IMA01 Úvod do matematiky.
Pomocný text, podzim 2021

Petra Bušková, Helena Durnová, Jana Veseláková, Jan Wossala

24. září 2023

Kapitola 1

Předmluva

Školská matematika na některé děti a studenty může působit jako strašák, to ale zpravidla neplatí pro první třídu a nemuselo by to platit pro celý první stupeň základní školy. Matematika, které se v těchto ročnících vyučuje, není zpravidla označována za nepotřebnou, vždyť na otázku, proč se ve škole učíme matematice, řada lidí odpovídá slovy „abychom si mohli spočítat, kolik nám prodavačka v obchodě má vrátit“. Může se zdát, že v době, kdy se rozmáhá placení kartou, je tento argument poněkud lichý, nicméně je přijímán jako platný.

Čísla pronikla do každodenního jazyka. Dříve bylo jasné, že koupíme-li dva párky, dostaneme čtyři nožičky, dnes naopak musí prodejce zdůrazňovat, že za tu cenu prodává ne jednu nožičku, ale dvě, totiž pár, čili párek. Při výletech po Česku můžeme najít mnoho míst, která mají v názvu číslovku, jako třeba Trojmezí, Třístoličník, nebo Pěticestí na Obr. 1.1.

Obrázek 1.1: Pěticestí — křižovatka lesních cest u Šumperka

Někdy se s čísly můžeme setkat na místech nečekaných, například v názvu časopisu (Obr. 1.2)

S čislovkami se potkávají děti od útlého věku, například v pohádkách (králové mívají tři syny, krkavců bylo sedmero, království nacházíme za devatero horami a devatero řekami), když ukazují, kolik je jim let, když se učí vyjmenovat čtvero ročních období, sedm dní v týdnu či dvanáct měsíců v roce.

Děti se dokonce brzy setkávají s nedesítkovou, totiž šedesátkovou, soustavou a některé v ní také umějí počítat, neboť vědí, že když má hodina 60 minut, pak čtvrt hodiny není 25 minut, ale 15 minut, hodina a půl trvá 90 minut a tak dále.

Poměrně běžně se také setkáváme se slovy, které dnes již nemusíme vnímat jako přesné číslovky: pár znamená dva (ale dnes již ne vždy), vrh tři, tucet 12 (a tedy půltuctu šest), mandel 15, kopa 60 (a půl kopy 30), veletucet pak tucet tuctů, tedy 144 (viz Obr. 1.3). Ve starších knihách najdeme i tabulky pro převody mezi těmito jednotkami (viz Obr. 1.4).

Obrázek 1.2: *Číslo: revue pro umění a kritiku.*

Obrázek 1.3: Staročeské jednotky (autor neznámý, odkoukáno)

Pokud vidí děti doma za oknem teploměr nebo pokud se doma před dětmi mluví o tom, že teplota venku klesla pod nulu, mají za sebou i zkušenost se zápornými čísly.

Matematika se v prvních školních letech rozděluje na dvě významné oblasti: aritmetiku a geometrii. V tomto textu se budeme zabývat zejména aritmetikou.

Věci sčítanlivé.

Balík = 10 rysů = 100 knih = 1000 vrstev = 10000 archů
rys = 10 knih = 100 vrstev = 1000 archů
kniha = 10 vrstev = 100 archů
vrstva = 10 archů

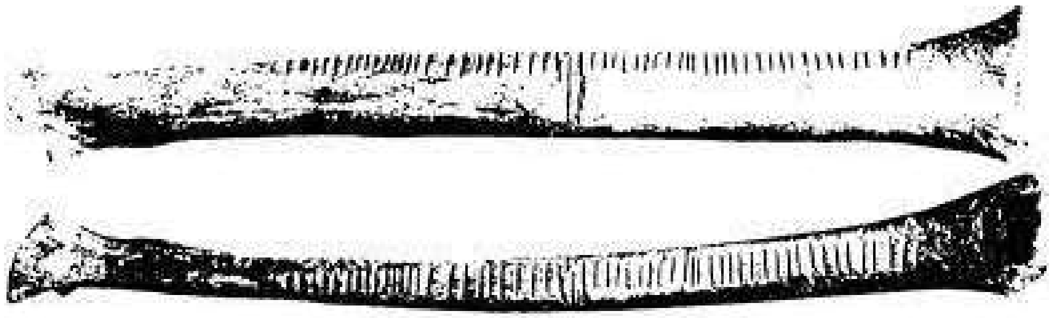
Kopa = 4 mandele = 60 kusů
mandel = 15 kusů
tucet = 12 kusů
vrh = 3 kusy

Obrázek 1.4: Převody staročeských jednotek — tabulka pro převody z historické učebnice

Kapitola 2

Číslo a zápis čísla

Číslo provází lidstvo už od dob paleolitu, jak je vidět z nálezu Karla Absolona z roku 1937.[1] Tehdy totiž při vykopávkách Karel Absolon našel nejen známou Věstonickou venuši, ale také 18 cm dlouhou kost mladého vlka, do níž bylo vyryto 55 zářezů, přičemž každý pátý byl delší. Tento nález je známý jako Věstonická vrubovka a na obrázku ji vidíte ze dvou různých pohledů: Číslo je starší



Obrázek 2.1: Věstonická vrubovka (Folta 1997]

než písmo, a proto bychom mohli tvrdit, že dyskalkulie, tedy nedostatečnost v oblasti počítání s čísly, je horší porucha než dyslexie (viz např. Jonathan Crabtree). Již velmi malé děti jsou například schopny vnímat počty předmětů a rozeznat větší hromádku od menší.

Figurální čísla jsou ta přirozená čísla, která lze vyjádřit pomocí nějakého prostorového útvaru.

Rozeznáváme například čísla

- obdélníková (neboli sudá)
- trojúhelníková (tři, šest, deset, ...)
- čtvercová (neboli druhé mocniny)
- krychlová (neboli třetí mocniny)
- ...

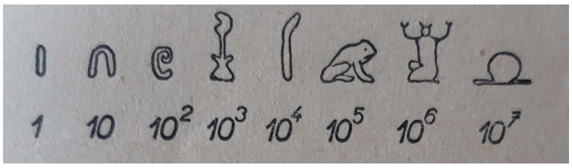
Úkoly pro semináře: Vyskládejte číslo 6 ve tvaru trojúhelníku a další podobné úkoly. Není třeba vyskládávat kamínky (žetony, ...), stačí si např. kreslit puntíky.

