zeta(t) &= c_1 + c_2 e^{-i \omega_c t}; \\ \dot{\zeta}(t) &= -i c_2 \omega_c e^{-i \omega_c t}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Integrační konstanty nalezneme snadno z počátečních podmínek

$$\begin{aligned} \zeta(0) &= x(0) + i y(0) = 0; \\ \dot{\zeta}(0) &= \dot{x}(0) + i \dot{y}(0) = i v_0. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Dosadíme-li tyto počáteční podmínky do rovnic (1.60), dostaneme

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0; \\ -i c_2 \omega_c &= i v_0, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} c_1 &= +v_0/\omega_c; \\ c_2 &= -v_0/\omega_c. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Výsledné řešení má proto tvar

$$\zeta(t) = R_L - R_L e^{-i \omega_c t}; \quad R_L \equiv v_0/\omega_c = m v_0/QB. \quad (1.63)$$

Po oddělení reálné a imaginární části získáme obě souřadnice pohybující se částice

$$\begin{aligned} x(t) &= R_L - R_L \cos \omega_c t, \\ y(t) &= R_L \sin \omega_c t. \end{aligned} \quad (1.64)$$

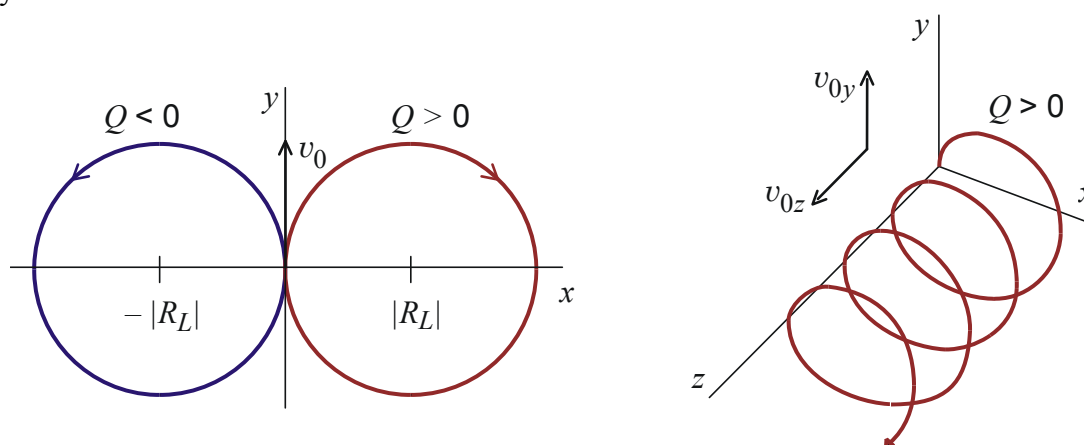
Rovnici trajektorie nalezneme po vyloučení času z (1.64):

$$(x - R_L)^2 + y^2 = R_L^2. \quad (1.65)$$

Vidíme, že pohyb se děje po kružnici s poloměrem  $|R_L|$ , se středem  $S = [R_L, 0]$  a s úhlovou frekvencí oběhu  $\omega_c$ . Veličinu  $R_L$  nazýváme Larmorův (gyrační) poloměr  $R_L$  a veličinu  $\omega_c$  cyklotronní (gyrační) frekvence. Podle náboje částice může mít Larmorův poloměr kladnou i zápornou hodnotu, stejně tak může mít obě znaménka cyklotronní frekvence (záporná hodnota znamená oběh proti směru hodinových ručiček).

Magnetické pole nepůsobí na pohyb částice ve směru podél pole. Kolmo na směr pole působí Lorentzova síla, která zakřivuje trajektorii částice na kružnici. Při nenulové počáteční rychlosti  $v_z(0)$  je pohyb částice složen z rovnoměrného přímočarého pohybu podél pole a Larmorovy rotace (gyrace), tím vzniká pohyb po šroubovici.

Samotné elektrické pole naopak nepůsobí na pohyb částice napříč pole (v nerelativistickém případě) nebo jen velmi málo (v relativistickém případě). Ve směru pole dochází k urychlování.



Složitější případy pohybů nabitých částic v elektrických a magnetických polích jsou řešeny (z Hamiltonových rovnic) v navazující učebnici [1].

### 1.4.2 Pohyb v rotující soustavě

K nalezení pohybové rovnice v neinerciální rotující soustavě potřebujeme znát některé vektorové identity:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}, \quad (1.66)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \quad (1.67)$$

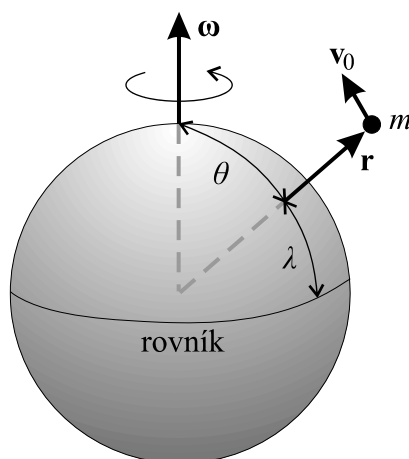
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}). \quad (1.68)$$

Jejich odvození je snadné za pomoci definice vektorového součinu přes Leviho-Civitův tenzor (viz dodatek A2 v [1]). První identita ukazuje, že v součinu  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$  lze jednotlivé součinitele cyklicky zaměňovat. Druhá identita je známé „bác cáb“ pravidlo. Důkaz třetí identity lze provést (stejně jako u prvních dvou) pouhým rozepsáním levé strany z definice vektorového součinu přes Leviho-Civitův tenzor.

Pro určitost předpokládejme, že budeme sledovat pohyby na rotující Zemi. Jedna souřadnicová soustava je pevná v prostoru (inerciální) a druhá rotuje spolu se Zemí (rotující, neinerciální). Obě soustavy mají počátek ve středu Země a polohový vektor sledovaného tělesa je v obou soustavách shodný, tj.

$$\mathbf{r}_{\text{in}} = \mathbf{r}_{\text{rot}} = \mathbf{r} \quad (1.69)$$





Rychlosti tělesa o hmotnosti  $m$  (viz obrázek) budou v obou soustavách různé, budou se lišit o rychlost  $v_0$  způsobenou rotací Země. Ta je úměrná velikosti úhlové rychlosti, vzdálenosti od středu Země a sinu polárního úhlu  $\theta$  (na pólu je rychlost nulová, na rovníku maximální), tj.

$$v_0 = \omega r \sin \theta. \quad (1.70)$$

Směr této rychlosti je kolmý na vektory  $\boldsymbol{\omega}$  i  $\mathbf{r}$ , tedy platí

$$\mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (1.71)$$

Mezi rychlostí tělesa v inerciální a rotující soustavě proto platí jednoduchý vztah

$$\mathbf{v}_{\text{in}} = \mathbf{v}_{\text{rot}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (1.72)$$

To je vše, co potřebujeme vědět k sestavení Lagrangeovy funkce. V inerciální soustavě bude Lagrangeova funkce rovna

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{\text{in}}^2 - V(\mathbf{r}_{\text{in}}). \quad (1.73)$$

Do vztahu dosadíme za rychlost z (1.72) a za polohový vektor z (1.69)

$$L = \frac{1}{2} m (\mathbf{v}_{\text{rot}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 - V(\mathbf{r}). \quad (1.74)$$

Rychlost v rotující soustavě, která nás zajímá, přeznačíme na  $\mathbf{v}$ . Výsledná Lagrangeova funkce pro pohyb v neinerčiální rotující soustavě je

$$L = \frac{1}{2} m (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 - V(\mathbf{r}). \quad (1.75)$$

K nalezení hybnosti, energie a k sestavení pohybové rovnice budeme potřebovat parciální derivace  $\partial L / \partial \mathbf{r}$ ,  $\partial L / \partial \mathbf{v}$ . Za tím účelem najdeme diferenciál Lagrangeovy funkce (úhlovou rychlost předpokládáme konstantní). U prvního členu budeme diferencovat nejprve vnitřní funkci a poté derivovat kvadratickou funkci:

$$dL = \frac{1}{2} m (d\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r}) \cdot 2(\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \quad \Rightarrow$$

$$dL = m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} + m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{v} + m(\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} + m(\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r}.$$

Za pomoci vektorových identit (1.67) a (1.68) přeskupíme třetí a čtvrtý člen tak, aby diferenciál  $d\mathbf{r}$  stál samostatně ve skalárním součinu:

$$dL = m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} + m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{v} + m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot d\mathbf{r} + m\omega^2 \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} - m(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{r}) - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r}.$$

Čtvrtý a pátý člen na pravé straně upravíme za pomoci vektorové identity (1.67):

$$dL = m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} + m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{v} + m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot d\mathbf{r} + m\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot d\mathbf{r} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r}.$$

Vzhledem k tomu, že  $dL = (\partial L / \partial \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + (\partial L / \partial \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{v}$ , snadno nalezneme hledané derivace:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) + m\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}, \quad (1.76)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (1.77)$$

Nyní již můžeme vypočítat hybnost a energii v neinerciální soustavě

$$\mathbf{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \quad (1.78)$$

$$E \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 + V(\mathbf{r}). \quad (1.79)$$

Hybnost se skládá z klasické mechanické hybnosti  $m\mathbf{v}$  a neinerciálního rotačního členu  $m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ . Energie je součtem kinetické energie, rotační energie a potenciální energie. Rotační energie je z hlediska pozorovatele v inerciální soustavě záporná. Pro predikci pohybu těles je nejdůležitější znát pohybovou rovnici, kterou nyní již snadno odvodíme:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} &= 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} (m\mathbf{v} + m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) - \left( m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) + m\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \right) &= 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{d m \mathbf{v}}{dt} &= -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} + 2m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) + m\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}). \end{aligned} \quad (1.80)$$

Rovnice (1.80) je hledaná pohybová rovnice tělesa pohybujícího se v rotující neinerciální soustavě. Nalevo je časová změna mechanické hybnosti, první člen napravo je síla působící na částici (v potenciálním poli), druhý člen je Coriolisova síla a třetí odstředivá síla. Coriolisova síla je zodpovědná za směr roztáčení víru ve výlevce (na každé polokouli je jiný), za stáčení roviny kyvadla i za další jevy. Coriolisova síla nepůsobí na tělesa pohybující se paralelně se zemskou rotační osou. Odstředivá síla je nulová na pólech a maximální na rovníku, kde dosáhne hodnoty  $m r \omega^2$ .

### Příklad 16: Padající kámen

Představte si, že pustíte kámen z výšky 65 metrů (odpovídá Petřínské rozhledně). Jakou odchylku od kolmice bude mít kámen po dopadu na zem vlivem Coriolisovy síly? Jakým směrem se kámen odchýlí od kolmice při pádu? Počítejte pro Prahu (zeměpisná šířka  $\lambda = 50^\circ$ ).

**Řešení:** Budeme řešit pohybovou rovnici s tíhovou a Coriolisovou silou

$$\frac{d m \mathbf{v}}{dt} = m \mathbf{g} + 2m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}).$$

Druhý člen na pravé straně je podstatně menší než první a můžeme ho chápat jako malou poruchu. Řešení budeme hledat iterační metodou, tj.

$$\frac{dm\mathbf{v}^{(k+1)}}{dt} = m\mathbf{g} + 2m(\mathbf{v}^{(k)} \times \boldsymbol{\omega}).$$

Zvolíme nějaké řešení  $\mathbf{v}^{(0)}$ , které dosadíme do pravé strany a vypočteme  $\mathbf{v}^{(1)}$ . Poté dosadíme  $\mathbf{v}^{(1)}$  do pravé strany a vypočteme  $\mathbf{v}^{(2)}$  atd. Pro počáteční nulové řešení máme posloupnost

$$\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{0};$$

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{g}t;$$

$$\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{g}t + (\mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega})t^2.$$

První iterační řešení  $\mathbf{v}^{(1)}$  je volný pád neovlivněný Coriolisovou silou. Druhé iterační řešení  $\mathbf{v}^{(2)}$  již v sobě zahrnuje vliv Coriolisovy síly. Vzhledem k tomu, že považujeme Coriolisovu sílu za malou poruchu, můžeme iteraci po druhém členu ukončit. Při integraci jsme použili nulovou počáteční rychlost, tedy jednoduchý volný pád. V případě nenulové počáteční rychlosti  $\mathbf{v}_0$  by bylo  $\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t$ . Pro volný pád postačí nalezené řešení bez počáteční rychlosti. Integrace iteračního řešení nám dá polohu kamene:

$$\mathbf{r}(t) \doteq \mathbf{r}^{(2)}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{g}\frac{t^2}{2} + (\mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega})\frac{t^3}{3}. \quad (1.81)$$

Zvolme nyní konkrétní souřadnicový systém na povrchu Země (řešení posuneme ze středu Země k povrchu, poloha vystupuje jen v prvním členu na pravé straně). Osa  $z$  bude mířit svisle, osu  $x$  orientujeme na východ a osu  $y$  na sever. Jde o pravotočivý souřadnicový systém, což ve výsledku zajišťuje správná znaménka vektorových součinů. Na posledním obrázku je  $\theta$  polární úhel a  $\lambda = 90^\circ - \theta$  zeměpisná šířka. Jednotlivé vektory v řešení (1.81) budou:

$$\mathbf{r}^{(0)} = (0, 0, H);$$

$$\mathbf{g} = (0, 0, -g); \quad (1.82)$$

$$\boldsymbol{\omega} = (0, \omega \cos \lambda, \omega \sin \lambda).$$

Volný pád kamene je tedy po rozepsání vektorového součinu popsán vztahy

$$\begin{aligned} x &= \frac{g\omega t^3}{3} \cos \lambda; \\ y &= 0; \\ z &= H - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Kámen se bude při pádu odchylovat vlivem Coriolisovy síly ve směru osy  $x$ , tedy na východ. Nyní zbývá určit velikost odklonu. Položíme li v třetí rovnici (1.83)  $z = 0$ , zjistíme dobu, za kterou kámen dopadl. Tu dosadíme do vztahu pro  $x$  a máme výslednou vzdálenost

$$\Delta x = x_{\text{fin}} - x_0 = \frac{g\omega}{3} \left( \frac{2H}{g} \right)^{3/2} \cos \lambda \approx 7 \text{ mm}. \quad (1.84)$$

### 1.4.3 Problém dvou těles, Keplerova úloha

Mějme dvě tělesa, která na sebe vzájemně působí silou (gravitační, elektrostatickou nebo jinou silou působící na spojnici obou těles). Jejich pohybové rovnice jsou:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{12} ; \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{21} . \end{cases} \quad (1.85)$$

Ze zákona akce a reakce platí:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0 . \quad (1.86)$$

Od polohových vektorů  $\mathbf{r}_1$  a  $\mathbf{r}_2$  přejdeme k jiné šestici souřadnic – poloze těžiště a relativní poloze druhého tělesa vzhledem k prvnímu:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_T &\equiv \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} ; \\ \mathbf{r} &\equiv \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 . \end{aligned} \quad (1.87)$$

Z rovnic (1.85) snadno nalezneme pohybové rovnice v nových proměnných:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_T &= \frac{\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21}}{m_1 + m_2} = 0 ; \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_2} - \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_1} = \left( \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \mathbf{F}_{21} . \end{aligned}$$

V nových proměnných mají tedy pohybové rovnice velmi jednoduchý tvar

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{r}}_T = 0 ; \\ \mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{21} , \end{cases} \quad (1.88)$$

kde  $\mu$  je tzv. redukovaná hmotnost daná vztahem

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} . \quad (1.89)$$

Z první rovnice (1.88) je vidět, že těžiště soustavy se může pohybovat jen konstantní rychlostí. Z druhé rovnice je zřejmé, že pohyb dvou těles lze řešit jako pohyb jediného tělesa s redukovanou hmotností  $\mu$ , které se pohybuje vzhledem k prvnímu z obou těles. Pokud je hmotnost prvního tělesa podstatně větší než hmotnost druhého tělesa, je redukovaná hmotnost přibližně rovna hmotnosti menšího z obou těles. Velké těleso se v tomto přiblížení vůbec nepohybuje. Jde například o pohyb planet kolem Slunce. Obíhající planety ovlivní pohyb Slunce minimálně. Není bez zajímavosti, že pohyb dvou těles, které na sebe působí silami na jejich spojnici, je vždy rovinný. Vyplývá to ze zákona zachování momentu hybnosti:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\mathbf{a} = 0 \quad \Rightarrow \\ \mathbf{r} \times m\mathbf{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \parallel \mathbf{r} . \end{aligned} \quad (1.90)$$

Zrychlení, kterým na sebe tělesa působí leží na jejich spojnici. Pokud pohyb probíhá v nějaké rovině, zrychlení nikdy nemůže působit mimo tuto rovinu, a proto se pohyb bude konat pouze v této rovině.

## ■ Keplerova úloha

Řešme nyní pohyb planety o hmotnosti  $m$  kolem Slunce s hmotností  $M$  ( $m \ll M$ ). Pokud by hmotnosti obou těles byly souměřitelné, můžeme úlohu snadno převést na relativní pohyb tělesa o redukované hmotnosti kolem druhého z těles. Naše úloha je rovinná. Při řešení proto použijeme polární souřadnice, v nichž má Lagrangeova funkce tvar (1.25)

$$L(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + G \frac{mM}{r}. \quad (1.91)$$

V soustavě se budou zachovávat moment hybnosti a energie:

$$b \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi}, \quad (1.92)$$

$$E \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \dot{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - G \frac{mM}{r} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{b^2}{2mr^2} - G \frac{mM}{r}. \quad (1.93)$$

V zákonu zachování energie jsme časovou změnu úhlu  $\varphi$  vyjádřili ze zákona zachování momentu hybnosti. Namísto řešení pohybových rovnic, které jsou druhého řádu, můžeme integrovat zákony zachování, které jsou prvního řádu. Z obou zákonů zachování vypočteme časové derivace zobecněných souřadnic:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{b}{mr^2}, \quad (1.94)$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{b^2}{2mr^2} + G \frac{mM}{r} \right)}. \quad (1.95)$$

Jde o soustavu diferenciálních rovnic pro proměnné  $r(t)$  a  $\varphi(t)$ . V Keplerově úloze nás nezajímá časový vývoj souřadnic, ale jen tvar dráhy planety, tj. závislost  $r(\varphi)$ . Proto vydělíme druhou rovnicí první:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{b^2}{2mr^2} + G \frac{mM}{r} \right)}}{b/mr^2}. \quad (1.96)$$

Tuto rovnici pro  $r(\varphi)$  je možné řešit přímo separací a následnou integrací. Zvolme ale poněkud jiný postup. Rovnici umocníme na druhou a upravíme do tvaru

$$\frac{b^2}{2mr^4} (r')^2 = E - \frac{b^2}{2mr^2} + \frac{GmM}{r}$$

Čárka označuje derivaci podle proměnné  $\varphi$ . Zvolíme substituci

$$r = \frac{1}{\xi}; \quad r' = -\frac{1}{\xi^2} \xi', \quad (1.97)$$

po které dostaneme

$$\frac{b^2}{2Gm^2M} (\xi')^2 + \frac{b^2}{2Gm^2M} \xi^2 - \xi = \frac{E}{GmM}; \quad (1.98)$$

Pokud rovnici ještě jednou derivujeme, získáme

$$\frac{b^2}{Gm^2M} \xi'' \xi' + \frac{b^2}{Gm^2M} \xi \xi' - \xi' = 0;$$

$$\frac{b^2}{Gm^2M} (\xi'' + \xi) = 1.$$

$$\xi'' + \xi = 1/p; \quad p \equiv \frac{b^2}{Gm^2M} \quad (1.99)$$

Jde o lineární diferenciální rovnici druhého řádu s pravou stranou. Partikulární řešení je  $1/p$ , homogenní řešení můžeme zapsat ve tvaru  $\cos(\varphi - \varphi_0)$ . Celkové řešení tedy bude

$$\xi = c \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{p}. \quad (1.100)$$

Řešení má dvě integrační konstanty  $\varphi_0$  a  $c$ . Konstanta  $\varphi_0$  určuje počátek odečtu polárního úhlu. Vhodným pootočením souřadnicové soustavy můžeme zvolit  $\varphi_0 = 0$ . Konstantu  $c$  určíme tak, aby nalezené řešení splňovalo původní rovnici (1.98), tj. rovnici před derivováním (derivování je neekvivalentní úprava):

$$c = \sqrt{\frac{2E}{GmMp} + \frac{1}{p^2}}. \quad (1.101)$$

Konstantu  $c$  dosadíme do řešení (1.100) a vrátíme se k původní proměnné  $r$ :

$$r = \frac{p}{1 + \left( \sqrt{\frac{2Ep}{GmM} + 1} \right) \cos \varphi}.$$

Výsledné řešení má tedy tvar

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}; \quad \varepsilon \equiv \sqrt{\frac{2Ep}{GmM} + 1}; \quad p \equiv \frac{b^2}{Gm^2M}. \quad (1.102)$$

Jde o obecnou rovnici kuželosečky (viz dodatek D) s excentricitou  $\varepsilon$ . V gravitačním poli centrálního tělesa se tedy budou jiná tělesa pohybovat po kuželosečkách. Pro  $E < 0$  je  $\varepsilon < 1$  a pohyb se koná po elipse. Záporná energie znamená vazbu obou těles. Tento případ platí pro planety sluneční soustavy. Pro  $E = 0$  je  $\varepsilon = 1$  a pohyb je parabolický. Pro  $E > 0$  je  $\varepsilon > 1$  a těleso se pohybuje po hyperbole. Minimální a maximální vzdálenost oběhu bychom ve všech případech dostali hledáním extrémů závislosti (1.102).

### ■ Efektivní potenciál

Energie pohybujícího se tělesa je z Lagrangeovy funkce dána formulí (1.93)

$$E \equiv \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 - G \frac{mM}{r}. \quad (1.103)$$

Energie se skládá z radiální kinetické energie, úhlové složky kinetické energie a potenciální energie. Výrazy se zobecněnými rychlostmi tvoří kinetickou energii a výraz obsahující jen polohu potenciální energii. Pokud ale vyjádříme druhý člen za pomoci zákona zachování hybnosti (1.92), dostaneme

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{b^2}{2mr^2} - G \frac{mM}{r}. \quad (1.104)$$

Druhý člen je nyní závislý pouze na poloze a můžeme ho proto přiřadit k potenciálu. Interpretace členu jako kinetického nebo potenciálního je tedy relativní a závisí na úhlu našeho pohledu. Zaveďme tzv. efektivní potenciál:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r);$$

$$V_{\text{eff}}(r) \equiv \frac{b^2}{2mr^2} - G \frac{mM}{r}. \quad (1.105)$$

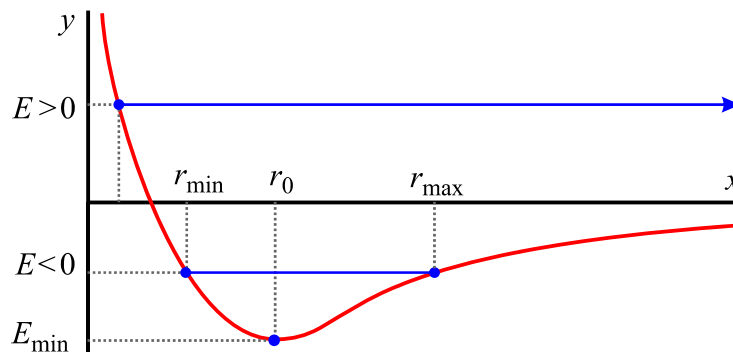
Z první rovnice snadno určíme radiální rychlost tělesa

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(r))} \quad (1.106)$$

Je zřejmé, že pohyb se může konat jedině v takových oblastech efektivního potenciálu, kde platí

$$E \geq V_{\text{eff}}(r). \quad (1.107)$$

Průběh efektivního potenciálu je znázorněn na obrázku. Z něho je patrné, že pro  $E > 0$  je pohyb neomezený,  $r \in \langle r_{\min}, \infty \rangle$ , pohyb se koná po hyperbole. Naopak pro  $E < 0$  je pohyb omezený,  $r \in \langle r_{\min}, r_{\max} \rangle$  a pohyb se koná po elipse. Limitními případy jsou  $E = 0$  (pohyb po parabole) a  $E = E_{\min}$  (pohyb po kružnici  $r = r_0$ ).



#### Příklad 17: Země jako oscilátor

Pohyb Země kolem Slunce lze chápat jako pohyb v efektivním potenciálu v okolí minima. Takový pohyb je přibližně harmonický (radiální vzdálenost Země od Slunce periodicky kolísá). Potenciál lze nahradit v okolí minima parabolickou závislostí. Předpokládejte, že moment hybnosti Země je  $b = 2.7 \times 10^{40} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ . Určete minimum efektivního potenciálu a periodu oběhu Země kolem Slunce.

**Řešení:** Standardním postupem (viz kapitola 1.3.2) určíme minimum efektivního potenciálu (1.105) a tuhost oscilací. Z tuhosti pak již snadno nalezneme periodu pohybu:

$$r_0 = \frac{b^2}{Gm^2M} \approx 150 \times 10^6 \text{ km};$$

$$k = V''_{\text{eff}}(r_0) = \frac{G^4 m^7 M^4}{b^6};$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}} = \frac{2\pi}{\sqrt{G^4 m^6 M^4 / b^6}} = \frac{2\pi b^3}{G^2 m^3 M^2} \approx 365 \text{ dní}.$$

#### ■ Keplerovy zákony

- 1) Planety se pohybují kolem Slunce po elipsách, Slunce je v jednom z ohnisek.
- 2) Plošná rychlost průvodiče planety (spojnice planety se Sluncem) je konstantní.
- 3) Poměr druhé mocniny oběžné doby planety a třetí mocniny její velké poloosy je konstantní:

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m+M)}} \quad (1.108)$$

Malým  $m$  značíme hmotnost planety, velkým  $M$  hmotnost Slunce.

**Ad 1).** Pohyb po elipse plyne okamžitě ze vztahu (1.102).

**Ad 2).** Jde o jednoduchý důsledek zákona zachování momentu hybnosti. Změnu plochy při pohybu planety můžeme zapsat za pomoci vektorového součinu

$$d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times d\mathbf{r}.$$

Pro plošnou rychlost potom máme

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{1}{2m} \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \frac{\mathbf{b}}{2m}. \quad (1.109)$$

Zákon zachování plošné rychlosti je tedy jen jinou formulací zákona zachování momentu hybnosti planety.

**Ad 3).** V relativních souřadnicích podle vztahu (1.88) pro problém dvou těles platí

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{mM}{m+M} \ddot{\mathbf{r}} = G \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \Rightarrow \quad m \ddot{\mathbf{r}} = G \frac{m(m+M)}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

V relativních souřadnicích u problému dvou těles vystupuje namísto hmotnosti Slunce součet hmotností obou těles, jinak je pohybová rovnice identická s rovnicí pro centrální gravitační pole. Integrujme nyní velikost vztahu (1.109) pro plošnou rychlost

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} = \frac{b}{2m} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{b}{2m} T \quad \Rightarrow \quad \pi ab = \frac{b}{2m} T \quad \Rightarrow . \\ 2\pi abm = bT \end{aligned} \quad (1.110)$$

V odvození jsme použili vztah (D.5) pro plochu elipsy  $S = \pi ab$ , který je uveden v dodatku E. Veškeré veličiny se pokusíme převést na charakteristiky eliptické dráhy. Za moment hybnosti dosadíme ze vztahu (1.102), na rozdíl od centrálního pole zde bude ale hmotnost Slunce vystupovat v součtu s hmotností planety, tj.

$$p = \frac{b^2}{Gm^2(m+M)}. \quad (1.111)$$

Po dosazení za  $b$  ze vztahu (1.111) do vztahu (1.110) dostaneme

$$2\pi abm = \sqrt{pGm^2(m+M)} T \quad \Rightarrow \quad 4\pi^2 a^2 b^2 = Gp(m+M)T^2.$$

Veškeré parametry elipsy nyní převedeme na velkou poloosu a excentricitu. Využijeme vztahy (D.4) z dodatku E, tj.  $b^2 = a^2(1-\varepsilon^2)$ ;  $p = a(1-\varepsilon^2)$ . Výsledkem je hledaný vztah

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m+M)}.$$



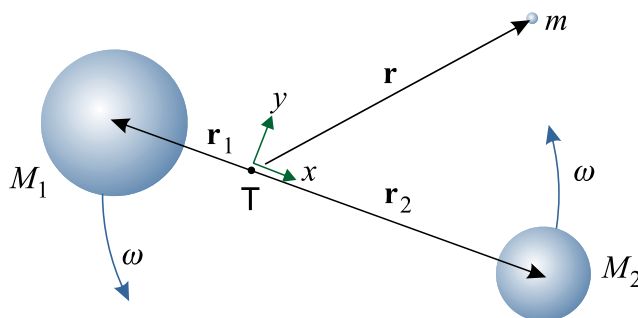
### 1.4.4 Lagrangeovy body

Problém tří těles, které na sebe vzájemně gravitačně působí, není v plné šíři analyticky řešitelný. V případě tzv. restriktivního kruhového problému tří těles lze v okolí dvou vzájemně obíhajících těles nalézt pět rovnovážných bodů. Pokud do nich vložíme malé testovací tělísko, budou v rovnováze gravitační síly od obou těles s odstředivou silou pohybu v daném místě. Tyto body poprvé našel francouzsko-italský matematik Joseph Lagrange a nesou jeho jméno.

#### Předpoklady:

- 1) jde o tzv. restriktivní problém, tj. dvě tělesa jsou velká a jedno je malé, testovací. Toto testovací tělísko neovlivní gravitační potenciál v daném místě.
- 2) jde o cirkulární problém, tj. dvě velká tělesa kolem sebe vzájemně obíhají tak, že se nemění jejich vzdálenost. Relativní pohyb jednoho vůči druhému probíhá po kružnici. Přibližně takovou soustavou jsou například dvojice Země-Měsíc, Země-Slunce nebo Jupiter-Slunce.

#### ■ Formulace úlohy



Předpokládáme, že dvě hmotná tělesa o hmotnostech  $M_1, M_2$  obíhají kolem společného těžiště takovým způsobem, že jejich vzájemná vzdálenost  $R$  zůstává konstantní, tj. jedno těleso obíhá kolem druhého po kružnici (na grafu efektivního potenciálu jde o minimum). Hledáme takové polohy testovacího tělíska o malé hmotnosti  $m$  ( $m \ll M_1, M_2$ ), ve kterých jsou veškeré síly (gravitační, odstředivá) nulové a tělísko se nepohybuje (tím je nulová i Coriolisova síla). Problém budeme formulovat v souřadnicové soustavě, která má počátek v těžišti a rotuje spolu s oběma tělesy úhlovou rychlostí danou třetím Keplerovým zákonem (1.108)

$$\omega^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{R^3}; \quad R = r_1 + r_2. \quad (1.112)$$

Úhlová rychlost jako vektor míří kolmo na rovinu oběhu obou těles (například v ose  $z$ ). Spojnice obou těles tvoří jednu ze souřadnicových os naší soustavy (například osu  $x$ ). Jde o neinerciální souřadnicovou soustavu, ve které je pohyb testovacího tělíska dán Lagrangeovou funkcí – viz (1.75)

$$L = \frac{1}{2} m(\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 + G \frac{mM_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + G \frac{mM_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} \quad (1.113)$$

Lagrangeovu funkci lze zapsat za pomoci efektivní potenciální energie ve tvaru

$$L = T - V_{\text{eff}}; \quad (1.114)$$

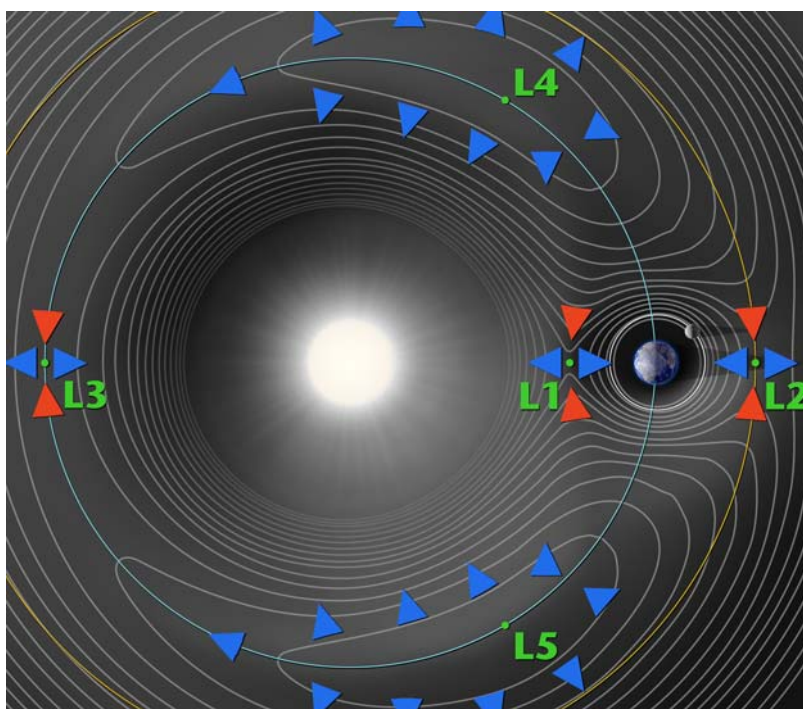
$$T \equiv \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2, \quad (1.115)$$

$$V_{\text{eff}} \equiv -m \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \frac{1}{2} m (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 - G \frac{mM_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} - G \frac{mM_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}. \quad (1.116)$$

Silové působení na naše testovací tělísko (resp. pohybová rovnice) má tvar (1.80), který jsme odvodili pro neinerciální souřadnicovou soustavu:

$$\frac{dm\mathbf{v}}{dt} = 2m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) + m\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) - G \frac{mM_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) - G \frac{mM_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \quad (1.117)$$

Napravo jsou jednotlivé silové členy (Coriolisova síla, odstředivá síla a gravitační síly působící od obou těles. Souřadnicovou soustavu volíme tak, že osa  $x$  leží na spojnici obou těles, osa  $y$  je kolmá na osu  $x$  (v rovině oběhu) a osa  $z$  je kolmá na rovinu oběhu. Při hledání rovnovážných bodů můžeme postupovat dvojím způsobem. První možností je hledání extrémů efektivního potenciálu (1.116). První člen bude nulový, protože hledáme jen rovnovážné body, ve kterých se testovací tělísko nepohybuje ( $\mathbf{v} = 0$ ). Tento postup je vhodný pro grafické řešení – ekvipotenciály funkce  $V_{\text{eff}}$  můžeme vykreslovat vhodným softwarem (například v programu MATHEMATICA).



Ekvipotenciály efektivního potenciálu soustavy Slunce-Země. Šipkami je znázorněn směr „z kopce do údolí“. NASA/WMAP.

Druhou možností je řešit podmínku na nulovou sílu (1.117). V rovnovážných bodech se testovací těleso nehýbe, jeho rychlost je vůči naší souřadnicové soustavě nulová, a proto je nulový i první člen (Coriolisova síla). Jde tedy pouze o rovnováhu gravitační a odstředivé síly. Coriolisova síla má ale podstatný vliv na stabilitu nalezených Lagrangeových bodů.

### ■ Lagrangeovy body

Lagrangeovy body hledáme z rovnice

$$m\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) - G \frac{mM_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) - G \frac{mM_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) = 0, \quad (1.118)$$

která vyjadřuje rovnováhu odstředivé síly a gravitačních sil. Polohové vektory  $\mathbf{r}_1$  a  $\mathbf{r}_2$  jsou v naší zvolené souřadnicové soustavě známy, do (1.118) dosadíme:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= \left( -\frac{M_2}{M_1 + M_2} R, 0, 0 \right) = (-\mu_2 R, 0, 0); \\ \mathbf{r}_2 &= \left( +\frac{M_1}{M_1 + M_2} R, 0, 0 \right) = (+\mu_1 R, 0, 0); \\ \boldsymbol{\omega} &= (0, 0, \omega); \\ \omega^2 &= \frac{G(M_1 + M_2)}{R^3} = \frac{GM}{R^3};\end{aligned}\tag{1.119}$$

$$\mathbf{r} = (x, y, 0), \quad \bar{\mathbf{r}} = (\bar{x}, \bar{y}, 0) \equiv (x/R, y/R, 0),$$

kde jsme označili bezrozměrné proměnné

$$\begin{aligned}\mu_1 &\equiv \frac{M_1}{M}; & \mu_2 &\equiv \frac{M_2}{M}; & M &\equiv M_1 + M_2; \\ \bar{x} &\equiv \frac{x}{R}; & \bar{y} &\equiv \frac{y}{R}\end{aligned}\tag{1.120}$$

Konstanty  $\mu_1, \mu_2$  jsou relativní hmotnosti (vyjadřují, jakou část z celkové hmotnosti má první resp. druhé těleso. Proměnné  $\bar{x}, \bar{y}$  jsou bezrozměrné souřadnice Lagrangeova bodu v jednotkách vzdálenosti mezi oběma tělesy. Výsledkem je soustava dvou rovnic pro dvě neznámé souřadnice Lagrangeova bodu:

$$\begin{aligned}\bar{x} - \frac{\mu_1(\bar{x} + \mu_2)}{[(\bar{x} + \mu_2)^2 + \bar{y}^2]^{3/2}} - \frac{\mu_2(\bar{x} - \mu_1)}{[(\bar{x} - \mu_1)^2 + \bar{y}^2]^{3/2}} &= 0; \\ \bar{y} - \frac{\mu_1\bar{y}}{[(\bar{x} + \mu_2)^2 + \bar{y}^2]^{3/2}} - \frac{\mu_2\bar{y}}{[(\bar{x} - \mu_1)^2 + \bar{y}^2]^{3/2}} &= 0.\end{aligned}\tag{1.121}$$

Z druhé rovnice plyne okamžitě jedno z řešení, a to  $\bar{y} = 0$ . Jde o Lagrangeovy body nacházející se na ose  $x$ , tedy na přímce procházející oběma tělesy. Po dosazení  $\bar{y} = 0$  do první rovnice máme

$$\bar{x} - \frac{\mu_1 \operatorname{sgn}(\bar{x} + \mu_2)}{(\bar{x} + \mu_2)^2} - \frac{\mu_2 \operatorname{sgn}(\bar{x} - \mu_1)}{(\bar{x} - \mu_1)^2} = 0.\tag{1.122}$$

Jde o rovnici pátého stupně, která má tři reálná řešení (Lagrangeovy body  $L_1, L_2, L_3$ ). V rovnici ponecháme menší z obou parametrů, například hmotnost  $\mu_2$ :

$$\bar{x}(\bar{x} + \mu_2)^2(\bar{x} - 1 + \mu_2)^2 \pm (1 - \mu_2)(\bar{x} - 1 + \mu_2)^2 \pm \mu_2(\bar{x} + \mu_2)^2 = 0.\tag{1.123}$$

Možné kombinace znamének u druhého a třetího členu jsou  $+-$  ( $L_1$ );  $++$  ( $L_2$ ) a  $--$  ( $L_3$ ). Řešení je možné najít buď numericky nebo provést rozvoj do nejnižšího řádu podle  $\mu_2$ . Například pro soustavu Slunce-Země je  $\mu_2 \approx 3 \times 10^{-6}$  a provedení rozvoje podle tohoto parametru je korektní. Výsledné polohy jsou

$$\boxed{L_1 = R \left[ 1 - \left( \frac{\mu_2}{3} \right)^{1/3}, 0 \right]; \quad L_2 = R \left[ 1 + \left( \frac{\mu_2}{3} \right)^{1/3}, 0 \right]; \quad L_3 = -R \left[ 1 + 5 \frac{\mu_2}{12}, 0 \right].}\tag{1.124}$$

Pro soustavu Slunce-Země je vzdálenost  $R$  je rovna jedné astronomické jednotce, tj. přibližně  $150 \times 10^6$  km. Lagrangeovy body  $L_1$  a  $L_2$  jsou vzdáleny od Země zhruba  $1,5 \times 10^6$  km.

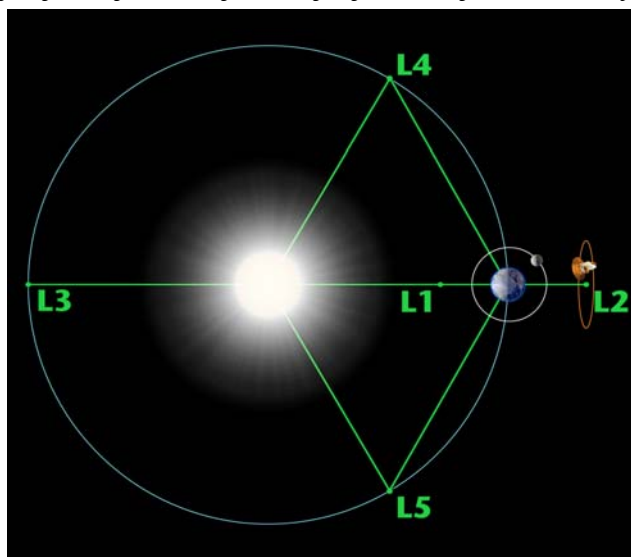
K nalezení řešení pro  $\bar{y} \neq 0$  se vrátíme k rovnicím (1.121). Můžeme využít symetrie problému podél osy  $x$ . Řešení lze nalézt v tomto případě analyticky:

$$L_4 = R \left[ \frac{\mu_1 - \mu_2}{2}, +\frac{\sqrt{3}}{2} \right]; \quad L_5 = R \left[ \frac{\mu_1 - \mu_2}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right]. \quad (1.125)$$

**Lagrangeovy body  $L_1$ ,  $L_2$ .** Oba tyto body leží na přímce procházející oběma tělesy. V případě soustavy Slunce-Země leží bod  $L_1$  ve vzdálenosti  $1,5 \times 10^6$  km směrem ke Slunci a bod  $L_2$  ve stejné vzdálenosti směrem od Slunce. Bod  $L_1$  je velmi výhodný pro pozorování Slunce. Poprvé zde byla umístěna sonda ISEE-3 v roce 1978. Později se bod  $L_1$  stal domovem jedné z nejslavnějších slunečních sond SOHO. V bodě  $L_1$  je rychlost oběhu Slunce větší než v místě, kde je Země. Gravitační tah Země ale sondu v  $L_1$  brzdí na stejnou úhlovou rychlost. Naopak v bodě  $L_2$ , který je dále od Slunce, jsou umístěny sondy pro výzkum vzdáleného vesmíru – americká WMAP a evropská Planck. Sondy by zde obíhaly Slunce pomaleji, ale gravitační tah Země jim uděluje správnou rychlost. Z hlediska stability jsou  $L_1$  i  $L_2$  sedlové body, při vychýlení v jednom směru působí na sondu vratná síla, při vychýlení v druhém směru se sondy začnou exponenciálně vzdalovat s charakteristickou konstantou  $\tau \approx 23$  dní, což znamená, že porucha roste jako  $\exp(t/\tau)$ . Sondy v těchto bodech musejí vždy po několika měsících provádět korekce dráhy.

**Lagrangeův bod  $L_3$ .** Bod leží pro soustavu Slunce-Země na opačné straně Slunce, nepatrně dále, než je oběžná dráha Země. Jakékoli těleso v tomto bodě je pro nás trvale nepozorovatelné, protože je za slunečním kotoučem. To vedlo k domněnkám, že by se v bodě  $L_3$  mohla nacházet pro nás trvale neviditelná planeta, která dostala název planeta X. Lagrangeův bod  $L_3$  je opět sedlovým bodem, je nestabilní s charakteristickou konstantou  $\tau \approx 150$  let. Jakákoli dlouhodobější existence planety v tomto místě je proto zcela vyloučena.

**Lagrangeovy body  $L_4$ ,  $L_5$ .** Tyto body neleží na spojnici obou těles, ale tvoří s nimi rovnostranné trojúhelníky. Vzdálenost bodů  $L_4$  a  $L_5$  k oběma tělesům jsou stejné a rovny  $R$ , tj. vzdálenosti těles samotných. Oba body leží v maximech efektivního potenciálu, a proto by se mohlo na první pohled zdát, že jsou nestabilní. Při jakémkoli vychýlení ale začne působit na testovací těleso Coriolisova síla, která ho bude vracet zpět. Výsledkem je oběh bodů  $L_4$  a  $L_5$ , pro soustavu Slunce-Země s periodou 89 dní. Tělesa nacházející se v Lagrangeových bodech  $L_4$  a  $L_5$  se nazývají Trojané. Nejznámější jsou Trojané soustavy Slunce-Jupiter.



Lagrangeovy body soustavy Slunce-Země.

### 1.4.5 Disipace energie

Lagrangeovy rovnice v podobě, ve které jsme je odvodili, platí pro nedisipativní systémy, tedy pro systémy, ve kterých se nepřeměňuje část energie nevratně na teplo. To je výhodné pro všechny základní interakce v přírodě. Nicméně pro techničtější využití je někdy třeba tepelné ztráty do výpočtu zahrnout. Stačí, aby v elektrickém obvodu byl přítomný elektrický odpor nebo aby se pohybující těleso třelo o okolní vzduch. V těchto případech se v pohybových rovnicích vždy vyskytují členy úměrné zobecněné rychlosti. Jako příklad může posloužit pohybová rovnice pro letící kámen:

$$\frac{d m \mathbf{v}}{dt} = m \mathbf{g} - \alpha \mathbf{v} . \quad (1.126)$$

První člen napravo je tíhová síla a druhý je síla odporu vzduchu. Ta je úměrná rychlosti a má opačný směr než pohyb. Jiným příkladem může být jednoduchý obvod, kde jsou v sérii zapojeny všechny tři základní prvky, tj. kondenzátor, cívka a odpor. Součet napětí na všech prvcích musí dát nulu, tedy

$$\mathcal{L} \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{\mathcal{C}} + \mathcal{R}I = 0 . \quad (1.127)$$

Zobecněnou proměnnou (viz kapitola 1.1.6, LC obvod) je náboj. „Pohybová“ rovnice má tvar

$$\mathcal{L} \ddot{Q} + \mathcal{R} \dot{Q} + \frac{Q}{\mathcal{C}} = 0 . \quad (1.128)$$

Druhý člen je opět úměrný zobecněné rychlosti a představuje v systému disipaci energie. Pokud chceme zobecnit Lagrangeovy rovnice i pro případ disipace energie, budou mít tvar

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} + c_l \dot{q}_l = 0 . \quad (1.129)$$

V posledním členu jsme použili Einsteinovu sumační konvenci. To nás vede k reformulaci Lagrangeových rovnic do tvaru

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k} ;} \quad (1.130)$$

$$R = \frac{1}{2} \alpha_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l .$$

Derivacemi kvadratické funkce na pravé straně vzniknou disipativní členy, které jsou lineární v zobecněných rychlostech. Tato funkce se nazývá *Rayleighova disipační funkce*. V případě disipace tak pro správnou formulaci úlohy musíme „uhodnout“ dvě funkce: Lagrangeovu funkci a Rayleighovu disipační funkci. Pokud mají obě funkce správný tvar, získáme rovnice, které jsou ve shodě s přírodními ději.

#### Příklad 18: RLC obvod

Rovnici (1.128) získáme z Lagrangeových rovnic (1.130), pokud zvolíme

$$L(Q, \dot{Q}) = \frac{1}{2} \mathcal{L} \dot{Q}^2 - \frac{Q^2}{2\mathcal{C}} ; \quad R(\dot{Q}) = \frac{1}{2} \mathcal{R} \dot{Q}^2 . \quad (1.131)$$

Lagrangeova funkce má obdobný tvar jako v mechanice (členy připomínají rozdíl kinetické a potenciální energie). Rayleighova disipační funkce je úměrná ztrátě energie ze systému za jednotku času, protože  $dE/dt = UI = RI^2 = R(dQ/dt)^2$ .

Hybnost a energii definujeme v případě disipativních procesů stejným způsobem jako obvykle, tj.

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}; \quad (1.132)$$

$$E \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L. \quad (1.133)$$

Energie se ale v případě disipace nebude zachovávat, ani když Lagrangeova funkce nezávisí explicitně na čase. Najdeme v tomto případě změnu energie s časem:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k = \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k = \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right] \dot{q}_k = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = -2R \end{aligned}$$

V posledním kroku jsme použili Eulerovu větu o derivaci homogenních funkcí, která pro kvadratickou funkci  $f(x)$  má tvar  $xd f/dx = 2f$  (důkaz je triviální, jde jen o derivaci kvadrátu). Získaný výsledek

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = -2R}. \quad (1.134)$$

jasně dává do souvislosti Rayleighovu disipační funkci se ztrátou energie ze systému za jednotku času. Vztah (1.134) lze zapsat jako zákon zachování energie takto:

$$\boxed{E + \int_0^t 2R dt = \text{const}}. \quad (1.135)$$

Provedeme-li transformaci od proměnných  $(q, dq/dt)$  k proměnným  $(q, p)$  v zobecněné energii, získáme Hamiltonovu funkci  $H(q, p)$ . Ukažme nyní, jak budou vypadat Hamiltonovy rovnice v případě disipace energie. Zřejmě platí

$$\begin{aligned} dL &= \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k \quad \Rightarrow \\ dL &= \left( \dot{p}_k + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k} \right) dq_k + p_k d\dot{q}_k \quad \Rightarrow \\ dL &= \left( \dot{p}_k + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k} \right) dq_k + d(p_k \dot{q}_k) - \dot{q}_k dp_k \quad \Rightarrow \\ d(p_k \dot{q}_k - L) &= - \left( \dot{p}_k + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k} \right) dq_k + \dot{q}_k dp_k \quad \Rightarrow \\ dH &= - \left( \dot{p}_k + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k} \right) dq_k + \dot{q}_k dp_k. \end{aligned}$$

Při úpravě prvního vztahu jsme využili Lagrangeovy rovnice ve tvaru (1.130) a definici hybnosti (1.132). Vzhledem k tomu, že hamiltonián  $H$  je pouze funkcí zobecněných souřadnic a hybností, musí být koeficienty u příslušných diferenciálů rovny odpovídajícím parciálním derivacím, tj.

$$-\left(\dot{p}_k + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial H}{\partial q_k}; \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}.$$

Odsud již snadno získáme Hamiltonovy pohybové rovnice pro případ disipace energie:

$$\begin{aligned} \dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k}; \\ \dot{p}_k &= -\frac{\partial H}{\partial q_k} - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k}. \end{aligned} \quad (1.136)$$

Člen  $\partial R/\partial \dot{q}_k$  musíme vyjádřit pomocí zobecněných poloh a hybností, tj. jako funkci  $(q, p)$ .

### 1.4.6 Inverzní úloha

Velice zajímavou úlohou je hledání Lagrangeovy funkce pro daný problém. Pokud nevíme vůbec nic, snažíme se Lagrangeovu funkci odhadnout jako nějakou kombinaci skalárů v teorii. Pokud dostaneme jako výsledek pohybové rovnice, které souhlasí s experimentem, bylo naše úsilí korunováno úspěchem. K dané úloze existuje nekonečné množství Lagrangových funkcí, které se mohou lišit o úplnou časovou derivaci libovolné funkce. Jinými slovy, pokud k nalezené Lagrangeově funkci přičteme (nebo od ní odečteme)  $df/dt$ , kde  $f=f(t, q, dq/dt)$ , dostaneme stejné Lagrangeovy rovnice. Toho se využívá k následné úpravě nalezené Lagrangeovy funkce do co možná nejjednoduššího tvaru.

Mnohdy ale nehledáme Lagrangeovu funkci na „zelené louce“, ale známe pohybové rovnice a k nim hledáme vhodnou Lagrangeovu funkci. Označme levé strany pohybových rovnic  $\varepsilon_k$ :

$$\varepsilon_k \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (1.137)$$

Inverzní úlohou rozumíme nalezení Lagrangeovy funkce ze známých diferenciálních rovnic ve tvaru  $\varepsilon_k=0$ . Tato úloha nemusí mít vždy řešení, tedy k některým soustavám rovnic Lagrangeova funkce neexistuje a variační formulace není možná. Italský teoretický fyzik Enzo Tonti v roce 1969 odvodil postačující podmínky pro existenci Lagrangeovy funkce [5]: Pokud levé strany diferenciálních rovnic splňují podmínky

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \ddot{q}_l} - \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial \ddot{q}_k} &= 0; \\ \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \dot{q}_l} + \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial \dot{q}_k} &= 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial \dot{q}_k}; \\ \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial q_l} - \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial q_k} &= -\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial \dot{q}_k} \right] + \frac{d^2}{dt^2} \left[ \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial \ddot{q}_k} \right] \end{aligned} \quad (1.138)$$

pro každé  $k, l$ , potom jsou rovnice  $\varepsilon_k=0$  variační, tj. existuje Lagrangeova funkce  $L$  a platí

$$L = -q_k \int_0^1 \varepsilon_k(t, \tau q, \tau \dot{q}, \tau \ddot{q}) d\tau. \quad (1.139)$$

Ve vztahu (1.139) platí sumační konvence. Znaménko minus je zde jen proto, aby pohybové rovnice vyšly ve tvaru (1.137). Při opačném znaménku bychom získali rovnice  $-\varepsilon_k = 0$ . Nejsou-li splněny Tontioho podmínky variačnosti (1.138), je možné hledat funkce  $f_k$  tak, aby byly existovala Lagrangeova k rovnicím

$$\tilde{\varepsilon}_k \equiv f_k \varepsilon_k = 0. \quad (1.140)$$

V tomto vztahu se přes  $k$  nesčítá, tj. každou z rovnic odděleně vynásobíme nějakou funkcí  $f_k$ . V případě, že nevariačnost rovnic způsobují členy lineární v zobecněných rychlostech  $dq_k/dt$ , rozdělíme rovnice na dvě části tak, aby

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k^* q + \alpha_{kl} \dot{q}_l; \quad \alpha_{kl} = \alpha_{lk}. \quad (1.141)$$

V systému probíhající disipační procesy lze popsat Rayleighovou funkcí

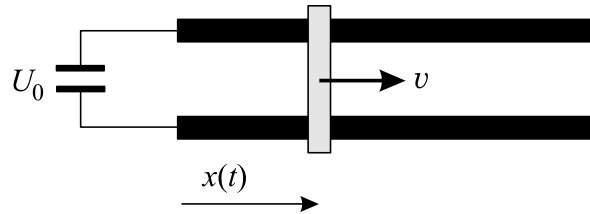
$$R = \frac{1}{2} \alpha_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l. \quad (1.142)$$

Inverzní variační problém lze řešit tak, že najdeme Lagrangeovu funkci k rovnicím  $\varepsilon_k^* = 0$  a systém pak splňuje Lagrangeovy rovnice ve tvaru (1.130) s Rayleighovou disipační funkcí

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k}. \quad (1.143)$$

### Příklad 19: Pohyb příčky

Na dvě vodorovné elektrody je napříč položena kovová příčka o hmotnosti  $m$ . Na počátek elektrod přivedeme napětí  $U_0$  z kondenzátorové baterie. Příčkou začne téct elektrický proud a tím vznikne magnetické pole, které začne příčku posouvat. Za zobecněné proměnné zvolíme polohu příčky  $x(t)$  a náboj protéký od počátku obvodem  $Q(t)$ .



Předpokládejme, že (například z experimentu) známe rovnice popisující problém:

$$m\ddot{x} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_1 \dot{Q}^2 - \beta \dot{x}; \quad (1.144)$$

$$(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 x) \ddot{Q} + \mathcal{R} \dot{Q} + \frac{Q}{\mathcal{C}} + \mathcal{L}_1 \dot{x} \dot{Q} = U_0. \quad (1.145)$$

Z elektrického hlediska jde o obvod s kapacitou kondenzátorové baterie  $\mathcal{C}$ , odporem  $\mathcal{R}$  a proměnnou indukčností  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 x$ . Poslední člen na levé straně rovnice (1.145) popisuje vzájemnou vazbu mezi mechanickou a elektrickou částí. Z mechanického hlediska je příčka urychlována silou  $\mathcal{L}_1 (dQ/dt)^2/2$  a brzděna třecí silou  $-\beta dx/dt$ . Označme

$$\varepsilon_x \equiv m\ddot{x} - \frac{1}{2} \mathcal{L}_1 \dot{Q}^2 + \beta \dot{x}; \quad (1.146)$$

$$\varepsilon_Q \equiv (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 x) \ddot{Q} + \mathcal{R} \dot{Q} + \frac{Q}{\mathcal{C}} + \mathcal{L}_1 \dot{x} \dot{Q} - U_0. \quad (1.147)$$



Tonihovo variační podmínky jsou splněny jen, pokud je  $\beta = 0$  a  $\mathcal{R} = 0$ . To je celkem přirozené, neboť jde o koeficienty disipativních členů (odpor obvodu a tření příčky). Zavedeme proto Rayleighovu disipační funkci

$$R \equiv \frac{1}{2} \mathcal{R} \dot{Q}^2 + \frac{1}{2} \beta \dot{x}^2 \quad (1.148)$$

a Lagrangeovu funkci budeme hledat jen pro levé strany rovnic bez disipativních členů

$$\varepsilon_x^* \equiv m\ddot{x} - \frac{1}{2} \mathcal{L}_1 \dot{Q}^2; \quad (1.149)$$

$$\varepsilon_Q^* \equiv (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 x) \ddot{Q} + \frac{Q}{\mathcal{C}} + \mathcal{L}_1 \dot{x} \dot{Q} - U_0. \quad (1.150)$$

Tyto rovnice již splňují Tonihovo podmínky a Lagrangeovu funkci vypočteme ze vztahu

$$L = -x \int_0^1 \varepsilon_x^*(\tau x, \tau Q, \tau \dot{x}, \tau \dot{Q}, \tau \ddot{x}, \tau \ddot{Q}) d\tau - Q \int_0^1 \varepsilon_Q^*(\tau x, \tau Q, \tau \dot{x}, \tau \dot{Q}, \tau \ddot{x}, \tau \ddot{Q}) d\tau. \quad (1.151)$$

Po dosazení a jednoduché integraci máme Lagrangeovu funkci

$$L = -x \left( \frac{m_0 \ddot{x}}{2} - \frac{\mathcal{L}_1 \dot{Q}^2}{6} \right) - Q \left( \frac{\mathcal{L}_0 \ddot{Q}}{2} + \frac{\mathcal{L}_1 x \ddot{Q}}{3} + \frac{\mathcal{L}_1 \dot{x} \dot{Q}}{3} + \frac{Q}{2\mathcal{C}} - U_0 \right). \quad (1.152)$$

Lagrangeova funkce (1.152) spolu s Rayleighovou funkcí (1.148) dá sice správné výchozí rovnice, ale Lagrangeova funkce je značně nepřehledná. Využijeme toho, že se rovnice nezmění, pokud k Lagrangeově funkci přičteme (nebo od ní odečteme) úplnou derivaci jakékoli funkce podle času. Členy s druhými derivacemi upravíme takto:

$$x\ddot{x} = \frac{d}{dt}(x\dot{x}) - \dot{x}^2;$$

$$Q\ddot{Q} = \frac{d}{dt}(Q\dot{Q}) - \dot{Q}^2;$$

$$Qx\ddot{Q} = \frac{d}{dt}(Qx\dot{Q}) - \dot{Q} \frac{d}{dt}(Qx).$$

Tato vyjádření dosadíme do Lagrangeovy funkce a vynecháme úplné derivace, které pohybové rovnice neovlivní. Výsledek je nyní mnohem přehlednější:

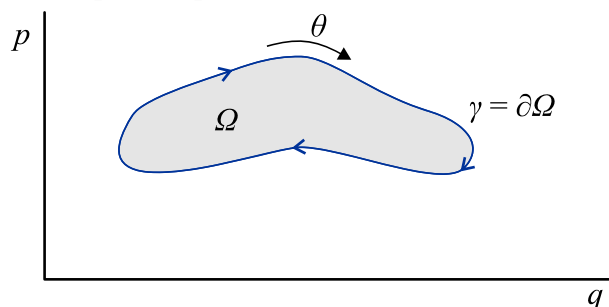
$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 x) \dot{Q}^2 - \frac{Q^2}{2\mathcal{C}} + QU_0. \quad (1.153)$$

Interpretace této Lagrangeovy funkce je zřejmá. První člen je kinetická energie částice, druhý je energie na indukčnosti, třetí je energie souvisící s kapacitou soustavy (má význam potenciální energie, proto má znaménko minus) a poslední člen je souvisí s definicí proměnné  $Q$  (celkový náboj proteklý od počátku obvodem). Pokud bychom za zobecněnou proměnnou volili náboj na kondenzátorové baterii, byl by tento člen nulový. Lagrangeova funkce (1.153) spolu s Rayleighovou funkcí (1.148) jsou přirozeným řešením naší úlohy. Podrobnější řešení pro případ, kdy příčku tvoří plasma v kolejničovém urychlovači nalezne čtenář v [12].