[1] Folta, Jaroslav, 1997, Věstonická vrubovka. *Vesmír* 76 (1):310. `https://vesmir.cz/cz/casopis/archiv-casopisu/1997/cislo-6/vestonicka-vrubovka.html`

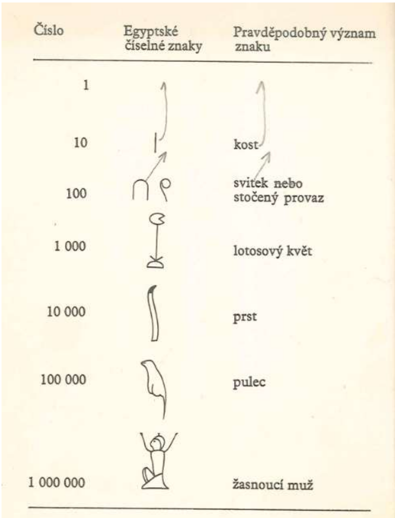
2.1 Zápis čísel ve starších kulturách

Než začneme s čísly počítat, podíváme se, jak se čísla zapisovala dříve.

Ve starověkém Egyptě používali desítkovou soustavu. Z dějepisu možná víte, že ve starověkém Egyptě se používaly nejméně tři druhy písma: hieroglyfy, písmo hieratické a písmo démotické. Na obrázku 2.2 vidíte ukázku číslic používaných ve starověkém Egyptě.



Obrázek 2.2: Číslice používané ve starověkém Egyptě



Obrázek 2.3: Číslice používané ve starověkém Egyptě (zdroj: Milan Jelínek, *Numerační soustavy*).

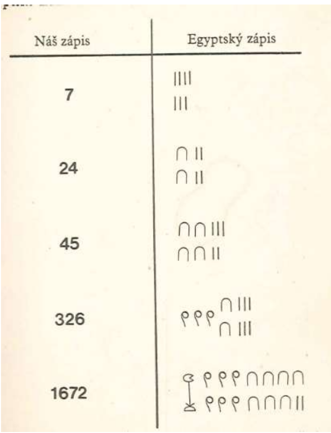
V Mezopotámii (Babylóně) používali klínové písmo. Počítali v šedesátkové soustavě.

Znaky používané v Babylóně se dají odvodit z příkladů uvedených na obrázcích 2.5 a **??**. Mezi babylónskými číslicemi chybí znak pro nulu, a proto tento zápis může označovat jako $30x60^2 + 23 = 108023$ nebo $30x60 + 23 = 1823$. Konkrétní hodnotu lze určit pouze z kontextu, neboť velikost mezery mezi skupinami znaků nemůže označovat (bylo by to nepraktické) počet chybějících řádů.

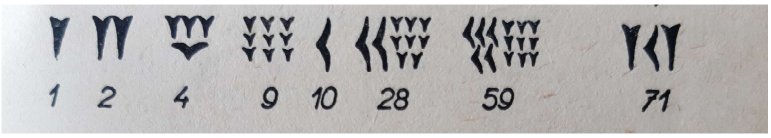
Sumerské číslice V tabulce jsou uvedeny sumerské číslice používané zruba v době 3500 - 2000 př. n. l.

Mayské číslice Čísla vyšší než 20:

Ve starověkém Řecku používali k zápisu čísel znaky pro písmena, jak je naznačeno na obrázku 2.9



Obrázek 2.4: Číslice používané ve starověkém Egyptě (zdroj: Milan Jelínek, *Numerační soustavy*).



Obrázek 2.5: Číslice používané ve starověké Mezopotámii

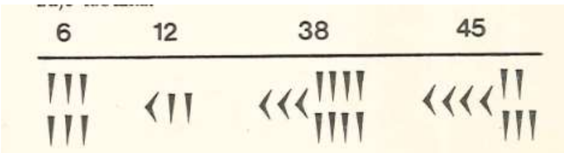
Číslice římské si možná někteří pamatujete ze školy. Používáme je dodnes pro zápis letopočtů. Dříve se v češtině používaly také k označení měsíce v datu, tj. 23. VI. 1912 znamená 23. června 1912. Na základní škole se děti seznamují s římskými číslicemi a učí se je zapisovat. Pamatujete si patrně, že římské číslice jsou (v závorce uvádíme hodnotu čísla zapsanou v číslicích, které dnes běžně užíváme):

I (1)
V (5)
X (10)
L (50)
C (100)
D (500)
M (1000)

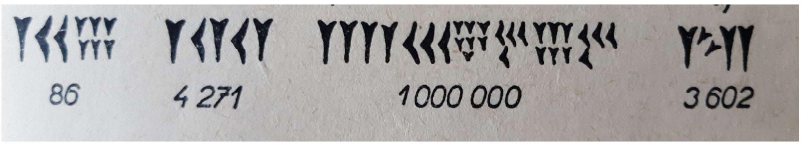
Pokud v zápisu čísla pomocí římsých číslic předchází nižší číslice vyšší, odečítáme hodnotu nižší číslice od nejblíže následující, tj.
IV (4 = 5 - 1)
IL (49 = 50 - 1)
XL (40 = 50 -10)

Není tomu ale vždy tak, viz např. tradiční označení tarokových karet, kde číslo 4 je zapsáno jako „IIII“ („špatně“ vzhledem k pravidlům prezentovaných zpravidla na 1. stupni ZŠ), zatímco 14 jako „XIV“ (podle pravidel uváděných na ZŠ):

Chronogramy v latinských nápisech: V nápisu na kašně „Parnas“ na brněnském Zelném trhu jsou zvýrazněny římské číslice: (M D C L X V I) v pořadí M C I VVLVVIDIVVIX Seřazené podle velikosti MDC LX VV VV VV IIII II dávají prostý součet, tj. 1696, což je rok, kdy byla kašna postavena.



Obrázek 2.6: Číslice používané ve starověké Mezopotámii (zdroj: Milan Jelínek, *Numerační soustavy*).



Obrázek 2.7: Číslice používané ve starověké Mezopotámii — vyšší hodnoty

Ve středověku se u nás počítalo na linách, což si velmi zjednodušeně lze představit jako jakési počítadlo. Výsledky se pak zapisovaly římskými číslicemi.

Liny byly čáry vyznačené na stole nebo vyryté v písku. Jednotlivé řádky od zdola nahoru znázorňují číselné řády (jednotky, desítky atd.) V každém řádku na lince mohou být maximálně 4 kamínky.