### 1.4.7 Adiabatické invarianty

#### ■ Přesný periodický pohyb

Představme si systém, který se periodicky pohybuje. Příkladem může být kyvadlo, Země obíhající kolem Slunce nebo elektron odrážející se mezi magnetickými zrcadly. Ve fázovém prostoru (na osách jsou zobecněné souřadnice a hybnosti) tvoří takový pohyb uzavřenou křivku, po které se systém pohybuje znova a znova. Předpokládejme že je pohyb periodický v určité zobecněné proměnné  $q$ , které přísluší kanonicky sdružená zobecněná hybnost  $p$ .



Fázová trajektorie uzavírá v rovině  $(q, p)$  oblast  $\Omega$ , jejíž je hranicí. Hranici oblasti zapisujeme v matematice symbolicky takto:  $\gamma = \partial\Omega$  (čteme „křivka  $\gamma$  je hranicí množiny  $\Omega$ “). Plochu uzavřenou fázovou trajektorií označíme  $J$ , její číselnou hodnotu lze snadno určit jako integrál

$$J = \oint_{\gamma} p dq. \quad (1.154)$$

Pokud by měla fázová trajektorie opačný směr než na obrázku, dostali bychom minus plochu uzavřenou fázovou trajektorií. Při periodickém pohybu se velikost této plochy nemění. Stejně tak se zachovává energie

$$H = p\dot{q} - L. \quad (1.155)$$

Lagrangeovu funkci můžeme vyjádřit jako

$$L = p\dot{q}. \quad (1.156)$$

Ve výrazu jsme vynechali konstantu pohybu  $H$ , která nezmění pohybové rovnice. Integrál akce počítaný přes periodu je

$$S = \int_t^{t+T} L dt = \int_t^{t+T} p\dot{q} dt = \int_t^{t+T} p \frac{dq}{dt} dt = \oint_{\gamma} p dq = J. \quad (1.157)$$

Plochu  $J$  uzavřenou fázovou trajektorií tak můžeme chápat jako akci systému počítanou přes jednu periodu. Veličiny  $J$  a  $H$  se při periodickém pohybu nemění. Pokud budeme sledovat systém s vyšší energií (více rozkývané kyvadlo), zvětší se  $J$  i  $H$ . Obě veličiny jsou závislé,

$$J = J(H); \quad H = H(J). \quad (1.158)$$

Již jsme našli dva významy veličiny  $J$ : plocha uzavřená fázovou trajektorií a integrál akce přes periodu. Veličinu  $J$  má ale další důležitý význam. Můžeme ji chápat jako nějakou zobecněnou hybnost soustavy. Ji odpovídající kanonicky sdruženou souřadnici označíme  $\theta$ . Nová souřadnice  $\theta$  musí splňovat Hamiltonovu rovnici

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial J}. \quad (1.159)$$

Vzhledem k tomu, že  $\partial H/\partial J$  je pro systém s danou energií konstanta (lze ukázat, že je rovna převrácené hodnotě periody pohybu), roste nová zobecněná proměnná  $\theta$  lineárně s časem. Může tak symbolizovat například narůstající úhel při oběhu systému po fázové trajektorii. Touto proměnnou můžeme snadno parametrizovat fázovou trajektorii (hranici množiny  $\Omega$ ).

Pro časové derivace libovolné veličiny na hranici  $\gamma = \partial\Omega$  proto můžeme psát ( $\theta$  je jediným parametrem, který jednoznačně určuje polohu na hranici)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial H}{\partial J}. \quad (1.160)$$

Vidíme, že nové kanonicky sdružené proměnné  $J$  a  $\theta$  jsou nesmírně užitečné. Hybnost  $J$  je integrálem pohybu, který vypovídá o velikosti plochy uzavřené fázovou trajektorií a souřadnice  $\theta$  umožňuje jednoznačně parametrizovat hranici této plochy (fázovou trajektorii) a převést úplné časové derivace na hranici na parciální.

### ■ Adiabatické přiblížení

Předpokládejme nyní, že se při periodickém pohybu pomalu mění nějaký parametr  $\lambda$ . Může jít o délku závěsu u kyvadla nebo o magnetické pole u elektronu, který obíhá po kružnici kolem siločar magnetického pole. Za jednu periodu je změna zanedbatelná, tj. platí

$$\frac{d\lambda}{dt} \ll \frac{\lambda}{T}, \quad (1.161)$$

za mnoho period ale může být změna podmínek podstatná. Takovým změnám říkáme *adiabatické změny*. Energie se v tomto případě nezachovává. Změna energie je úměrná změně parametru  $\lambda$ . Obě měnící se veličiny lze zkombinovat do nové proměnné, která zůstává i při adiabatických změnách konstantní, tj. existuje veličina  $A(H, \lambda)$ , že platí

$$A(H, \lambda) = \text{const}. \quad (1.162)$$

Takovou veličinu nazýváme *adiabatický invariant*. Dokažme nyní, že adiabatickým invariantem je plocha fázové trajektorie, tj. zobecněná hybnost  $J$  daná vztahem (1.154). Tato veličina se při adiabatických změnách na rozdíl od energie zachovává. Nalezneme proto časovou změnu  $J$ , při které využijeme parametrizaci křivky kanonicky sdruženou proměnnou  $\theta$  k zobecněné hybnosti  $J$ :

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \frac{d}{dt} \oint_{\gamma} pdq = \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} p \frac{\partial q}{\partial \theta} d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{dp}{dt} \frac{\partial q}{\partial \theta} + p \frac{d}{dt} \frac{\partial q}{\partial \theta} \right) d\theta \end{aligned}$$

Časové derivace na hranici oblasti nahradíme podle vztahu (1.160), tj.

$$\frac{dJ}{dt} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial H}{\partial J} \left( \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial q}{\partial \theta} + p \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial q}{\partial \theta} \right) d\theta.$$

V druhém členu provedeme integraci per partes

$$\frac{dJ}{dt} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial H}{\partial J} \left( \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial q}{\partial \theta} - \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial q}{\partial \theta} \right) d\theta + \left[ p \frac{\partial q}{\partial \theta} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

První člen na pravé straně je zjevně nulový, druhý člen můžeme považovat za nulový, pokud platí adiabatické přiblížení. Nalezli jsme tedy adiabatický invariant, pro který při adiabatickém přiblížení platí

$$\boxed{J = \oint pdq = \text{const}}. \quad (1.163)$$

**Příklad 20: Harmonický oscilátor**

Předpokládejme, že se z nějakého důvodu adiabaticky pomalu mění frekvence harmonického oscilátoru (například měníme délku závěsu matematického kyvadla nebo tuhost pružiny, na které se kývá těleso). Fázová trajektorie oscilátoru je elipsa

$$\frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \frac{p^2}{2m} = E \quad (1.164)$$

Poloosy naší elipsy odečteme z úsekového tvaru

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{p}{b}\right)^2 = 1; \quad a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}; \quad b = \sqrt{2mE}. \quad (1.165)$$

Nyní již snadno určíme náš adiabatický invariant jako plochu elipsy o poloosách  $a$  a  $b$ :

$$J = \oint p dx = \pi ab = \frac{2\pi E}{\omega} = \text{const}. \quad (1.166)$$

Energie i frekvence se sice pomalu mění s časem, ale jejich podíl je i po mnoha periodách konstantní.

**Příklad 21: Proměnné magnetické pole**

Předpokládejme, že elektron koná Larmorovu rotaci v pomalu proměnném magnetickém poli. Za souřadnici zvolíme úhel  $\varphi$ , který určuje pozici na Larmorově kružnici. Příslušnou zobecněnou hybností je moment hybnosti obíhajícího elektronu:

$$J = \int_0^{2\pi} p_\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} m_e v R_L d\varphi = 2\pi m_e v R_L.$$

Po dosazení za Larmorův poloměr ze vztahu (1.63) máme

$$J = 2\pi \frac{m_e^2 v^2}{QB} \sim \frac{v^2}{B}.$$

Při pohybu se pomalu mění magnetické pole. S tím se mění rychlost obíhající částice tak, že podíl  $v^2/B$  je konstantní. Jde o tzv. první adiabatický invariant v magnetickém poli. Zpravidla se za něho volí kombinace s poněkud odlišnými konstantami (na těch ale nezáleží)

$$J_1 = \frac{m_e v^2}{2B} = \text{const}. \quad (1.167)$$

Podrobněji se o adiabatických invariantech pro nabitou částici pohybující se v magnetickém poli dozvíte v [1].

### 1.4.8 Kanonické transformace

Ne vždy se nám podaří zvolit napoprvé optimální zobecněné souřadnice, ve kterých bude řešení co možná nejjednodušší. Od nějaké množiny zobecněných souřadnic a hybností  $(q, p)$  můžeme vždy přejít k jiné soustavě nových souřadnic a hybností  $(Q, P)$ . Pokud požadujeme, aby i nové proměnné byly navzájem kanonicky sdružené, tj. platilo

$$\begin{aligned} \{p_k, q_l\} &= \delta_{kl}; \\ \{P_k, Q_l\} &= \delta_{kl}, \end{aligned} \quad (1.168)$$

hovoříme o tzv. *kanonické transformaci*. Chceme-li automaticky zajistit, aby nová sada proměnných  $(Q, P)$  byla kanonická, můžeme použít k jejímu generování jednoduchý mechanismus *vytvorující funkce*, který si nyní popíšeme. Předpokládejme, že chceme přejít od

$$\begin{aligned} q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f &\rightarrow Q_1, Q_2, \dots, Q_f, P_1, P_2, \dots, P_f \\ H(t, q, p) &\rightarrow \bar{H}(t, Q, P), \end{aligned} \quad (1.169)$$

kde jsme označili  $\bar{H}$  Hamiltonovu funkci v nových proměnných. Samozřejmě chceme, aby pro nové i staré souřadnice platily Hamiltonovy rovnice, tj. platil Hamiltonův princip, ze kterého byly odvozeny:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_A}^{t_B} L dt &= \delta \int_{t_A}^{t_B} (p_k \dot{q}_k - H) dt = 0; \\ \delta \int_{t_A}^{t_B} L dt &= \delta \int_{t_A}^{t_B} (P_k \dot{Q}_k - \bar{H}) dt = 0; \end{aligned}$$

Mají-li obě rovnice platit současně, mohou se integrandy lišit o úplnou derivaci libovolné funkce starých a nových proměnných  $\mathcal{V}(t, q, Q)$ .

$$\boxed{\begin{aligned} p_k \dot{q}_k - H &= P_k \dot{Q}_k - \bar{H} + \frac{d\mathcal{V}}{dt}; \\ \mathcal{V} &= \mathcal{V}(t, q, Q) \end{aligned}} \quad (1.170)$$

Je to proto, že platí (variace starých i nových souřadnic jsou na koncích trajektorie nulové)

$$\delta \int_{t_A}^{t_B} \frac{d\mathcal{V}}{dt} dt = [\delta \mathcal{V}]_{t_A}^{t_B} = \left[ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial Q_k} \delta Q_k \right]_{t_A}^{t_B} = 0.$$

Proveďme nyní derivaci funkce  $\mathcal{V}(t, q, Q)$  ve vztahu (1.170)

$$\begin{aligned} p_k \dot{q}_k - H &= P_k \dot{Q}_k - \bar{H} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial Q_k} \dot{Q}_k \quad \Rightarrow \\ \left( p_k - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k &+ \left( \bar{H} - H - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} \right) - \left( P_k + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial Q_k} \right) \dot{Q}_k = 0. \end{aligned}$$

Tuto rovnost splníme jednoduchými požadavky:

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_k}; \quad P_k = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial Q_k}; \quad \bar{H} = H + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t}. \quad (1.171)$$

Funkci  $\mathcal{V}$  nazýváme *vytvorující funkce*. Jde o libovolnou funkci času, starých proměnných  $q$  a nových proměnných  $Q$ , tj.  $\mathcal{V}(t, q, Q)$ . Pokud budou platit relace (1.171), tj. spočítáme podle tohoto předpisu nové hybnosti, budou v nových proměnných platit Hamiltonovy rovnice a navíc budou takto vytvořené nové proměnné kanonicky sdružené, tj.  $\{Q_k, P_k\} = \delta_{kl}$ .

#### ■ Hamiltonova-Jacobiho rovnice

Pomocí vytvorující funkce si můžeme vymýšlet nejrůznější transformace k novým proměnným. Vytvorující funkce je totiž libovolnou funkcí starých a nových souřadnic. V principu by mohla být i funkcí starých souřadnic a nových hybností, starých hybností a nových souřadnic nebo starých hybností a nových hybností. Rozdíly mezi souřadnicemi a hybnosti se v Hamiltonově teorii stírají. Transformační vztahy (1.171) by byly jen nepatrně odlišné.

Samozřejmě se nabízí otázka, jak volit vytvorující funkci tak, aby řešení v nových proměnných bylo co nejjednodušší. Můžeme dokonce požadovat, aby řešení v nových souřadnicích i hybnostech bylo konstantní, tj. Hamiltonovy rovnice měly nulovou pravou stranu:

$$\begin{aligned} Q_k = \text{const} &\quad \Rightarrow \quad \dot{Q}_k = +\frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k} = 0; \\ P_k = \text{const} &\quad \Rightarrow \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k} = 0. \end{aligned} \quad (1.172)$$

V tomto případě budou nové zobecněné souřadnice a hybnosti cyklické, tj. nebudou se vyskytovat v Hamiltonově funkci. Můžeme požadovat, aby Hamiltonova funkce v nových proměnných byla přímo nulová. Vytvorující funkci, která vede na konstantní zobecněné souřadnice a hybnosti, označujeme  $S$  a nazýváme ji *hlavní (principiální) Hamiltonova funkce*. Transformační rovnice (1.171) nyní budou:

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\partial S}{\partial q_k}; \\ P_k &= -\frac{\partial S}{\partial Q_k}; \\ 0 &= H(t, q_k, p_k) + \frac{\partial S}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.173)$$

První rovnici dosadíme do Hamiltonovy funkce ve třetí rovnici. V druhé rovnici využijeme, že nové souřadnice a hybnosti jsou konstanty  $\alpha_k$  a  $\beta_k$ :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(t, q_k, \frac{\partial S}{\partial q_k}) = 0 \quad \Rightarrow \quad S(t, q_k, \alpha_k) \quad (1.174)$$

$$\beta_k = -\frac{\partial S(t, q_k, \alpha_k)}{\partial \alpha_k} \quad \Rightarrow \quad q_k = q_k(t, \alpha_k, \beta_k); \quad (1.175)$$

Rovnice (1.174) se nazývá Hamiltonova-Jacobiho rovnice. Postup řešení je tedy následující:

- 1) V nějakých zobecněných souřadnicích a hybnostech zkonstruujeme Hamiltonovu funkci (tj. energii vyjádřenou za pomoci zobecněných souřadnic a hybností).
- 2) V této Hamiltonově funkci nahradíme všechny výskyty hybností  $p_k$  výrazem  $\partial S / \partial q_k$  a sestavíme Hamiltonovu-Jacobiho rovnici (1.174) pro vytvorující funkci  $S$ .

- 3) Řešíme Hamiltonovu-Jacobiho rovnici. Řešením je vytvořující funkce  $S(t, q_k, \alpha_k)$ , ve které jsou  $\alpha_k$  integrační konstanty. Tyto konstanty mají význam nových zobecněných souřadnic.
- 4) Víme, že transformace (1.175) daná vytvořující funkcí  $S$  vede na nové hybnosti, které jsou také konstantní, proto je označíme  $\beta_k$ . Tyto transformační vztahy obsahují nové zobecněné souřadnice  $\alpha_k$  (konstanty), nové zobecněné hybnosti  $\beta_k$  (konstanty) a čas. Proto z nich můžeme vyjádřit původní souřadnice  $q_k$  jako funkce času a nalezených konstant. Tím jsme se vrátili k řešení problému v původních souřadnicích.

**Poznámka 1:** Vytvořující funkce  $S$ , která vede na konstantní zobecněné souřadnice a hybnosti má význam integrálu akce:

$$S = S(t, q_k, \alpha_k) \quad \Rightarrow \quad \frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q_k} \dot{q}_k = -H + p\dot{q}_k = L \quad \Rightarrow \quad S = \int L dt.$$

**Poznámka 2:** Hamiltonova-Jacobiho rovnice má úzký vztah ke Schrödingerově rovnici v kvantové teorii. Je to patrné ze struktury rovnice. V kvantové teorii nahrazujeme hybnosti ve vztahu pro energii operátory podle předpisu  $p_k \rightarrow -i\hbar\partial/\partial q_k$ , v Hamiltonově-Jacobiho rovnici výrazem  $\partial S/\partial q_k$ . I první časová derivace hledané funkce je shodná v obou rovnicích.

### Příklad 22: Volný pád

Řešit volný pád z výšky  $h$  za pomoci Hamiltonovy-Jacobiho rovnice je podobně šílené, jako lovit vrabce za pomoci dělostřeleckého kanónu. Nicméně jako cvičení, při kterém se seznámíte s s Hamiltonovou-Jacobiho rovnicí, je tento postup užitečný. Předpokládejme, že osa  $y$  míří vzhůru. Lagrangeova funkce a Hamiltonova funkce budou mít tvar (krok 1)

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - mgy; \quad H = \frac{p^2}{2m} + mgy. \quad (1.176)$$

Nyní sestavíme Hamiltonovu-Jacobiho rovnici (krok 2):

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + mgy = 0 \quad (1.177)$$

Jde o parciální diferenciální rovnici, kterou budeme řešit separací:  $S(t, y) = S_1(t) + S_2(y)$ . Vzhledem k tomu, že čas je jen v prvním členu, musí být  $S_1(t)$  lineární v čase, tj. například  $S_1 = -at$ . Po dosazení do Hamiltonovy-Jacobiho rovnice dostaneme

$$-a + \frac{1}{2m} \left( \frac{dS_2}{dy} \right)^2 + mgy = 0 \quad \Rightarrow \quad S_2(y) = \int \sqrt{2m(\alpha - mgy)} dy \quad \Rightarrow$$

$$S(t, y, \alpha) = -at + \frac{(2m\alpha - 2m^2gy)^{3/2}}{3m^2g}. \quad (1.178)$$

Nalezli jsme tedy  $S$ , které je funkcí času, staré zobecněné proměnné  $y$  a nové zobecněné proměnné  $Q = \alpha$ , která je konstantní. To je výsledkem třetího kroku. Nyní provedeme poslední krok – transformaci k nové hybnosti  $P = \beta$ , která je také konstantní:

$$\beta = -\frac{\partial S(t, y, \alpha)}{\partial \alpha} \quad \Rightarrow \quad \beta = t + \sqrt{\frac{2\alpha}{mg^2} - \frac{2y}{g}} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\alpha}{2g} - \frac{1}{2}g(t - \beta)^2.$$

Z počáteční podmínky  $y(t_0) = h$  odvodíme  $\alpha/2g = h$ ,  $\beta = t_0$ , tedy

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1.179)$$

## 1.5 NELINEÁRNÍ DYNAMICKÉ SYSTÉMY

Hamiltonovy rovnice popisující mechanické systémy vedou na soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu pro proměnné  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ . Označme  $\xi = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$  množinu hledaných fázových proměnných systému. Diferenciální rovnice vzniklé z Hamiltonových rovnic potom mají tvar:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= f_1(t, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \\ \dot{\xi}_2 &= f_2(t, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_N &= f_N(t, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \quad ,\end{aligned}\tag{1.180}$$

neboli

$$\dot{\xi}_k = f_k(t, \xi) \quad , \quad k = 1, \dots, N \quad .\tag{1.181}$$

Počet rovnic  $N$  nemusí být nutně sudý (souřadnice a jim odpovídající hybnosti), rovnice pro zachovávající se proměnné ze soustavy vyškrtáme a neřešíme je. Na pravých stranách většinou není explicitně obsažen čas – takové soustavy rovnic se nazývají *autonomní*. V dalším textu se budeme zabývat jen autonomními soustavami rovnic

$$\dot{\xi}_k = f_k(\xi) \quad , \quad k = 1, \dots, N \quad .\tag{1.182}$$

Nejjednodušší je případ lineárních rovnic tvaru

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= a_{11}\xi_1 + \dots, a_{1N}\xi_N \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_N &= a_{N1}\xi_1 + \dots, a_{NN}\xi_N \quad .\end{aligned}\tag{1.183}$$

neboli

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}\xi \quad .\tag{1.184}$$

Řešení lineárních rovnic je jednoduché. Nalezneme vlastní čísla a vektory matice  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}^{(l)} = \lambda_l \boldsymbol{\eta}^{(l)} \quad .\tag{1.185}$$

Úpravou rovnice (1.185) dostaneme  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1})\boldsymbol{\eta} = 0$ . Tato rovnice bude mít netriviální řešení jen, je-li

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) = 0 \quad ,\tag{1.186}$$

což je rovnice pro vlastní čísla  $\lambda$ . Z tvaru (1.185) potom dopočteme vlastní vektory. Řešením soustavy lineárních diferenciálních rovnic je každý výraz

$$\xi = \boldsymbol{\eta} \exp(\lambda t) \quad ,$$

protože

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda \boldsymbol{\eta} \exp(\lambda t) = \mathbf{A}\boldsymbol{\eta} \exp(\lambda t) = \mathbf{A}\xi \quad .$$

Obecné řešení je lineární kombinací řešení pro jednotlivá vlastní čísla:

$$\xi(t) = c_1 \boldsymbol{\eta}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \boldsymbol{\eta}^{(2)} e^{\lambda_2 t} + \dots \tag{1.187}$$

Jde-li o problém kmitů,  $\lambda$  jsou komplexní ( $\lambda_k = \delta + i \omega_k$ ). Jednotlivé členy v součtu (1.187) jsou tzv. vlastní módy kmitů. Počet vlastních frekvencí je menší nebo roven řádu matice  $\mathbf{A}$ .

**Poznámka:** Výsledek (1.187) platí jen, jsou-li vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$ , určená z rovnice (1.186), navzájem různá. Je-li některé vlastní číslo  $k$ -násobným kořenem rovnice (1.186), potom odpovídající koeficient lineární kombinace (1.187) bude polynom stupně  $k - 1$ .



**Příklad 23:** Harmonický oscilátor

Hamiltonovy rovnice pro harmonický oscilátor mají tvar

$$\dot{x} = \frac{p}{m} \quad ; \quad \dot{p} = -m\omega^2 x .$$

Odhlédneme-li od nepodstatných konstant, je třeba řešit soustavu rovnic typu

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= -\xi_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} ,$$

ve které  $\xi_1 = x$ ,  $\xi_2 = p$ . Z rovnice pro vlastní čísla (1.186) snadno určíme vlastní čísla  $\lambda_{1,2} = \pm i$  a z rovnice pro vlastní vektory (1.185) odpovídající vlastní vektory

$$\boldsymbol{\eta}^{(1)} = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{\eta}^{(2)} = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} .$$

Obecné řešení soustavy tedy je

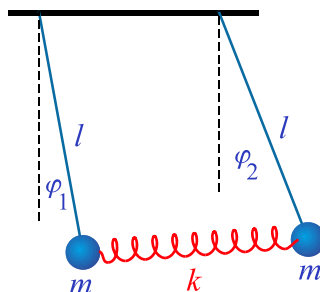
$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-it} ,$$

což pro počáteční podmínky  $x(0) = \xi_1(0) = A$ ;  $p(0) = \xi_2(0) = 0$  dá známé řešení

$$x = \xi_1 = A \cos t \quad ; \quad p = \xi_2 = -A \sin t .$$

**Příklad 24:** Spřažené oscilátory v lineárním přiblížení

Předpokládejme, že dvě stejná matematická kyvadla jsou na konci spojená nehmotnou pružinou tuhosti  $k$  (pokud kyvadla volně visí dolů, není pružina napnutá):



Lagrangeovu funkci napíšeme jako rozdíl všech kinetických energií a všech potenciálních energií. Potenciální energie kyvadel jsou záporné, potenciální energii pružiny značíme  $V_p$ :

$$L = T_1 + T_2 - V_1 - V_2 - V_p, \quad (1.188)$$

$$L = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}_2^2 + mgl \cos \varphi_1 + mgl \cos \varphi_2 - \frac{1}{2} k (l\varphi_1 - l\varphi_2)^2. \quad (1.189)$$

V posledním členu jsme využili fakt, že matematické kyvadlo má jen malé rozkmity. Pro malé rozkmity stačí potenciální energie nahradit Taylorovým rozvojem do kvadratického členu (kvadraticnost na úrovni energií znamená linearitu na úrovni pohybových rovnic). Konstanty v Lagrangeově funkci můžeme vynechat:

$$L = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}_2^2 - mgl \frac{\varphi_1^2}{2} - mgl \frac{\varphi_2^2}{2} - \frac{1}{2} kl^2 (\varphi_1 - \varphi_2)^2. \quad (1.190)$$

Příslušné Lagrangeovy rovnice budou

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{g}{l} \varphi_1 + \frac{k}{m} (\varphi_1 - \varphi_2) = 0; \quad \ddot{\varphi}_2 + \frac{g}{l} \varphi_2 - \frac{k}{m} (\varphi_1 - \varphi_2) = 0. \quad (1.191)$$

První dva členy korespondují s matematickým kyvadlem, poslední člen reprezentuje pružinovou vazbu mezi oběma kyvadly. Označme nyní přirozenou frekvenci kyvadla  $\omega_k$  a pružiny  $\omega_p$ :

$$\omega_k \equiv \sqrt{\frac{g}{l}}; \quad \omega_p \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1.192)$$

Hledejme nyní základní módy řešení, tj. řešení se shodnou frekvencí. Mohli bychom je najít z Hamiltonových rovnic podobně jako v minulém příkladu, tj. přes vlastní čísla a vlastní vektory matice soustavy. Zvolíme ale nyní nepatrně odlišný postup, přímo do soustavy Lagrangeových rovnic (1.191) dosadíme vlastní módy s frekvencí  $\omega$ .

$$\varphi_1 = A_1 e^{i\omega t}; \quad \varphi_2 = A_2 e^{i\omega t}. \quad (1.193)$$

Po dosazení do Lagrangeových rovnic dostaneme soustavu rovnic pro amplitudy  $A_1, A_2$ :

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_k^2 - \omega_p^2, & \omega_p^2, \\ \omega_p^2, & \omega^2 - \omega_k^2 - \omega_p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.194)$$

Jde o lineární rovnici bez pravé strany, která bude mít řešení jen tehdy, pokud bude determinant soustavy roven nule. Z nulovosti determinantu získáme algebraickou rovnici pro frekvenci  $\omega$ , která má dvě řešení:

$$\omega_1 = \omega_k; \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_k^2 + 2\omega_p^2}. \quad (1.195)$$

Z rovnice (1.194) dopočteme pro tyto dvě frekvence hodnoty amplitud  $A_1, A_2$ :

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_k : & \quad A_2 = A_1; \\ \omega_2 = \sqrt{\omega_k^2 + 2\omega_p^2} : & \quad A_2 = -A_1. \end{aligned} \quad (1.196)$$

Vlastní módy tedy mají dvě možné frekvence. První je nedotčená frekvence matematického kyvadla. Obě kyvadla kývají synchronně, pružina není napjatá ani stlačená a na kmity nemá vliv. V druhém případě je frekvence vyšší a závisí i na frekvenci přirozených kmitů pružiny. Kyvadla kývají proti sobě, tj. pružina se symetricky stlačuje a natahuje. Obecný pohyb spřažených oscilátorů je dán superpozicí obou těchto řešení.

### 1.5.1 Matice stability a fázový portrét systému

Je-li soustava diferenciálních rovnic nelineární, může být řešení mnohem komplikovanější než výsledek (1.187).

**Stacionární body řešení:** Jde o takové body fázového prostoru, ze kterých se systém samovolně nevyvíjí. Jsou definovány vztahem  $d\xi_k/dt = 0$ . Nalezneme je tak, že pravé strany soustavy diferenciálních rovnic (1.180) položíme rovny nule:

$$f_k(\xi) = 0 \quad \text{rovnice pro stacionární body.} \quad (1.197)$$

**Poznámka:** „Vložíme-li“ systém přesně do stacionárního bodu, (tj. připravíme ho s takovými počátečními podmínkami), zůstane v tomto bodě fázového prostoru navěky.

**Stabilita řešení:** Budeme zkoumat, zda stacionární body jsou stabilní vzhledem k malým poruchám (perturbacím). Můžeme si představit, že systém vložený do stacionárního bodu nepatrně vychýlíme a zkoumáme, zda se samovolně do stacionárního bodu vrátí (stabilní bod) nebo zda se od něho bude vzdalovat (nestabilní bod). Hledejme tedy řešení rovnice (1.180) ve tvaru

$$\xi_k = \xi_k^{(S)} + \delta \xi_k, \quad k=1, \dots, N,$$

kde  $\xi^{(S)}$  je stacionární bod splňující  $f_k(\xi^{(S)}) = 0$ ;  $\delta \xi$  je malá porucha 1. řádu. Tento tvar dosadíme do výchozí soustavy rovnic:

$$\frac{d}{dt}(\xi_k^{(S)} + \delta \xi_k) = f_k(\xi^{(S)} + \delta \xi)$$

a provedeme Taylorův rozvoj pravé strany do prvního řádu

$$\frac{d}{dt}(\delta \xi_k) = f_k(\xi^{(S)}) + \left. \frac{\partial f_k}{\partial \xi_l} \right|_{\xi^{(S)}} \cdot \delta \xi_l$$

Vzhledem k stacionaritě  $\xi^{(S)}$  je první člen na pravé straně nulový a můžeme psát

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta \xi_1 \\ \vdots \\ \delta \xi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta \xi_1 \\ \vdots \\ \delta \xi_N \end{pmatrix}, \quad (1.198)$$

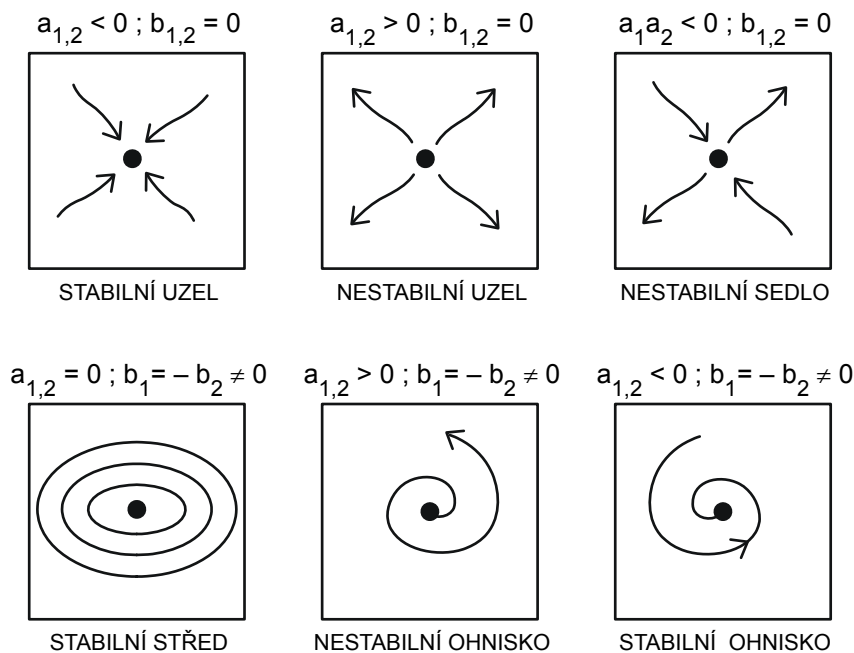
kde

$$a_{kl} \equiv \left. \frac{\partial f_k}{\partial \xi_l} \right|_{\xi^{(S)}} \quad (1.199)$$

je tzv. *matice stability*. Jde o parciální derivace pravých stran rovnic (1.180) podle jednotlivých proměnných ve zkoumaném stacionárním bodě. Soustava rovnic (1.198) pro malé poruchy  $\delta \xi$  je linearizovaná a její řešení umíme najít pomocí vlastních čísel a vlastních směrů matice  $\mathbf{A}$ . Je-li  $\text{Re}(\lambda) < 0$ , bude daný mod utlumen ( $\exp(\lambda t)$ ) a řešení je stabilní v příslušném vlastním směru. Je-li  $\text{Re}(\lambda) > 0$ , je mod v daném směru nestabilní. Je-li  $\lambda = \pm i b$ , malá porucha systém v okolí stacionárního bodu rozkmitá.

#### Poznámky:

- 1) Pro soustavu dvou diferenciálních rovnic bude matice stability rozměru  $2 \times 2$  mít dvě vlastní čísla  $\lambda_1 = a_1 + i b_1$  a  $\lambda_2 = a_2 + i b_2$  a jsou možné následující situace:



- 2) Ze znalosti stacionárních bodů a vlastních čísel a směrů matice stability jsme zpravidla již schopni odhadnout fázový portrét soustavy. Ukázky jsou v následujících příkladech.

**Příklad 25:** Nelineární oscilátor

Uvažujme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= -\xi_1 + \varepsilon \xi_1^2 \quad .\end{aligned}$$

Oproti standardnímu harmonickému oscilátoru je zde navíc nelineární člen s koeficientem  $\varepsilon$ . Nejprve určíme z nulovosti pravých stran stacionární body  $A, B$ :

$$\begin{aligned}\xi_2 &= 0 \\ -\xi_1 + \varepsilon \xi_1^2 &= 0\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}A &= [0, 0] \\ B &= [1/\varepsilon, 0]\end{aligned}$$

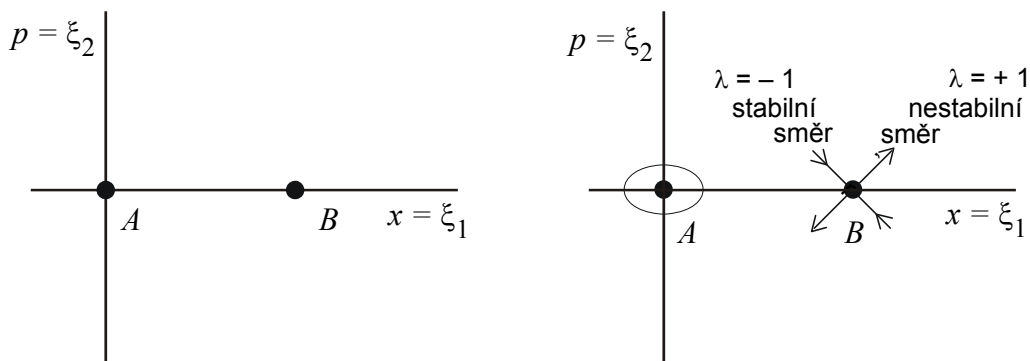
a zakreslíme je do fázového prostoru. Potom nalezneme matici stability (1.199) v obecném tvaru:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 2\varepsilon \xi_1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

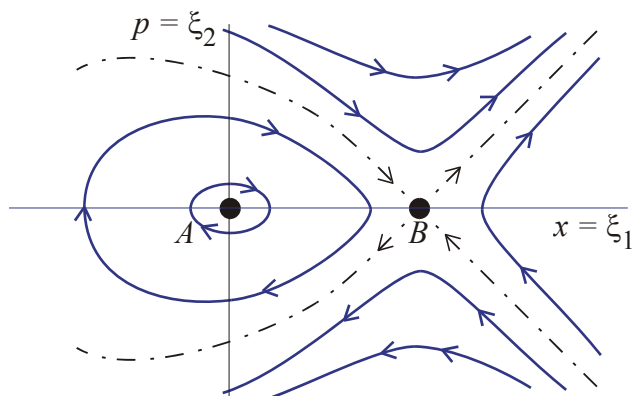
Tuto matici určíme v stacionárních bodech  $A$  a  $B$ . Vypočteme vlastní čísla a vlastní vektory z rovnic (1.185) a (1.186):

$$\begin{aligned}A: \quad \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i \quad \Rightarrow \quad \text{porucha } e^{\pm i t} \\ B: \quad \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = +1 & , \quad \boldsymbol{\eta}_1 = c \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix} & , \quad \text{porucha } e^{+t} \\ \lambda_2 = -1 & , \quad \boldsymbol{\eta}_2 = c \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix} & , \quad \text{porucha } e^{-t} \end{cases} \quad .\end{aligned}$$

Do fázového prostoru zakreslíme nalezené typy stability i odpovídající vlastní směry:



Ze stacionárních bodů, typů stability v nich a vlastních směrů lze zpravidla odhadnout celý fázový portrét soustavy:



**Příklad 26:** Částice v periodickém potenciálu (například nabitá částice v krystalové mříži)

Předpokládejme, že se částice pohybuje v poli potenciální energie dané vztahem

$$V(x) = -V_0 \cos \frac{2\pi x}{a} \quad .$$

Perioda potenciálu je  $a$  a výška  $V_0$ . Je zřejmé, že částice s celkovou energií  $E < V_0$  může být zachycena v minimech potenciální energie (oscilovat) a částice s energií  $E > V_0$  se může volně pohybovat. Příslušné Hamiltonovy rovnice budou:

$$H = \frac{p^2}{2m} - V_0 \cos \frac{2\pi x}{a} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \{x, H\} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= \{p, H\} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{2\pi V_0}{a} \sin \frac{2\pi x}{a} \quad . \end{aligned}$$

Stejně jako v prvním příkladu odhlédneme od nepodstatných konstant (jsou dány volbou jednotek a souřadnic) a budeme řešit soustavu rovnic typu

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= -\sin \xi_1 \quad . \end{aligned}$$

V okolí počátku by po nahrazení funkce „sinus“ argumentem tato rovnice vedla na harmonický oscilátor (v počátku je minimum potenciální energie). Obecně je tato rovnice díky funkci „sinus“ nelineární. Budeme postupovat tak jako v minulém příkladu. Stanovíme stacionární body, najdeme v nich matici stability, určíme vlastní čísla a vlastní vektory a zrekonstruujeme fázový portrét soustavy:

stacionární body:  $\begin{aligned} \xi_2 &= 0 \\ \sin \xi_1 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad A_k = [k\pi, 0] \quad ; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

matice stability:  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos \xi_1 & 0 \end{pmatrix}$

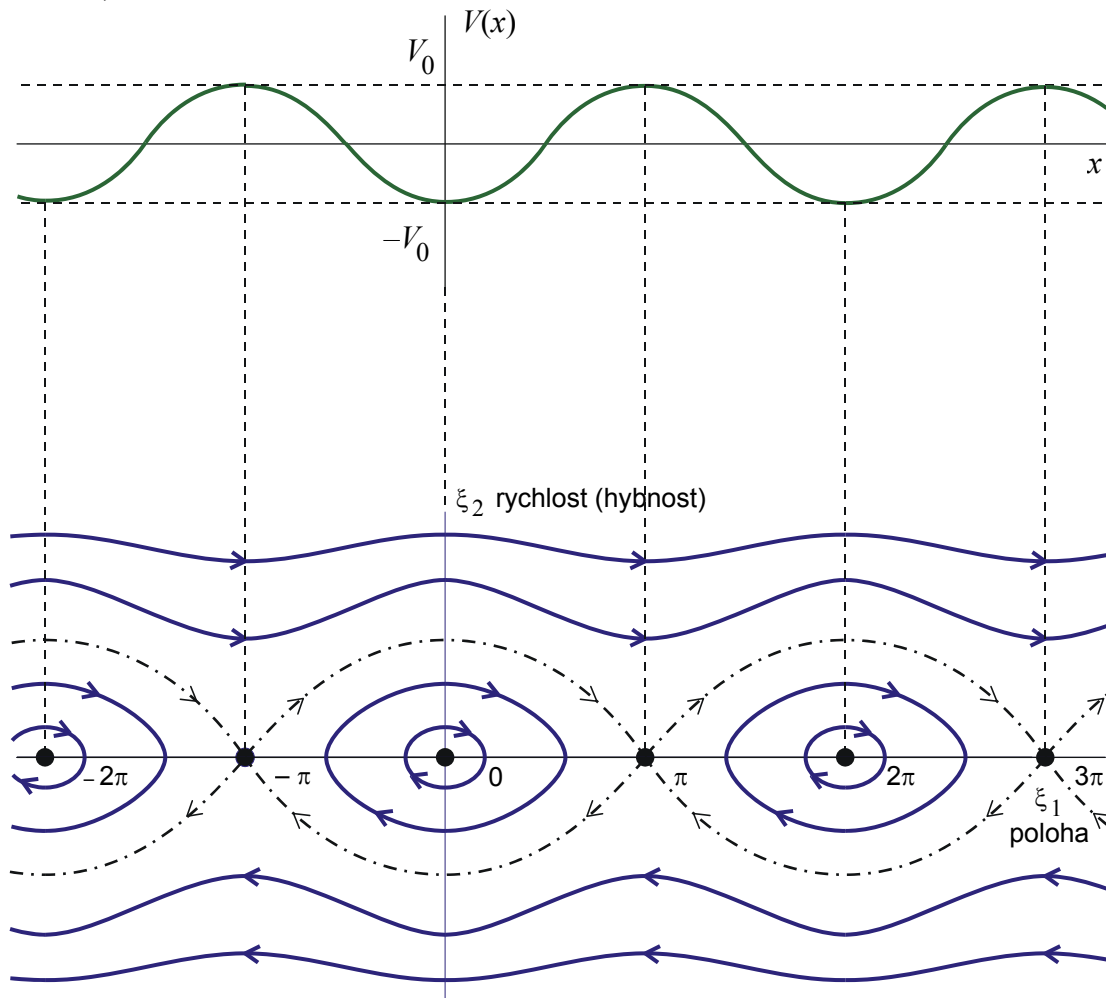
$k$  sudé:  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i \quad \Rightarrow \quad \text{porucha } e^{\pm it}$

*k liché:*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = +1, & \boldsymbol{\eta}_1 = c \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix}, & \text{porucha } e^{+t} \\ \lambda_2 = -1, & \boldsymbol{\eta}_2 = c \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}, & \text{porucha } e^{-t} \end{cases}$$

Částice s malou energií oscilují v minimech potenciální energie (jsou zachyceny). Částice s vyššími energiemi se pohybují buď v kladném směru osy  $x$  (horní dvě trajektorie) nebo v záporném směru osy  $x$  (dolní dvě trajektorie). Čím vyšší je rychlost částice, tím méně je její pohyb ovlivněn periodickým potenciálem.

*Separatrix:* odděluje trajektorie různého typu (v předchozích příkladech je značena čerchovaně).



### 1.5.2 Metoda potenciálu

Problém stability lze řešit i jinak než výpočtem z matice stability. V některých případech můžeme nalézt tzv. potenciál soustavy. Jde o funkci  $\phi(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$  v jejichž maximech je soustava nestabilní (analogie kuličky na vrcholu kopce) a v minimech je soustava stabilní (analogie kuličky v důlku). Známe-li potenciál  $\phi(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$ , můžeme si tuto funkci představit jako výšku terénu  $\phi$  nad prostorem  $(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$ . Kopce, údolí, sedla a ostatní tvary tohoto terénu odpovídají stejným typům stability jako by měla kulička vložená na dané místo terénu v gravitačním poli.

V jednodimenzionálním případě máme jedinou diferenciální rovnici

$$\dot{\xi} = f(\xi) \quad (1.200)$$

Postupem z minulé kapitoly bychom nejprve určili stacionární body z rovnice  $f(\xi) = 0$ , potom jednoprvkovou matici stability  $a = df/d\xi$  a její hodnotu v nalezených stacionárních bodech. Pro  $a > 0$  je systém nestabilní a pro  $a < 0$  je systém stabilní (porucha  $e^{at}$ ).

**Definice:**

$$\phi(\xi) \equiv - \int f(\xi) d\xi \quad (1.201)$$

nazýváme potenciál rovnice (1.200). Přímou z definice snadno ukážeme, že platí

$$\begin{aligned} \phi \text{ má extrém} &\Rightarrow d\phi/d\xi = 0 &\Rightarrow f(\xi) = 0 &\Rightarrow \text{stacionární bod} \\ \phi \text{ má maximum} &\Rightarrow d^2\phi/d\xi^2 < 0 &\Rightarrow a = df/d\xi > 0 &\Rightarrow \text{nestabilita} \\ \phi \text{ má minimum} &\Rightarrow d^2\phi/d\xi^2 > 0 &\Rightarrow a = df/d\xi < 0 &\Rightarrow \text{stabilita.} \end{aligned}$$

Ve vícedimenzionálním případě se pro soustavu (1.180) postupuje obdobně. Definujeme diferenciální formu

$$d\phi \equiv -f_1(\xi)d\xi_1 - f_2(\xi)d\xi_2 - \dots - f_N(\xi)d\xi_N \quad (1.202)$$

a hledáme potenciál  $\phi$  tak, aby  $f_k = -\partial\phi/\partial\xi_k$ . Výraz (1.202) je potom úplným diferenciálem funkce  $\phi$ . Není-li diferenciální forma (1.202) integrabilní, lze hledat integrační faktor  $\mu(\xi)$  tak, aby byla integrabilní forma

$$d\phi \equiv -f_1 \mu d\xi_1 - f_2 \mu d\xi_2 - \dots - f_N \mu d\xi_N \quad .$$

Pro  $N \leq 3$  existuje integrační faktor vždy.

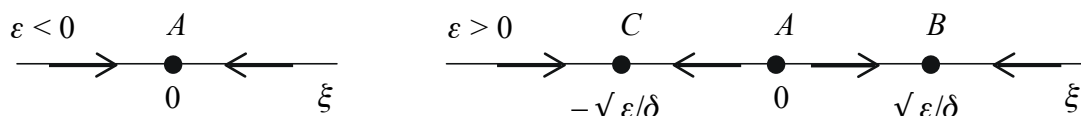
Z tvaru nalezené funkce  $\phi$  již snadno rozhodneme o stabilitě systému. Následující příklad je pro srovnání vyřešen pomocí matice stability i metodou potenciálu.

**Příklad 27:** Potenciál „koňakové lahve“

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon\xi - \delta\xi^3 \quad ; \quad \delta > 0 \quad ; \quad \xi \in \mathbb{R} \quad (1.203)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon < 0: & \quad \text{stac. bod } A: & \quad \xi_s = 0 \\ & \quad \text{matice stability} & \quad a = \varepsilon - 3\delta\xi_s^2 = \varepsilon < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{bod } A \text{ stabilní} \end{aligned}$$

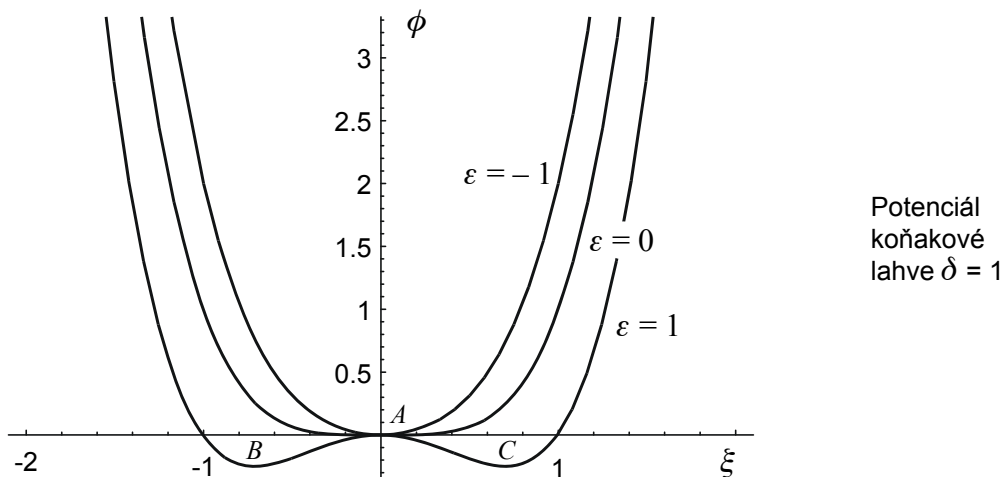
$$\begin{aligned} \varepsilon > 0: & \quad \text{stac. body } A, B, C: & \quad \xi_s = 0 \quad ; \quad \xi_s = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon}{\delta}} \\ & \quad \text{matice stability} & \quad a = \varepsilon - 3\delta\xi_s^2 = \begin{cases} \varepsilon & \text{pro bod } A & \text{nestabilní} \\ -2\varepsilon & \text{pro body } B, C & \text{stabilní} \end{cases} \end{aligned}$$



Řešení metodou potenciálu:

$$\phi(\xi) \equiv - \int f(\xi) d\xi = -\varepsilon \frac{\xi^2}{2} + \delta \frac{\xi^4}{4}.$$

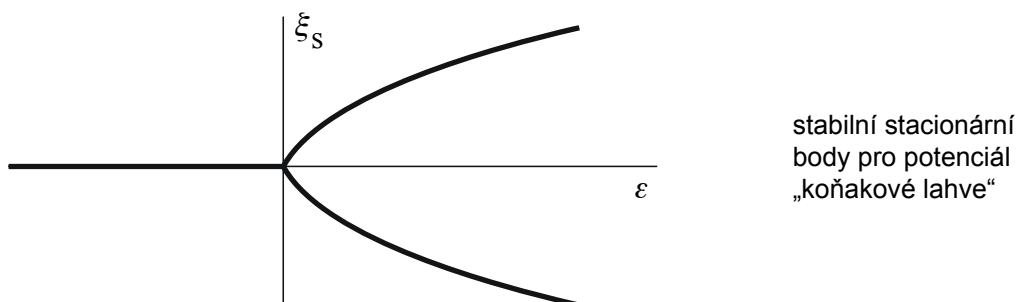
Na obrázku je znázorněn průběh potenciálu pro  $\delta = 1$  a různé hodnoty parametru  $\varepsilon$ . Vidíme, že pro  $\varepsilon < 0$  má  $\phi$  jediné minimum v počátku, ve kterém je stabilní bod  $A$ . Pro  $\varepsilon > 0$  se tento bod stává maximem a je nestabilní. Objevují se však dvě minima v bodech  $\xi = \pm \sqrt{\varepsilon/\delta}$ , ve kterých je systém stabilní. Vzhledem k charakteristickému tvaru funkce  $\phi$  pro  $\varepsilon > 0$  se tato funkce nazývá „potenciál koňakové lahve“.



### 1.5.3 Bifurkace

*Bifurkaci* nazýváme náhlou změnu fázového portréту soustavy při spojitě změně některého řídicího parametru výchozích rovnic.

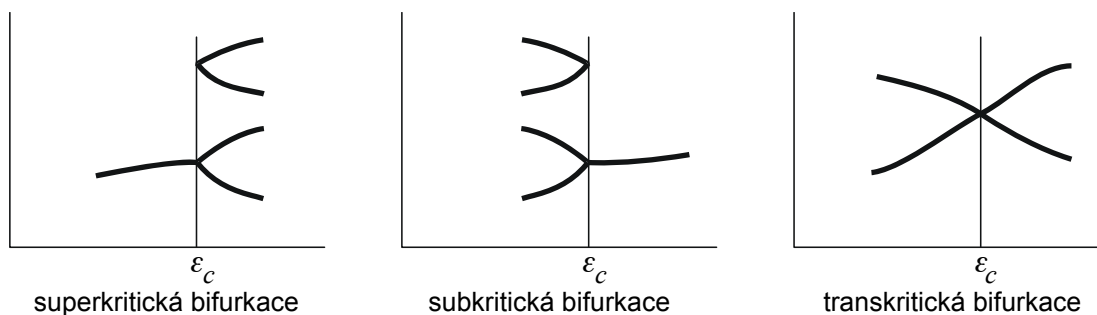
V příkladu 27 z minulé kapitoly vypadá fázový portrét jinak pro  $\varepsilon < 0$  a jinak pro  $\varepsilon > 0$ . Při pomalé změně  $\varepsilon$  se pomalu mění fázový portrét soustavy. Výjimkou je bod  $\varepsilon = 0$ . Fázové portréty pro  $\varepsilon < 0$  a  $\varepsilon > 0$  nejsou topologicky ekvivalentní (nelze je na sebe převést spojitým zobrazením).



Typickým jevem při bifurkaci je větvení řešení. V příkladu 27 je pro  $\varepsilon < 0$  jediný stabilní bod  $\xi_s = 0$ , pro  $\varepsilon > 0$  existují dva stabilní body  $\xi_s = \pm \sqrt{\varepsilon/\delta}$ , bod  $\xi_s = 0$  se stává nestabilní.

Podle typu větvení řešení můžeme bifurkace dělit na superkritické, subkritické a transkritické:





### Fázové přechody druhého druhu – typická bifurkace

Potenciál koňakové lahve se využívá v teorii fázových přechodů druhého druhu (Landau). Fázové přechody prvního druhu jsou změny látky, při kterých se skokem mění vnitřní energie, objem, entropie, atd. (tání, tuhnutí, var). Fázové přechody druhého druhu jsou změny látky, při kterých se skokem mění až první derivace výše uvedených veličin: měrné teplo, teplotní roztažnost, modul pružnosti, susceptibilita, atd.

Typickým fázovým přechodem 2. druhu je změna chování feromagnetika při Curieově teplotě  $T_c$ . Uvažujme pro názornost jen jednu nekonečnou řadu spinů  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ , které mohou být orientovány jen nahoru nebo dolů (tomu budou odpovídat hodnoty  $\sigma_a = \pm 1$ ) s jednoduchou interakční energií danou vztahem

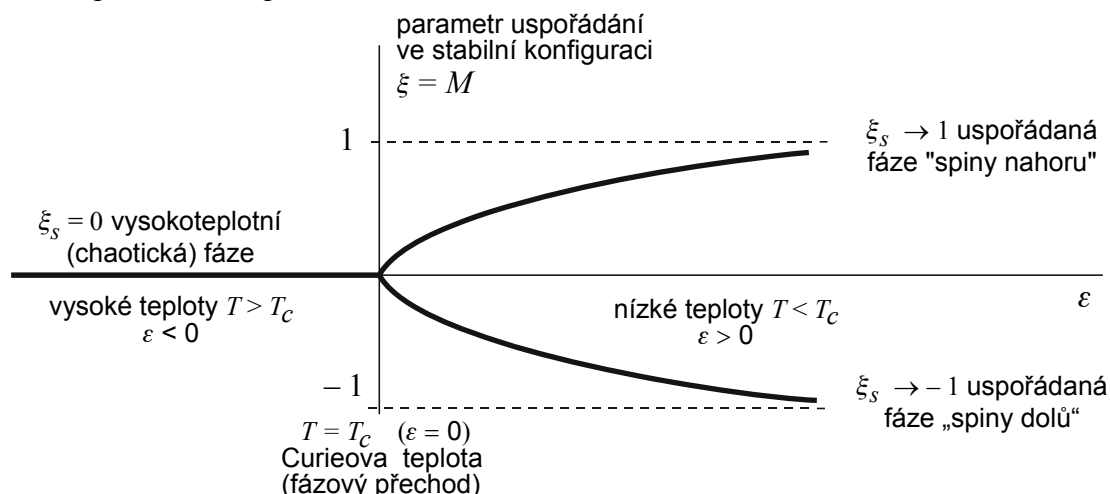
$$H = -J \sum_{\langle \sigma_a \sigma_b \rangle} \delta_{\sigma_a \sigma_b} \quad .$$

Sumace probíhá přes nejbližší sousedy. Jsou-li tedy dva sousední spiny orientovány souhlasně, přispějí k celkové energii hodnotou  $-J$ , jsou-li orientovány nesouhlasně, nepřispějí vůbec. Při nízkých teplotách ( $T < T_c$ ) mají spiny snahu zaujmout stav s co možná nejnižší energií, tj. orientují se převážně stejným směrem. Jsou tedy možné dvě typické konfigurace:  $\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \downarrow \uparrow \uparrow \uparrow \downarrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow$  nebo  $\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \uparrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$ .

Zvyšujeme-li teplotu, dojde při  $T = T_c$  k fázovému přechodu. Při teplotách  $T > T_c$  jsou spiny promíseny náhodně  $\uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \uparrow \downarrow \downarrow \uparrow \uparrow \downarrow \uparrow$  a feromagnetické vlastnosti se ztrácí. Zavedeme-li *parametr uspořádání* (magnetizaci) jako průměrnou hodnotu spinu

$$M \equiv \frac{1}{N} \sum_a \sigma_a,$$

potom v nízkoteplotní fázi s klesající teplotou  $M \rightarrow \pm 1$  a ve vysokoteplotní fázi s rostoucí teplotou  $M \rightarrow 0$ . Potenciál „koňakové lahve“ a s ním souvisící rovnice (1.203) velmi dobře popisuje právě takový fázový přechod. Veličina  $\xi$  odpovídá parametru uspořádání tj.  $\xi = M$  a řídicímu parametru odpovídá veličina  $\varepsilon = T_c - T$ :



**Poznámka:** Podobné typy potenciálů jako je potenciál „koňakové lahve“ se uplatňují nejen při popisu fázových přechodů, ale například v inflačním modelu raných vývojových fází Vesmíru a při popisu spontánního narušení symetrie v přírodě.

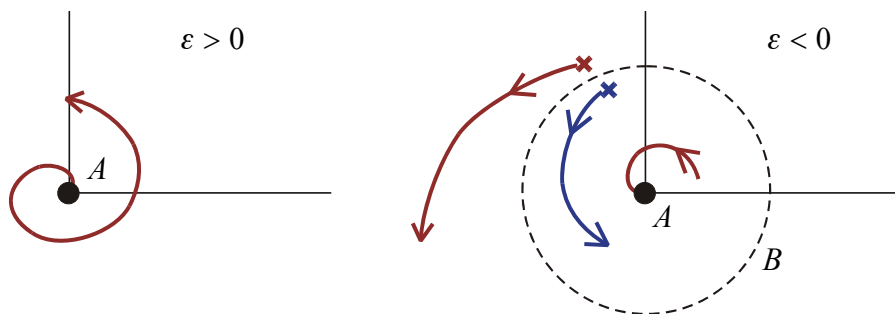
### Příklad 28: Hopfova bifurkace

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\varepsilon + \delta r^2) \quad , \\ \dot{\varphi} &= \omega \quad ; \quad \delta > 0, \quad r \geq 0, \quad \varphi \in \mathbb{R} \quad . \end{aligned} \quad (1.204)$$

Jde o soustavu rovnic pro pohyb systému v polárních souřadnicích. Řešení pro úhel je okamžité:  $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$ . V úhlu  $\varphi$  jde tedy o rotační pohyb proti směru hodinových ručiček s úhlovou frekvencí  $\omega$ . Zbývá jediná rovnice pro nezápornou radiální vzdálenost  $r(t)$ . Snadno nalezneme řešení stacionárních bodů a stability:

$$\begin{aligned} \varepsilon < 0: \quad \text{stac. body } A, B: \quad r_s = 0; \quad r_s = \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{\delta}} \\ \text{matice stability} \quad a = \varepsilon + 3\delta r_s^2 = \begin{cases} \varepsilon & \text{pro bod } A \text{ stabilní} \\ -2\varepsilon & \text{pro bod } B \text{ nestabilní} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon > 0: \quad \text{stac. bod } A: \quad r_s = 0 \\ \text{matice stability} \quad a = \varepsilon + 3\delta r_s^2 = \varepsilon > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{bod } A \text{ nestabilní.} \end{aligned}$$



Pro  $\varepsilon > 0$  je počátek souřadnic nestabilní ohnisko. Pro  $\varepsilon < 0$  je počátek souřadnic stabilní ohnisko a „bod“  $B$  s  $r_s = \sqrt{|\varepsilon|/\delta}$  je nestabilní. Ve skutečnosti tvoří  $B$  celou množinu bodů v kartézské souřadnicové soustavě – kružnici. Systémy s počáteční podmínkou  $r > r_s$  se budou spirálovitě vzdalovat od středu a systémy s  $r < r_s$  se budou spirálovitě přibližovat ke středu. Všechny trajektorie se od množiny  $B$  vzdalují. Na obrázku jsou ukázány dvě trajektorie s blízkými počátečními podmínkami, jejichž vzdálenost s rostoucím časem exponenciálně narůstá. Jde o tzv. *ljapunovskou* nestabilitu, kterou se budeme zabývat v příští kapitole.

#### 1.5.4 Ljapunovská stabilita, limitní cyklus, atraktor

Zkoumejme, jak se budou vyvíjet dvě trajektorie s blízkými počátečními podmínkami  $\xi_0$  a  $\xi_0 + \varepsilon$  v čase:



Řekneme, že trajektorie je *ljapunovsky nestabilní*, jestliže existuje trajektorie s blízkou počáteční podmínkou, která se od zkoumané trajektorie bude s časem exponenciálně

vzdalovat. Řekneme, že trajektorie je *Ljapunovsky stabilní*, jestliže se všechny trajektorie k ní v čase  $t_0$  blízké budou exponenciálně přibližovat.