Kamínek mezi linkami hodnotu 5 řádku pod ním (tj. kamínek umístěný mezi linkou pro jednotky a desítky označuje pět jednotek, mezi linkou desítek a stovek pět desítek atd.). Mezi linkami může být vždy maximálně jeden kamínek, neboť $5 + 5 = 10$, a my tedy v rámci výpočtu položíme jeden kamínek na linku označující desítky. Sčítání i odčítání je vhodné začínat od nejnižšího řádu (spodní linky).

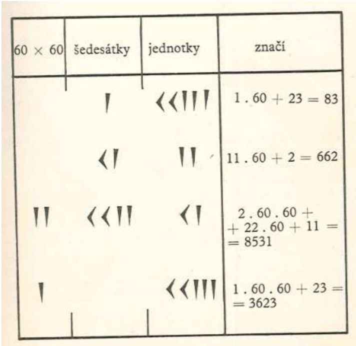
Další příklady lze nalézt například zde:
`http://home.pf.jcu.cz/~math4all/doc/u/H_2_3_Pocitaci_desky.pdf`.

Arabské číslice do Evropy přivezli pravděpodobně italští kupci. Metoda počítání pomocí deseti číslic, 0, 1, ... , 9 se rozšířila, neboť pro toho, kdo ji uměl, byla podstatně rychlejší než počítání na linách nebo na abaku. Této metodě se v Praze v 15. století vyučovalo na univerzitě, dnes se ji zpravidla učí děti na 1. stupni základní školy. Vzhledem k tomu, že je budete učit, bude jistě přínosné si tuto metodu zopakovat, avšak abychom si dokázali představit, co asi prožívají děti, které se tuto metodu učí používat v desítkové soustavě, přeneseme se do soustav, v nichž nám možná nebude tak pohodlně, ale které nám umožní pochopit, na co všechno musí děti dávat pozor.

Algoristé a algoritmus Slovo „algoritmus"vzniklo ze jména arabského učence al Chorezmího (asi 783-850). Dnes označuje obecně nějaký postup, ve 13. a 14. století označoval postupy počítání s tzv. indickými (arabskými) číslicemi, z nichž dnes známe písemné sčítání, odčítání, násobení a dělení. Mezi tyto postupy tenkrát patřily také půlení a zdvojování (všichni víme, že násobení či dělení dvěma je poměrně snadné) a také odmocňování.

Na pražské univerzitě působil na počátku 15. století Křišťan z Prachatic (cca 1370-1439). Je známější jako lékař, což se můžete dozvědět z příslušného krátkého filmu o Křišťanovi z Prachazic z cyklu Dvaasedmdesát jmen české historie:
`http://www.ceskatelevize.cz/porady/10169539755-dvaasedmdesat-jmen-ceskehistorie/208572232200010-kristan-z-prachatic/`

Sepsal také *Algorismus prosaycus*, v němž představil tehdy nový způsob numerace (zápis čísla v dekadické poziční soustavě) a provádění operací sčítání,



Obrázek 2.8: Číslice používané ve starověké Mezopotámii a důležitost velikosti mezer (zdroj: Milan Jelínek, *Numerační soustavy*).

Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ϲ	Ζ	Η	Θ
α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Obrázek 2.9: Zdroj: `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Greek_numbers/`

odčítání, zdvojování, násobení, půlení, dělení a odmocňování (hledání druhé odmocniny z daného čísla). Při pozorném čtení zjistíte, že se jedná o písemné provádění aritmetických operací, které se dnes učí na základní škole. Křišťan tyto operace provádí trošku jinak: u sčítání například na rozdíl od nás rozlišuje mezi číslem, k němuž přičítáme (pasivní) a číslem, které je přičítáno (aktivní). Také si číslice „pasivního“ čísla během výpočtu maže.

Čísla, s nimiž se potkáváme nejen my, ale i předškolní děti v běžném životě, v matematice zařazujeme do různých kategorií, které znáte ze základní a střední školy. Čísla *přirozená* označují počet věcí, osob nebo třeba barev. Na rtuťovém teploměru vidíme nad nulou čísla pod nulou *kladná* a *záporná*; čárky na teploměru označují *čísla celá.* Dělíme-li ovoce, koláč nebo krajíc chleba, jednotlivé části označujeme běžně jako *zlomky*; v matematice jim říkáme *čísla racionální.* Také jste se setkali s čísly iracionálními, jako jsou odmocniny (např. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$ nebo číslo π, které označuje poměr obvodu kruhu k jeho průměru.

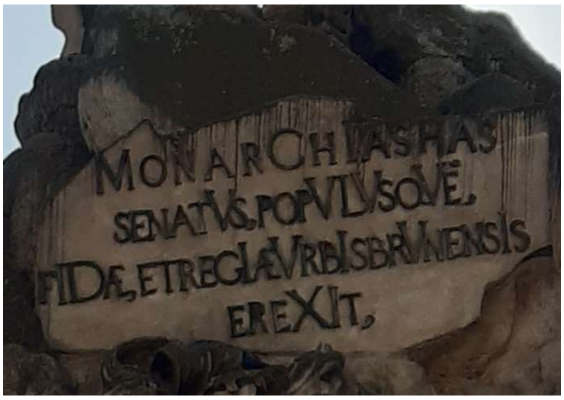
2.2 Úkoly a otázky

1. Setkáváme se dnes se soustavami s jiným základem než 10? S jakým?

2. Znáte nějaké české výrazy pro některá čísla taková, která by se vyskytla v řadě základních číslovek „jedna, dva, tři, ..., devadesát sedm, ... , tři sta patnáct, ...“? (Nápověda: najdete je dnes často v písničkách a pohádkách.)

3. Všimněte si čísel, která se vyskytují v pohádkách. Vypište alespoň sedm různých číslovek a uveďte u každé alespoň jednu pohádku, v níž se vyskytují.

(Bonus) Zkuste najít chronogram (během výletu, v místě bydliště, ...; jeden je např. v rajhradském klášteře). Vypište z něj římské číslice a určete letopočet.



Obrázek 2.10: Kašna na Zelném trhu — detail

Pro inspiraci se můžete podívat na pracovní list společnosti Mensa (`https://deti.mensa.cz/res/f/1-most2000-nest-09-chronogram-pracovni-list.pdf`).

nebo na stránku Mariany Kadlčíkové, věnované chronogramům v Praze (`https://mariannakadlcikova.cz/kdopak-by-se-chronogramu-bal/`).

Chronogramy lze najíte také na stránkách *Encyklopedie knihy*)`https://encyklopedieknihy.cz/index.php/Chronogram_(tištěná_kniha)`). Pokud si uděláte výlet do Týna nad Bečvou, najdete chronogram na náměstí, a pokud se vydáte na výlet na jih od Brna, můžete na chronogram narazit v areálu kláštera v Rajhradě.