Mění-li se v čase vzdálenost obou trajektorií exponenciálně, platí

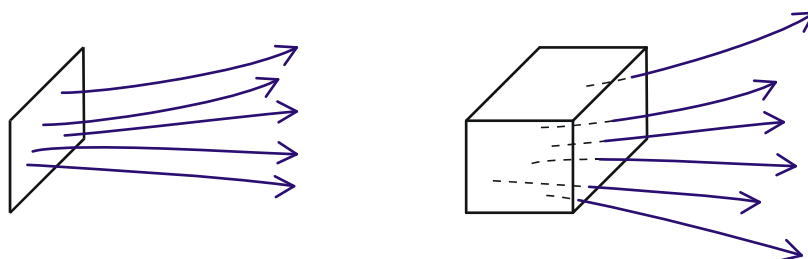
$$\|\xi(t, \xi_0 + \varepsilon) - \xi(t, \xi_0)\| \sim e^{\lambda t}$$

a snadno určíme

$$\lambda = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \frac{1}{t} \ln \|\xi_\varepsilon - \xi\| .$$

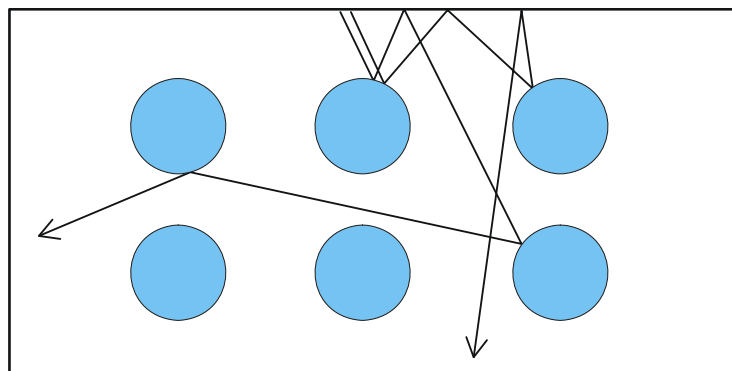
Koeficient  $\lambda$  se nazývá Ljapunovův exponent. Je-li  $\lambda > 0$  hovoříme o Ljapunovsky nestabilní trajektorii. Je-li  $\lambda < 0$ , o Ljapunovsky stabilní trajektorii. Je-li  $\lambda = 0$  je závislost jiná než exponenciální, například mocninná, a nelze hovořit o Ljapunovské stabilitě či nestabilitě.

Ve vícedimenzionálních úlohách s  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$  Ljapunovův exponent závisí na způsobu provedení limity  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Získáme tak  $N$  Ljapunovských koeficientů 1. řádu (ve směru souřadnicových os). Můžeme ale sledovat i celý svazek blízkých trajektorií z dvou nebo třídídimenzionální oblasti:



Potom hovoříme o vícerozměrných Ljapunovských exponentech (2. řádu, 3. řádu, ...). Trajektorie je Ljapunovsky stabilní, jsou-li všechny Ljapunovské koeficienty  $\lambda \leq 0$ .

Příkladem Ljapunovsky nestabilní trajektorie je množina  $r_s = \sqrt{|\varepsilon|/\delta}$  pro  $\varepsilon < 0$  v posledním příkladu na Hopfovou bifurkaci. Trajektorie s  $r \geq r_s$  jsou Ljapunovsky nestabilní. Trajektorie s  $r < r_s$  jsou Ljapunovsky stabilní. Jiný příklad Ljapunovské nestability je kulečnick s překážkami podle následujícího obrázku:

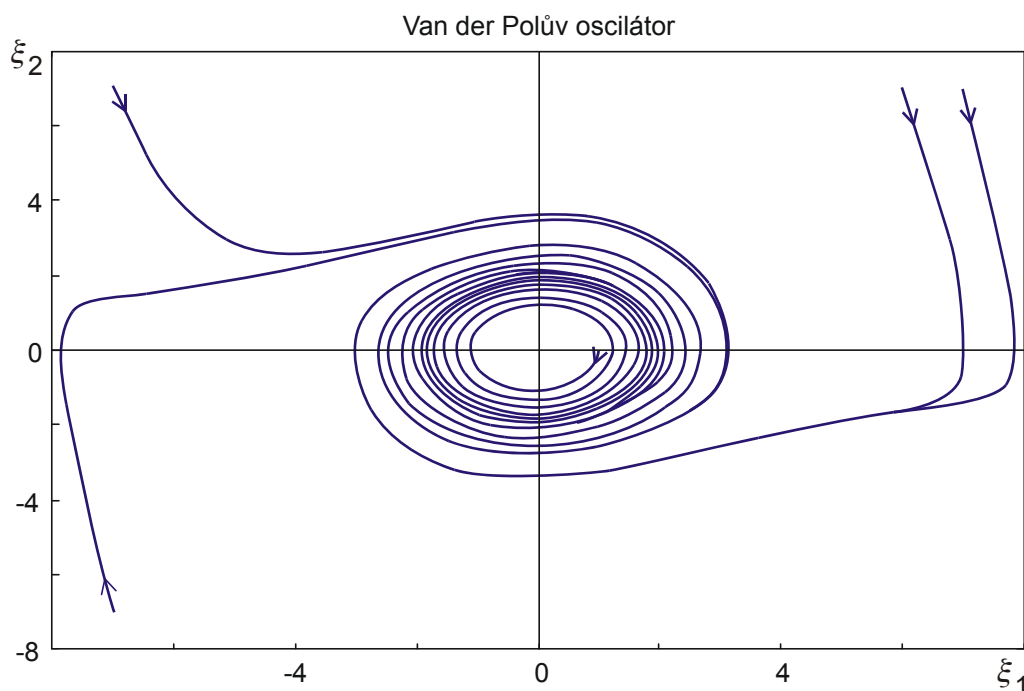


Dvě blízké trajektorie spolu v pozdějších časech přestávají souviset.

**Příklad 29:** Van der Polův oscilátor

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= -\xi_1 + \varepsilon(1 - \delta \xi_1^2)\xi_2 \quad ; \quad \delta > 0 \quad .\end{aligned}\tag{1.205}$$

V tomto systému se trajektorie s libovolnou počáteční podmínkou blíží k jediné periodické trajektorii, kterou nazýváme *limitní cyklus*. Za dosti dlouhou dobu se každá trajektorie přiblíží libovolně blízko k trajektorii limitního cyklu. Všechny trajektorie z blízkého okolí limitního cyklu jsou Ljapunovskiy stabilní. V následujícím obrázku jsou fázové trajektorie pro různé počáteční podmínky pro van der Polův oscilátor s  $\delta = 1$  a  $\varepsilon = 0.1$ .

**Některé základní pojmy z teorie množin***Vzdálenost dvou bodů  $\rho(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ :*

V tomto učebním textu budeme vzdálenost dvou bodů definovat jako

- $$\rho(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \equiv \sqrt{\sum_{k=1}^N (A_k - B_k)^2} \quad .$$

Tj. vzdálenost je určována z Pythagorovy věty. Pro definici vzdálenosti lze použít i jiný předpis splňující základní požadavky na pojem vzdálenosti. Vzdálenost dvou bodů často píšeme také ve tvaru  $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$ , kde

- $$\|\mathbf{X}\| \equiv \sqrt{\sum_{k=1}^N X_k^2} \quad .$$

Jde o normu (velikost) rozdílového vektoru  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ .

*Vzdálenost bodu a množiny  $\rho(\mathbf{A}, \mathcal{M})$ :*

- minimum vzdáleností od všech bodů množiny, včetně její hranice ( $\overline{\mathcal{M}}$ );

- $$\rho(\mathbf{A}, \mathcal{M}) \equiv \min_{\mathbf{X} \in \mathcal{M}} \rho(\mathbf{A}, \mathbf{X}) \quad .$$

 **$\varepsilon$ -okolí bodu  $U_\varepsilon(\mathbf{A})$** 

- kruh bez hranice se středem v  $\mathbf{A}$  a poloměrem  $\varepsilon$ ;
- $$U_\varepsilon(\mathbf{A}) \equiv \{\mathbf{X}; \rho(\mathbf{A}, \mathbf{X}) < \varepsilon\} \quad .$$

**Otevřená množina  $\mathcal{M}_o$** 

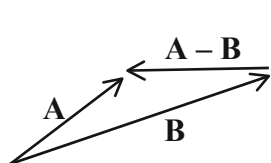
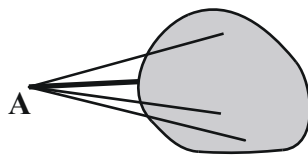
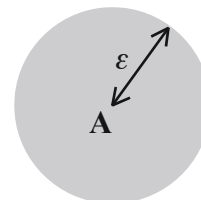
- kolem každého bodu množiny lze zkonstruovat okolí, které je celé v množině  $\mathcal{M}_o$ ;
- $$\text{ke } \forall \mathbf{X} \in \mathcal{M}_o \exists U_\varepsilon(\mathbf{X}) \subset \mathcal{M}_o \quad ;$$
- zjednodušeně lze říci, že otevřené množiny neobsahují svou hranici.

**Uzavřená množina  $\mathcal{M}_u$** 

- nalezneme-li posloupnost bodů z  $\mathcal{M}_u$ , která v nějakém smyslu konverguje, potom bude limita z této posloupnosti vždy součástí množiny  $\mathcal{M}_u$ ;
- $$\mathbf{X}^{(k)} \in \mathcal{M}_u \quad ; \quad \mathbf{X}^{(k)} \rightarrow \mathbf{X} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X} \in \mathcal{M}_u \quad ;$$
- zjednodušeně lze říci, že uzavřené množiny obsahují svou hranici.

**Poznámky:**

- 1) V našem případě fázového prostoru jsou body  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{X}$  vždy nějaké  $N$ -tice  $(\xi_1, \dots, \xi_N)$ .
- 2) Uzavřený interval a kruh s hranicí jsou uzavřené množiny; otevřený interval a kruh bez hranice jsou otevřené množiny; polouzavřený interval není ani otevřená ani uzavřená množina; prázdná množina a celý prostor  $R^2$  jsou ve smyslu předchozích definic otevřené i uzavřené množiny.

 $\rho(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  $\rho(\mathbf{A}, \mathcal{M})$  $U_\varepsilon(\mathbf{A})$ **Definice z teorie množin vztahující se k řešení soustavy diferenciálních rovnic****Invariantní množina  $\mathcal{J}$** 

- Interpretujeme-li libovolný bod množiny  $\mathcal{J}$  jako počáteční podmínku soustavy diferenciálních rovnic (1.180), potom celá následující trajektorie bude ležet v množině  $\mathcal{J}$ . Jakmile se tedy systém dostane do množiny  $\mathcal{J}$ , potom v ní bude setrvávat i ve všech pozdějších časech.
- $$\mathcal{J} = \{\mathbf{X}; \mathbf{X}_0 = \xi(t_0) \in \mathcal{J} \Rightarrow \mathbf{X} = \xi(t) \in \mathcal{J} \text{ pro } \forall t > t_0\} \quad .$$

**Hustě pokrytá množina  $\mathcal{D}$** 

- V libovolně malém okolí každého bodu množiny  $\mathcal{D}$  prochází nějaká fázová trajektorie.

**Chaotická množina  $\mathcal{X}$** 

- 1) každá trajektorie v  $\mathcal{X}$  je l'apunovsky nestabilní,
- 2) existuje trajektorie, která  $\mathcal{X}$  hustě pokryje,

3)  $X$  je invariantní množina.

### Atraktor $\mathcal{A}$

1) trajektorie z okolí  $\mathcal{A}$  jsou k  $\mathcal{A}$  „přitahovány“, tj. s rostoucím časem se k  $\mathcal{A}$  blíží:

$$\exists U_{\mathcal{A}} \supset \mathcal{A}, \text{ že pro } \forall \xi(t_0) \in U_{\mathcal{A}} \text{ platí } \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\xi(t), \mathcal{A}) = 0,$$

2) existuje trajektorie, která  $\mathcal{A}$  hustě pokryje,

3)  $\mathcal{A}$  je invariantní množina,

4)  $\mathcal{A}$  je uzavřená množina.

### Podivný atraktor $S$

Podivný atraktor je chaotický atraktor, tj. všechny trajektorie podivného atraktoru jsou Ljapunovsky nestabilní.

### Limitní cyklus $C$

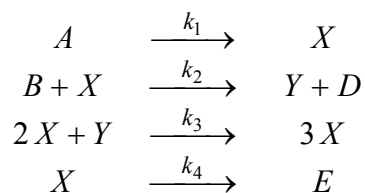
Uzavřená fázová trajektorie, která je atraktor.

### Poznámky :

- 1) Každý stacionární bod je invariantní množinou. Také každá uzavřená trajektorie, například harmonického oscilátoru, je invariantní množinou.
- 2) Každá uzavřená trajektorie tvoří automaticky invariantní uzavřenou hustě pokrytou množinu. Limitní cyklus navíc „přitahuje“ trajektorie z okolí, tj. má první vlastnost atraktoru.
- 3) Příkladem chaotické množiny je plocha kulečnicku na straně 39.
- 4) Podivný atraktor může vzniknout jen v problému s dimenzí  $N \geq 3$ .
- 5) Pro dvě rovnice platí *Benoixonovo kritérium*:  $\partial f_1 / \partial x_1 + \partial f_2 / \partial x_2$  nemění v jednoduše souvislé oblasti znaménko  $\Rightarrow$  v této oblasti neexistuje uzavřená trajektorie.

### Příklad 30: 2D bruselátor

Budeme zkoumat chemickou reakci typu



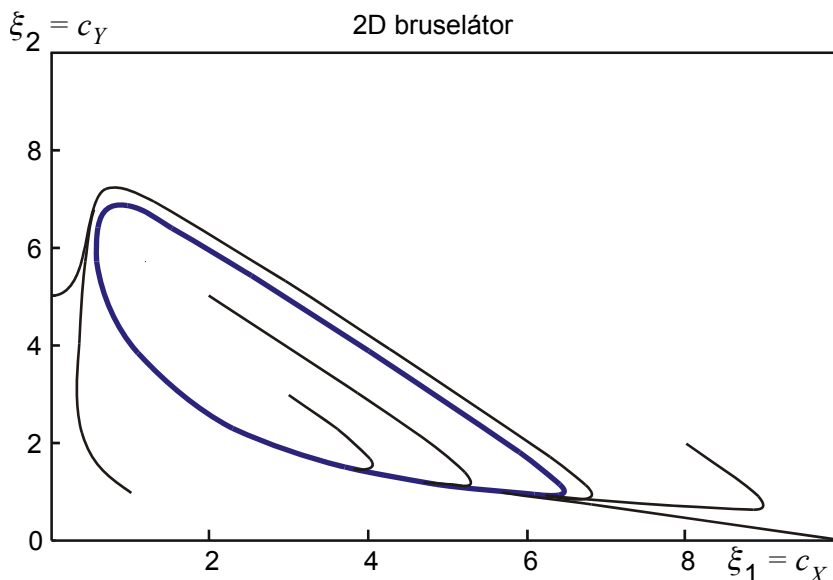
Rychlosti jednotlivých reakcí jsou označeny  $k_1, \dots, k_4$ . Koncentrace výchozích látek a produktů označíme  $c_A, c_B, c_D, c_E$ . Proměnnými budou koncentrace látek  $X$  a  $Y$ :  $\xi_1 = c_X$ ,  $\xi_2 = c_Y$ . Z tvaru reakcí sestavíme výchozí soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= k_1 c_A - k_2 c_B \xi_1 + k_3 \xi_1^2 \xi_2 - k_4 \xi_1, \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= k_2 c_B \xi_1 - k_3 \xi_1^2 \xi_2. \end{aligned}$$

Na pravých stranách jsou jen zapsány způsoby vzniku a zániku látek  $X$  a  $Y$ . Opustíme-li nepodstatné konstanty, jde o rovnice typu

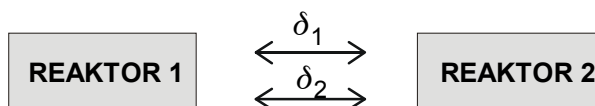
$$\begin{aligned}\frac{d\xi_1}{dt} &= \alpha - (\beta+1)\xi_1 + \xi_1^2 \xi_2 \quad , \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= \beta\xi_1 - \xi_1^2 \xi_2 \quad .\end{aligned}\tag{1.206}$$

Tyto rovnice poskytují řešení ve tvaru limitního cyklu. Pro hodnoty  $\alpha = 2$  a  $\beta = 5.9$  a různé počáteční podmínky jsou fázové trajektorie na následujícím obrázku. Po dosti dlouhém čase se koncentrace  $\xi_1$  a  $\xi_2$  periodicky se mění (oscilují) kolem jistých středních hodnot.



### Příklad 31: 4D bruselátor

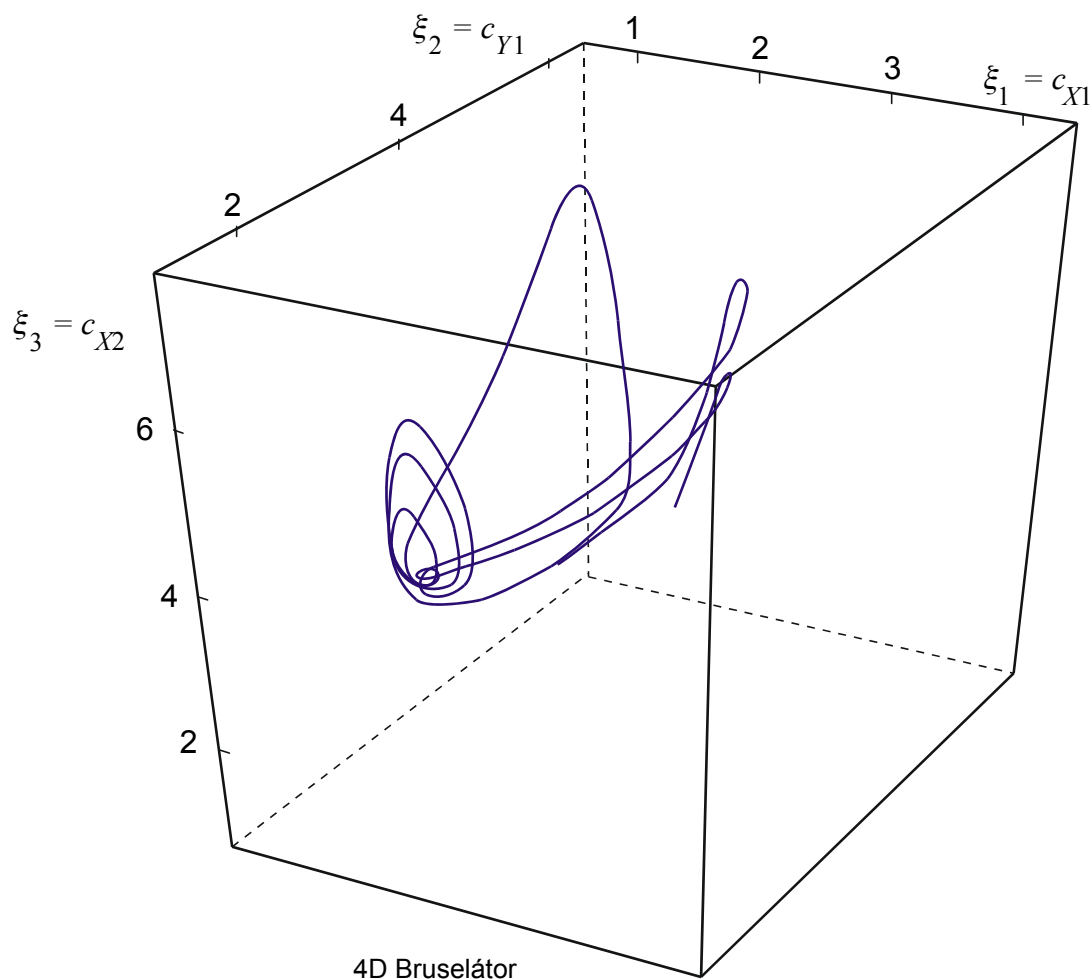
Budeme předpokládat, že předchozí reakce probíhá současně ve dvou reaktorech s možností výměny látky  $X$  rychlostí  $\delta_1$  a látky  $Y$  rychlostí  $\delta_2$ . Koncentrace látek  $X$  a  $Y$  v reaktorech 1 a 2 označíme takto:  $\xi_1 = c_{X1}$ ,  $\xi_2 = c_{Y1}$ ,  $\xi_3 = c_{X2}$ ,  $\xi_4 = c_{Y2}$ .



Výchozí rovnice budou

$$\begin{aligned}\frac{d\xi_1}{dt} &= \alpha - (\beta+1)\xi_1 + \xi_1^2 \xi_2 + \delta_1(\xi_3 - \xi_1) \quad , \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= \beta\xi_1 - \xi_1^2 \xi_2 + \delta_2(\xi_4 - \xi_2) \quad , \\ \frac{d\xi_3}{dt} &= \alpha - (\beta+1)\xi_3 + \xi_3^2 \xi_4 + \delta_1(\xi_1 - \xi_3) \quad , \\ \frac{d\xi_4}{dt} &= \beta\xi_3 - \xi_3^2 \xi_4 + \delta_2(\xi_2 - \xi_4) \quad .\end{aligned}\tag{1.207}$$

Jde o soustavu čtyř nelineárních diferenciálních rovnic, jejichž řešení pro některé parametry je podivný atraktor (dimenze systému je větší než 3). Na následujícím obrázku je část fázové trajektorie, která by hustě pokryla oblast podivného atraktoru pro  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 5.9$ ,  $\delta_1 = 1.21$  a  $\delta_2 = 12.1$ .



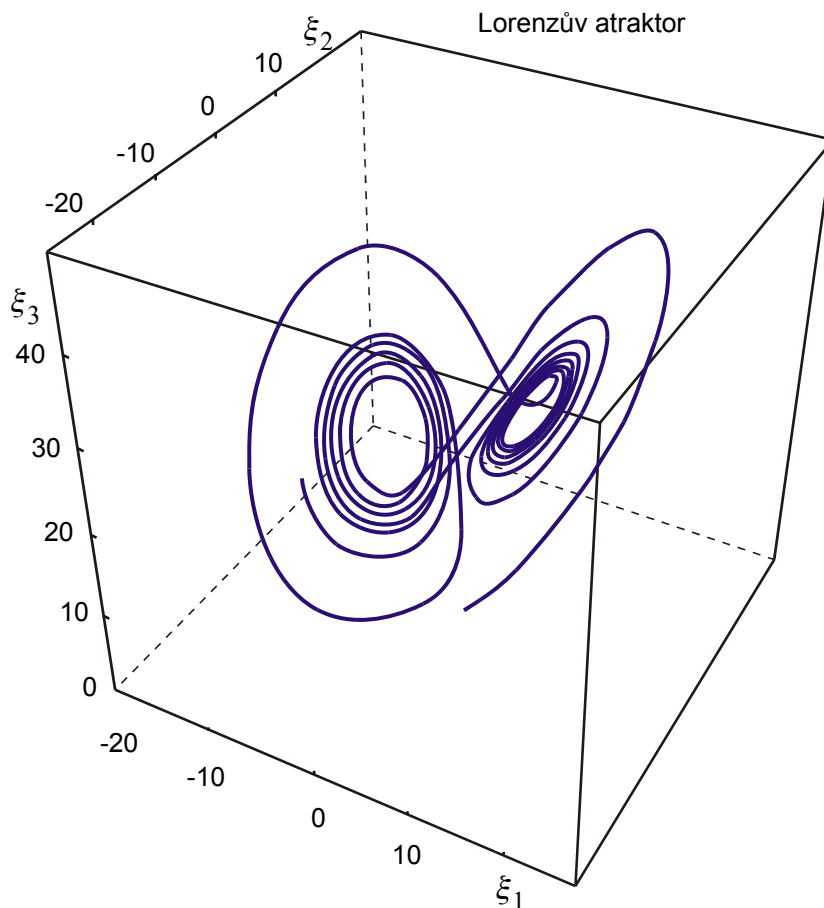
### Příklad 32: Lorenzův atraktor

Jde o neznámější příklad podivného atraktoru. Výchozí sada rovnic

$$\begin{aligned}
 \frac{d\xi_1}{dt} &= \alpha(\xi_2 - \xi_1) \quad , \\
 \frac{d\xi_2}{dt} &= -\xi_1\xi_3 + \beta\xi_1 - \xi_2 \quad , \\
 \frac{d\xi_3}{dt} &= \xi_1\xi_2 - \gamma\xi_3
 \end{aligned}
 \tag{1.208}$$

popisuje proudění kapaliny mezi dvěma planparalelními deskami s různými teplotami. Veličiny  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$  mají postupně význam: 1. Fourierova komponenta rychlosti, 1. a 2. Fourierova komponenta teploty. Na následujícím obrázku je opět zakreslena část fázové trajektorie, která by hustě pokryla oblast atraktoru. Rovnice byly řešeny pro hodnoty  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 26.5$ ,  $\gamma = 1$ .





### 1.5.5 Evoluční rovnice

#### Příklad 33: Elektron-děrové plazma v silném elektrickém poli

V silném elektrickém poli způsobují urychlené elektrony a díry ionizaci nárazem. Při setkání elektronu s dírou dojde k rekombinaci, tj. zániku nosičů. Označíme-li  $\xi_1 = n_e$  koncentraci elektronů a  $\xi_2 = n_d$  koncentraci děr, budou mít základní rovnice pro časový vývoj počtu nosičů tvar:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= \alpha_1 \xi_1 - \beta \xi_1 \xi_2 \quad , \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= \alpha_2 \xi_2 - \beta \xi_1 \xi_2 \quad . \end{aligned} \quad (1.209)$$

První členy na pravé straně popisují ionizační procesy (přírůstek nosičů), druhé členy rekombinační procesy (úbytek nosičů).

#### Příklad 34: Systém dravec ↔ kořist

Předpokládáme, že dravec se živí kořistí (například vlk a zajáci), kořist má potravy dostatek (jí například trávu). Označíme-li  $\xi_1 = n_d$  počet dravců v určité oblasti a  $\xi_2 = n_k$  množství potenciální kořisti, budou mít základní rovnice pro časový vývoj počtu zvířat tvar:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= -\alpha_1 \xi_1 + \beta_1 \xi_1 \xi_2 \quad , \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= +\alpha_2 \xi_2 - \beta_2 \xi_1 \xi_2 \quad . \end{aligned} \quad (1.210)$$

První člen v první rovnici popisuje úhyn dravců v nepřítomnosti kořisti ( $\xi_2 = 0$ ). První člen v druhé rovnici popisuje množení se kořisti v nepřítomnosti dravců ( $\xi_1 = 0$ ). Druhé členy představují požíráání kořisti dravci, tzv. „párovou interakci“, díky které počet dravců roste a množství kořisti se snižuje.

### Příklad 35: Dvě sociální skupiny

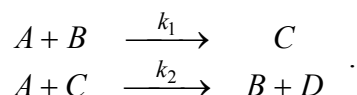
Popišme nyní dvě skupiny lidí s odlišným názorem na určitý problém (přívrženci dvou různých postupů, teorií, názorů, politických stran). Označíme-li  $\xi_1 = n_A$  počet přívrženců názoru  $A$  a  $\xi_2 = n_B$  počet přívrženců názoru  $B$ , budou mít základní rovnice pro časový vývoj počtu přívrženců tvar:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi_1}{dt} &= \alpha_1 \xi_1 + \beta_1 \xi_1 \xi_2, \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= \alpha_2 \xi_2 - \beta_2 \xi_1 \xi_2.\end{aligned}\tag{1.211}$$

Koeficienty  $\beta$  mohou být kladné i záporné, párovou interakci zde tvoří setkání příslušníků různých skupin, diskuze atd.

### Příklad 36: Chemické reakce

Uvažme chemickou reakci typu



Rovnice pro časový vývoj jednotlivých koncentrací mají tvar:

$$\begin{aligned}\frac{dn_A}{dt} &= -k_1 n_A n_B - k_2 n_A n_C, \\ \frac{dn_B}{dt} &= -k_1 n_A n_B + k_2 n_A n_C, \\ \frac{dn_C}{dt} &= +k_1 n_A n_B - k_2 n_A n_C, \\ \frac{dn_D}{dt} &= +k_2 n_A n_C.\end{aligned}\tag{1.212}$$

Látka  $B$  je katalyzátorem reakce. Je-li  $A$  zastoupena v dostatečném množství jako surovina, lze brát  $n_A = \text{const.}$  a řešit jen tři rovnice.

Všechny rovnice z předchozích příkladů mají společný tvar

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \alpha_{kj} \xi_j + \beta_k^{jl} \xi_j \xi_l\tag{1.213}$$

a nazývají se *evoluční rovnice*. Poznamenejme, že přes dvojné indexy se sčítá. Charakteristická je lineární kombinace různých párových interakcí. Typickými řešeními jsou oscilace, limitní cykly, ve více než třech dimenzích vznikají chaotické množiny a podivné atraktory.

Rozeberme nyní řešení soustavy dvou rovnic tvaru

$$\begin{aligned}\frac{d\xi_1}{dt} &= \alpha_1 \xi_1 + \beta_1 \xi_1 \xi_2, \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= \alpha_2 \xi_2 + \beta_2 \xi_1 \xi_2.\end{aligned}\tag{1.214}$$

Standardním postupem zjistíme stacionární body:

$$\xi^{(1)} = (0, 0) \quad ; \quad \xi^{(2)} = (-\alpha_2/\beta_2, -\alpha_1/\beta_1) .$$

Nezapomínejme na význam proměnných  $\xi$ . Vesměš jde o počty jedinců nějakého typu. Smysl tedy mají jen nezáporné hodnoty. Z matice stability určíme, že první stacionární bod

$$\begin{aligned}\xi^{(1)} = (0, 0) \text{ je pro } \alpha_1, \alpha_2 > 0 & \text{ nestabilní} \\ \alpha_1, \alpha_2 < 0 & \text{ stabilní} \\ \alpha_1 \alpha_2 < 0 & \text{ sedlový bod.}\end{aligned}$$

V druhém stacionárním bodě

$\xi^{(2)} = (-\alpha_2/\beta_2, -\alpha_1/\beta_1)$  je řešení pro

$$\begin{aligned}\alpha_1, \alpha_2 > 0 & \text{ nestabilní v jednom směru.} \\ \alpha_1, \alpha_2 < 0 & \text{ nestabilní v jednom směru.} \\ \alpha_1 \alpha_2 < 0 & \text{ (různá znaménka } \alpha_1, \alpha_2), \text{ jde o oscilace kolem} \\ & \text{stacionárního bodu.}\end{aligned}$$

Frekvence oscilací jsou

$$\omega = \sqrt{|\alpha_1 \cdot \alpha_2|}.\tag{1.215}$$

Tyto oscilace znamenají *oscilující rovnováhu* mezi jedinci obou typů, jejich počet je udržován v mezích daných oscilacemi. Právě takový systém je systém dravec a kořist (příklad 34). V systému elektronů a děr v silném elektrickém poli (příklad 33) není možné dosáhnout oscilující rovnováhy. Počty jedinců dvou sociálních skupin (příklad 35) mohou a nemusí oscilovat, stejně tak jako koncentrace látek v chemických reakcích (příklad 36).