(Bonus) Najděte si návod na počítání se sorobanem. návod na počítání se sorobanem např. zde: `http://mathandmultimedia.com/2014/10/17/japanese-abacus/`

Kapitola 3

Poziční číselné soustavy

V této kapitole si nejprve připomeneme, co je to desítková poziční soustava a jak se v ní provádí písemné sčítání, odčítání, násobení a dělení. Poté se přesuneme do jiných soustav, zejména dvojkové, čyřkové, osmičkové, dvanáctkové a šestnáctkové; to proto, abychom se lépe dokázali vžít do toho, co prožívají děti, které se s písemným sčítáním, odčítáním, násobením a dělením teprve seznamují.

3.1 Desítková poziční soustava

Zaměříme se nyní na přirozená čísla a jejich zápis. Na úplném začátku je dobré si připomenout, že náš způsob zápisu — desítková poziční soustava — není jediný možný. V našich očích má například tu výraznou výhodu, že jsme na něj zvyklí. I dnes však používáme i jiný způsob zápisu číslic, zejména římské číslice, a jiné soustavy, zejména šedesátkovou v souvislosti s počítáním času.

Desítková soustava je výhodná také tím, že si ji takříkajíc nosíme stále s sebou: máme deset prstů. Ve prospěch přijetí desítkové soustavy národy napříč kontinenty hovoří právě to, že máme deset prstů na rukou. Mayská dvacítková soustava pak patrně souvisí s tím, že Mayové chodili bosky (a viděli a tedy i mohli počítat i prsty na nohou).

Ve škole se děti dnes již v první třídě učí zapisovat čísla v tzv. *desítkové poziční soustavě*, v níž čísla zapisujeme pomocí deseti číslic, konkrétně to jsou číslice

$$0; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Tehdy se děti také učí rozlišovat mezi číslem (jedna, dva, tři, čtyři, pět, šest, sedm, osm, devět, deset, ..., semnáct, ...) a číslicí.
Číslic rozlišujeme jen deset. Jsou to: *jednička*, *dvojka*, *trojka*, *čtyřka*, *pětka*, *šestka*, *sedmička*, *osmička*, *devítka* a *nula*.

Každá pozice v čísle má své jméno: zprava doleva jsou to jednotky, desítky, stovky, tisíce, atd. Např. číslo 7264 má 7 tisíců, 2 stovky, 6 desítek a 4 jednotky. Podobně víme, že číslice za desetinnou čárkou označují (tentokrát zleva doprava) desetiny, setiny, tisíciny atd.

3.2 Převody mezi pozičními číselnými soustavami o rúzných základech

V dlaším budeme pracovat s číselnými soustavami, ve kterých jsou využívány číslice $0, 1, 2, \dots 9$, v případně potřeby více symbolů využijeme písmena v abecedním pořádku.

Jednoznačnost vyjádření čísla v desítkové poziční soustavě znamená, že dané číslo lze vyjádřit jediným způsobem.

Zamysleme se společně, co to znamená.

Například: číslo sedmnáct *lze zapsat pouze takto:* 17

Dále: je-li odpovědí na úlohu jedno číslo, budou mít děti, které dospěly ke správnému výsledku, tento výsledek zapsaný týmiž číslicemi.

Napadají vás další důsledky této skutečnosti?

Poznámka k označení používanému v dalším textu:
$\mathbb{N}$ označuje přirozená čísla, tedy čísla $1, 2, \ldots$
$\mathbb{N}_0$ označuje přirozená čísla a nulu, tedy čísla $0, 1, 2, \ldots$
$\mathbb{Z}$ označuje čísla celá, tedy $\ldots - 2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

Následující věta — tak, jak je zde věta uvedena — může na laika působit děsivě. Nebojte se jí; je v ní jen pomocí písmen a indexů zapsána tato skutečnosti:

Tvrzení, které platí v desítkové soustavě, lze rozšířit na poziční číselnou soustavu o libovolném základu.

Jinými slovy, **zápis čísla v poziční soustavě o daném základu je v této soustavě jednoznačný**; neboli
dané číslo lze v dané poziční soustavě vyjádřit jediným způsobem.

Z toho mimo jiné vyplývá, že nemůžeme dojít k různým výsledkům.

Věta 3.1 (o jednoznačnosti zápisu v poziční soustavě o daném základu.) Každé přirozené číslo a lze vyjádřit právě jedním zápisem ve tvaru

$$a = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + a_{n-2} \cdot z^{n-2} + \cdots + a^2 \cdot z^2 + a_1 \cdot z^1 + a_0 \cdot z^0,$$

kde číslice jednotlivých řádů $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ jsou přirozená čísla od 0 do $(z - 1)$, přičemž číslice nejvyššího řádu a_n je navíc nenulová. Dále platí, že základ z je libovolné přirozené číslo větší než 1.

Tyto skutečnosti lze formálně zapsat takto:

$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{N}$,

$0 \leq a_i < z$ pro $i = 0, 1, \ldots\ n - 1$ a $0 \leq a_n \leq z$,

$1 < z, z \in \mathbb{N}$.

Význam označení použitého v předchozí větě:

z - základ číselné soustavy

a_i - číslice i-tého řádu

z^i - jednotka i-tého řádu

Zápis uvedený v předchozí větě se nazývá *rozvinutý zápis čísla a v číselné soustavě o základu z,* zkráceně zapisujeme takto:

$$a = (a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0)_z$$

či dokonce takto, tedy bez závorek:

$$a = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_{0_z}$$

Poslední variantu budeme používat ve výpočtech i v zadáních následujících úloh.

Příklad 1 Zapište čísla rozvinutým zápisem v dané soustavě:

$a = 3765_{10}$

$b = 201_6$

Řešení:

$a = 3765_{10} = 3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$

$b = 201_6 = 2 \cdot 6^2 + 0 \cdot 6^1 + 1 \cdot 6^0$

Jedním z důsledků Věty 3.1 je skutečnost, že pro zapsání jakéhokoli přirozeného čísla v číselné soustavě o základu z potřebujeme právě z symbolů. Těmito symboly jsou pro $z \leq 10$ jednotlivé číslice, například pro $z = 3$ využíváme číslice $0, 1, 2$.

Pro soustavy o základu vyšším než 10 si musíme poradit jinak: volíme za další symboly postupně písmena abecedy (bez háčků). Tedy pro $z = 16$ (šestnáctková soustava) využíváme k zapsání čísla symboly

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F,$$

přičemž písmeny abecedy odpovídají po řadě dalším číslům, tedy $A = 10$, $B = 11$, $C = 12$, atd.