Doplňme-li na pravých stranách evolučních rovnic regulační členy  $f_k$  dostaneme tzv. *Volterrovy-Lotkovy rovnice*:

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \alpha_{kj} \xi_j + \beta_k^{jl} \xi_j \xi_l + f_k.\tag{1.216}$$

Regulační členy mohou popisovat v systému dravec  $\leftrightarrow$  kořist například dodávání potravy zvnějšku nebo vnější regulaci počtu zvířat. Hodnoty  $f_k$  mohou být konstantní i různé funkce času (periodický lov). Škála typů řešení Volterrových-Lotkových systémů je velmi bohatá již i pro dvojdimenzionální případ. V různých oblastech fázového prostoru nacházíme různé typy řešení – oscilace, stabilní a nestabilní ohniska, stabilní oblasti, nestabilní oblasti, sedla. Při periodických regulačních členech pozorujeme rezonance, buzení systému. Například rovnice typu dravec  $\leftrightarrow$  kořist s regulačním členem

$$\begin{aligned}\frac{d\xi_1}{dt} &= -\xi_1 + \xi_1 \xi_2 + 1/4, \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= +\xi_2 - \xi_1 \xi_2\end{aligned}\tag{1.217}$$

má v bodě  $\xi^{(S)} = (1, 3/4)$  řešení ve tvaru stabilního ohniska.

**Logistická rovnice**

Nejjednodušším případem evolučních rovnic je diferenciální rovnice, ve které je časová změna úměrná samotnému počtu jedinců:

$$\frac{dn}{dt} = \alpha n. \quad (1.218)$$

Řešením je – podle znaménka  $\alpha$  – rostoucí nebo klesající exponenciála

$$n(t) = n(0)e^{\alpha t}. \quad (1.219)$$

Toto řešení je vždy jen určitým přiblížením reality. Nikdy nemůže nic růst exponenciálně po dosti dlouhou dobu. Exponenciální řešení popisuje počáteční nárůst nestabilit nebo různá přechodná řešení. Po určité době převládou párové procesy, které vedou k saturaci řešení. Tuto situaci popisuje tzv. logistická rovnice

$$\frac{dn}{dt} = \alpha n - \beta n^2. \quad (1.220)$$

Ustálené (saturované) řešení snadno nalezneme tak, že dosadíme za  $dn/dt$  nulu:

$$n_S \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} n(t) = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (1.221)$$

K vyřešení rovnice (1.220) použijeme substituci

$$n(t) = \frac{\alpha}{\beta} \xi^r(t). \quad (1.222)$$

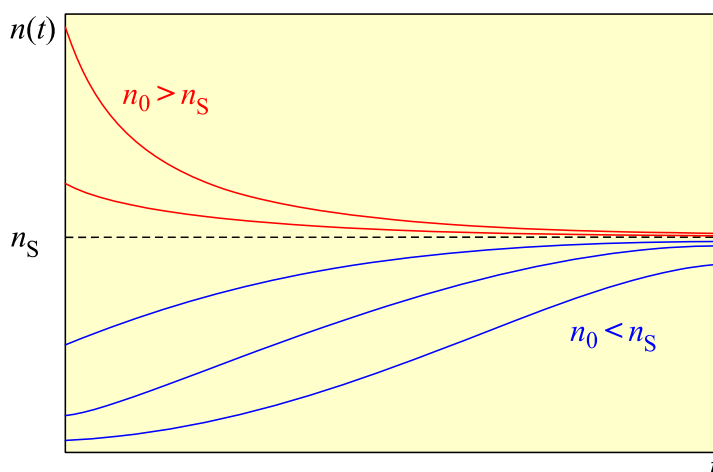
Konstanta před řešením reprezentuje saturovanou hodnotu. Mocninu  $r$  budeme hledat tak, aby se diferenciální rovnice co nejvíce zjednodušila. Po provedení substituce dostaneme rovnici

$$r \frac{d\xi}{dt} = \alpha \xi - \alpha \xi^{r+1}. \quad (1.223)$$

Je zjevné, že volba  $r = -1$  převede tuto rovnici na lineární rovnici s konstantní pravou stranou, jejíž řešení již snadno najdeme. Analytické řešení původní logistické rovnice je

$$n(t) = n_S \frac{e^{\alpha t}}{e^{\alpha t} + n_S/n_0 - 1} = \frac{n_S}{1 + (n_S/n_0 - 1)e^{-\alpha t}}. \quad (1.224)$$

Snadno ověříme, že limita řešení pro  $t \rightarrow \infty$  dá saturovanou hodnotu (1.221) a limita bez párové interakce, tj. pro  $\beta \rightarrow 0$  ( $n_S \rightarrow \infty$ ) dá exponenciální funkci (1.219). Logistickou rovnici popisující omezený exponenciální růst poprvé navrhnul belgický matematik Pierre Francois Verhulst (1804–1849) v roce 1838.



## 1.6 LAGRANGEOVY ROVNICE PRO POLNÍ PROBLÉMY

### 1.6.1 Lagrangeovy rovnice, skalární pole

Pro studium této kapitoly je nutné umět zacházet s kovariantními a kontravariantními indexy. Pokud tuto techniku neovládáte, přečtěte si nejprve dodatek C. V klasické mechanice jsme hledali závislost zobecněných souřadnic  $q_k(t)$  na čase. U polních problémů budeme hledat časoprostorovou závislost polí  $\varphi_k(t, \mathbf{x})$ . Namísto Lagrangeovy funkce budeme používat hustotu Lagrangeovy funkce, která závisí na čase, prostoru, polích a jejich derivacích:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, x, y, z, \varphi_1, \dots, \varphi_N, \partial\varphi_1/\partial t, \partial\varphi_1/\partial x, \dots, \partial\varphi_N/\partial z),$$

což budeme zkráceně zapisovat ve tvaru

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x^\mu, \varphi_k, \varphi_{k,\alpha}).$$

Pro integrál akce bude platit

$$S = \int_{\Omega} \mathcal{L}(x^\mu, \varphi_k, \varphi_{k,\alpha}) d^3\mathbf{x} dt = \int_{\Omega} \mathcal{L}(x^\mu, \varphi_k, \varphi_{k,\alpha}) d^4x.$$

Stejně jako v mechanice těles budeme hledat nutné podmínky extrémnosti integrálu akce a variace polí budou definovány ve stejném čase (ale tentokrát i prostorové souřadnici), což nám zajistí záměnnost variací a parciálních derivací. Na hranici oblasti  $\partial\Omega$  požadujeme, aby variace byly nulové, tedy platí vztahy obdobné vztahům (1.4), (1.5) a (1.6):

$$\begin{aligned} \delta\varphi_k &= \varphi_{k,\text{virt}}(x^\mu) - \varphi_{k,\text{real}}(x^\mu); \\ \delta\varphi_k(\partial\Omega) &= 0; \\ \delta\partial_\mu\varphi_k &= \partial_\mu\delta\varphi_k. \end{aligned} \tag{1.225}$$

Požadujeme tedy, aby variace integrálu akce byla nulová:

$$\delta \int_{\Omega} \mathcal{L}(x^\mu, \varphi_k, \varphi_{k,\alpha}) d^4x = 0.$$

Díky záměnnosti variací a derivací můžeme přejít s variací do integrálu a zapůsobit s ní na všechny proměnné (s výjimkou  $x^\mu$ , jde o variace ve stejné události):

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_k} \delta\varphi_k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{k,\alpha}} \delta\varphi_{k,\alpha} \right] d^4x = 0.$$

V posledním členu zaměníme variaci a derivaci:  $\delta\varphi_{k,\alpha} = \delta\partial_\alpha\varphi_k = \partial_\alpha\delta\varphi_k$  a provedeme integraci per partes (použijeme Gaussovu větu). Integrál na hranici je vzhledem k (1.225) nulový, a proto máme:

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_k} - \partial_\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{k,\alpha}} \right] \delta\varphi_k d^4x = 0.$$

Vzhledem k tomu, že integrace musí dát nulu pro jakoukoli časoprostorovou oblast  $\Omega$ , musí být i integrand nulový (přesněji řečeno *skoro všude*, tedy až na množiny míry menší než 4):

$$\left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_k} - \partial_\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{k,\alpha}} \right] \delta\varphi_k = 0. \tag{1.226}$$

Pokud jsou pole  $\varphi_k$  nezávislá, budou koeficienty lineární kombinace (1.226) nulové (celý výraz má tvar  $\Sigma c_k \delta\varphi_k = 0$ ), tedy

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_k} - \partial_\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{k,\alpha}} = 0.$$

Výraz upravíme do standardního tvaru Lagrangeových rovnic

$$\partial_\alpha \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{k,\alpha}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_k} = 0; \quad k = 1, \dots, N. \quad (1.227)$$

Na rozdíl od Lagrangeových rovnic pro hmotné body a pevná tělesa není v prvním členu jen časová derivace, ale jsou zde derivace podle všech čtyř proměnných. Lagrangeovy rovnice rozepsané pro jedno jediné pole mají tvar:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi / \partial t)} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi / \partial x)} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi / \partial y)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi / \partial z)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0. \quad (1.228)$$

**Poznámka:** Lagrangeova funkce není jednoznačně určena. Funkce  $\mathcal{L}' \equiv \mathcal{L} + \partial_\mu K^\mu$  vede na stejné polní rovnice pro libovolný čtyřvektor  $K^\mu$ . Těto libovůle lze využít ke konstrukci co možná „nejelegantnějšího“ lagranžianu.

### Příklad 37

Nalezněme Lagrangeovy rovnice pro nejjednodušší Lagrangeovu funkci skalárního pole  $\varphi$ , která obsahuje jen derivace tohoto pole:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi). \quad (1.229)$$

### Řešení:

Lagrangeova funkce je skalárem (to zajišťuje jeden horní a jeden dolní index, při změně báze/souřadnicové soustavy se výraz nezmění). Pokud Lagrangeovu funkci rozepíšeme, máme:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2. \quad (1.230)$$

Po provedení všech derivací dá Lagrangeova rovnice (1.228)

$$-\frac{2}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Nejjednodušší varianta Lagrangeovy funkce skalárního pole tedy vede na vlnovou rovnici. V Lagrangeově funkci (1.229) se většinou píše koeficient  $\frac{1}{2}$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) \quad \Rightarrow \quad \square \varphi = 0. \quad (1.231)$$

Důvody jsou dva. Lagrangeovy rovnice dají vlnovou rovnici (bez nutnosti krácení koeficientem 2) a celý výraz (1.231) je analogií kinetické energie (polovina z kvadrátu derivací).

### Jiné řešení:

Řešme stejný příklad pro Lagrangeovu funkci (1.229) bez rozpisu do komponent. Levá strana Lagrangeových rovnic je:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\alpha}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= \partial_\alpha \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\alpha}} \right] = \partial_\alpha \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \varphi)} \right] = \\ &= \partial_\alpha \frac{\partial}{\partial (\partial_\alpha \varphi)} \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \partial_\alpha \frac{\partial}{\partial (\partial_\alpha \varphi)} \left[ g^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi)(\partial_\nu \varphi) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\alpha \left[ \delta^\alpha_\mu (\partial_\nu \varphi) + (\partial_\mu \varphi) \delta^\alpha_\nu \right] = \\
&= \frac{1}{2} \partial_\alpha \left[ \delta^\alpha_\mu (\partial^\mu \varphi) + (\partial^\nu \varphi) \delta^\alpha_\nu \right] = \\
&= \frac{1}{2} \partial_\alpha \left[ (\partial^\alpha \varphi) + (\partial^\alpha \varphi) \right] = \\
&= \partial_\alpha \partial^\alpha \varphi = \square \varphi .
\end{aligned}$$

Výsledek je opět vlnovou rovnicí

$$\square \varphi = 0 .$$

... a ještě kratší řešení:

$$\partial_\alpha \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\alpha}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} \partial_\alpha \frac{\partial}{\partial \varphi_{,\alpha}} (\varphi_{,\alpha} \varphi^{,\alpha}) = \frac{1}{2} \partial_\alpha 2\varphi^{,\alpha} = \partial_\alpha \partial^\alpha \varphi = \square \varphi .$$

**Lagrangeovy funkce dalších skalárních polí**

#### ■ Kleinovo –Gordonovo pole

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) + \frac{1}{2} \kappa^2 \varphi^2 \quad \Rightarrow \quad (\square - \kappa^2) \varphi = 0 \quad (1.232)$$

Lagrangeova funkce tohoto pole je kvadratická v derivacích i v samotném poli. Druhý člen by odpovídal hustotě potenciální energie v klasické mechanice ( $L = T - V$ ). Výsledná Lagrangeova rovnice je lineární a je vhodnou rovnicí například pro plazmové vlny nebo pro kvantový popis částic se spinem nula.

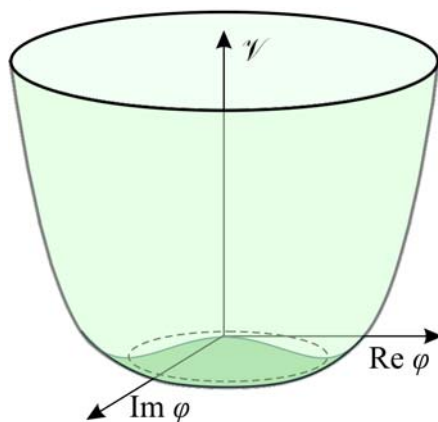
#### ■ Dno koňakové láhve

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) + \frac{1}{2} \kappa^2 \varphi^2 - \frac{\beta}{4} \varphi^4 \quad \Rightarrow \quad \square \varphi - \kappa^2 \varphi + \beta \varphi^3 = 0 \quad (1.233)$$

Pokud budeme druhý člen interpretovat jako hustotu potenciální energie, dostaneme hodnotu

$$\mathcal{V} = -\frac{1}{2} \kappa^2 \varphi^2 + \frac{\beta}{4} \varphi^4 .$$

S obdobnou funkcí se podrobněji setkáte v dodatku D.



Potenciál má válcovou symetrii a nekonečně mnoho minim lokalizovaných na kružnici  $Re^{i\alpha}$ . Při výběru některého z minim se naruší válcová symetrie. Odpovídající Lagrangeova rovnice je nelineární. Nelineární člen může eliminovat disperzi způsobenou lineárním členem. Rovnice má proto některá řešení ve tvaru solitonu – vlnového balíku s neproměnným tvarem.

## ■ sin-Gordonova rovnice

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) - \kappa^2 \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad \square \varphi - \kappa^2 \sin \varphi = 0 . \quad (1.234)$$

Tato známá nelineární rovnice poskytuje opět solitonová řešení. Pokud provedeme rozvoj trigonometrické funkce do lineárního členu, dostaneme Kleinovu-Gordonovu rovnici, pokud provedeme rozvoj do prvních dvou členů, dostaneme rovnici odpovídající potenciálu „koňakové láhve“.

**1.6.2 Kanonicky sdružené pole**

Obdobně jako jsme dříve zavedli k dané zobecněné souřadnici kanonicky sdruženou hybnost a poté energii, můžeme i ve spojitěm případě obdobně definovat kanonicky sdružené pole a hustotu energie vztahy

$$\pi_k(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_k} ; \quad (1.235)$$

$$\mathcal{H}(t, \mathbf{x}) \equiv \sum_k \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_k} \dot{\varphi}_k \right) - \mathcal{L} . \quad (1.236)$$

Analogický výsledek jako dříve dají i Poissonovy závorky mezi poli a sdruženými poli

$$\begin{aligned} \{\varphi_k(t, \mathbf{x}), \varphi_l(t, \mathbf{x}')\} &= 0 , \\ \{\pi_k(t, \mathbf{x}), \pi_l(t, \mathbf{x}')\} &= 0 , \\ \{\varphi_k(t, \mathbf{x}), \pi_l(t, \mathbf{x}')\} &= \delta_{kl} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') . \end{aligned} \quad (1.237)$$

Obdobný je i zápis rovnice pro časový vývoj polí  $\varphi_k$ :

$$\dot{\varphi}_k = \{\varphi_k, \mathcal{H}\} . \quad (1.238)$$

Ve všech těchto výrazech se jakoby ztratila kovariance (stejný tvar v různých souřadnicových soustavách) rovnic vzhledem k Lorentzově transformaci, výrazy (1.235) až (1.238) nevypadají relativisticky. To je ale jen zdánlivé. Pokud zavedeme tenzor energie a hybnosti vztahem

$$T^\alpha{}_\beta \equiv \frac{1}{c} \sum_k \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \varphi_k)} \partial_\beta \varphi_k \right) - \frac{1}{c} g^\alpha{}_\beta \mathcal{L} , \quad (1.239)$$

bude hustota energie pole dána složkou

$$\mathcal{H} = c T^0{}_0 \quad (1.240)$$

a hustota hybnosti pole bude úměrná kanonicky sdruženým polím

$$\mathcal{P}_n = T^0{}_n = \sum_k \pi_k \partial_n \varphi_k \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathcal{P}} = \sum_k \pi_k \vec{\nabla} \varphi_k . \quad (1.241)$$

Veličiny  $T^l{}_0$  reprezentují tok energie a  $T^l{}_n$  tok hybnosti. Z vyjádření tenzoru (1.239) a polních rovnic (1.227) lze snadno ukázat, že tenzor energie a hybnosti splňuje rovnici kontinuity

$$\partial_\alpha T^\alpha{}_\beta = 0 . \quad (1.242)$$

Ostatní relace lze také snadno přepsat do relativistického tvaru.



### 1.6.3 Maxwellovy rovnice, elektromagnetické pole

Elektromagnetické pole většinou popisujeme Maxwellovými rovnicemi

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.243)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.244)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_Q, \quad (1.245)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_Q + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

které doplníme o materiálové vztahy

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (1.246)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}),$$

kde vektor  $\mathbf{P}$  je polarizace prostředí (hustota elektrického dipólového momentu) a  $\mathbf{M}$  je magnetizace (hustota magnetického dipólového momentu).

#### ■ Potenciály pole

Z rovnice (1.243) plyne existence funkce  $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$ , takové, že

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (1.247)$$

Rovnice je pak splněna automaticky, protože  $\operatorname{div} \operatorname{rot}$  každé funkce je nulová. Veličina  $\mathbf{A}$  se nazývá vektorový potenciál. Dosadíme-li vyjádření (1.247) do rovnice (1.244), získáme vztah

$$\operatorname{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0,$$

ze kterého plyne existence funkce  $\phi$  takové, že  $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t = -\nabla \phi$ . Rovnice (1.244) je opět splněna automaticky a pro elektrické pole máme vyjádření

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (1.248)$$

Funkci  $\phi$  nazýváme skalární potenciál, v případě stacionárních polí přejde (1.248) ve známý vztah

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi, \quad (1.249)$$

znaménko minus jen odráží fyzikální skutečnost, že působící síla míří do minima potenciální energie. Elektromagnetické pole tak můžeme popsat pouhou čtveřicí veličin – skalárním a vektorovým potenciálem. Tyto čtyři veličiny tvoří relativistický čtyřvektor, viz (C.18),

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}. \quad (1.250)$$

Známe-li čtveřici  $A^\mu$ , určíme elektrické a magnetické pole snadno ze vztahů (1.248) a (1.247). Vektory  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$  jsou tak v jistém smyslu preferovány oproti vektorům  $\mathbf{D}$  a  $\mathbf{H}$ , neboť je můžeme přímo určit z potenciálů. Elektromagnetické pole je derivacemi potenciálů, oba vztahy (1.248) a (1.247) lze jednoduše zapsat za pomoci tenzoru elektromagnetického pole

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & E^x/c & E^y/c & E^z/c \\ -E^x/c & 0 & B^z & -B^y \\ -E^y/c & -B^z & 0 & B^x \\ -E^z/c & B^y & -B^x & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.251)$$

Jde o antisymetrický tenzor druhého řádu, který má jen šest nezávislých složek (těmi je elektrické a magnetické pole). Složky pole lze snadno odečíst z příslušných pozic tenzoru.

### ■ Nejednoznačnost potenciálů, kalibrační invariance

Již dříve jsme viděli, že potenciály nejsou určeny jednoznačně, dvěma různými potenciálům může odpovídat stejné elektromagnetické pole. Pokud zavedeme nové, přetransformované potenciály za pomoci tzv. *gradientní transformace*

$$A'^{\mu} \equiv A^{\mu} + \partial^{\mu} f, \quad (1.252)$$

kde  $f$  je zcela libovolná dvakrát spojitě diferencovatelná funkce, pole se nezmění:

$$F'^{\mu\nu} = \partial^{\mu} (A^{\nu} + \partial^{\nu} f) - \partial^{\nu} (A^{\mu} + \partial^{\mu} f) = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu} = F^{\mu\nu}. \quad (1.253)$$

Této libovůle v potenciálech lze s výhodou využít při konstrukci co nejjednodušší varianty Maxwellových rovnic v potenciálech.

### ■ Maxwellovy rovnice zapsané za pomoci tenzoru pole

Maxwellovy rovnice (1.243) a (1.244) jsme využili k zavedení potenciálů elektromagnetického pole. Zbývající dvě rovnice se zdrojovými členy můžeme za pomoci tenzoru elektromagnetického pole snadno přepsat do tvaru

$$\boxed{F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \mu_0 j^{\mu}}, \quad (1.254)$$

kde čtyřvektor  $j^{\mu}$  prezentuje zdroje magnetických polí

$$j^{\mu} \equiv \begin{pmatrix} \rho_{QC} \\ \mathbf{j}_Q \end{pmatrix}. \quad (1.255)$$

Tento tvar Maxwellových rovnic je zjevně relativistický.

### ■ Maxwellovy rovnice v potenciálech

Přepišme Maxwellovy rovnice ve tvaru (1.254) za pomoci potenciálů:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}{}_{,\nu} &= \mu_0 j^{\mu}; \\ \partial_{\nu} (\partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}) &= \mu_0 j^{\mu}; \\ \partial^{\mu} \partial_{\nu} A^{\nu} - \partial_{\nu} \partial^{\nu} A^{\mu} &= \mu_0 j^{\mu}. \end{aligned} \quad (1.256)$$

Druhý člen na levé straně je D'Alambertův vlnový operátor aplikovaný na čtyřpotenciál pole, pravá strana zjevně prezentuje zdroje polí. Jedinou „vadou na kráse“ rovnic zapsaných v potenciálech je první člen. Zde využijeme velké libovůle v potenciálech dané kalibrační transformací. Předpokládejme, že veličina  $\partial_{\nu} A^{\nu}$  je rovna nějaké funkci času a prostoru  $F(t, \mathbf{x})$ :

$$\partial_{\nu} A^{\nu} = F(t, \mathbf{x})$$

a zvolme za pomoci gradientní transformace (1.252) jiný čtyřpotenciál, pro který budeme požadovat, aby

$$\partial_{\nu} A'^{\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_{\nu} A^{\nu} + \partial_{\nu} \partial^{\nu} f = 0 \quad \Rightarrow \quad F(t, \mathbf{x}) + \square f = 0.$$

Taková gradientní transformace bude vždy existovat. Funkci  $f$ , která generuje transformaci, stačí volit tak, aby splňovala rovnici

$$\square f = -F(t, \mathbf{x}). \quad (1.257)$$

V nových potenciálech je první člen v rovnici (1.256) nulový a Maxwellovy rovnice získají jednoduchý tvar

$$\square A'^{\mu} = -\mu_0 j^{\mu} ; \quad (1.258)$$

$$\partial_{\mu} A'^{\mu} = 0 . \quad (1.259)$$

Jde o obyčejné vlnové rovnice pro čtyřpotenciál  $A^{\mu}$ , u kterých jsou zdrojovými členy složky čtyřvektoru  $j^{\mu}$ . Rovnice jsou doplněny Lorentzovou kalibrační podmínkou (1.259). Ukázali jsme, že libovůle potenciálů lze využít k tomu, aby Lorentzova kalibrační podmínka byla splněna. Dokonce ani požadavek na její splnění neurčuje potenciály jednoznačně! Z rovnice (1.257) je zřejmé, že funkce  $f$  není určena jednoznačně a lze k ní přičíst jakékoli řešení vlnové rovnice

$$\square f_0 = 0 . \quad (1.260)$$

Proto možná ještě další gradientní transformace

$$A''^{\mu} = A'^{\mu} + \partial^{\mu} f_0 , ,$$

kterou je možné využít například k vynulování skalárního potenciálu. Uzavřeme tuto partii konstatováním, že je možné vždy zvolit takové potenciály, aby Maxwellovy rovnice měly jednoduchý tvar

$$\boxed{\begin{aligned} \square A^{\mu} &= -\mu_0 j^{\mu} ; \\ \partial_{\mu} A^{\mu} &= 0 . \end{aligned}} \quad (1.261)$$

#### ■ Lagrangeova formulace Maxwellových rovnic

Hustota Lagrangeovy funkce pro interakci nabitých částic s polem má tvar

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{part}} + \mathcal{L}_{\text{int}} + \mathcal{L}_{\text{field}} \quad (1.262)$$

První část popisuje pohyby částic a věnovali jsme se jí v kapitole 1.4.1. Interakční část musí být nějakou kombinací čtyřtoku  $j^{\mu}$  (popisuje částice) a čtyřpotenciálu  $A^{\mu}$  (popisuje pole). Hned nejjednodušší skalární varianta vede na správné polní rovnice:

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{int}} = j_{\mu} A^{\mu}} . \quad (1.263)$$

Pro bodovou částici je čtyřtok dán vztahem

$$\begin{pmatrix} Qc\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ Q\mathbf{v}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{pmatrix}, \quad (1.264)$$

vektor  $\mathbf{x}$  je polohový vektor částice a vektor  $\mathbf{x}'$  popisuje polohu pozorovatele. Lagrangeova funkce interakce bude dána integrací

$$L_{\text{int}} = \int \mathcal{L}_{\text{int}} d^3\mathbf{x}' = \int j_{\mu} A^{\mu} d^3\mathbf{x}' = \int (-Q\phi + Q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' = -Q\phi(t, \mathbf{x}) + Q\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} .$$

Polní část Lagrangeovy funkce musí být tvořena tenzorem elektromagnetického pole, nejjednodušším skalárem je kombinace  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  a polní část Lagrangeovy funkce by měla být tomuto výrazu úměrná. Konstantu úměrnosti určíme tak, abychom dostali správné polní rovnice (v tomto případě Maxwellovy rovnice):

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{field}} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}} \quad (1.265)$$

Obě části hustoty Lagrangeovy funkce pro elektromagnetické pole jsou

$$\mathcal{L}_{\text{elmg}} = \mathcal{L}_{\text{field}} + \mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + j_\mu A^\mu \quad (1.266)$$

Ověřme na závěr, že polní Lagrangeovy rovnice dají Maxwellovy rovnice:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^{\beta, \alpha}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\beta} &= 0; \\ -\frac{1}{4\mu_0} \partial^\alpha \left[ \frac{\partial (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})}{\partial A^{\beta, \alpha}} \right] - j_\beta &= 0; \\ -\frac{1}{4} \partial^\alpha \left[ 2F_{\mu\nu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial A^{\beta, \alpha}} \right] &= \mu_0 j_\beta; \\ -\frac{1}{2} \partial^\alpha \left[ (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \frac{\partial}{\partial (\partial^\alpha A^\beta)} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \right] &= \mu_0 j_\beta; \\ -\frac{1}{2} \partial^\alpha \left[ (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta - \delta^\nu_\alpha \delta^\mu_\beta) \right] &= \mu_0 j_\beta; \\ -\frac{1}{2} \partial^\alpha [\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha] &= \mu_0 j_\beta; \\ -\partial^\alpha F_{\alpha\beta} = \mu_0 j_\beta \quad \Rightarrow \quad -F^{\alpha\beta}_{, \alpha} = \mu_0 j^\beta \quad \Rightarrow \quad F^{\beta\alpha}_{, \alpha} = \mu_0 j^\beta, \end{aligned}$$

což jsou Maxwellovy rovnice ve tvaru (1.254).

### ■ Lorentzova pohybová rovnice

Pro pohyb částic samozřejmě nadále platí Lorentzova pohybová rovnice, kterou lze snadno zapsat za pomoci tenzoru elektromagnetického pole. Zavedme nejprve vlastní čas částice  $d\tau$  jako čas plynoucí přímo u částice. Pro interval v místě částice máme

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\mathbf{x}^2 = -c^2 d\tau^2. \quad (1.267)$$

Mezi vlastním a obecným časem tedy existuje vztah

$$-c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + d\mathbf{x}^2 \quad \Rightarrow \quad d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt = \frac{dt}{\gamma}. \quad (1.268)$$

Vlastní čas je invariantem, který využijeme při zavedení čtyřrychlosti a čtyřhybnosti:

$$U^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau}; \quad (1.269)$$

$$P^\alpha \equiv m_0 U^\alpha. \quad (1.270)$$

Pohybová rovnice nabitě částice má potom tvar

$$\frac{dP^\alpha}{d\tau} = Q F^{\alpha\beta} U_\beta. \quad (1.271)$$

Pouhým dosazením za tenzor elektromagnetického pole (1.251) a s využitím rovnosti  $d/d\tau = \gamma d/dt$  snadno ověříme, že vztah (1.271) je jen elegantním přepisem Lorentzovy pohybové rovnice.

Uveďme nyní klíčové Lagrangeovy funkce pro elektřinu a magnetismus

	částice	interakce	pole
$\mathcal{L}$	–	$j_\mu A^\mu$	$-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$
$L$	$-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}$	$-Q\phi + Q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$	–

Pro hmotný bod postrádá smysl hustota Lagrangeovy funkce, i když je možné ji v principu napsat. Stejně tak postrádá smysl celková Lagrangeova funkce pro pole, které je rozprostřené v čase a prostoru. Pokud vezmeme v úvahu pouze částicovou Lagrangeovu funkci, dostaneme pohybovou rovnici volné částice:

$$\frac{dP^\alpha}{d\tau} = 0. \quad (1.272)$$

Pokud vezmeme v úvahu Lagrangeovy funkce pro částici a pro interakce, dostaneme pohybovou rovnici

$$\frac{dP^\alpha}{d\tau} = QF^{\alpha\beta}U_\beta. \quad (1.273)$$

Pokud vezmeme v úvahu pouze Lagrangeovu funkci pro pole, dostaneme Maxwellovy rovnice ve vakuu:

$$F^{\mu\nu}_{,\nu} = 0. \quad (1.274)$$

A pokud uvažíme polní a interakční části Lagrangeovy funkce, dostaneme Maxwellovy rovnice se zdrojovými členy:

$$F^{\mu\nu}_{,\nu} = \mu_0 j^\mu. \quad (1.275)$$

## DODATEK A – EINSTEINOVA SUMAČNÍ KONVENCE

### A1 Einsteinova sumační konvence

Vyskytnou-li se ve výrazu dva stejné indexy, potom přes ně automaticky sčítáme. Sčítací indexy budeme označovat malými písmeny abecedy ( $i, j, k \dots$ ):

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_N b_N = \sum_{j=1}^N a_j b_j = a_j b_j \quad .$$

**Poznámka:** Na označení sčítacího indexu nezáleží :  $a_i b_i = a_j b_j = a_k b_k = a_1 b_1 + \dots + a_N b_N$  .

#### Příklady:

*Skalární součin dvou vektorů:*

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N); \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_N);$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_N b_N = a_j b_j .$$

*Divergence:*

$$\mathbf{T} \equiv (T_1, T_2, T_3);$$

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \frac{\partial T_2}{\partial x_2} + \frac{\partial T_3}{\partial x_3} = \frac{\partial T_i}{\partial x_i} .$$

*Maticové násobení:*

$$\mathbf{A} = \{a_{ij}\}; \quad \mathbf{B} = \{b_{ij}\};$$

$$\{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\}_{ij} = \sum_{k=1}^N a_{ik} b_{kj} = a_{ik} b_{kj} .$$

Volné indexy jsou na obou stranách rovnosti (zde  $i, j$ ). Přes volný index se nesčítá. Němý (vázaný, sčítací) index je dvojice stejných indexů v jednom matematickém členu, přes který se sčítá (zde  $k$ ).

*Malý přírůstek funkce jedné proměnné:*

Mějme funkci jedné reálné proměnné  $f(q)$ , která hodnotě  $q$  přiřadí hodnotu  $f$ :

$$f(q): \quad q \rightarrow f; \quad \text{potom } \Delta f \cong \frac{df}{dq} \Delta q .$$

**Příklad:** Představme si kouli o poloměru  $r$ , jejíž objem je  $V(r) = 4/3 \pi r^3$ . Poloměr koule změním o  $\Delta r$ . Její objem se pro malá  $\Delta r$  přibližně změní o  $\Delta V \cong dV/dr \Delta r = 4\pi r^2 \Delta r$ . Interpretace je zřejmá:  $4\pi r^2$  je plocha koule o poloměru  $r$  a  $\Delta r$  je tloušťka této plochy. Součin představuje změnu objemu koule.

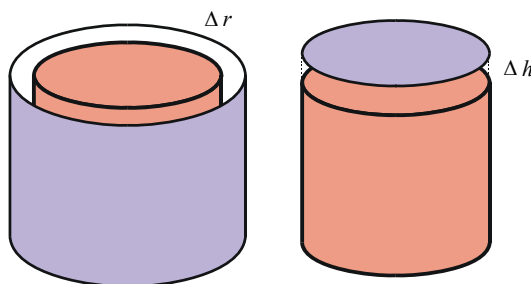
*Malý přírůstek funkce více proměnných:*

Mějme funkci více reálných proměnných  $f(q_1, q_2, \dots, q_N)$ , která hodnotám  $\mathbf{q}$  přiřadí hodnotu  $f$ :

$$f(q_1, \dots, q_N): \quad q_1, \dots, q_N \rightarrow f; \quad \text{potom } \Delta f \cong \frac{\partial f}{\partial q_1} \Delta q_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} \Delta q_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_N} \Delta q_N .$$

**Příklad:** Určeme přírůstek objemu válce, zvětšíme-li poloměr podstavy o  $\Delta r$  a výšku o  $\Delta h$ . Protože  $V(r, h) = \pi r^2 h$ , dostaneme  $\Delta V \cong \partial V/\partial r \Delta r + \partial V/\partial h \Delta h = 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h$ .

První příspěvek je od změny poloměru podstavy, druhý od změny výšky válce:



*Infinitezimální (nekonečně malý) přírůstek funkce více proměnných:*

Zavedeme-li infinitezimální změny namísto malých přírůstků dostaneme vztah

$$df = \frac{\partial f}{\partial q_1} \cdot dq_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_N} \cdot dq_N = \frac{\partial f}{\partial q_j} \cdot dq_j .$$

**Poznámka:** předchozí vztahy lze precizněji formulovat pomocí Lagrangeovy věty o přírůstku a věty o prvním diferenciálu. Pro naše účely však postačí jednoduché vztahy uvedené výše.

*Derivace složené funkce:*

Jestliže vnitřní proměnné  $q_i$  závisí na čase, potom má úplná časová derivace tvar:

$$f = f(q_1, q_2, \dots, q_N) ;$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_1} \cdot \frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_N} \cdot \frac{dq_N}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_j} \cdot \frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j .$$

**Příklad:** Určete první diferenciál a první časovou derivaci v polárních souřadnicích:

$$x(t) = r(t) \cos \varphi(t) ,$$

$$y(t) = r(t) \sin \varphi(t) ;$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi ,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi ;$$

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi ,$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi .$$

*K symbolice v kartézských souřadnicích:*

$$\mathbf{x} \equiv \vec{x} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Pro  $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  zapisujeme gradienty takto:

$$\nabla f \equiv \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \equiv \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) ; \quad \nabla_{\mathbf{v}} f \equiv \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \equiv \left( \frac{\partial f}{\partial v_x}, \frac{\partial f}{\partial v_y}, \frac{\partial f}{\partial v_z} \right) ,$$

nebo v komponentách:  $\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv \partial_i f \equiv f_{,i} .$

**Příklad:**

$$f(\mathbf{v}) = v^2 = \mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_j v_j = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = v^2 ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial v_i} = \frac{\partial}{\partial v_i} v_j v_j = \delta_{ji} v_j + v_j \delta_{ji} = v_i + v_i = 2v_i , \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial v^2}{\partial \mathbf{v}} = 2\mathbf{v} .$$

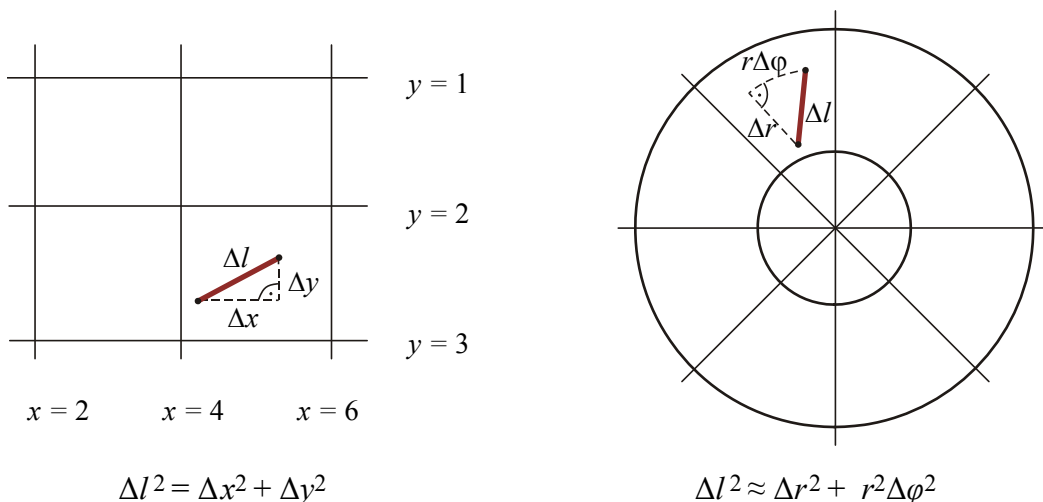
**Poznámka 1:** Operace gradient míří ve směru největšího nárůstu dané funkce a je kolmá na izoplochy (plochy konstantní hodnoty funkce). To je patrné z rozpisu

$$f(\mathbf{x}) = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla f \cdot d\mathbf{x} = 0.$$

Vektor  $d\mathbf{x}$  míří v izoploše a vektor  $\nabla f$  je na něho kolmý.

**Poznámka 2:** Symbol  $\nabla$  se nazývá „nabla“. Název zavedl skotský matematický fyzik Peter Guthrie Tait (1831–1901) podle trojúhelníkového tvaru asyrské harfy ze 7. století př. n. l. Asýrie byla v severní Mezopotámii. Slovo nabla (Nbl) je z aramejštiny, která ho upravila z hebrejského Nev(b)el. Stejný nástroj už ale znali Sumerové v období 3 100 př. n. l. James Clerk Maxwell razil pro tento operátor název „slope“ z anglického slova znamenajícího spád či sklon. Návrh Taita ale zvítězil.

## A2 Délkový element



Pro infinitezimálně malé vzdálenosti přejdou přibližné rovnosti v přesné rovnosti. V ortogonálních systémech (souřadnicové sítě jsou vzájemně kolmé) lze délkový element vyjádřit vztahem

$$dl^2 = g_{11}dq_1^2 + g_{22}dq_2^2 + g_{33}dq_3^2, \quad (\text{A.1})$$

v neortogonálních obecně platí, že délkový element je kvadratickou funkcí přírůstků:

$$dl^2 = g_{ij}dq_i dq_j. \quad (\text{A.2})$$

Poznamenejme, že platí sumační konvence. Koefficienty  $g_{ij}$  se nazývají *metrika* nebo *metrický tenzor*. Při jejich určování lze postupovat buď geometricky (viz horní obrázek) nebo z diferenciálů transformačních vztahů pro souřadnice (viz příklad pro polární souřadnice z minulé kapitoly, kde byly vypočteny diferenciály  $dx$ ,  $dy$  pro tyto souřadnice). Analogicky postupujeme i pro další souřadnicové systémy:

*Polární souřadnice:*

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} ; \quad dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (\text{A.3})$$

*Sférické souřadnice:*

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \theta \\ y &= r \sin \varphi \sin \theta \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} ; \quad dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (\text{A.4})$$



Válcové souřadnice:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \\y &= r \sin \varphi \quad ; \quad dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 \quad . \\z &= z\end{aligned}\tag{A.5}$$

Kinetickou energii systému pak můžeme snadno v zobecněných souřadnicích určit za pomoci délkového elementu ze vztahu:

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} m \frac{dl^2}{dt^2} = \frac{1}{2} m g_{ij} \frac{dq_i dq_j}{dt^2} = \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad .$$

Speciálně pro předchozí souřadnice tedy platí:

$$\begin{aligned}\text{Kartézské} \quad & T(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ \text{Polární} \quad & T(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) \\ \text{Sférické} \quad & T(r, \theta, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \\ \text{Válcové} \quad & T(r, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)\end{aligned}\tag{A.6}$$

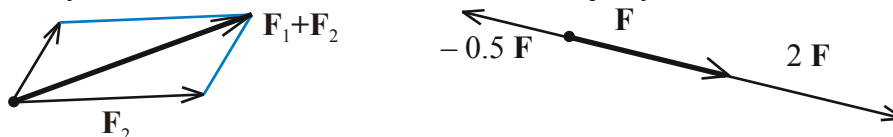
V jednotlivých souřadnicích se kinetická energie rozpadá na součet členů odpovídajících jednotlivým stupňům volnosti. Například v polárních souřadnicích se kinetická energie skládá z radiální části  $T_r$  a rotační části  $T_\varphi$ .

**Poznámka:** velikost kinetické energie nemůže záviset na volbě souřadnicového systému, kinetická energie je skalární funkcí zobecněných souřadnic. Další skalární funkcí je například potenciální energie.

## DODATEK B – LIEOVA ALGEBRA

### B1 Vektorový prostor

S pojmem vektoru jste se pravděpodobně setkali poprvé ve fyzice (například rychlost, síla). Zde jste vystačili s představou úseček opatřených na jednom konci šipkou, se kterými lze provádět dvě operace: skládání vektorů (*sčítání*) a natahování vektorů (*násobení skalárem*). Tato představa byla v matematice zobecněna i na další objekty.



Stačí pro ně definovat sčítání a násobení skalárem tak, aby tyto operace zachovávaly základní vlastnosti skládání a natahování vektorů. Množina takových objektů se nazývá *lineární vektorový prostor*. Připomeňme si nyní jeho definici ze základního kursu matematiky:

Označme  $A$  lineární vektorový prostor, necht'  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in A$ ;  $R(C)$  množinu reálných (komplexních) čísel, necht'  $\alpha, \beta, \gamma \in R(C)$ .

**Definice:** řekneme, že  $A$  je lineární vektorový prostor nad množinou reálných (komplexních) čísel, jsou-li pro prvky tohoto prostoru definovány operace

$$\begin{array}{llll} + & : & A \times A \rightarrow A & \text{sčítání vektorů} & \mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \\ \cdot & : & A \times R(C) \rightarrow A & \text{násobení vektoru skalárem} & \mathbf{z} = \alpha \mathbf{x}, \end{array}$$

které mají následující vlastnosti:

$$\begin{array}{ll} 1) & \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}, & \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}, \\ 2) & \alpha (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \mathbf{x} + \alpha \mathbf{y}, & (\alpha + \beta) \mathbf{x} = \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{x}, \\ 3) & \alpha (\beta \mathbf{x}) = (\alpha \beta) \mathbf{x}, & 1 \mathbf{x} = \mathbf{x}, \\ 4) & \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{z}. \end{array}$$

#### Poznámky:

- Operace "+" přiřazuje dvěma prvkům prostoru  $A$  opět prvek prostoru  $A$ . Pro  $n$ -tici čísel může být operace "+" definována takto:  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ ;  $\mathbf{x} + \mathbf{y} \equiv (x_1 + y_1, \dots, x_N + y_N)$ .
- Operace " $\cdot$ " přiřazuje prvku prostoru  $A$  a reálnému (komplexnímu) číslu opět prvek prostoru  $A$ . Pro  $n$ -tici čísel může být operace " $\cdot$ " definována takto:  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ ;  $\alpha \cdot \mathbf{x} \equiv (\alpha x_1, \dots, \alpha x_N)$ .
- V lineárním vektorovém prostoru lze zvolit skupinu lineárně nezávislých vektorů (bazi) tak, že každý prvek prostoru lze napsat jako lineární kombinaci prvků baze:

$$\mathbf{x} = \sum_{l=1}^N x_l \mathbf{e}_l \quad ; \quad \{\mathbf{e}_l\}_{l=1}^N \quad \dots \quad \text{prvky baze} \quad . \quad (\text{B.1})$$

Veličiny  $x_l$  jsou koeficienty lineární kombinace, nazýváme je *souřadnice prvku  $\mathbf{x}$*  v bazi  $\{\mathbf{e}_l\}$ . Počet prvků baze nazýváme *dimenze prostoru*. Baze musí být úplná, tj. žádný její prvek nesmí chybět, jde o maximální množinu lineárně nezávislých vektorů.

### B2 Lieova algebra

**Definice:** Lineární vektorový prostor s operacemi "+" a " $\cdot$ " nazveme Lieovou algebrou, je-li v něm navíc definována operace

$$[ \ , \ ] \quad : \quad A \times A \rightarrow A \quad \text{Lieova operace} \quad \mathbf{z} = [ \mathbf{x} \ , \ \mathbf{y} ]$$

s vlastnostmi:

$$1) \quad [\mathbf{x}, \mathbf{y}] = -[\mathbf{y}, \mathbf{x}] \quad \text{antisymetrie} \quad (\text{B.2})$$

$$2) \quad [\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}] = [\mathbf{x}, \mathbf{z}] + [\mathbf{y}, \mathbf{z}] \quad \text{linearita} \quad (\text{B.3})$$

$$3) \quad [\alpha \mathbf{x}, \mathbf{y}] = \alpha [\mathbf{x}, \mathbf{y}] \quad \text{linearita} \quad (\text{B.4})$$

$$4) \quad [\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] + [\mathbf{y}, [\mathbf{z}, \mathbf{x}]] + [\mathbf{z}, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]] = 0 \quad \text{Bianchiho identita} \quad (\text{B.5})$$

**Poznámky:**

- 1) Jde o další zobrazení, při kterém dvojici vektorů přiřadíme vektor.
- 2) Z linearity v prvním argumentu a antisymetrie plyne linearita ve druhém argumentu.

**Příklad 1:**  $A$  ... množina uspořádaných trojic

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x_1, x_2, x_3) \quad , \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \quad ; \quad x_i, y_i \in C(R) \\ + \quad : \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} &\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) , \\ \cdot \quad : \quad \alpha \cdot \mathbf{x} &\equiv (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) , \\ [, ] \quad : \quad [, ] &\equiv \mathbf{x} \times \mathbf{y} \quad . \end{aligned}$$

Lieova algebra je definována jako vektorový součin. Ověřte, že vektorový součin splňuje všechny vlastnosti Lieovy algebry (B.2) až (B.5).

**Příklad 2:**  $A$  - množina čtvercových matic  $n \times n$ . Pro konkrétnost budeme uvažovat matice  $2 \times 2$ 

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} , \\ + \quad : \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} &\equiv \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} , \\ \cdot \quad : \quad \alpha \cdot \mathbf{A} &\equiv \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix} , \\ [, ] \quad : \quad [\mathbf{A}, \mathbf{B}] &\equiv \mathbf{AB} - \mathbf{BA} \quad . \end{aligned}$$

Lieova algebra je definována za pomoci maticového násobení jako tzv. komutátor. Je-li  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ , matice komutují a komutátor je roven nule. Ověřte, že komutátor splňuje všechny vlastnosti Lieovy algebry (B.2) až (B.5).

**B3 Strukturní koeficienty Lieovy algebry**

Rozvineme-li prvky prostoru do příslušné baze, můžeme psát:

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = [x_k \mathbf{e}_k, y_l \mathbf{e}_l] = x_k y_l [\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l] \quad . \quad (\text{B.6})$$

K určení Lieovy operace postačí znát výsledek operace jen pro prvky baze. Je zřejmé, že výsledek operace  $[\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l]$  je prvek prostoru a můžeme ho proto opět rozvinout do baze  $\{\mathbf{e}_m\}$ . Koeficienty rozvoje (souřadnice)  $c^m$  budou ale záviset na tom, pro které dva prvky baze Lieovu operaci provádíme:

$$[\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l] = c_{kl}^m \mathbf{e}_m \quad . \quad (\text{B.7})$$

Veličiny  $c_{kl}^m$  se nazývají strukturní koeficienty Lieovy algebry. Výsledek Lieovy operace lze nyní zapsat ve tvaru

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = c_{kl}^m x_k y_l \mathbf{e}_m \quad . \quad (\text{B.8})$$

Zadáním strukturních koeficientů je určena celá Lieova algebra. Z antisymetrie Lieovy operace (B.2) plyne antisymetrie strukturních koeficientů

$$c_{kl}^m = -c_{lk}^m \quad . \quad (\text{B.9})$$

**Příklad 1:** – pokračování

Na trojicích lze zvolit bázi

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0) & ; & & \mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0) & ; & & \mathbf{e}_3 &= (0, 0, 1) & ; \\ & & & & [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] &= \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 & , \\ & & & & [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] &= \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 & , \\ & & & & [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] &= \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 & . \end{aligned}$$

Nenulové strukturální koeficienty tedy jsou

$$c_{12}^3 = c_{23}^1 = c_{31}^2 = 1 \quad ; \quad c_{21}^3 = c_{32}^1 = c_{13}^2 = -1 \quad .$$

**Příklad 2:** – pokračování

Na komplexních maticích  $2 \times 2$  lze zvolit bázi

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

$\sigma_0$  je jednotková matice (až na normovací konstantu  $1/2$ );  $\sigma_k$   $k = 1, 2, 3$  jsou tzv. Pauliho matice, v kvantové teorii uvidíme, že mají význam operátoru spinu. Snadno vypočteme (ověřte!)

$$\begin{aligned} [\sigma_1, \sigma_2] &= \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_1 = i \sigma_3 \quad , \\ [\sigma_2, \sigma_3] &= \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_2 = i \sigma_1 \quad , \\ [\sigma_3, \sigma_1] &= \sigma_3 \sigma_1 - \sigma_1 \sigma_3 = i \sigma_2 \quad , \\ [\sigma_0, \sigma_1] &= [\sigma_0, \sigma_2] = [\sigma_0, \sigma_3] = 0 \quad . \end{aligned}$$

Jednotková matice komutuje s každou maticí. Nenulové strukturální koeficienty jsou

$$c_{12}^3 = c_{23}^1 = c_{31}^2 = i \quad ; \quad c_{21}^3 = c_{32}^1 = c_{13}^2 = -i \quad .$$

Pro matice (i jiné objekty, u kterých je definováno násobení mezi objekty) platí ještě další důležité relace:

$$[\mathbf{AB}, \mathbf{C}] = \mathbf{A}[\mathbf{B}, \mathbf{C}] + [\mathbf{A}, \mathbf{C}]\mathbf{B} \quad , \quad (\text{B.10})$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{BC}] = \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}] + [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C} \quad . \quad (\text{B.11})$$

**Důkaz:**

$$\begin{aligned} \mathbf{A}[\mathbf{B}, \mathbf{C}] + [\mathbf{A}, \mathbf{C}]\mathbf{B} &= \mathbf{A}(\mathbf{BC} - \mathbf{CB}) + (\mathbf{AC} - \mathbf{CA})\mathbf{B} = \\ &= \mathbf{ABC} - \mathbf{ACB} + \mathbf{ACB} - \mathbf{CAB} = \mathbf{ABC} - \mathbf{CAB} = [\mathbf{AB}, \mathbf{C}] \quad . \end{aligned}$$

Analogicky dokážeme i druhou relaci. Pomocí těchto vztahů můžeme určit Lieovu operaci i pro mocniny matic, například:

$$[\mathbf{A}^2, \mathbf{B}] = [\mathbf{AA}, \mathbf{B}] = \mathbf{A}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] + [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{A} \quad .$$

Podobně lze ze znalosti základní operace  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$  a vztahů (B.10), (B.11) určit postupně výsledek operace  $[\mathbf{A}^k, \mathbf{B}^l]$ .

## DODATEK C – TENZORY

### C1 Kovariantní a kontravariantní indexy

Předpokládejme, že máme lineární vektorový prostor opatřený bází  $\{\mathbf{e}_k\}$ . Vektor  $\mathbf{A}$  můžeme v této bázi rozvinout do výrazu

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^N A^k \mathbf{e}_k = A^k \mathbf{e}_k. \quad (\text{C.1})$$

Čísla  $A^k$  nazýváme složky (souřadnice, koeficienty rozvoje) vektoru, objekty  $\mathbf{e}_k$  prvky báze. Různá poloha indexů naznačuje, že se složky vektorů transformují jinak než prvky báze. Nadále budeme využívat *sumační konvenci*, ale sčítání bude vždy probíhat přes jeden index dolní (transformuje se jako prvky báze) a jeden index horní (transformuje se jako složky vektorů). Přes dvojici stejného horního a dolního indexu se automaticky sčítá, jde o tzv. němé indexy. Poloha volných indexů (přes které se nesčítá) musí zůstat na obou stranách rovnosti vždy stejná. Přejděme od jedné báze k nějaké jiné, čárkované bázi:

$$\{\mathbf{e}_k\} \rightarrow \{\mathbf{e}'_k\}. \quad (\text{C.2})$$

Vektor  $\mathbf{A}$  je objekt, jehož vyjádření nemůže záviset na volbě báze, tj. musí platit

$$\mathbf{A} = A'^k \mathbf{e}'_k = A^k \mathbf{e}_k. \quad (\text{C.3})$$

Složky vektorů se mezi dvěma bázemi budou transformovat za pomoci nějaké matice  $\mathbf{S}$ :

$$A'^k = S^k_l A^l. \quad (\text{C.4})$$

Všimněte si, že se sčítá přes němý index  $l$  (jeden je nahoře a druhý dole). Volný index  $k$  je na obou stranách rovnosti nahoře. I u matic tak musíme rozlišovat horní a dolní indexy. Transformační matici prvků báze označme  $\mathbf{U}$ :

$$\mathbf{e}'_k = U^l_k \mathbf{e}_l. \quad (\text{C.5})$$

Vyzkoušejte si, že jde o jedinou možnost, při které se sčítá přes jeden horní a jeden dolní index, volný index  $k$  má stejnou polohu na obou stranách rovnosti a transformační matice  $U$  má stejně jako matice  $S$  první index nahoře a druhý dole. Zjistěme nyní, jaký je vztah mezi oběma transformačními maticemi  $\mathbf{S}$  a  $\mathbf{U}$ . Vyjděme z vyjádření vektoru  $\mathbf{A}$  v nové bázi (C.5):

$$\mathbf{A} = A'^k \mathbf{e}'_k = S^k_l A^l U^n_k \mathbf{e}_n = U^n_k S^k_l A^l \mathbf{e}_n.$$

Je zřejmé, že v nové bázi musí být výsledek  $A^l \mathbf{e}_l$  nebo  $A^k \mathbf{e}_k$ , chcete-li. Toho lze ale dosáhnout jediným způsobem: v posledním výrazu musí platit

$$U^n_k S^k_l = \delta^n_l, \quad (\text{C.6})$$

kde jsme označili  $\delta^n_l$  Kroneckerovo delta. V maticovém zápise tato podmínka říká, že

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{1}. \quad (\text{C.7})$$

Je zřejmé, že matice  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{S}$  jsou navzájem inverzní. To je patrné již přímo z rozkladu vektoru  $\mathbf{A}$  (C.3) do obou bází. Má-li být výsledek stejný, musí se složky vektorů (horní indexy) transformovat „opačně“ než prvky báze (dolní indexy). Jedině tak dají kombinace (C.3) výsledek nezávislý na volbě báze (vektor  $\mathbf{A}$ ). Horní indexy budeme nazývat *kontravariantní*. Tyto indexy se transformují stejně jako složky vektoru, tj. pomocí transformační matice  $\mathbf{S}$ . Dolní indexy budeme nazývat *kovariantní*. Tyto indexy se transformují stejně jako prvky báze, tj. pomocí transformační matice  $\mathbf{U}$ . Indexů může být i více, například ze složek dvou vektorů můžeme sestavit výraz

$$T^{kl} \equiv A^k B^l; \quad T'^{kl} \equiv S^k_o S^l_p T^{op}, \quad (\text{C.8})$$

který se musí transformovat jako součin složek vektorů. Za pomoci  $T^{kl}$ , můžeme vytvořit opět objekt nezávislý na souřadnicové soustavě, tzv. tenzor druhého řádu:

$$\vec{\mathbf{T}} \equiv T^{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l. \quad (\text{C.9})$$

Symbol  $\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$  nazýváme diadický (tenzorový) součin, jde o uspořádanou dvojici prvků báze. Výraz  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$  tak chápeme jako objekt se složkami, které tvoří matici  $A^k B^l$ :

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = A^k B^l \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad (\text{C.10})$$

## C2 Skalární součin, zvyšování a snižování indexů

Předpokládejme, že je na našem lineárním vektorovém prostoru definován skalární součin dvou vektorů  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ , který splňuje základní vlastnosti skalárního součinu. Rozvineme-li oba vektory do báze, získáme

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^k B^l \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = g_{kl} A^k B^l, \quad (\text{C.11})$$

kde jsme označili

$$g_{kl} \equiv \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l \quad (\text{C.12})$$

tzv. metrické koeficienty (metriku). Vidíme, že výsledek skalárního součinu dvou libovolných vektorů můžeme určit, pokud známe metrické koeficienty, tj. výsledek skalárních součinů všech prvků báze mezi sebou.

Označme inverzní matici k metrice

$$g^{kl} \equiv (g_{kl})^{-1}; \quad g^{kl} g_{lm} = \delta^k_m. \quad (\text{C.13})$$

Zavedme nyní pomocné (duální) objekty

$$\mathbf{e}^k \equiv g^{kl} \mathbf{e}_l; \quad A_k \equiv g_{kl} A^l. \quad (\text{C.14})$$

Nejde o skutečné prvky báze ani o skutečné komponenty vektoru, ale o formální lineární kombinace dané metrikou. Vždy platí, že index nahoře znamená transformaci pomocí stejné matice, jakou se transformují složky vektorů a index dole znamená transformaci pomocí stejné matice, jakou se transformují prvky báze. Za pomoci metriky tak můžeme indexy libovolně snižovat nebo zvyšovat, stačí jen dodržet pravidlo, že sčítáme přes jeden horní a jeden dolní index (to zajistí invarianci součtu vzhledem k transformaci báze). Volné indexy zachovávají vždy svou polohu. Uvedme příklad:

$$g_{lo} T^{klm} = T^k_o{}^m.$$

Prostřední index jsme snížili za pomoci metriky. Skalární součin nyní můžeme zapsat několika způsoby:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{kl} A^k B^l = A^k B_k,$$

kde jsme druhý index snížili za pomoci metriky. Mohli jsme ale také snížit první index:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{kl} A^k B^l = A_l B^l = A_k B^k.$$

Platí tedy

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{kl} A^k B^l = A^k B_k = A_k B^k. \quad (\text{C.15})$$

Kontravariantní (horní) složka je skutečnou složkou vektoru, kovariantní (dolní) v sobě obsahuje metriku. Definici inverzní metriky (C.13) můžeme chápat také jako snižování či zvyšování indexů:

$$\begin{aligned} g^{kl} g_{lm} &= \delta^k_m; \\ g^{kl} g_{lm} &= g^k_m; \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad g^k_m = \delta^k_m. \quad (\text{C.16})$$

Metrika a Kroneckerovo delta jsou tak jediným objektem. Pokud jsou oba indexy dole, jde o metrické koeficienty. Pokud jsou oba indexy nahoře, jde o inverzní matici k metrickým koeficientům a pokud jsou indexy smíšené, jde o Kroneckerovo delta, tedy prvky jednotkové matice. Metrika tak není nic jiného než jednotková matice s patřičně posunutými indexy. Za pomoci tenzorového zápisu můžeme psát

$$\mathbf{1} = \delta^k_l \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^l = g_{kl} \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^l = g^{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l. \quad (\text{C.17})$$

### C3 Čtyřvektory, Minkowského metrika

Ve speciální relativitě nazýváme každou čtveřici veličin, jež se transformuje Lorentzovou transformací, čtyřvektor. K základním čtveřicím patří *událost* (časová a prostorová souřadnice události), *čtyřhybnost* (energie a hybnost), *vlnový čtyřvektor* (úhlová frekvence a vlnový vektor), *čtyřpotenciál elektromagnetického pole* (skalární a vektorový potenciál), *čtyřtok* (zdrojové členy Maxwellových rovnic – hustota a tok náboje) nebo čtyřgradient. V soustavě SI musíme zajistit, aby všechny 4 složky měly stejný rozměr. To můžeme učinit nejjednodušeji vynásobením nebo vydělením časové složky univerzální konstantou  $c$  (rychlostí světla ve vakuu):

$$\begin{aligned} x^\mu &\equiv \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}; & p^\mu &\equiv \begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}; & k^\mu &\equiv \begin{pmatrix} \omega/c \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}; \\ A^\mu &\equiv \begin{pmatrix} \phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}; & j^\mu &\equiv \begin{pmatrix} \rho c \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}; & \partial_\mu &\equiv \begin{pmatrix} \partial/\partial ct \\ \partial/\partial \mathbf{x} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

#### Poznámky:

- Řeckými indexy budeme značit zásadně jen čtyřvektory (index 0 odpovídá časové části, indexy 1, 2, 3 prostorové části).
- U čtyřgradientu jde o kovariantní (dolní) index, protože

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

tedy skutečné složky vektorů jsou ve jmenovateli, pokud zapisujeme index v čitateli, musí mít opačnou polohu, neboť se transformační matice změní na inverzní!