Pro $z = 12$ (dvanáctková soustava) využíváme k zapsání čísla symboly

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B.$$

Hodnoty číslic A a B odpovídají těm ze šestnáctkoé soustavy: $A = 10$, $B = 11$.

Stojí za povšimnutí, že v číselné soustavě o základu z má nejvyšší použitelná číslice (symbol) hodnotu $z - 1$, tedy například v čísle vyjádřeném v číselné soustavě o základu $z = 8$ se nikdy neobjeví číslice 8.

Příklad 2 Zapište čísla rozvinutým zápisem v dané soustavě.

(a) $a = 5D7_{16} =$

(b) $b = BA5_{12}$

Řešení:

(a) $a = 5D7_{16} == 5 \cdot 16^2 + D \cdot 16^1 + 7 \cdot 16^0$

(b) $b = BA5_{12} = B \cdot 12^2 + A \cdot 12^1 + 5 \cdot 12^0$

Slovní úlohy o zápisech čísel v desítkové pozíční soustavě

Příklad 3 Trojciferné číslo zapsané v desítkové soustavě je zakončeno číslicí 4. Přesuneme-li ji na první místo a ostatní dvě číslice ponecháme beze změny, dostaneme číslo, které je o 81 menší než původní číslo. Určete původní číslo.

Řešení:
Původní číslo:

$$xy4 = x \cdot 10^2 + y \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

Nové číslo:

$$4xy = 4 \cdot 10^2 + x \cdot 10^1 + y \cdot 10^0$$

Platí: $xy4 - 81 = 4xy$

$$x \cdot 10^2 + y \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 - 81 = 4 \cdot 10^2 + x \cdot 10^1 + y \cdot 10^0$$

$$100x + 10y - 77 = 400 + 10x + y$$

$$10x + y = 53$$

Víme, že x a y jsou jednociferná přirozená čísla, zkoušíme tedy možnosti:
je-li $x = 1$, pak $y = 43$,
je-li $x = 2$, pak $y = 33$,
je-li $x = 3$, pak $y = 23$,
je-li $x = 4$, pak $y = 13$,
je-li $x = 5$, pak $y = 3$.

Hodnoty $x = 1$ až $x = 4$ nepřicházejí v úvahu, neboť y nemůže být dvojciferné.

Navíc x nemůže nabývat hodnoty $x = 6$ ani hodnot vyšších, neboť pak by muselo být y záporné. Hledané číslo je tedy 534.

Příklad 4 Které dvojciferné číslo zapsané v desítkové soustavě se po vzájemné záměně cifer zmenší o 36?

Výsledek:
Takových čísel existuje více, jsou to čísla 40, 51, 62, 73, 84 a 95.

Typy úloh: převody mezi soustavami

V následujícím textu představíme typy úlohy, v nichž převádíme zápis přirozeného čísla z jedné soustavy do jiné. V následujícím seznamu jsou tyto typy seřazeny od nejjednoduššího k nejobtížnějšímu a v tomto pořadí jsou také zahrnuty v následujícím textu.

- Převod ze soustavy o základu $z \neq 10$ do desítkové soustavy;
- Převod z desítkové soustavy do soustavy o základu $z \neq 10$;
- Převod ze soustavy o základu $z \neq 10$ do soustavy o základu $z = 10$.

Převod ze soustavy o základu $z \neq 10$ do desítkové soustavy.

Převod budeme provádět s využitím věty **??**, číslo v původní číselné soustavě zapíšeme pomocí rozvinutého zápisu a následně spočítáme hodnotu v desítkové soustavě.

Příklad 5 Převeďte číslo zapsané v nedesítkové soustavě do desítkové:

(a) 10201_3

(b) 175_8

(c) $A5C_{16}$

Řešení:

(a) $10201_3 = 1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 = 81 + 0 + 18 + 0 + 1 = 100_{10}$

(b) $175_8 = 1 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = 64 + 56 + 5 = 125_{10}$

(c) $A5C_{16} = A \cdot 16^2 + 5 \cdot 16^1 + C \cdot 16^0 = 10 \cdot 16^2 + 5 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0 = 2560 + 80 + 12 = 2652_{10}$

Příklad 6 Převeďte do zápisu v desítkové soustavě.

(a) 3012_4

(b) 7001_5

(c) 11001_2

(d) $AB0_{12}$

(e) $70D_{15}$

Výsledky: a) 198_{10}; b) 876_{10}; c) 25_{10}; d) $1572_{10;}$, e) 1588_{10}.

Převod z desítkové soustavy do soustavy o základu $z \neq 10$.

U těchto převodů používáme tři metody, které si na následujících stranách vysvětlíme:

- graficky (seskupováním);
- postupné dělení základem;
- dělení mocninami základu.

I. Metoda grafická

Grafická metoda je vhodná pro malá čísla uvádíme ji zejména pro objasnění podstaty převodu. Druhé dvě metody samozřejmě dávají stejné výsledky a jsou rovnocenné.

Tip: Pokud vám výrazně více vyhovuje jedna z metod (postupné dělení základem a dělení mocninami základu) než ta druhá, soustřeďte se na plné pochopení této metody a pak teprve se snažte proniknout do té druhé.

Příklad 7 Zapište číslo $a = 16_{10}$ v soustavě o základu $z = 3$.

Řešení:

Zakreslíme 16 stejných symbolů (např. koleček) do nejvýše tří řádků (hledáme vyjádření čísla v soustavě o základu $z = 3$).

Počet symbolů v neúplném sloupečku označuje číslici řádu jednotek (nultého řádu) pro zápis daného čísla ve trojkové soustavě. Pokud jsou všechny sloupečky úplné, je na posledním místě číslice 0.

V dalším kroku zjistíme, kolik „trojic trojic“ můžeme najít, neboli kolik trojici sloupečků po třech symbolech v obrazci je.

Počet sloupců (trojic) nezahrnutých v žádné „trojici trojic“ označuje číslici prvního řádu (tj. řádu trojic).

V následujících krocích opět seskupujeme vzniklé útvary do trojic, tedy v jednom takovém útvaru bude 27 symbolů. Počet „trojic trojic“ udává číslici druhého řádu (tj. řád devítek).

Takto bychom mohli pokračovat dál, dokud by bylo možné vytvářet trojice.

`vloz obrazek graficke metody`

V našem případě tedy dostáváme $1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 121_3$

Příklad 8 *Zapište číslo a v soustavě o základu z, využijte grafickou metodu.*

(a) $a = 14_{10}, z = 2$

(b) $a = 31_{10}, z = 4$

(c) $a = 17_{10}, z = 12$

Výsledky: a) 1110_2, b] 133_4, c) 15_12.

Než si ukážeme další metody, připomeňme, že ze základní školy víme, že ze zápisu čísla v desítkové soustavě poznáme, čím je dané číslo dělitelné. Poznáme tak dělitelnost deseti, stem, dvěma, pěti, ale také třemi nebo devíti. Tato pravidla si zopakujeme v poslední části tohoto textu, v kapitole nazvané *Dělitelnost.*

Tato pravidla se nedají vždy jednoduše převést do soustav o jiném základě. Podíváte-li se na to, jak jdou po sobě čísla v trojkové soustavě, můžete si všimnout, že některá sudá čísla mají při zápisu v trojkové soustavě na posledním místě lichou číslici a naopak. Například číslo 5 je liché, ale jeho ciferný zápis v trojkové soustavě 12_3 končí číslicí 2. 7 je liché a jeho zápis v trojkové soustavě 21_3 končí číslicí 1.

Sudost a lichost je vlastnost čísla: sudá čísla jsou obdélníková, lichá nikoliv. Pravidlo, že poslední číslice sudého čísla je sudá, platí však pouze v soustavách se sudým základem.

`VLOŽ OBRÁZEK`

`FIGURÁLNÍ ČÍSLA`

Co znamená nula na konci? Číslo dělitelné deseti poznáme v desítkové soustavě tak, že má na posledním místě nulu. Podobně číslo dělitelné osmi zapsané v soustavě o základu osm poznáme tak, že na místě jednotek má nulu.

II. Metoda postupného dělení základem

začíná tím, že číslo, které převádíme, vydělíme novým základem. Zbytek po tomto dělení určuje počet jednotek daného základu. Například převádíme-li číslo 5 z desítkové soustavy do trojkové, při prvním dělení $5 : 3 = 1$ dostáváme: zbytek 2. Poslední číslicí čísla pět v trojkové soustavě je tedy 2.

V dalším kroku dělíme výsledek dělení (v našem případě 1) novým základem. Tedy $1 : 3 = 0$ zbytek 1. Další číslicí zprava je tedy číslice 3. Tento krok odpovídá seskupováním trojic po třech: v čísle pět je trojice jen jedna, takže žádnou trojici trojic nelze vytvořit. Tím převod čísla 5 do trojkové soustavy končí.

Obecně vidíme, že jakmile je výsledkem dělení číslo nula, metoda postupného dělení základem končí. Při opakování postupu bychom totiž dostali už jedině podíl nula a zbytek nula.

Zbývá vysvětlit, odkud a proč vyčteme zápis čísla v soustavě s novým základem. Z výkladu o grafické metodě lze odvodit, že výsledný zápis tvoří číslice označující jednotlivé zbytky po dělení, a to tak, že zbytek po prvním dělení určuje první číslici vpravo a další zbytky postupně další číslice v řadě, tedy zprava doleva.

Příklad 9 Zapište číslo $a = 19_(10)$ v soustavě o základu $z = 3$.

Řešení:

Dělíme zadané číslo základem a zapíšeme zbytek. Následně dělíme výsledky předchozího dělení základem a zapisujeme zbytky tak dlouho, až dostaneme podíl 0:
19 : 3 = 6, zbytek 1
6 : 3 = 2, zbytek 0
2 : 3 = 0, zbytek 2

Výsledek získáme jako zápis zbytků od konce, tedy $19_10 = 201_3$.

Příklad 10 Zapište číslo a v soustavě o základu z, využijte metodu postupného dělení základem

(a) $a = 102_{10}, z = 8$

(b) $a = 12\ 477_{10}, z = 16$

(c) $a = 197_{10}, z = 12$

Výsledky: a) 146_8; b) $3\ 0BD_{16}$; c) 145_{12}

III. Metoda dělení mocninami základu

Příklad 11 Zapište číslo $a = 17_{10}$v soustavě o základu $z = 3$.

Řešení:

Dělíme postupně mocninami nového základu (snižujeme exponent), až dostaneme zbytek 0.

Mocniny základu 3 jsou následující:

$$3^0 = 1$$

$$3^1 = 3$$

$$3^2 = 9$$

$$3^3 = 27$$

atd.

Nejvyšší vhodná mocnina základu je druhá (hodnota 27 se do čísla 17 nevejde):
$17 : 3^2 = 1$ zb. 8
$8 : 3^1 = 2$ zb. 2
$2 : 3^0 = 2$ zb. 0

Z výpočtu je vidět, že můžeme psát:

$$17 = 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 122_3$$

Příklad 12 Zapište číslo a v soustavě o základu z, využijte metodu dělení mocninami základu.

- $a = 9_{10}, z = 2$
- $b = 561_{10}, z = 4$
- $c = 280_{10}, z = 12$

Výsledky: $a = 1001_2$, $b = 20301_4$, $c = 1B4_{12}$

Převod z nedesítkové soustavy do jiné nedesítkové soustavy

Tento převod je nejobtížnější, neboť ho ve většině případů nemůžeme provést přímo. Zpravidla musíme využít nepřímý převod, což je vlastně kombinace dvou převodů: nejprve provedeme převod z původní nedesítkové soustavy (se základem $z \neq 10$) do desítkové soustavy a poté převod čísla z desítkové soustavy do cílové nedesítkové soustavy (se základem $z' \neq 10$). Dále se tomuto typu příkladů nebudeme příliš věnovat, neboť se jedná pouze o využití postupů pro převod z nedesítkové do desítkové soustavy (provedeme rozepsáním) a z desítkové do nedesítkové (metodou postupného dělení základem nebo metodou dělení mocninami základu).

Výše uvedený postup si můžeme zkrátit v případech, kdy je jeden základ nějakou mocninou toho druhého, což lze symbolicky zapsat jako $z' = z^n$ (pro případa, kdy je nový základ mocninou původního) nebo $z = (z')^n$ (pro případ, kdy je původní základ mocninou nového). V takových případech s výhodou provádíme *přímý převod mezi soustavami*.

Myšlenku přímého převodu si osvětlíme na příkladu převodu z dvojkové do čtyřkové soustavy. Spočívá především v uvědomění si, že pro zápis libovolné cifry ve čtyřkové soustavě potřebujeme nejvýše dvakrát tolik cifer dvojkové soustavy. Pokud před příslušné cifry doplníme nuly podle potřeby, budeme pro každou cifru zápisu ve čtyřkové soustavě potřebovat právě dvě cifry dvojkové soustavy.