- Metrika ve speciální relativitě se nazývá Minkowského metrika. Je diagonální a v časové části má minus. Totéž platí i pro inverzní matici (metriku s horními indexy). Metrika se smíšenými indexy je jednotková matice, tj. její prvky jsou Kroneckerovo delta:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}; & g^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}; \\ g^\mu{}_\nu &= \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}; & g_\mu{}^\nu &= \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Zjednodušeně se často Minkowského metrika píše jako  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ , někdy se označuje symbolem  $\eta_{\mu\nu}$ . Za pomoci metriky nyní snadno určíme kovariantní složky běžných čtyřvektorů a kontravariantní složku čtyřgradientu:

$$\begin{aligned}
 x_\mu &\equiv \begin{pmatrix} -ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}; & p_\mu &\equiv \begin{pmatrix} -E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}; & k_\mu &\equiv \begin{pmatrix} -\omega/c \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}; \\
 A_\mu &\equiv \begin{pmatrix} -\phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}; & j_\mu &\equiv \begin{pmatrix} -\rho c \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}; & \partial^\mu &\equiv \begin{pmatrix} -\partial/\partial ct \\ \partial/\partial \mathbf{x} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{C.20}$$

**Příklady**

Najděme některé typické skalární součiny:

$$k \cdot x = k^\mu x_\mu = k^0(-x_0) + k^1 x_1 + k^2 x_2 + k^3 x_3 = -\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x},$$

nalevo je součin čtyřvektorů, poslední člen napravo je běžný součin v  $\mathbb{R}^3$ . Obdobně určíme výsledky dalších příkladů

$$ds^2 \equiv dx_\mu dx^\mu = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2;$$

$$j \cdot A \equiv j_\mu A^\mu = -\rho\phi + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A};$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\mu j^\mu = 0;$$

$$\square f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\mu \partial^\mu f = 0.$$

Často se používá zkrácený zápis, při kterém se derivace píše za čárku. Indexy před čárkou jsou skutečnými indexy, indexy za čárkou jsou derivacemi:

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \equiv \partial_\nu A^\mu \equiv A^\mu{}_{,\nu}.$$

Jde vlastně o nejúspornější zápis derivace vůbec, ze kterého je zřejmé na první pohled, jak se derivace transformuje. Uvedme další příklady:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \equiv \partial^\mu \varphi \equiv \varphi{}^{,\mu};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu \varphi \equiv \varphi{}_{,\mu};$$

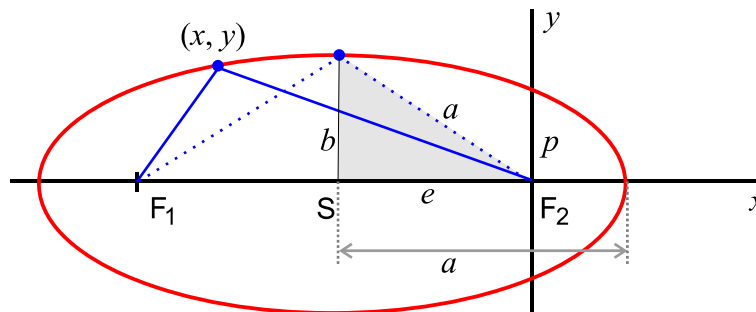
$$\frac{\partial^2 T^\alpha{}_\beta}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \equiv \partial_\mu \partial^\nu T^\alpha{}_\beta \equiv T^\alpha{}_{\beta,\mu}{}^\nu;$$

$$\square f \equiv \partial_\mu \partial^\mu f \equiv f{}_{,\mu}{}^\mu.$$



**DODATEK D – KUŽELOSEČKY****D1 Elipsa**

Elipsa je množina bodů v rovině, které mají stejný součet vzdáleností od dvou pevně zvolených bodů, tzv. ohnisek.



V kartézské souřadnicové soustavě má rovnice elipsy tvar (osa  $y$  vede jedním z ohnisek)

$$\left(\frac{x+e}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1. \quad (\text{D.1})$$

Veličina  $e$  se nazývá excentricita,  $a$  je velká poloosa,  $b$  je malá poloosa. Mezi těmito parametry existuje jednoduchý vztah (viz obrázek)

$$a^2 = e^2 + b^2. \quad (\text{D.2})$$

Přepíšme tuto rovnici do polárních souřadnic

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi; \\ y &= r \sin \varphi. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Po dosazení (D.3) do (D.2) získáme kvadratickou rovnici pro  $r$ , která má řešení

$$r = \frac{-b^2 e \cos \varphi \pm b^2 \sqrt{e^2 \cos^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}}{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}.$$

Řešení s minus je nepřijatelné, neboť by vedlo na zápornou hodnotu radiální vzdálenosti. Ze vztahu vyloučíme malou poloosu  $b$  za pomoci vztahu (D.2):

$$\begin{aligned} r &= \frac{-(a^2 - e^2)e \cos \varphi + (a^2 - e^2)a}{a^2 - e^2 \cos^2 \varphi} = \frac{(a^2 - e^2)(a - e \cos \varphi)}{(a - e \cos \varphi)(a + e \cos \varphi)} = \\ &= \frac{a^2 - e^2}{a + e \cos \varphi} = \frac{a[1 - (e/a)^2]}{1 + (e/a) \cos \varphi} \end{aligned}$$

Výsledná rovnice elipsy tedy je

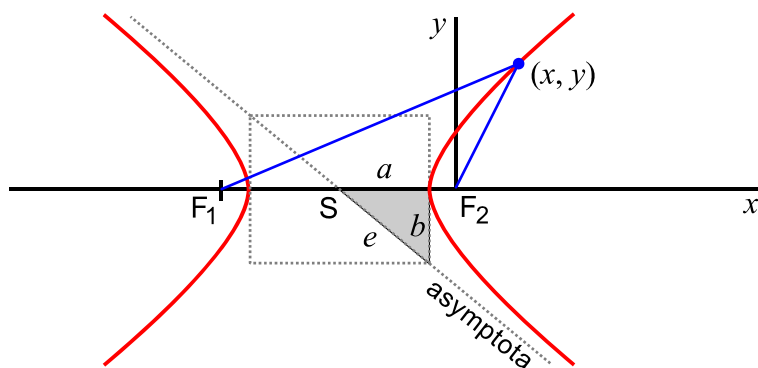
$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}; \quad \varepsilon \equiv e/a = \sqrt{1 - (b/a)^2}; \quad p \equiv a(1 - \varepsilon^2). \quad (\text{D.4})$$

Pro elipsu je  $\varepsilon < 1$ ,  $p > 0$ . Veličina  $\varepsilon$  se nazývá numerická excentricita a jde o bezrozměrný parametr charakterizující protáhlost elipsy. Obsah elipsy získáme jejím přeškálováním souřadnicových os tak, aby poloosy byly stejně velké a elipsa se stala kružnicí:

$$S = \pi ab. \quad (\text{D.5})$$

## D2 Hyperbola

Hyperbola je množina bodů v rovině, které mají stejný rozdíl vzdáleností od dvou pevně zvolených bodů, tzv. ohnisek.



V kartézské souřadnicové soustavě má rovnice hyperboly tvar (osa  $y$  vede jedním z ohnisek)

$$\boxed{\left(\frac{x+e}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1} \quad (\text{D.6})$$

Veličina  $e$  se nazývá excentricita,  $a$  je velká poloosa,  $b$  je malá poloosa. Mezi těmito parametry existuje jednoduchý vztah (viz obrázek)

$$\boxed{a^2 + b^2 = e^2} \quad (\text{D.7})$$

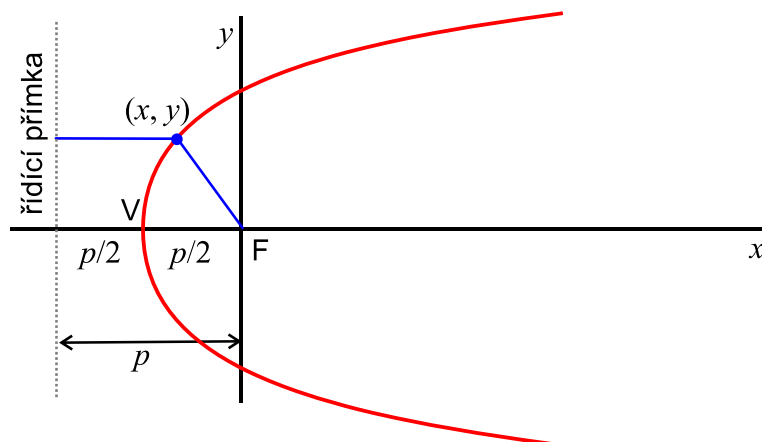
Postupem zcela analogickým jako u elipsy odvodíme rovnici hyperboly v polárních souřadnicích. Výsledná rovnice hyperboly je

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}; \quad \varepsilon \equiv e/a = \sqrt{1 + (b/a)^2}; \quad p \equiv a(1 - \varepsilon^2)} \quad (\text{D.8})$$

Pro hyperbolu je  $\varepsilon > 1$ ,  $p < 0$ . Veličina  $\varepsilon$  se nazývá numerická excentricita a jde o bezrozměrný parametr charakterizující tvar hyperboly.

## D3 Parabola

Parabola je množina všech bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od ohniska a od řídicí přímky.



V kartézské souřadnicové soustavě má rovnice hyperboly tvar (osa  $y$  vede ohniskem)

$$y^2 = 2p \left( x + \frac{p}{2} \right). \quad (\text{D.9})$$

Postupem analogickým jako u elipsy a hyperboly odvodíme rovnici paraboly v polárních souřadnicích. Výsledná rovnice paraboly je

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}; \quad \varepsilon = \pm 1. \quad (\text{D.10})$$

Znaménko „+“ platí pro parabolu symetrickou kolem svislé osy  $y$ , znaménko „-“, pro parabolu symetrickou kolem vodorovné osy  $y$ . Rovnice všech kuželoseček mají tedy stejný tvar:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}; \quad \begin{cases} |\varepsilon| < 1 & \text{elipsa ,} \\ |\varepsilon| > 1 & \text{hyperbola ,} \\ |\varepsilon| = 1 & \text{parabola .} \end{cases} \quad (\text{D.11})$$

## REJSTŘÍK OSOBNOSTÍ

**Coriolis, Gustave Gaspard (1792–1843)**, francouzský matematik a fyzik, zabýval se matematickou analýzou, mechanikou a hydraulikou. Proslavil se výpočtem sil působících v rotujících soustavách. Jedna z těchto sil nese jeho jméno – Coriolisova síla. Podrobně také studoval tření. Jako první použil termín mechanická práce v souvislosti s působením sil na tělesa a používal správný vztah pro kinetickou energii. V jedné ze svých prací se zabýval také teorií srážek kulečnických koulí. V roce 1829 se stal profesorem mechaniky na École Centrale Paris. Jeho jméno je jedním ze 72 jmen vyrytých na Eiffelově věži.

**Euler, Lheonard (1707–1783)**, švýcarský matematik a astronom, žák Johanna Bernoulliho. Pracoval na Akademii v Petrohradu a na Akademii věd v Berlíně. Měl fenomenální paměť a jednou rozřešil při mezi dvěma studenty, jejichž výsledky náročného výpočtu se lišily na padesátém desetinném místě tím, že výsledek spočítal jen tak v hlavě. V roce 1735 Euler oslepl na pravé oko a v roce 1766 i na levé. Ale přesto pokračoval v publikaci svých výsledků, které diktoval. Euler byl nejpłodnější matematikem všech dob (přesto, že měl 13 dětí). Za svůj život publikoval přes 800 prací. Dvanáctkrát byl odměněn cenou Pařížské akademie. Když se ho ptali na vysvětlení jeho úžasné plodnosti, odvětil: „*Zdá se, že mé pero je inteligentnější než já.*“ François Arago o něm řekl: „Počítá stejně lehce, jako člověk dýchá nebo orel plachtí vzduchem“.

Nezávisle na Lagrangeovi našel nutné podmínky pro minimalizaci funkcionálu ve variačním počtu. Ve fyzice jsou tyto rovnice známy jako Lagrangeovy pohybové rovnice. Jejich výhodou je, že nezávisí na volbě souřadnicového systému.

Zabýval se také teoretickou astronomií. Zkoumal problém pohybu tří a více těles a dokázal, že neexistuje analytické řešení, teoreticky řešil pohyb Měsíce (problém nakonec vyřešil až Laplace) a poruchy drah Jupiteru a Saturnu. Euler teoreticky odvodil možnost odstranění barevné vady u čočkových dalekohledů (prakticky to dokázal Chester Moor v roce 1733).

**Hamilton, William Rowan (1805–1865)**, významný irský matematik. Pod vedením svého strýce lingvisty se naučil mluvit čtrnácti jazyky. V sedmnácti letech odhalil chybu v Laplaceově díle *Celestial Mechanics*. Předpověděl kónickou refrakci ve dvouosých krystalech, která byla zanedlouho experimentálně potvrzena Hunphrey Lloydem. Hamilton také rozšířil princip minima energie popsany Maupertiem na Hamiltonův princip, základní variační princip v teoretické mechanice, který vede na Lagrangeovy rovnice. V diferenciálním počtu je po něm pojmenován Hamiltonův operátor, ve fyzice Hamiltonovy pohybové rovnice, Hamiltonova funkce a Hamiltonova-Jacobiho rovnice. Poslední třetinu svého života strávil pod vlivem alkoholu a již nijak nepřispěl k lidskému poznání.

**Hopf, Eberhard Frederich Ferdinand (1902–1983)**, německý matematik a astronom, který se narodil ještě v Rakousko-Uhersku (v Salzburgu). Je zakladatelem ergodické teorie a teorie bifurkací (větvení řešení diferenciálních rovnic). Zabýval se parciálními diferenciálními rovnicemi, integrálními rovnicemi, mechanikou tekutin a diferenciální geometrií. Objevil princip maxima v teorii eliptických diferenciálních rovnic. Vystudoval na Univerzitě v Berlíně, kde habilitoval v roce 1929. Od roku 1931 pracoval na MIT ve Spojených státech. V roce 1936 se vrátil do Německa, pracoval na univerzitách v Lipsku a Mnichově. Od roku 1949 až do smrti pracoval na Indiana University v Bloomingtonu. V teorii diferenciálních rovnic je po něm pojmenována Hopfova bifurkace.

**Jacobi, Carl (1804–1851)**, německý matematik, který se zabýval teorií čísel, eliptickými funkcemi a parciálními diferenciálními rovnicemi. Vystudoval Berlínskou univerzitu, kde získal doktorát v roce 1825. Tématem jeho závěrečné práce byly zlomky. V roce 1829 se stal profesorem matematiky na Univerzitě v Königsbergu. Byl vynikajícím učitelem. Následkem oslabení chřipkou onemocněl neštovicemi, na které zemřel. Jsou po něm pojmenovány: Jacobiho determinant (determinant z parciálních derivací funkcí podle všech proměnných), Jacobiho eliptické funkce, Jacobiho identita (u Lieovy algebry je součet všech cyklických permutací výrazů  $[a,[b,c]]$  nulový) a Hamiltonova-Jacobiho rovnice v teoretické mechanice.

**Lagrange, Joseph (1736–1813)**, francouzský matematik a teoretický fyzik, byl jednou z nejvýznamnějších vědeckých osobností osmnáctého století. Lagrange vystřídal Eulera na místě ředitele Berlínské akademie. Jeho dílo *Mécanique Analytique* z roku 1788 bylo komplexním pojetím mechaniky z matematického hlediska. Lagrange se stal spoluzakladatelem variačního počtu (v matematice řešil obdobné úlohy Euler). Mechanické úlohy chápal jako hledání optimální trajektorie na základě jednoduchého integrálního principu. Nalezl nutné podmínky pro existenci řešení, které představují pohybové rovnice sledovaného objektu. Dnes se tyto rovnice nazývají Lagrangeovy rovnice a jsou základem teoretické mechaniky. Také jsou po něm pojmenovány Lagrangeovy body – pětice rovnovážných bodů v okolí dvou vzájemně se obíhajících těles. Jeden z jeho výroků zní: „*U lidí jsem vždy pozoroval, že jejich nároky jsou v opačném poměru k tomu, co si opravdu zaslouží. To je jeden ze základů morálky.*“

**Lie, Marius Sophus (1842–1899)**, norský matematik zabývající se teorií grup a jejímu významu pro geometrii a geometrické transformace. Spolupracoval s Kleinem a Sylowem. Připravil publikaci dosud neznámých prací Abela (také norský matematik) o grupách. Dále se věnoval vlastnostem parciálních diferenciálních rovnic z hlediska symetrií. Zavedl Lieovy grupy a Lieovu algebru. Studoval v Berlíně, kde získal stipendium. Titul PhD obdržel na Univerzitě v Christianě (dnešní Oslo) v roce 1871. V roce 1878 se stal čestným členem Londýnské matematické společnosti, v roce 1892 členem Francouzské akademie věd a v roce 1895 zahraničním členem britské Královské společnosti v Londýně. Téhož roku se stal také členem americké Národní akademie věd.

**Ljapunov, Alexandr Michailovič, (1857–1918)**, ruský matematik, jehož základní práce se týkaly diferenciálních rovnic, teorie potenciálu, stability řešení a teorie pravděpodobnosti. Na jeho počest je pojmenována Ljapunova stabilita: stabilita řešení diferenciálních rovnic vzhledem k perturbaci počáteční podmínky. Z fyzikálních problémů řešil podmínky stability rotující kapaliny. Studoval na Univerzitě v Petěrburku. K jeho učitelům patřil například Čebyšev. Studium zakončil v roce 1880. V roce 1880 obdržel zlatou medaili za práci o hydrostatice. V roce 1895 se stal soukromým docentem a v téže roce vedoucím katedry mechaniky na Univerzitě v Charkově. V roce 1902 se vrátil do Petěrburku. V roce 1917 se s těžce nemocnou manželkou stěhuje do Oděsy. V roce 1918 zemřela jeho žena na tuberkulózu a Ljapunov spáchal téhož dne sebevraždu (střelil se do hlavy). Zemřel na následky zranění o tři dni později.

**Lorenz, Edward Norton (1917–2008)**, americký matematik a meteorolog, průkopník a spoluzakladatel teorie deterministického chaosu. Objevil podivný atraktor a poprvé pro nestabilitu použil termín „motýlí jev“. Vystudoval matematiku na koleji Dartmouth v New Hampshire a na Harvardu. V průběhu druhé světové války předpovídal pro armádu počasí. Po válce vystudoval meteorologii na MIT, kde se později stal profesorem. Vybudoval matematický model pohybu vzdušných mas v atmosféře. Je nositelem mnoha cen a medailí. Je po něm pojmenován Lorenzův podivný atraktor.

**Lotka, Alfred James (1880–1949)**, americký matematik, fyzikální chemik a statistik. Je především znám aplikací fyzikálních postupů v biologii, zejména v pracích o dynamice populace a energetice. Navrhnul známou rovnici popisující vývoj počtu jedinců v systému, který je složen z dravců a kořisti. Nezávisle tuto rovnici odvodil italský matematik Vitto Volterra. Proto se dnes evolučním rovnicím tohoto typu říká Volterrovy-Lotkovy rovnice. Rovnice se využívají i v jiných systémech, kde spolu soupeří dvě skupiny jedinců. Lotka se narodil ve Lvovu na území dnešní Ukrajiny (tehdy Rakousko-Uhersko). Jeho rodiče byli Američané. Studoval v Birminghamu, Lipsku a v Americe na Cornellově univerzitě.

**Newton Isaac (1642–1727)**, je považován za jednoho z nejvýznamnějších vědců v dějinách lidstva. Byl anglickým fyzikem, matematikem, astronomem, filozofem a teologem. Newton položil základy klasické mechaniky ve třech pohybových zákonech (zákon setrvačnosti, zákon síly, zákon akce a reakce). Zákon síly se stal vůbec prvním matematickým nástrojem pro předpověď trajektorie tělesa. K řešení pohybové rovnice (zákona síly) Newton vyvinul

základy diferenciálního a integrálního počtu, nezávisle na něm objevil diferenciální počet Gottfried Leibniz. Pro gravitační interakci navrhl Newton silový předpis, který je dnes znám jako Newtonův gravitační zákon. Platí jak pro pohyby těles na Zemi, tak ve vesmíru. Dále se Newton v mechanice zabýval zákonem zachování hybnosti a momentu hybnosti. Newtonovo pojetí mechaniky používá absolutní prostor a čas. Oba pojmy stojí mimo tělesa a nejsou jimi nijak ovlivňovány. Kompletní základy mechaniky publikoval Newton v roce 1687 v *Principiích* (*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*), jejichž vydání sponzoroval Edmond Halley.

Newtonův zájem nebyl ale soustředěn jen na mechaniku. Zabýval se i optikou. Zkonstruoval zrcadlový dalekohled s okulárem umístěným kolmo na optickou osu přístroje. Pomocí hranolu rozložil světlo na jednotlivé barvy a zabýval se teorií barev. Světlo si představoval, na rozdíl od Huygense, jako proud částic. Dnes víme, že pravdu měli oba, světlo se někdy chová jako vlnění a někdy má částicovou povahu. V matematice Newton zavedl integrální a diferenciální počet, zobecnil binomickou větu a zabýval se numerickým řešením transcendentních a diferenciálních rovnic (tzv. Newtonovo schéma). Newton věnoval mnoho času i alchymii, měl vlastní laboratoř. Většina jeho textů je ovšem věnována náboženským otázkám. Po Newtonovi jsou pojmenovány: Newtonovy pohybové zákony, Newtonovo schéma, Newtonův dalekohled, jednotka síly newton a krátery na Marsu a Měsíci.

**Noether, Emmy (1882–1935)**, německo-americká matematická, která ukázala, že každá symetrie v přírodě je úzce spojena se zákonem zachování. Pracovala v Erlangenu a v Göttingenu s lidmi, jako Felix Klein nebo David Hilbert. Její práce v oblasti teorie invariantů přispěly k výsledné podobě obecné teorie relativity formulované Albertem Einsteinem roku 1916. Emmy Noetherová byla pravděpodobně první žena s akademickým titulem vůbec, neboť habilitace byla do této doby umožněna jen mužům.

**Poisson, Siméon Denis (1781–1840)**, francouzský matematik, fyzik a geometr. Poisson byl Laplaceův student. Zobecnil Laplaceovu rovnici v elektřině a magnetismu o zdrojové členy. Nyní se tato rovnice nazývá Poissonova. Ukázal, že na povrchu vodiče musí být potenciál konstantní. Formuloval teorii povrchových proudů a objemových magnetizací. Posuzoval Fresnelovu práci věnující se difrakci a známé jsou také jeho práce zabývající se pravděpodobností. Studoval École Polytechnique v Paříži. Již po dvou letech studia publikoval dvě vědecké práce a obdržel za ně mimořádné ocenění. Navštěvoval přednášky Lagrange z funkcionální analýzy. Ihned po ukončení studií se stal asistentem, v roce 1802 mimořádným a v roce 1806 řádným profesorem. Od roku 1808 pracoval jako astronom v Bureau des Longitudes. I přes své obrovské vytížení (byl učitelem a zastával mnoho významných funkcí) publikoval více než 300 matematických prací. V teoretické mechanice jsou po něm pojmenovány Poissonovy závorky, v elektřině a magnetismu Poissonova rovnice.

**Pol, Balthasar (1889–1959)**, celým jménem Balthasar van der Pol, holandský fyzik. Van der Pol vystudoval fyziku na Univerzitě v Utrechtu, kde získal v roce 1920 titul PhD. Zabýval se experimenty, zejména šířením elektromagnetických vln. V teoretické oblasti řešil problematiku teorie elektrických obvodů a zabýval se matematickou fyzikou a teorií diferenciálních rovnic. V roce 1935 byl oceněn za své práce medailí IEEE. Jsou po něm pojmenovány van der Polův oscilátor a planetka 10443.

**Rayleigh, John William Strutt (1842–1919)**, anglický baron, který se zabýval fyzikou, akustikou a optikou, zejména šířením vln v tekutinách. V roce 1904 získal Nobelovu cenu za fyziku za izolování inertního plynu argonu. Jeho špatný zdravotní stav mu znemožnil dokončit studia na dvou školách (Eton, Harrow). V roce 1857 započal soukromé čtyřleté studium pod vedením vlastního učitele. V roce 1861 vstoupil na Kolej Trinity v Cambridgi. Studia ukončil v roce 1865. Intenzivně se zabýval Maxwellovou teorií elektromagnetismu, a to jak experimentálně tak teoreticky. V roce 1878 vydal dvoudílný spis *The Theory of Sound*, který se stal základem akustické literatury. Odvodil rovnici popisující závislost rozptylu světla v atmosféře na vlnové délce a vysvětlil tak jako první modrou barvu oblohy. Pokoušel

se také, jako mnozí, odvodit zákon záření absolutně černého tělesa. Jeho vztah (Rayleighův zákon) popisuje správně závislost intenzity záření na vlnové délce pro dlouhé vlnové délky. Pro krátké vlnové délky intenzita diverguje (tzv. UV katastrofa) a zákon neplatí. Pro celé spektrum se podařilo zákon odvodit až Maxu Planckovi v roce 1901. Nobelovu cenu získal za izolování inertního atmosférického argonu. O prvenství tohoto objevu soupeřil s Williamem Ramsayem, který ale započal své práce prokazatelně až po publikování Rayleighových výsledků. Ramsay získal Nobelovu cenu za chemii za dlouholetý výzkum vlastností argonu v témže roce. V teoretické mechanice zavedl Rayleigh disipační funkci, která se používá pro popis ztrát způsobených přeměnou energie na teplo. Tato funkce se nazývá Rayleighova disipační funkce.

**Tonti, Enzo (1935)**, italský teoretický fyzik, narodil se v Milánu, kde v roce 1961 dokončil studia matematiky a fyziky. Poté pracoval na Milánské polytechnice. V roce 1975 se stal profesorem na Milánské státní univerzitě. Od roku 1976 pracuje na Fakultě inženýrství v Terstu. Celý život se zabývá matematickou strukturou fyzikálních teorií. Už jako student byl fascinován analogiemi mezi různými fyzikálními teoriemi. Nejvíce se proslavil pracemi z oblasti variační formulace fyzikálních teorií. Nalezl podmínky, které musí splňovat soustava diferenciálních rovnic, aby ji bylo možné formulovat variačně. Tyto podmínky se nazývají Tontioho podmínky variačnosti.

**Verhulst, Pierre Francois (1804–1849)**, belgický matematik, který se zabýval teorií čísel a diferenciálními rovnicemi. Titul PhD získal na Univerzitě v Ghentu v roce 1825. V roce 1838 objevil logistickou rovnici – nejjednodušší evoluční rovnici, která byla později zobecněna Volterrem a Lotkou. Rovnice popisuje exponenciální růst populace (časová změna je úměrná počtu jedinců) se saturací, za kterou je zodpovědná párová interakce. Jeho práce byly částečně zapomenuty. Hojného využití se dočkaly až 70 let po Verhulstově smrti.

**Volterra, Vito (1860–1940)**, italský matematik a fyzik, který přispěl k aplikaci matematiky do biologických a společenských věd. Nezávisle na Lotkovi zformuloval evoluční rovnice pro dvě bojující skupiny (dravci a kořist). Zabýval se také integrálními rovnicemi. Studoval na Univerzitě v Pise, v roce 1892 se stal profesorem na Univerzitě v Turíně. V období před druhou světovou válkou se odmítl podílet na praktikách nacistického vůdce Benita Mussoliniho. Jsou po něm pojmenovány Volterrovy-Volkovy evoluční rovnice.

**LITERATURA**

- [1] P. Kulhánek: *Úvod do teorie plazmatu*; AGA 2011, ISBN: 978-80-904582-2-2, online verze (obsahuje méně než tištěná verze): <http://www.aldebaran.cz/studium/fpla.pdf>
- [2] M. Brdička, A. Hladík: *Teoretická mechanika*; Academia, Praha 1987
- [3] J. Kvasnica a kol.: *Mechanika*; ACADEMIA, Praha 1988
- [4] L. D. Landau, J. M. Lifšic: *Úvod do teoretické fyziky I* (mechanika, elektrodynamika); ALFA, Bratislava 1980
- [5] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Fyzika; Část 1: Mechanika*; VUTIUM/PROMETHEUS, Brno 2000
- [6] W. Greiner: *Classical Mechanics – Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics*; Second edition, Springer, 2010
- [7] E. Tonti: *Variational Formulations of Nonlinear Differential Equations*; Bull. Sciences Acad. R. de Belgique (1969) pp 137–165, 262–278
- [8] N. J. Cornish: *The Lagrange Points*; Montana State University/NASA, 1999. Online: <http://www.physics.montana.edu/faculty/cornish/lagrange.pdf>
- [9] Thomas Münch: *The Three-Body Problem and the Lagrangian Points*; Umeå Universitet Institutionen för Fysik, 2008. Online: [http://www.tp.umu.se/space/Proj\\_08/T\\_Munch.pdf](http://www.tp.umu.se/space/Proj_08/T_Munch.pdf)
- [10] M. Robnik: *Theory of Adiabatic Invariants*; SOCRATES Lecture Course at the Physics Department, University of Marburg, Germany, 2004. Online: <http://www.camtp.uni-mb.si/socrates/marburg2004/robnik.pdf>
- [11] S. D. Mathur: *The Hamilton-Jacobi Equation*; Ohio State University, 2007. Online: <http://www.physics.ohio-state.edu/~mathur/821hj.pdf>
- [12] P. Kulhánek, J. Maloch: *Inverse Variational Problem for the Rail Plasma Accelerator*; Czech. J. Phys. B37 (1987) 561