V následujících příkladech převeďte dané číslo zapsané v soustavě o základu z do soustavy o základu z'.

Příklad 13 (Převod z dvojkové soustavy do čtyřkové)
$a = 11000110_2$ a nechť nový základ $z' = 4$, tedy $z' = z^2$

Protože nový základ je druhá mocnina původního základu, rozdělíme původní zápis čísla od konce na skupiny po dvou cifrách. Počet skupin cifer určuje počet cifer v zápisu čísla ve čtyřkové soustavě.
$a = 11000110_2$

$$11000110_2 = 11_2 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 =$$

$$= (2 + 1) \cdot 4^3 + (0 + 0) \cdot 4^2 + (0 + 1) \cdot 4^1 + (2 + 0) \cdot 4^0 = 3012_4$$

Podívejme se, jaké cifry ve čtyřkové soustavě odpovídají dvojicím cifer dvojkové soustavy:

$10_2 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 2_4$
$01_2 = 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1_4$
$00_2 = 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 0_4$
$11_2 = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 3_4$

Dohromady vypadá zápis takto: $11000110_2 = 3012_4$

Provedeme zkoušku: $11000110_2 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 == 2^6 \cdot (1 \cdot 2 + 1) + 2^4 \cdot (0 \cdot 2 + 0) + 2^2(0 \cdot 2 + 1) + 2^0(1 \cdot 2 + 0) == 3 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 = 3012_4$

Příklad 14 (Převod ze soustavy osmičkové do dvojkové)
$b = 1635_8$ a nechť nový základ $z' = 2$, tedy $z = z'^3$

Postupujeme způsobem v jistém smyslu opačným než v předchozím příkladu. Nyní využijeme toho, že každá z cifer v osmičkové soustavě odpovídá třem (osmička je třetí mocnina dvojky) cifrám ve dvojkové soustavě.
$5 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
$3 = 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
$6 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
$1 = 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
Nuly na začátku čísla nemá smysl psát, získáváme výsledek: $1635_8 = 1110011101_2$

Příklad 15 Převeďte číslo a zapsané v soustavě o základu z do soustavy o základu z':

(a) $a = 11010110_2$, $z' = 8$

(b) $b = 2311_4$, $z' = 2$

Výsledky: (a) 326_8,; (b) 10110101_2

Příklad 16 Vytvořte si tabulku prvních dvaceti čísel v číselných soustavách o základech 2, 3, 4 a 12.

Příklad 17 Dvojciferné číslo zapsané v desítkové soustavě má ciferný součet rovný číslu 9. Jestliže spolu číslice zaměníme, dostaneme nové číslo, které je o 45 větší než původní. Určete původní číslo.

Výsledek: 27

Příklad 18 Které dvojciferné číslo zapsané v desítkové soustavě se po vzájemné výměně cifer zvětší o 37?

Odpověď: Takové číslo neexistuje.

Příklad 19 Vypočítejte základ z číselné soustavy, platí-li $243_z = 99_10$.

Řešení:

Nejprve si rozepíšeme číslo 243_z, následně vyřešíme vzniklou kvadratickou rovnici v desítkové soustavě: $243_z = 2 \cdot z^2 + 4 \cdot z^1 + 3 \cdot z^0$
$2 \cdot z^2 + 4 \cdot z^1 + 3 \cdot z^0 = 99$
$2 \cdot z^2 + 4 \cdot z - 96 = 0$
$z^2 + 2 \cdot z - 48 = 0$
$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4 \cdot 48}}{2} = -1 \pm 7$

Jak je vidět, kořeny vychází $z_1 = 6, z_2 = -8$. Protože základ číselné soustavy musí být kladný, existuje jediné řešení, a to $z = 6$.
Zkusme ověřit: $243_6 = 2 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6^1 + 3 \cdot 6^0 = 99$.

Příklad 20 Vypočítejte základ z číselné soustavy.

(a) $21_z = 9_10$

(b) $120_z = 35_10$

(c) $222_z = 42_10$

Výsledky: (a) 4, (b) 5, (c) 4.

3.2.1 Početní výkony v číselných soustavách

Než začneme s početními výkony, zopakujte si, jak jdou za sebou čísla v různých číselných soustavách. Pomoci Vám může tabulka počítání po jedné v pozičních soustavách o různých základech.

`VLOŽIT TABULKU`

Určení předchůdce a následovníka

Když se malé děti učí počítat, brzy si osvojí, že po 9 následuje 10, po 19 následuje 20, po 99 následuje 100 a po 999 následuje 1000. Často se naučí také počítat pozpátku a vědí, že číslu 100 předchází číslo 99 a podobně.

Podobně postupujeme v nedesítkových soustavách: při hledání následovníka číslo o jedničku zvětšujeme, při hledání předchůdce o jedničku zmenšujeme. Problém nastává tehdy, je-li poslední číslice rovna 0 (při hledání předchůdce) nebo $z - 1$ (při hledání následovníka).

Příklad 1: Určete předchůdce a následovníka čísla v dané číselné soustavě.
pro číslo 99_10 je předchůdcem číslo 98_10 a následovníkem číslo 100_10

V sedmičkové soustavě má číslo $166_7 = 1 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^1 + 6 \cdot 7^0$
předchůdce 165_7 a následovníka 200_7

- 33203_4
- 1100101_2
- 777_8
- $AB00_16$

Výsledky: c) p: 33202_4, n: 33210_4 d) p: 1100100_2, $n : 1100110_2$ e) p: 776_8, n: 1000_8 f) p: $AAFF_16$, n: $AB01_16$

Sčítání

Sčítání je operace, jejímž výsledkem je *součetl.* Čísla, která do operace vstupují, nazýváme *sčítance.* Mezi sčítanci nerozlišujeme, neboť záměnou sčítanců se výsledek nezmění; zpravidla jse však jednodušší přičítat menší číslo k většímu.

Sčítání v desítkové soustavě provádějí žáci již od prvního ročníku základní školy. Ve třetím ročníku základní školy se mohou seznámit se způsobem, jak sčítat efektivně velká čísla. Říkáme mu *písemné sčítání.* Postupujeme při něm zprava doleva, tedy od číslic označujících jednotky k číslicím označujícím vyšší řády.

Pokud součet číslic sčítanců v řádu jednotek nepřesáhne devět, je tento výsledek přímo číslicí výsledku na pozici jednotek.

Pokud je součet těchto číslic mezi 10 a 18 (včetně; rozmyslete si, že součet dvou cifer nemůže dát výsledek větší než 18), je v součtu na místě jednotek odpovídající počet jednotek, přičemž desítka ze součtu jednotek se převádí do řádu desítek tak, že k součtu číslic na místě desítek přičteme jedničku.

Analogicky postupujeme v dalších řádech.

Příklad 3: Sečtěte písemně.
$5274_8 + 756_8$
$425_7 + 562_7$
$BDF_16 + BCA_16$
$A1B2_16 + F3E4_16$

Výsledky: a) 6252_8, b) 1320_7, c) $17A9_16$, d) 19596_16.

Odčítání

Odčítání je operace, jejímž výsledkem je *rozdíl.* Čísla, která do operace vstupují, nazýváme *menšenec* (tj. číslo, od něhož odčítáme) a *menšitel* (tj. číslo, které odčítáme.

Odčítání v desítkové soustavě provádějí žáci již od prvního ročníku základní školy. Ve třetím ročníku základní školy se mohou seznámit se způsobem, jak odečítat efektivně velká čísla. Říkáme mu *písemné odčítání.* Během něho odečítáme nejprve jednotky od jednotek. Postup je jednoduchý, jsou-li všechny cifry (číslice) menšence větší nebo rovny cifrám (číslicím) menšitele na odpovídajících místech. Není-li tomu tak, postupujeme tak, že si „vypůjčíme“ u menšence jednu jednotku vyššího řádu, kterou v následujícím kroku „vrátíme“ (buď zvýšením příslušné cifry u menšitele, a nebo snížením příslušné cifry u menšence).

Opakování: odečtěte písemně v desítkové soustavě:.
754 − 235
3482 − 543
3497 − 1088
2876 − 987
Výsledky si zkontrolujte na kalkulačce.

Příklad 5: Odečtěte pod sebou.
$354_7 - 135_7$
$3412_6 - 543_6$
$3412_{16} - 543_{16}$
$A1B2_{12} - 3AA_{12}$
Výsledky: a) 216_7, b) 2425_6, c) $2ECF_16$, d) $9A04_12$.

Násobení

Násobení je operace, jejímž výsledkem je *součin.* Čísla, která do operace vstupují, nazýváme *činitelé.* Nerozlišujeme mezi nimi, neboť násobení čísel je komutativní operace, avšak při písemném násobení, které si za chvíli představíme, je lepší, je-li v pořadí druhý činitel menší.

Malou násobilku se žáci učí nejpozději ve třetí třídě základní školy. Po zvládnutí písemného sčítání a odčítání a malé násobilky mohou začít také písemně násobit.

Písemné násobení je náročnější než sčítání a odčítání. Začněme násobením jednociferným číslem: tímto číslem vynásobíme zprava, tedy od řádu jednotek, po řadě všechny číslice druhého činitele. Pokud je výsledek násobení menší nebo roven devíti, napíšeme tuto číslici jako součást výsledku; pokud je tento výsledek mezi 10 a $81 (= 9 \cdot 9)$, zapíšeme pouze jednotky a číslici, která je na místě desítek, přičteme k výsledku násobení s následující číslicí.

Pokud je druhý činitel dvouciferný, provedeme výše popsanou operaci nejprve s číslicí označující jednotky a poté s číslicí označující desítky, přičemž výsledky násobení číslicí označující desítky píšeme zprava doleva tak, že první výsledek napíšeme pod místo desítek čísla, kterým násobíme. Oba výsledky sečteme. Analogicky postupujeme v případě, že je druhý činitel trojciferný a víceciferný.

Stejným způsobem počítáme i v číselných soustavách s jiným základem.

Opakování: Vynásobte písemně čísla v desítkové soustavě:
$754 \cdot 3$
$3482 \cdot 21$
$3497 \cdot 53$
$2876 \cdot 251$
Výsledky si zkontrolujte na kalkulačce.

Příklad 6: Vynásobte.
$325_8 \cdot 5_8$
$124_8 \cdot 7_8$
$1636_8 \cdot 21_8$
$2A4_{16} \cdot 8_{16}$

Příklad 7: Vynásobte.
$100101_2 \cdot 1011_2$
$3204_6 \cdot 513_6$

$92_{1}2 \cdot 35_{1}2$
$106_{1}2 \cdot 48_{1}2$

Výsledky: a)110010111_2, b) 2533300_6, c) $273A_{1}2$, d) $4A88_{1}2$.

Dělení

Dělení je operace, jejímž výsledkem je *podíl*. Čísla, která do operace vstupují, nazýváme *dělenec* (číslo, které dělíme) a *dělitel* (číslo, kterým dělíme).

Aby žáci mohli začít dělit, potřebují znát (malou) násobilku tak trochu „z druhé strany", neboť potřebují odhadnout, kolikrát se přibližně dělitel „vejde" do dělence. Často se navíc budeme v příkladech setkávat s dělením se zbytkem, např. $16 : 3 = 5$, zbytek po dělení je 1. V případě, že se dělitel nevjde do dělence beze zbytku, mluvíme o výsledku jako o *neúplném podílu* a o operacit jako o *dělení se zbytkem*.

Písemné dělení je nesrovnatelně náročnější než písemné násobení, a to zejména proto, že u dělení musíme vždy provádět odhad (kolikrát se dělitel vejde do dělence), který poté (v případě, že jsme se spletli) korigujeme. U žádné z předchozích operací (sčítání, odčítání a násobení) jsme žádné korekce neprováděli, neboť to nebylo nutné; u dělení je zkouška nezbytná.

Opakování: vydělte v desítkové soustavě:
$13249 : 9 = 1472$, zbytek 1

Stejným způsobem počítáme i v číselných soustavách s jiným základem.

Příklad 8: Vydělte.
Zkouška:
Příklad 7: Vydělte.
$1002_3 : 2$ $3204_6 : 4$ $4B06_{1}2 : 7$ $10A_{1}2 : 9$
Výsledky: a) 112_3 (zb. 1), b) 501_6, c) $852_{1}2$ (zb. 4), d) $15_{1}2$ (zb. 1).

3.2.2 Cvičení: operace v číselných soustavách

Příklad 8: Vypočítejte.
$534042_6 + 343445_6$
$1011011_2 - 11001_2$
$42110_5 - 2103_5$
$2330_4 - 103_4$
$534042_6 - 343445_6$
$1011011_2 \cdot 11001_2$
$2330_4 \cdot 103_4$
$42110_5 \cdot 2103_5$
$4504_6 \cdot 121_6$
$212011_3 \cdot 2_3$
$2330_4 : 3_4$
$40432_5 : 3_5$
$12345013_6 : 5_6$

Pro legraci: `https://www.youtube.com/watch?v=UIKGV2cTgqA`